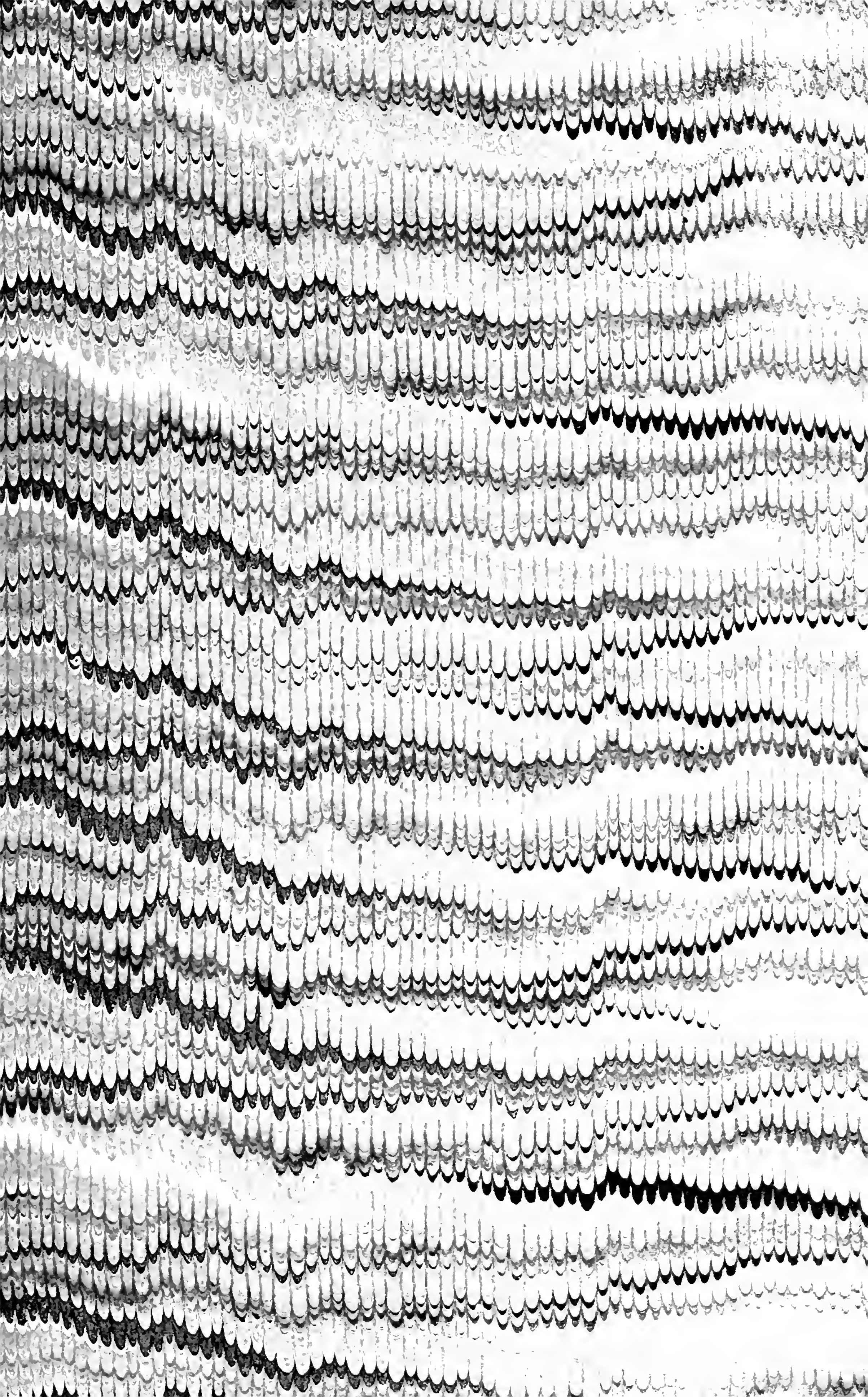








LEHRBUCH

ZUR

BAHNBESTIMMUNG

DER

KOMETEN UND PLANETEN

VON

THEODOR R. v. OPPOLZER,

DR. MED., K. K. REGIERUNGSRATHE UND PROFESSOR DER ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

ZWEITER BAND.

LEIPZIG,

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1880.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

VORREDE.

Es sind nahe zehn Jahre seit dem Erscheinen des ersten Bandes meines Lehrbuches verflossen und erst jetzt folgt der zweite Band; ich glaube nicht, dass diese Verzögerung demselben zum Nachtheile gereicht hat. Vergleiche ich mit dem vorliegenden Bande meine damals gemachten Entwürfe, so findet sich fast keine Spur der ursprünglichen Ausarbeitung erhalten; während diese fast einen kompilatorischen Charakter zeigte, bringt jener mehrfach Neues und Besseres. Dieser Umstand bedingt auch eine gewisse Ungleichförmigkeit in der Bearbeitung der beiden Bände; ich würde Vieles an meinem ersten Werke zu ändern und zu verbessern haben, um dasselbe dem vorliegenden anzupassen.

Mit diesem zweiten Bande ist das von mir nach dem ursprünglichen Plane für das vorliegende Lehrbuch in Aussicht genommene Material erschöpft; allerdings hätte ich gern noch einige Kapitel näher ausarbeiten und einige Zusätze machen wollen; ich zähle zu diesen die Auseinandersetzung der allgemeinen Störungen und eine eingehende Behandlung der Methoden zur Bestimmung der speciellen Störungen für die periodischen Kometen, doch wäre dadurch der ohnehin über Gebühr herangewachsene zweite Band nahe um die halbe Bogenzahl stärker geworden. Ich musste daher auf die Aufnahme dieser Kapitel verzichten; übrigens wird die Bearbeitung der periodischen Kometen nach den hier zum Vortrage gebrachten Methoden ohne Schwierigkeit durchführbar sein.

Bei der Herstellung des vorliegenden Werkes war ich vielfach unterstützt durch die werkthätige Hilfe einiger jüngerer Astronomen,

die mit seltener Ausdauer und mit hervorragendem Geschick sich an der Ausführung der Beispiele, der Rechnung der beigegebenen Tafeln und insbesondere bei der mühevollen Korrektur des Druckes betheiligten; es sind diess die Herren Ferdinand Anton und Robert Schram, beide Observatoren der k. k. österr. Gradmessung, der Assistent an demselben Institute Herr Franz Kühnert und Herr F. K. Ginzel. Ich kann es nicht unterlassen den Genannten an dieser Stelle meinen wärmsten Dank auszusprechen.

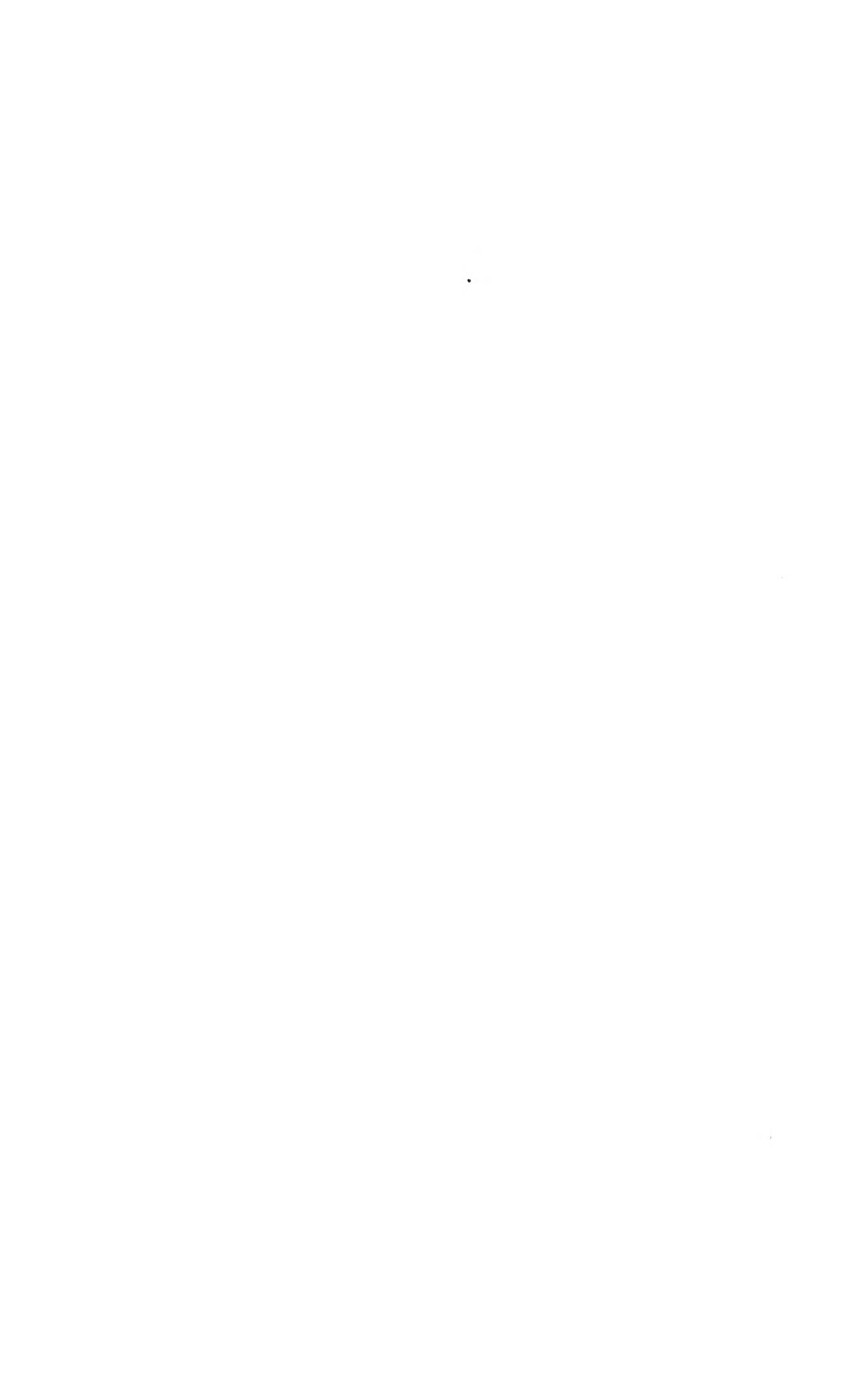
Keines der vielen Zahlenbeispiele des vorliegenden Werkes ist unkontrolirt geblieben; in der Regel habe ich für die Beispiele die erste Rechnung durchgeführt und einer der genannten Herren hat dieselbe unabhängig wiederholt; hierbei galt als Regel, die letzte Stelle der Rechnung entsprechend den angewandten Hilfsmitteln völlig sicher zu stellen.

Eine besondere Sorgfalt wurde auf die korrekte Herstellung des Satzes verwandt; es wird sich dadurch dieser Band gewiss sehr vortheilhaft seinem Vorgänger gegenüber auszeichnen; trotzdem sind im Texte und in den Formeln einige Fehler stehen geblieben, die ich, soweit mir dieselben bekannt geworden sind, in das am Schlusse aufgeführte Fehlerverzeichniss aufgenommen habe; eine Berichtigung der erheblicheren Fehler wäre vor dem Gebrauche des Werkes jedenfalls zu empfehlen. Die Zahlenangaben der Tafeln werden sich wohl durchwegs korrekt erweisen innerhalb der im Texte näher bezeichneten Genauigkeitsgrenzen.

Wien im November 1879

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.



Berichtigungen zum II. Bande von Oppolzer's Lehrbuch der Bahnbestimmung.

Seite 4. Zeile 4 von oben sind die Aufschriften der 2. und 3. Columne zu vertauschen.

- 5. Formel 3) statt $\sum_{i=i_i}^{i=i_u-1} f(a+(i+1)w)$ lies: $\sum_{i=i}^{i=i_u-1} f^{2d+1}(a+(i+1)w)$
- 5. Formel 4) statt $\sum_{i=i_i}^{i=i_u-1} f(a+(i+\frac{1}{2})w)$ lies: $\sum_{i=i}^{i=i_u-1} f^{2d}(a+(i+\frac{1}{2})w)$
- 7. Zeile 4 von oben statt Combination lies: Klasse
- 9. - 4 von unten statt $\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{(2d-p+2)}} C^{d+1-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d)^2\}$

  lies: $\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)+2}} C^{d+1-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d)^2\}$
- 11. - 4 von oben statt $1^2, 3^2, \ldots\ldots$ lies: $1^2, 3^2, \ldots\ldots$
- 18. - 2 von unten statt $C^3\{1^1 \cdots 7^2\}$ lies: $C^3\{1^2 \cdots 7^2\}$
- 19. in $N_2^{10}(n)$ statt $9\cdot 10\, n^2$ lies $9\cdot 10\, n^8$
- 19. in Formel 10) statt $w^2 \frac{df(t)}{dt^2} =$ lies: $w^2 \frac{d^2f(t)}{dt^2} =$
- 20. in $M_2^9(m)$ statt $6\cdot 7\, m^2$ lies: $6\cdot 7\, m^4$
- 34. Zeile 2 von oben statt $\frac{1}{w}\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(a+(i+n)w)\,dt$ lies: $\frac{1}{w}\int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(a+(i+n)w)\,dt$
- 35. in den Formeln 11) statt $P\binom{2d-1}{1}$ lies: P_1^{2d-1}
- 35. in den Formeln 11) statt $Q\binom{2d-1}{1}$ lies: Q_1^{2d-1}
- 38. Zeile 11 von oben statt »von der oberen« lies: »von jenem der oberen«.
- 39. - 4 von unten statt $\int f(a+(i+n')w)\,dt$ lies: $\iint f(a+(i+n')w)\,dt$
- 43. - 4 von oben statt $m \pm < \frac{1}{4}$ lies: $m < \pm \frac{1}{4}$
- 44. in der Integraltafel sollen die ersten Werthe der absteigenden Differenzen sein: -649.73, $+38.32$, $+12.36$, -4.28, $+0.47$

Seite 45. Zeile 16 von unten statt $S_y = + 646.147$ lies: $S_y = + 946.147$
- 46. - 14 von unten statt $m S_y = + 94.156$ lies: $m S_y = + 94.165$
- 46. - 13 von unten statt $+ 26529.80$ lies: $+ 26529.81$
- 53. - 7 von unten statt $f^{II} a$ lies: $f^{II} (a$
- 54. Formeln 31 statt $P\binom{2d-1}{1}:\ Q\binom{2d-1}{1}:\ P\binom{2d-2}{2}:\ Q\binom{2d-2}{2}$

lies: $P_1^{2d-1}:\ Q_1^{2d-1}:\ P_2^{2d-2}:\ Q_2^{2d-2}$
- 54. Zeile 11 von unten statt (pag. 45) lies: pag. 49
- 60. - 9 von oben statt P_0^2 lies: P_2^0
- 63. - 8 von unten statt »gebildete Summationsreihe« lies: »gebildeten Summationsreihen«.
- 64. Zeile 14 von oben statt $-\frac{1}{24} f^{II} a + (i + \frac{1}{2}) w$

lies: $-\frac{1}{24} f^{II} (a + (i + \frac{1}{2}) w$
- 71. - 10 von unten statt $\frac{x_1}{r_1}$ lies: $\frac{x_1}{r_1^3}$
- 76. - 11 von unten statt $f = \frac{\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}{1 + \alpha}$ lies: $f = 2\,\frac{\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}{1 + \alpha}$
- 78. - 2 von unten statt $\frac{k^2}{r^3}$ lies: $\frac{k^2}{r_0^3}$
- 79. in den Formeln 12 ist statt $\frac{1}{12}\frac{d^2 \xi}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12}\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma X$
- 79. in den Formeln 12 ist statt $\frac{1}{12}\frac{d^2 \eta}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12}\frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma Y$
- 79. in den Formeln 12 ist statt $\frac{1}{12}\frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12}\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma Z$
- 83. Zeile 3 von unten statt $-\sin\Omega \sin i$ lies: $-\sin\Omega \cos i$
- 88. - 6 von unten statt »vergleichende« lies: »vergleichbare«
- 89. - 15 von oben am Schlusse statt $\Delta (p$ lies: $\Delta \sqrt{p})$
- 89. - 7 von unten statt $\left(\frac{\sqrt{p_0} + \Delta\sqrt{p}}{k}\right)$ lies: $\left(\sqrt{p_0} + \frac{\Delta}{k}\sqrt{p}\right)$
- 99. - 18 von oben statt sln 1" lies: sin 1"
- 100. - 12 von oben statt »vortesllt« lies: »vorstellt«
- 100. 2. Zeile in Formel I statt $-\sin\Omega \cos i_0$ lies: $-\sin\Omega_0 \cos i_0$
- 105. Zeile 4 von oben statt 6.8 lies: 6"8
- 106. - 17 von unten statt $-\sin\Omega \sin i$ lies: $-\sin\Omega \cos i$
- 106. - 5 von unten statt $\sin\Omega \cos i$ lies: $-\sin\Omega \cos i$
- 108. - 13 von oben statt $\sin\vartheta$ lies: $\varrho \sin\vartheta$
- 108. in Formel IV ist überall statt ω, w zu setzen
- 108. Zeile 2 von unten statt $+\frac{17}{5760}$ lies: $-\frac{17}{5760}$
- 109. in Formel V ist in den ersten Gliedern statt f zu setzen: ${}^{II}f$
- 111. Zeile 9 von oben statt 2.308060 lies: 2.328069
- 111. - 10 von oben statt 2.728784. 2.128385 lies: $2_n728784$. $2_n028385$
- 111. - 13 von oben statt 0.563293 lies: 9.563293

Seite 112, in der ^{I}f Columne, Zeile 2 von oben statt — 257.64 lies: — 257.61
- 112, in der ^{II}f Columne, Zeile 4 von oben statt + 10.78 lies: + 10.87
- 115, Zeile 16, 17 u. 18 von oben in den Gleichungen für X_2, Y_2, Z_2 erhalten die Glieder rechts vom = das negative Vorzeichen.
- 130, Zeile 9 von unten statt $(wk):\sqrt{p_0}$ lies $(wk)\cdot\sqrt{p_0}$
- 133, - 15 von oben statt $s - \frac{1}{2}(\Omega + \Omega_0)$ lies: $S - \frac{1}{2}(\Omega + \Omega_0)$
- 136, - 12 von unten statt $9_n7834120$ lies: $9_n7835120$
- 137, - 13 von oben statt 9.0525751 lies: 0.0525751
- 138, - 5 von unten statt 0.604 0513 und $\sin\varphi \sin E$ lies 9.6040513 und $e'' \sin E$
- 146, Zeile 3 von unten im 3. Gliede links vom = statt $\frac{k^2}{r^2}$ lies: $\frac{k^2}{r^3}$
- 148, in den Formeln IX in der 3. Gleichung statt $\frac{d^2z}{dt}$ lies: $\frac{d^2z}{dt^2}$
- 151 ist in dem Differenzschema in der Mitte der Seite überall statt ω, w zu setzen.
- 151 ist in Formel 1 in den Gleichungen für B und C, statt ω, w zu setzen, ausserdem muss die Gleichung für D lauten: $D = \frac{1}{6} f^{III}(a - \frac{1}{2}w)$
- 156, Zeile 14 von oben statt W lies: W_1
- 169, in Formeln 25 ist in der ersten Gleichung links vom = statt $\sqrt{p}$ zu setzen: $k\sqrt{p}$
- 170, 4. Zeile der Formeln II, statt r lies: r'
- 174, Zeile 4 von oben statt $\log 2k\, 10^7 \sqrt{p_0}$ lies: $\log 2(wk)\, 10^7 \sqrt{p_0}$
- 174, - 5 von oben statt $\log 2k\sqrt{p_0}$ lies: $\log 2(wk)\sqrt{p_0}$
- 177, - 6 von unten statt $+\frac{1}{2}[$ lies: $-\frac{1}{2}[$
- 180, - 10 von unten ist für γ in der Columne $\Delta\omega$ statt — 0.08 zu setzen: — 0.07
- 181, Zeile 5 von oben fehlt = nach $1 + r$
- 206, - 9 von oben statt $+\frac{1}{2920}$ lies: $+\frac{1}{1920}$
- 209, - 4 von oben statt Formel lies: Formeln
- 234, - 2 von oben statt 1871 lies: 1872
- 234, - 4 von oben statt 1872 lies: 1873
- 234, - 10 von oben statt $f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$ lies $^{I}f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$
- 234, - 18 von oben statt 1871 lies: 1872
- 234, - 16 von unten statt $f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$ lies: $^{I}f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$
- 234, - 8 von unten statt 1871 lies: 1872
- 235, - 8 von unten statt $3kw =$ lies: $\log 3kw =$
- 240, - 21 von unten, Columne Febr. 24 statt 8.942582 lies: 8.942452
- 240, - 17 von unten, Columne Febr. 24 statt $9_n424579$ lies: $9_n424449$
- 240, - 14 von unten, Columne Febr. 24 statt 9.420233 lies: 9.420103
- 240, - 13 von unten, Columne Febr. 24 statt 9.983869 lies: 9.983874

Seite 240. Zeile 8 von unten, Columne Febr. 24 statt $0_n842260$ lies: $0_n842265$

- 240. - 7 von unten statt $8_n917077$ lies: $8_n916947$
- 256. - 2 von oben statt »die Folge« lies: »in Folge«
- 278. - 10 von oben fehlen die Schlussworte, »ersetzt und $F' - \Delta$ mit $-F'' \Delta$ vertauscht, was für die folgende Schlussfolgerung erlaubt ist:«
- 283. Zeile 17 von unten statt $\frac{y}{l}$ lies: $\frac{l}{y}$
- 293. Formel 3) im Nenner statt $1 - \frac{u_n+1}{u_n}\sqrt{\frac{k}{2}}$ lies: $1 - \frac{u_{n-1}}{u_n}\sqrt{\frac{k}{2}}$
- 303. Zeile 10 von unten statt nnd lies: und
- 304. - 4 von unten statt $\pm 0''962$ lies: $\pm 0''965$
- 307, - 12 von unten statt Gleichung 1) lies: Gleichung 2
- 310, - 10 von oben statt das lies: dass
- 310. Formel 3 soll stehen $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$
- 326 fehlt in Gleichung 15) links vom = die Schlussklammer }
- 326. Zeile 13 von unten statt »vermindert« lies: »vermehrt«
- 327 fehlt in 17) in dem Ausdrucke für $2S$ die Schlussklammer }
- 327. Zeile 19 von oben statt (pag. 326) lies: pag. 325
- 328. - 5 von oben in der Columne Nr. statt 1 lies: 2
- 328. - 1 von unten statt $an -$ lies: $an =$
- 329. - 19 von oben statt anzusehen lies: anzusetzen
- 332, - 16 von oben statt nan lies: man
- 344. - 6 des Schemas statt $y\,ab$ lies: $-y\,ab$
- 345 sollen die Zahlen im Beispiele, um mit dem Schema der vorhergehenden Seite in Uebereinstimmung zu sein, in folgender Weise versetzt werden:

+ 0.07344	− 1.21719	+ 1.57095	+ 1.26957	− 0.53990
+ 0.00090	0.00000	− 0.00003	− 0.00002	0.00000
	− 0.00252	+ 0.00283	+ 0.00021	+ 0.02155
		+ 0.24796	− 0.09011	+ 0.82334
			− 0.04276	+ 1.28121
				+ 1.52297

- 348. Zeile 15 von unten statt $-\frac{c f 2}{c c 2}\ 2$ lies. $-\frac{c f 2}{c c 2} B_2$
- 350. - 3 von oben statt $\frac{f n 5}{f f 1} E_5$ lies: $\frac{f n 5}{f f 5} E_5$
- 353. im Titel statt § 3 lies: § 5
- 353. Zeile 5 von unten statt pag. 317 lies pag. 316
- 357. - 11 von oben statt nn lies: $nn\mu$
- 357. - 8 von unten statt pag. 337 lies: pag. 316 Gl. 7
- 361. - 19 von oben statt Formel 23 pag. 360 lies: Formel 22 pag. 359
- 369. - 14 von oben statt u lies: u
- 381. - 8 von oben statt $+ 43^m 9^s$ lies: $+ 43^m 57$

Seite 381, Zeile 13 von oben statt — 1.0 lies: — 3.0

- 385. Formel 4 statt $\frac{\partial\delta}{\sin\partial\Omega}$ lies: $\frac{\partial\delta}{\sin i\partial\Omega}$

- 388, Zeile 4 von oben statt vorsetzen lies: voraussetzen

- 390. - 12 fehlen die Schlussworte: wobei zu beachten ist, dass sich die Coordinaten α und δ auf dieselbe Fundamentalebene beziehen müssen, auf welche die Grössen Ω, i und ω bezogen sind

- 392, Zeile 3 von unten statt: $\frac{\cos\frac{1}{2}(\pi-\pi_0)}{\cos\frac{1}{2}(\pi-\pi_0)}\partial\Psi$ lies: $\frac{\cos\frac{1}{2}(\pi+\pi_0)}{\cos\frac{1}{2}(\pi-\pi_0)}\partial\Psi$

- 402. Formel 21 muss bei dem letzten Summenzeichen statt $\sum_{=1}^{n=\infty}$ stehen: $\sum_{n=2}^{n=\infty}$

- 402, Zeile 8 von unten statt $-1''$ lies: $(-1)''$

- 405, - 12 von oben statt α lies: ω

- 412. - 7 und 6 von unten sind die Accente bei i und ω zu streichen.

- 412. - 6 von unten nach $\omega = 33^\circ 56' 26''$ einzuschalten: (Aequinoctium 1860.0).

- 415. Zeile 6 von unten statt »erwähnen« lies: »zu erwähnen«.

- 427. in 2 statt $\cos\delta d\alpha$ und $d\delta$ lies: $\cos\delta\partial\alpha$ und $\partial\delta$

- 430, Zeile 12 von unten statt $\left(\frac{d^2 r_0}{dt}\right)$ lies: $\left(\frac{d^2 r_0}{dt^2}\right)$

- 432. Formel 16 statt $\frac{\partial A^3}{\partial\xi_0}$ lies: $\frac{\partial A_3}{\partial\xi_0}$

- 432, - 16 ist in $\frac{\partial A_1}{\partial x_0}$ rechter Hand ξ_0 mit x_0 zu vertauschen

- 435, Zeile 8 von unten statt »Neigung des Aequators« lies: »Neigung in Bezug auf den Aequator«

- 436, Formel 28, 2. Zeile statt $\cos A \cos J, Z$ lies: $\cos A \sin J, Z$

- 441. Zeile 7 von unten in C' statt 52″30 lies: 52″20

- 444. - 11 von oben in $\log\gamma_1$ statt 6.26202 lies: 6.26402

- 444. - 17 von oben ist zu setzen $\log\{\cdots\}$ 8.14080
$\log\alpha_1$ 5.81405

- 447, - 4 von unten statt $z_0\,\partial\psi\,.\,\partial t_0$ lies: $z_0\,\partial\alpha\,.\,\partial t_0$

- 453. - 21 von unten statt + 0.0040 lies: + 0.00040

- 453. - 20 von unten statt 0.07276 lies: 0.07276

- 454, - 1 von oben statt $6_n 1960\partial_0$ lies: $6_n 1960\partial\xi_0$

- 454, - 15 von unten sind die Worte »und addirt dieselben« zu streichen

- 456. - 17 von oben 2. Columne statt $8_n 4514142$ lies: $8_n 4514124$

- 456. - 19 von oben 2. Columne statt $6_n 7341285$ lies: $9_n 7341285$

- 456. - 17 von unten statt i lies: i

- 457. - 6 von oben statt $r:p$ lies: $p:r$

- 458. - 2 von unten statt ∂y lies: ∂z

- 459. - 4 von oben. Coëfficient von ∂x in f_6 statt + 67.5 lies: + 67.6

- 460. - 7 von oben statt Systeme. lies: . Systeme

- 461. - 15 von oben in 1 statt + 1.2377345 lies: + 1.2375345

Seite 465, Zeile 7 von oben statt pag. 48 lies: pag. 47

- 465 ist in Formel 4) statt $a(1 - \cos E) + a(1 - \cos E')$
zu setzen: $a(1 - e \cos E) + a(1 - e \cos E')$

- 468, Zeile 17 von oben statt -0.25 und 0.25 lies: -0.24 und $+0.24$

- 468, - 18 von oben statt Parabel lies: Ellipse

- 470, - 11 von unten statt 9.9990446 lies: 8.9990446

- 471, - 2 von unten statt Zeichen lies: Zeichen

- 480, - 8 von oben statt (I pag. 146 § 12) lies: (I pag. 146 § 11)

- 483, Formel (C') erste Zeile statt $\left(\frac{d\lambda_1}{\partial y}\right)$ lies: $\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right)$

- 486, Zeile 8 von oben statt Ay lies: Δy

- 489, - 3 von oben statt $\log M + \partial x$ lies: $\log M + \Delta x$

- 500, - 7 von oben in den beiden Nennern statt dy lies: ∂y

- 501, - 5 von oben statt zunächst lies: zunächst.

- 508, - 17 von unten statt $s^2 = r^2 + r'^2 - r r' \cos 2f$
lies: $s^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos 2f$

- 633, - 3 von unten statt ♄ lies: ♀

Berichtigungen zum II. Bande von Oppolzer's Lehrbuch der Bahnbestimmung.

Seite 4. Zeile 4 von oben sind die Aufschriften der 2. und 3. Columne zu vertauschen.

- 5. Formel 3 statt $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a+(i+1)w)$ lies: $\sum_{i=i}^{i=i_n-1} f^{2d+1}(a+(i+1)w)$

- 5. Formel 4 statt $\sum_{i=i}^{i=i_n-1} f(a+(i+\frac{1}{2})w)$ lies: $\sum_{i=i}^{i=i_n-1} f^{2d}(a+(i+\frac{1}{2})w)$

- 7. Zeile 4 von oben statt Combination lies: Klasse

- 9. - 4 von unten statt $\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2(2d-p+2)} C^{d+1-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d)^2\}$

  lies: $\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)+2}} C^{d+1-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d)^2\}$

- 11. - 4 von oben statt $1^2, 3^2, \cdots\cdots$ lies: $1^2, 3^2, \cdots\cdots$

- 18. - 2 von unten statt $C^3\{1^1 \cdots 7^2\}$ lies: $C^3\{1^2 \cdots 7^2\}$

- 19. in $N_2^{10}(n)$ statt $9 \cdot 10\, n^2$ lies $9 \cdot 10\, n^8$

- 19. in Formel 10) statt $w^2 \frac{df(t)}{dt^2} =$ lies: $w^2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} =$

- 20. in $M_2^9(m)$ statt $6 \cdot 7\, m^2$ lies: $6 \cdot 7\, m^4$

- 34. Zeile 2 von oben statt $\frac{1}{w}\int\!\!\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(a+(i+n)w)\,dt$ lies: $\frac{1}{w}\int\!\!\int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(a+(i+n)w)\,dt$

- 35. in den Formeln 11) statt $P\binom{2d-1}{1}$ lies: P_1^{2d-1}

- 35. in den Formeln 11 statt $Q\binom{2d-1}{1}$ lies: Q_1^{2d-1}

- 38. Zeile 11 von oben statt »von der oberen« lies: »von jenem der oberen«.

- 39. - 4 von unten statt $\int f(a+(i+n)w\,dt$ lies: $\int f(a+(i+n)w)\,dt$

- 43. - 4 von oben statt $m \pm < \frac{1}{4}$ lies: $m < \pm \frac{1}{4}$

- 44. in der Integraltafel sollen die ersten Werthe der absteigenden Differenzen sein: -649.73, $+38.32$, $+12.36$, -4.28, $+0.47$

Seite 45. Zeile 16 von unten statt $S_g = + 646.147$ lies: $S_g = + 946.147$

- 46. - 14 von unten statt $mS_g = + 94.156$ lies: $mS_g = + 94.165$

- 46. - 13 von unten statt $+ 26529.80$ lies: $+ 26529.81$

- 53. - 7 von unten statt $f^{II} a$ lies: $f^{II} (a$

- 54. Formeln 31) statt $P \binom{2d-1}{1} : Q \binom{2d-1}{1} : P \binom{2d-2}{2} : Q \binom{2d-2}{2}$

lies: $P_1^{2d-1} : Q_1^{2d-1} : P_2^{2d-2} : Q_2^{2d-2}$

- 54. Zeile 11 von unten statt (pag. 45) lies: pag. 49

- 60. - 9 von oben statt $P_0{}^2$ lies: $P_2{}^0$

- 63. - 8 von unten statt »gebildete Summationsreihe« lies: »gebildeten Summationsreihen«.

- 64. Zeile 14 von oben statt $- \frac{1}{24} \overset{II}{\int} a + (i + \frac{1}{2}) w$

lies: $- \frac{1}{24} \overset{II}{\int} (a + (i + \frac{1}{2}) w)$

- 71. - 10 von unten statt $\frac{x_1}{r_1}$ lies: $\frac{x_1}{r_1^3}$

- 76. - 11 von unten statt $f = \frac{\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}{1 + \alpha}$ lies: $f = 2 \frac{\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}{1 + \alpha}$

- 78. - 2 von unten statt $\frac{k^2}{r^3}$ lies: $\frac{k^2}{r_0^3}$

- 79. in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (X)$

- 79. in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \eta}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (Y)$

- 79. in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (Z)$

- 83. Zeile 3 von unten statt $- \sin \Omega \sin i$ lies: $- \sin \Omega \cos i$

- 88. - 6 von unten statt »vergleichende« lies: »vergleichbare«

- 89. - 15 von oben am Schlusse statt Δ / p lies: $\Delta \sqrt{p}$

- 89. - 7 von unten statt $\left(\frac{\sqrt{p_0} + \Delta \sqrt{p}}{k} \right)$ lies: $\left(\sqrt{p_0} + \frac{\Delta}{k} \sqrt{p} \right)$

- 99. - 18 von oben statt sln 1″ lies: sin 1″

- 100. - 12 von oben statt »vortesllt« lies: »vorstellt«

- 100, 2. Zeile in Formel I) statt $- \sin \Omega \cos i_0$ lies: $- \sin \Omega_0 \cos i_0$

- 105. Zeile 4 von oben statt 6.8 lies: 6″8

- 106. - 17 von unten statt $- \sin \Omega \sin i$ lies: $- \sin \Omega \cos i$

- 106. - 5 von unten statt $\sin \Omega \cos i$ lies: $- \sin \Omega \cos i$

- 108. - 13 von oben statt $\sin \vartheta$ lies: $\varrho \sin \vartheta$

- 108. in Formel IV) ist überall statt ω, w zu setzen

- 108. Zeile 2 von unten statt $+ \frac{17}{5760}$ lies: $- \frac{17}{5760}$

- 109. in Formel V) ist in den ersten Gliedern statt f zu setzen: $\overset{II}{f}$

- 111. Zeile 9 von oben statt 2.308069 lies: 2.328069

- 111. - 10 von oben statt 2.728784. 2.128385 lies: $2_n 728784$. $2_n 028385$

- 111. - 13 von oben statt 0.563293 lies: 9.563293

Seite 112, in der ^{I}f Columne, Zeile 2 von oben statt — 257.64 lies — 257.61

- 112, in der ^{II}f Columne, Zeile 4 von oben statt + 10.78 lies + 10.87
- 115, Zeile 16, 17 u. 18 von oben in den Gleichungen für X_2, Y_2, Z_2 erhalten die Glieder rechts vom = das negative Vorzeichen.
- 130. Zeile 9 von unten statt $wk : \sqrt{p_0}$ lies $wk \cdot \sqrt{p_0}$
- 133, - 15 von oben statt $s - \frac{1}{2}(\omega + \Omega_0$ lies. $S - \frac{1}{2}(\omega + \Omega_0$
- 136. - 12 von unten statt $9_n7834120$ lies: $0_n7835120$
- 137. - 13 von oben statt 9.0525751 lies: 0.0525751
- 138. - 5 von unten statt 0.604 0513 und sin φ sin E lies 9.6040513 und e'' sin E
- 146. Zeile 3 von unten im 3. Gliede links vom = statt $\frac{k^2}{r^2}$ lies: $\frac{k^2}{r'^2}$
- 148. in den Formeln IX in der 3. Gleichung statt $\frac{d^2z}{dt}$ lies $\frac{d^2z}{dt^2}$
- 151 ist in dem Differenzschema in der Mitte der Seite überall statt ω, w zu setzen.
- 151 ist in Formel 1 in den Gleichungen für B und C, statt ω, w zu setzen, ausserdem muss die Gleichung für D lauten: $D = \frac{1}{6} f^{III}(a - \frac{1}{2}w)$
- 156. Zeile 14 von oben statt W lies: W_1
- 169. in Formeln 25 ist in der ersten Gleichung links vom = statt $\sqrt{p}$ zu setzen: $k\sqrt{p}$
- 170. 4. Zeile der Formeln 11 statt r lies: r
- 174. Zeile 4 von oben statt $\log 2k\, 10^7 \sqrt{p_0}$ lies: $\log 2\, wk\, 10^7 \sqrt{p_0}$
- 174, - 5 von oben statt $\log 2k \sqrt{p_0}$ lies: $\log 2\, wk \sqrt{p_0}$
- 177. - 6 von unten statt $+ \frac{1}{2}\Big[$ lies: $- \frac{1}{2}\Big[$
- 180. - 10 von unten ist für γ in der Columne $\Delta\omega$ statt — 0.08 zu setzen — 0.07
- 181. Zeile 5 von oben fehlt = nach $1 + r$
- 206. - 9 von oben statt $+ \frac{1''}{2920}$ lies: $+ \frac{1''}{1920}$
- 209. - 4 von oben statt Formel lies: Formeln
- 234. - 2 von oben statt 1871 lies: 1872
- 234. - 4 von oben statt 1872 lies: 1873
- 234. - 10 von oben statt $f(a + (i - \frac{1}{2})w)$ lies $^{I}f(a + (i - \frac{1}{2})w)$
- 234. - 18 von oben statt 1871 lies: 1872
- 234. - 16 von unten statt $f(a + (i - \frac{1}{2})w)$ lies: $^{I}f(a + (i - \frac{1}{2})w)$
- 234. - 8 von unten statt 1871 lies: 1872
- 235. - 8 von unten statt $3kw =$ lies: $\log 3kw =$
- 240. - 21 von unten. Columne Febr. 24 statt 8.942582 lies: 8.942452
- 240. - 17 von unten. Columne Febr. 24 statt $0_n424579$ lies $9_n424449$
- 240. - 14 von unten. Columne Febr. 24 statt 0.420233 lies: 9.420103
- 240. - 13 von unten. Columne Febr. 24 statt 9.983860 lies: 9.983874

Seite 240, Zeile 8 von unten, Columne Febr. 24 statt $0_n842260$ lies: $0_n842265$
- 240, - 7 von unten statt $8_n917077$ lies: $8_n916947$
- 256, - 2 von oben statt »die Folge« lies: »in Folge«
- 278, - 10 von oben fehlen die Schlussworte, »ersetzt und $F'' - J_j$ mit $-F''(J)$ vertauscht, was für die folgende Schlussfolgerung erlaubt ist:«
- 283, Zeile 17 von unten statt $\frac{y}{l}$ lies: $\frac{l}{y}$
- 293, Formel 3) im Nenner statt $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}$ lies: $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}$
- 303, Zeile 10 von unten statt mid lies: und
- 304, - 4 von unten statt $\pm 0''962$ lies: $\pm 0''965$
- 307, - 12 von unten statt Gleichung 1 lies: Gleichung 2
- 310, - 10 von oben statt das lies: dass
- 310, Formel 3 soll stehen $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$
- 326 fehlt in Gleichung 15) links vom = die Schlussklammer }
- 326, Zeile 13 von unten statt »vermindert« lies: »vermehrt«
- 327 fehlt in 17) in dem Ausdrucke für $2S$ die Schlussklammer }
- 327, Zeile 19 von oben statt (pag. 326) lies: (pag. 325)
- 328, - 5 von oben in der Columne Nr. statt 1 lies: 2
- 328, - 1 von unten statt $an) -$ lies: $(an) =$
- 329, - 19 von oben statt anzusehen lies: anzusetzen
- 332, - 16 von oben statt nan lies: man
- 344, - 6 des Schemas statt $y(ab)$ lies: $-y(ab)$
- 345 sollen die Zahlen im Beispiele, um mit dem Schema der vorhergehenden Seite in Uebereinstimmung zu sein, in folgender Weise versetzt werden:

+ 0.07344	− 1.21719	+ 1.57095	+ 1.26957	− 0.53990
+ 0.00090	0.00000	− 0.00003	− 0.00002	0.00000
	− 0.00252	+ 0.00283	+ 0.00021	+ 0.02155
		+ 0.24796	− 0.09011	+ 0.82334
			− 0.04276	+ 1.28121
				+ 1.52297

- 348, Zeile 15 von unten statt $-\frac{c f 2)}{c c 2)} 2$ lies: $-\frac{c f 2)}{c c 2)} B_2$
- 350, - 3 von oben statt $\frac{f n 5)}{f f 1} E_5$ lies: $\frac{f n 5)}{f f 5} E_5$
- 353, im Titel statt § 3 lies: § 5
- 353, Zeile 5 von unten statt pag. 317 lies pag. 316
- 357, - 11 von oben statt nn' lies: $nn\mu'$
- 357, - 8 von unten statt pag. 337 lies: pag. 316 Gl. 7
- 361, - 19 von oben statt Formel 23 (pag. 360) lies: Formel 22) (pag. 359)
- 369, - 14 von oben statt u_1 lies: u
- 381, - 8 von oben statt $+ 43^m 9^s$ lies: $+ 43^m 57^s$

Seite 381, Zeile 13 von oben statt — 1.0 lies: — 3.0

- 385, Formel 4) statt $\frac{\partial \delta}{\sin \partial \Omega}$ lies: $\frac{\partial \delta}{\sin i \partial \Omega}$
- 388, Zeile 4 von oben statt vorsetzen lies: voraussetzen
- 390, - 12 fehlen die Schlussworte: wobei zu beachten ist, dass sich die Coordinaten α und δ auf dieselbe Fundamentalebene beziehen müssen, auf welche die Grössen Ω, i und ω bezogen sind
- 392, Zeile 3 von unten statt: $\frac{\cos\frac{1}{2}\ \pi - \pi_0}{\cos\frac{1}{2}\ (\pi - \pi_0}\ \partial\Psi$ lies: $\frac{\cos\frac{1}{2}\ \pi + \pi_0}{\cos\frac{1}{2}\ (\pi - \pi_0}\ \partial\Psi$
- 402, Formel 21 muss bei dem letzten Summenzeichen statt $\sum_{=2}^{n=\infty}$ stehen: $\sum_{n=2}^{n=\infty}$
- 402, Zeile 8 von unten statt $-1''$ lies: $(-1)''$
- 405, - 12 von oben statt α lies: ω
- 412, - 7 und 6 von unten sind die Accente bei i und ω zu streichen.
- 412, - 6 von unten nach $\omega = 33°56'26''$ einzuschalten: (Aequinoctium 1860.0).
- 415, Zeile 6 von unten statt »erwähnen« lies: »zu erwähnen«.
- 427, in ζ) statt $\cos\delta d\alpha$ und $d\delta$ lies: $\cos\delta\partial\alpha$ und $\partial\delta$
- 430, Zeile 12 von unten statt $\left(\frac{d^2 r_0}{dt}\right)$ lies: $\left(\frac{d^2 r_0}{dt^2}\right)$
- 432, Formel 16) statt $\frac{\partial A^3}{\partial \xi_0}$ lies: $\frac{\partial A_3}{\partial \xi_0}$
- 432, - 16 ist in $\frac{\partial A_4}{\partial x_0}$ rechter Hand ξ_0 mit x_0 zu vertauschen
- 435, Zeile 8 von unten statt »Neigung des Aequators« lies: »Neigung in Bezug auf den Aequator«
- 436, Formel 28, 2. Zeile statt $\cos A \cos J, Z$ lies: $\cos A \sin J, Z$
- 441, Zeile 7 von unten in C' statt 52″30 lies: 52″20
- 444, - 11 von oben in $\log \gamma_4$ statt 6.26202 lies: 6.26402
- 444, - 17 von oben ist zu setzen: $\log\{\cdots\}$ 8.14680
  $\log\ \alpha_4$ 5.81405
- 447, - 4 von unten statt $z_0\ \partial\mathfrak{b} : \partial t_0$) lies: $z_0\ \partial\alpha\ \ \partial t_0$
- 453, - 21 von unten statt + 0.0049 lies: + 0.00049
- 453, - 20 von unten statt 6.07276 lies: 0.07276
- 454, - 1 von oben statt $6_n 1960 \partial_0$ lies: $6_n 1960 \partial \xi_0$
- 454, - 15 von unten sind die Worte »und addirt dieselben« zu streichen
- 456, - 17 von oben 2. Columne statt $8_n 4514142$ lies: $8_n 4514124$
- 456, - 19 von oben 2. Columne statt $6_n 7341285$ lies: $9_n 7341285$
- 456, - 17 von unten statt i lies: i
- 457, - 6 von oben statt $r : p$ lies: $p : r$
- 458, - 2 von unten statt ∂y lies: $\partial \eta$
- 459, - 4 von oben, Coëfficient von ∂x in f_6 statt + 67.5 lies: + 67.6
- 460, - 7 von oben statt Systeme. lies: . Systeme
- 461, - 15 von oben in 1 statt + 4.2377345 lies: + 4.2375345

Seite 465, Zeile 7 von oben statt pag. 48 lies: pag. 47

- 465 ist in Formel 4) statt $a(1-\cos E)+a(1-\cos E')$ zu setzen: $a(1-e\cos E)+a(1-e\cos E')$
- 468. Zeile 17 von oben statt -0.25 und 0.25 lies: -0.24 und $+0.24$
- 468. - 18 von oben statt Parabel lies: Ellipse
- 470, - 11 von unten statt 9.9999416 lies: 8.9999416
- 471, - 2 von unten statt Zeiehen lies: Zeichen
- 480, - 8 von oben statt (I pag. 146 § 12) lies: (I pag. 146 § 11)
- 483. Formel (C) erste Zeile statt $\left(\frac{d\lambda_1}{\partial y}\right)$ lies: $\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}\right)$
- 486. Zeile 8 von oben statt Ay lies: Δy
- 489, - 3 von oben statt $\log M+\delta x$ lies: $\log M+\Delta x$
- 500, - 7 von oben in den beiden Nennern statt dy lies: ∂y
- 501, - 5 von oben statt zunächst lies: zunächst.
- 508, - 17 von unten statt $s^2=r^2+r'^2-rr'\cos 2f$ lies: $s^2=r^2+r'^2-2rr'\cos 2f$
- 633, - 3 von unten statt ♄ lies: ♀

Ueber die numerische Differentiation und Integration.

---

§ 1. Allgemeine Uebersicht über das vorgelegte Problem und über die dabei auftretenden Bezeichnungen.

Häufig tritt bei der numerischen Lösung mechanischer Probleme der Fall auf, dass man zu einer Funktion, von der eine Reihe numerischer Werthe durch vorausgehende Operationen ermittelt wurde, die numerischen Werthe der Differentialquotienten und der Integrale für bestimmte Grenzen für diese Funktion zu bestimmen hat.

Ist der analytische Ausdruck dieser Funktion bekannt, so wird es sich wohl im Allgemeinen empfehlen, vorerst durch analytische Operationen die Formen für die Differentialquotienten und die Integrale herzustellen und die so erlangten Ausdrücke der numerischen Operation zu unterziehen; unter Umständen kann aber dieses Verfahren mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein und besonders die analytische Auswerthung der Integrale stösst bisweilen auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten. In diesen Fällen wird aber das hier zur Auseinandersetzung gelangende Verfahren der numerischen Differentiation und Integration häufig auf sehr bequeme Weise zum Ziele führen, und wird in jenen Fällen, wo der analytische Ausdruck der Funktion unbekannt ist und dieselbe nur durch eine Reihe von Werthen, denen diese Function genügt, definirt erscheint, nahezu der einzige Ausweg sein, um das verlangte Problem zu lösen.

Ohne vorerst auf die Methode Rücksicht zu nehmen, nach der die numerischen Werthe der vorgelegten Funktion ermittelt sind, setze ich voraus, dieselbe sei durch eine Reihe von numerischen Werthen bestimmt, die zu einem durch das Problem bedingten Argument, welches also als die unabhängig Variable zu betrachten ist, gehören. Es ist klar, dass eine Funktion durch eine beschränkte Zahl von bestimmten Werthen niemals völlig genau definirt sein kann; je mehr Werthe im Allgemeinen aber vorhanden sind, um so sicherer wird man den Gang der Funktion zu beurtheilen im Stande sein. Fasst man diese Betrachtungen geometrisch auf und stellt sich den Gang der Funktion durch eine Curve vor, zu der das Argument die Variable als Abszisse, der Werth der Funktion als Ordinate

erscheint, so ist es sofort klar, dass der Verlauf der Curve um so genauer bekannt sein wird, je mehr Punkte in einem gegebenen Stücke der Curve bestimmt erscheinen. Diese allgemeinen Betrachtungen über die Definition einer Funktion durch eine Reihe von Spezialwerthen führen sofort zu dem Schlusse, dass die vorgelegte Funktion mindestens innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen continuirlich sein muss; denn im Falle einer Discontinuität lässt sich eine Funktion selbst nicht annähernd durch eine beschränkte Zahl spezieller Werthe darstellen. Es kann demnach in der Folge nur auf solche Funktionen Rücksicht genommen werden, die innerhalb der vorgesteckten Grenzen continuirlich sind.

Die vorgelegten numerischen Werthe der Funktion können in Bezug auf die unabhängig Variable (Argument) in gleichen Abständen berechnet sein oder nicht; da die Berechnung der numerischen Werthe der Funktion meist in dieser Richtung keiner Beschränkung unterworfen ist, so wird es sich im Allgemeinen empfehlen, um die möglichste Einfachheit in die Operationen zu bringen, die numerischen Werthe in der That äquidistant in Bezug auf das Argument zu berechnen. Es soll in der Folge stets diese beschränkende Annahme gemacht werden, da sich in der That der allgemeine Fall auf diesen speciellen Fall zurückführen lässt, indem man eine neue Variable als neues Argument einführt, so dass in Bezug auf dieses neue Argument gleiche Abstände erreicht werden; allerdings kann diese Operation unter Umständen ziemlich weitläufig werden.

Das Argument sei ausgedrückt durch $a + (i + n) w$, wo a irgend einen constanten Ausgangswerth der Variablen vorstellt; w ist der gewählte constante Werth für das Intervall, i stelle eine beliebige ganze positive oder negative Zahl (die Null nicht ausgenommen) vor, und n eine beliebige Grösse, die innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ eingeschlossen ist. Es müssen, den gemachten Voraussetzungen nach, die numerischen Werthe der Funktion für eine Reihe äquidistanter Punkte des Arguments bekannt sein, also etwa für ...., $a - 2w$, $a - w$, a, $a + w$, $a + 2w$, ...; die numerischen Werthe, die diesem Argumente entsprechen, seien ausgedrückt durch ....$f(a - 2w)$, $f(a - w)$, $f(a)$, $f(a + w)$, $f(a + 2w)$ ...... Man kann demnach das Symbol $a - iw$ als Argument-Index bezeichnen. Setzt man diese numerischen Werthe, die natürlich sowohl in der positiven als negativen Richtung beliebig weit fortgesetzt werden können, vertical unter einander, so kann man, indem man stets den vorausgehenden Funktionswerth von dem unmittelbar folgenden abzieht, Zahlenwerthe erhalten, die den ersten Differenzwerthen der vorgelegten numerischen Werthreihe entsprechen. Die so gebildeten ersten Differenzen seien ebenfalls in eine Verticalreihe rechts neben die erstere angesetzt gedacht, und die Differenzwerthe zwischen die Horizontalreihen der erzeugenden Werthe gesetzt. Für diese Werthreihe möge als Bezeichnung eingeführt werden, dass der Funktion als Exponent-Index I angehängt wird; dieser Funktions-Index weist also unzweideutig auf die Verticalreihe hin. Um die Stellung der Funktion in dieser letzteren genau zu bestimmen, soll als Argument-Index das arithmetische Mittel der umschliessenden Argument-Index benützt werden. Es wird also sein z. B.

$$f^{I}(a - \tfrac{1}{2}w) = f(a) - f(a - w)$$
$$f^{I}(a + \tfrac{7}{2}w) = f(a + 4w) - f(a + 3w)\,.$$

Bildet man nun aus diesen ersten Differenzwerthen in analoger Weise die zweite Differenzreihe (bezeichnet dieselbe mit dem Funktionsindex II) und bestimmt in analoger Weise den Argumentindex, so wird sein z. B.

$$f^{II}(a) \quad = f^{I}(a + \tfrac{1}{2}w) - f^{I}(a - \tfrac{1}{2}w)$$
$$f^{II}(a - 7w) = f^{I}(a - \tfrac{13}{2}w) - f^{I}(a - \tfrac{15}{2}w)\,.$$

Man wird leicht bemerken, dass die Argumentindex der zweiten (wie überhaupt aller geraden) Differenzwerthe auf derselben Zeile mit dem Argumentindex der Funktion identisch werden; ebenso werden die Argumentindex der ungeraden Differenzwerthe, die zwischen denselben Horizontalreihen eingetragen sind, identisch. Dieses eben angedeutete Verfahren kann beliebig weit fortgesetzt gedacht werden, und man erhält so eine sichere und unzweideutige Bezeichnungsweise für die ersten und höheren Differenzwerthe; der Funktionsindex gibt also die Verticalreihe, der Argumentindex die Horizontalreihe an.

Betrachtet man aber die Funktionsreihe selbst als die Differenzwerthe einer links voranstehenden Verticalreihe, die dadurch bezeichnet werden soll, dass man den Funktionsindex I vor das Funktionszeichen setzt und in consequenter Weise die Horizontalzeile durch den Argumentindex fixirt, so wird die Bildung dieser ersten Reihe durch successive Summirung der Funktionswerthe ohne Schwierigkeiten vorgenommen werden können, sobald man über irgend einen Werth in dieser ersten summirten Reihe eine Annahme macht. Diese Annahme ist vorerst willkürlich und es wird sich in der That in der Folge herausstellen, dass diese willkürliche Anfangsconstante mit der sonst bei der Integration auftretenden willkürlichen Constanten in innigem Zusammenhange steht. Sei der willkürliche Werth für ${}^{I}f(a - \frac{1}{2}w)$ gegeben, so ist offenbar

$${}^{I}f(a + \tfrac{1}{2}w) = {}^{I}f(a - \tfrac{1}{2}w) + f(a)$$
$${}^{I}f(a + \tfrac{3}{2}w) = {}^{I}f(a + \tfrac{1}{2}w) + f(a + w) \quad \text{u. s. w.}$$

und ebenso

$${}^{I}f(a - \tfrac{3}{2}w) = {}^{I}f(a - \tfrac{1}{2}w) - f(a - w)$$
$${}^{I}f(a - \tfrac{5}{2}w) = {}^{I}f(a - \tfrac{3}{2}w) - f(a - 2w)\,.$$

Consequenter wäre es allerdings, als Funktionsindex für diese erste summirte Reihe den Index —I zu wählen und denselben an diejenige Stelle zu setzen, wo der Index für die Bezeichnung der Differenzreihe gesetzt wurde, doch würde man durch diese Abänderung die allgemeine übliche Bezeichnung aufgeben und ausserdem die Schreibweise in Etwas erschweren.

Geht man in der Bildung der summirten Reihen weiter und bildet die zweite summirte Reihe in analoger Weise, wobei natürlich wieder eine willkürliche Anfangsconstante auftritt, so kann man diese Reihen beliebig weit fortsetzen; ich will mich aber beschränken auf die Betrachtung der zweiten summirten Reihe, da die dritten und folgenden Reihen mit drei- und mehrfachen eigentlich iterirten Integralen im Zusammenhange stehen, für deren Entwicklung vorerst kein Bedürfniss

vorhanden ist. Mit Rücksicht auf die gemachten Auseinandersetzungen wird sich also folgendes Differenz- und Summationsschema ergeben, in welchem bei der praktischen Anwendung statt der Symbole bestimmte numerische Werthe auftreten.

Argument	2. summirte Reihe	1. summirte Reihe	Funktionswerthe	1. Differenzen	2. Differenzen	3. Differenzen	4. Differenzen	5. Differenzen
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
		$^{I}f(a-\frac{5}{2}w)$		$f^{I}(a-\frac{5}{2}w)$		$f^{III}(a-\frac{5}{2}w)$		$f^{V}(a-\frac{5}{2}w)$
$a-2w$	$^{II}f(a-2w)$		$f(a-2w)$		$f^{II}(a-2w)$		$f^{IV}(a-2w)$	
		$^{I}f(a-\frac{3}{2}w)$		$f^{I}(a-\frac{3}{2}w)$		$f^{III}(a-\frac{3}{2}w)$		$f^{V}(a-\frac{3}{2}w)$
$a-w$	$^{II}f(a-w)$		$f(a-w)$		$f^{II}(a-w)$		$f^{IV}(a-w)$	
		$^{I}f(a-\frac{1}{2}w)$		$f^{I}(a-\frac{1}{2}w)$		$f^{III}(a-\frac{1}{2}w)$		$f^{V}(a-\frac{1}{2}w)$
a	$^{II}f(a)$		$f(a)$		$f^{II}(a)$		$f^{IV}(a)$	
		$^{I}f(a+\frac{1}{2}w)$		$f^{I}(a+\frac{1}{2}w)$		$f^{III}(a+\frac{1}{2}w)$		$f^{V}(a+\frac{1}{2}w)$
$a+w$	$^{II}f(a+w)$		$f(a+w)$		$f^{II}(a+w)$		$f^{IV}(a+w)$	
		$^{I}f(a+\frac{3}{2}w)$		$f^{I}(a+\frac{3}{2}w)$		$f^{III}(a+\frac{3}{2}w)$		$f^{V}(a+\frac{3}{2}w)$
$a+2w$	$^{II}f(a+2w)$		$f(a+2w)$		$f^{II}(a+2w)$		$f^{IV}(a+2w)$	
		$^{I}f(a+\frac{5}{2}w)$		$f^{I}(a+\frac{5}{2}w)$		$f^{III}(a+\frac{5}{2}w)$		$f^{V}(a+\frac{5}{2}w)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Aus der Entstehung dieser Werthe leitet man leicht ab, dass für die Differenz zweier Differenzwerthe mit einem geraden Funktionsindex (hier und in der Folge ist für die nun abzuleitenden Relationen der Funktionsindex der summirten Reihen negativ zu denken), der mit $2d$ bezeichnet werden soll, die Relation besteht

$$f^{2d}(a+i_n w) - f^{2d}(a+i_1 w) = \sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{2d+1}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) \quad . \qquad 1)$$

für die ungeraden Funktionswerthe

$$f^{2d-1}(a+(i_n+\tfrac{1}{2})w) - f^{2d-1}(a+(i_1+\tfrac{1}{2})w) = \sum_{i=i_1+1}^{i=i_n} f^{2d}(a+iw) = \sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{2d}(a+(i+1)w) \qquad 2)$$

Ausserdem wird es auch in der Folge nöthig werden, für die arithmetischen Mittel zweier unmittelbar auf einander folgender Differenz- oder Summenwerthe derselben Verticalreihe eine unzweideutige Bezeichnungsweise einzuführen. Es soll dies dadurch geschehen, dass man den Funktionsindex unverändert belässt, für den Argumentindex aber das arithmetische Mittel der Argumentindex der benützten Werthe ansetzt. Es wird so sein z. B.

$$f^{2d}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = \tfrac{1}{2}\left\{f^{2d}(a+(i+1)w) + f^{2d}(a+iw)\right\}$$

$$f^{2d-1}(a+iw) = \tfrac{1}{2}\left\{f^{2d-1}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + f^{2d-1}(a+(i-\tfrac{1}{2})w)\right\}$$

Diese Bezeichnungsweise ist offenbar ebenso unzweideutig wie die frühere. Man wird als sicheres Merkmal, ob man mit wirklich im Schema vorkommenden Differenzwerthen oder mit arithmetischen Mitteln derselben zu thun hat, leicht die Regel ableiten, dass für die im Schema auftretenden Differenzwerthe sich gerade Funktionsindex mit ganzen Argumentindex und ungerade Funktionsindex mit gebrochenen Argumentindex verbinden, dass aber das Umgekehrte für die arithmetischen

Mittel gilt: nämlich gerade Funktionsindex combiniren sich mit gebrochenen Argumentindex, ungerade mit ganzen.

Für die Differenz zweier in derselben Verticalreihe stehenden arithmetischen Mittel werden sich ähnliche Summenformeln finden lassen, denn es ist vorerst nach der Entstehung des arithmetischen Mittels und unter Benutzung der Relation 1)

$$\int^{2d}(a+[i_n+\tfrac{1}{2}]w)-\int^{2d}(a+[i_r+\tfrac{1}{2}]w)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\int^{2d}(a+[i_n+1]w)+\int^{2d}(a+i_n w)\right\}-\tfrac{1}{2}\left\{\int^{2d}(a+[i_r+1]w)+\int^{2d}(a+i_r w)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\sum_{i=i_r+1}^{i=i_n}\int^{2d+1}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)+\sum_{i=i_r}^{i=i_n-1}\int^{2d+1}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)\right\}$$

Denkt man sich diese Summen zerlegt und vereinigt je zwei Glieder der verschiedenen Summenreihen zu einem arithmetischen Mittel mit Benützung des vor der Klammer stehenden Factors $\tfrac{1}{2}$, so findet sich leicht

$$\int^{2d}(a+[i_n+\tfrac{1}{2}]w)-\int^{2d}(a+[i_r+\tfrac{1}{2}]w)=\sum_{i=i_r}^{i=i_n-1}\int(a+[i+1]w) \quad (3)$$

und ebenso für die ungeraden Funktionsindex

$$\int^{2d-1}(a+i_n w)-\int^{2d-1}(a+i_r w)=\sum_{i=i_r}^{i=i_n-1}\int(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) \quad (4)$$

Die Formeln (1), (2), (3) und (4) können aber unter eine gemeinsame Form gebracht werden. Bezeichnet man mit l den Funktionsindex, mit k eine Zahl, die je nach dem Werth des Funktionsindex $\tfrac{1}{2}$ oder 0 zu setzen ist, so ist

$$\int^{l}(a+[i_n+k]w)-\int^{l}(a+[i_r+k]w)=\sum_{i=i_r}^{i=i_n-1}\int^{l+1}(a+[i+k+\tfrac{1}{2}]w) \quad (5)$$

wobei natürlich für die summirten Werthe l negativ anzunehmen ist.

In der Folge wird häufig von Combinationssummen derselben Klasse Gebrauch gemacht werden und es stellt sich die Nothwendigkeit heraus, für dieselben zweckmässige Bezeichnungen einzuführen. Die Combinationen sind hiebei ohne Wiederholung verstanden. Die zu combinirenden Elemente seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots$ die Klasse sei k, so stellt das Symbol

$$C^k\{\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots\}$$

die Summe aller Combinationen der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots$ ohne Wiederholung zur Klasse k vor. Es wird also sein z. B.

$$C^2\{4, 10, 36\}=4\times 16+4\times 36+10\times 36=784,$$

weiter wird man zu beachten haben, dass für die Klasse 0 die Definition dieses Symbols sei

$$C^0\{\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\}=1$$

Die Berechnung der Combinationssummen erscheint höchst weitläufig und fast unausführbar, wenn die Anzahl der Elemente eine beträchtliche wird; die Herren Anton und Schram, Observatoren der k. k. österreichischen Gradmessung,

die ich mit der Berechnung der weiter unten nothwendigen numerischen Coëfficienten betraut habe, haben sich aber einen Rechnungsmechanismus zurecht gelegt, der die Arbeit ganz ausserordentlich erleichtert und so kurz ist, dass alle Combinationssummen, die zwischen 9 Elementen die durch ganze Zahlen in dem vorliegenden speciellen Falle dargestellt sind, zu allen Klassen bis 9 leicht innerhalb einer Stunde erlangt werden können, selbst wenn die Elemente beträchtlich grosse Zahlen sind. — Die bei dem vorliegenden Problem auftretenden Elemente sind entweder die Quadrate der geraden oder der ungeraden Zahlen

4. 16. 36. 64. 100. 144. 196. 256. 324 .....

1. 9. 25. 49. 81 121. 169. 225. 289. 361 .....

Denkt man sich alle Elemente in eine horizontale Zeile gesetzt, darunter in der zweiten Zeile die Einheit und multiplicirt man die Elemente mit diesem Factor, so erhält man die dritte Zeile, die nothwendig wieder die Elemente gibt; hiebei werden die Producte unter die Factoren gesetzt, nur das erste wird fortgelassen und als erster Werth in die 4. Zeile und zwar in die Verticalreihe des 2. Elementes gestellt. Die übrigen Werthe in der 4. Zeile werden einfach erhalten, indem man je zwei Werthe der voranstehenden Verticalcolumnen der 3. und 4. Zeile addirt; ist diese Addition durchgeführt, so bildet man wieder die Producte aus der 4. Zeile und den oben stehenden Elementen und setzt diese Producte in die 5. Zeile, jedoch das erste abermals als ersten Werth in die 6. Zeile, eine Verticalreihe nach links einrückend u. s. w.. Um die Beschreibung klar zu stellen, setze ich hier den Beginn der Rechnung für die Summencombination der Elemente 2^2, 4^2...... an.

4	16	36	64	100	144	196
1	1	1	1	1	1	1
	16	36	64	100	144	196
	4	20	56	120	220	364
		720	3584	12000	31680	71344
		64	784	4368	16368	48048
			50176	436800	2356992	9417408
			2304	52480	489280	2846272
				5248000	70456320	557869312
				147456	5305456	75851776
					776945664	14866948096
					14745600	791691264
						15517487744
						2123366400

Verfolgt man die Entstehung dieser Zahlen analytisch, so erkennt man sofort, dass, wenn man die Verticalcolumnen herabgeht und die je zweite Zahl heraushebt, diese so herausgehobenen Zahlen nichts anderes sind als die Summen der Combinationen aller Elemente bis zu dem gewählten zur Combination 0. 1. 2. ....

Die Zahlen, welche die Herren Anton und Schram gefunden haben und die ich wegen der wichtigen Rolle, die dieselben in der folgenden Untersuchung spielen, hier anführe, sind die folgenden:

$C^0 \{2^2\} = 1$
$C^1 \{2^2\} = 4$

$C^0 \{2^2, 4^2\} = 1$
$C^1 \{2^2, 4^2\} = 20$
$C^2 \{2^2, 4^2\} = 64$

$C^0 \{2^2 \ldots\ldots 6^2\} = 1$
$C^1 \{2^2 \ldots\ldots 6^2\} = 56$
$C^2 \{2^2 \ldots\ldots 6^2\} = 784$
$C^3 \{2^2 \ldots\ldots 6^2\} = 2304$

$C^0 \{2^2 \ldots\ldots 8^2\} = 1$
$C^1 \{2^2 \ldots\ldots 8^2\} = 120$
$C^2 \{2^2 \ldots\ldots 8^2\} = 4368$
$C^3 \{2^2 \ldots\ldots 8^2\} = 52480$
$C^4 \{2^2 \ldots\ldots 8^2\} = 14745\ 6$

$C^0 \{2^2 \ldots\ldots 10^2\} = 1$
$C^1 \{2^2 \ldots\ldots 10^2\} = 220$
$C^2 \{2^2 \ldots\ldots 10^2\} = 16368$
$C^3 \{2^2 \ldots\ldots 10^2\} = 48928\ 0$
$C^4 \{2^2 \ldots\ldots 10^2\} = 53954\ 56$
$C^5 \{2^2 \ldots\ldots 10^2\} = 14745\ 600$

$C^0 \{2^2 \ldots\ldots 12^2\} = 1$
$C^1 \{2^2 \ldots\ldots 12^2\} = 364$
$C^2 \{2^2 \ldots\ldots 12^2\} = 48048$
$C^3 \{2^2 \ldots\ldots 12^2\} = 28462\ 72$
$C^4 \{2^2 \ldots\ldots 12^2\} = 75851\ 776$
$C^5 \{2^2 \ldots\ldots 12^2\} = 70169\ 1264$
$C^6 \{2^2 \ldots\ldots 12^2\} = 21233\ 66400$

$C^0 \{2^2 \ldots\ldots 14^2\} = 1$
$C^1 \{2^2 \ldots\ldots 14^2\} = 560$
$C^2 \{2^2 \ldots\ldots 14^2\} = 11939\ 2$
$C^3 \{2^2 \ldots\ldots 14^2\} = 12263\ 680$
$C^4 \{2^2 \ldots\ldots 14^2\} = 63372\ 1088$
$C^5 \{2^2 \ldots\ldots 14^2\} = 15658\ 63630\ 0$
$C^6 \{2^2 \ldots\ldots 14^2\} = 15729\ 48544\ 44$
$C^7 \{2^2 \ldots\ldots 14^2\} = 41617\ 98144\ 00$

$C^0 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 1$
$C^1 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 816$
$C^2 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 26275\ 2$
$C^3 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 42828\ 032$
$C^4 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 37732\ 23168$
$C^5 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 17789\ 12378\ 88$
$C^6 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 41059\ 66530\ 304$
$C^7 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 40683\ 60247\ 5204$
$C^8 \{2^2 \ldots\ldots 16^2\} = 10654\ 20324\ 86400$

$C^0 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 1$
$C^1 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 1140$
$C^2 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 52713\ 6$
$C^3 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 12795\ 9680$
$C^4 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 17649\ 50553\ 6$
$C^5 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 14004\ 15544\ 320$
$C^6 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 61802\ 66760\ 6616$
$C^7 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 13904\ 37378\ 29376\ 0$
$C^8 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 13288\ 64867\ 44719\ 36$
$C^9 \{2^2 \ldots\ldots 18^2\} = 34519\ 61852\ 55936\ 00$

$C^{(0)}\{1^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2\}$ = 1

$C^{(0)}\{1^2.\ 3^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2.\ 3^2\}$ = 10
$C^{(2)}\{1^2.\ 3^2\}$ = 9

$C^{(0)}\{1^2.\ldots\ldots 5^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2.\ldots\ldots 5^2\}$ = 35
$C^{(2)}\{1^2.\ldots\ldots 5^2\}$ = 259
$C^{(3)}\{1^2.\ldots\ldots 5^2\}$ = 225

$C^{(0)}\{1^2.\ldots\ldots 7^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2.\ldots\ldots 7^2\}$ = 84
$C^{(2)}\{1^2.\ldots\ldots 7^2\}$ = 1974
$C^{(3)}\{1^2.\ldots\ldots 7^2\}$ = 12916
$C^{(4)}\{1^2.\ldots\ldots 7^2\}$ = 11025

$C^{(0)}\{1^2.\ldots\ldots 9^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2.\ldots\ldots 9^2\}$ = 165
$C^{(2)}\{1^2.\ldots\ldots 9^2\}$ = 8778
$C^{(3)}\{1^2.\ldots\ldots 9^2\}$ = 17281 0
$C^{(4)}\{1^2.\ldots\ldots 9^2\}$ = 10572 21
$C^{(5)}\{1^2.\ldots\ldots 9^2\}$ = 89302 5

$C^{(0)}\{1^2.\ldots\ldots 11^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2.\ldots\ldots 11^2\}$ = 286
$C^{(2)}\{1^2.\ldots\ldots 11^2\}$ = 28743
$C^{(3)}\{1^2.\ldots\ldots 11^2\}$ = 12349 48
$C^{(4)}\{1^2.\ldots\ldots 11^2\}$ = 21967 231
$C^{(5)}\{1^2.\ldots\ldots 11^2\}$ = 12881 6766
$C^{(6)}\{1^2.\ldots\ldots 11^2\}$ = 10805 6025

$C^{(0)}\{1^2.\ldots\ldots 13^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2.\ldots\ldots 13^2\}$ = 455
$C^{(2)}\{1^2.\ldots\ldots 13^2\}$ = 77077
$C^{(3)}\{1^2.\ldots\ldots 13^2\}$ = 60925 15
$C^{(4)}\{1^2.\ldots\ldots 13^2\}$ = 23067 3443
$C^{(5)}\{1^2.\ldots\ldots 13^2\}$ = 38412 78805
$C^{(6)}\{1^2.\ldots\ldots 13^2\}$ = 21878 08947 9
$C^{(7)}\{1^2.\ldots\ldots 13^2\}$ = 18261 46822 5

$C^{(0)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 680
$C^{(2)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 17945 2
$C^{(3)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 23434 840
$C^{(4)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 16014 89318
$C^{(5)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 55742 80348 0
$C^{(6)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 88016 58206 04
$C^{(7)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 49408 31601 000
$C^{(8)}\{1^2.\ldots\ldots 15^2\}$ = 41088 30350 625

$C^{(0)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 1
$C^{(1)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 969
$C^{(2)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 37597 2
$C^{(3)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 75296 468
$C^{(4)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 83741 58078
$C^{(5)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 51857 32163 82
$C^{(6)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 16995 83602 6324
$C^{(7)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 26104 27537 55556
$C^{(8)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 14320 09163 03962 5
$C^{(9)}\{1^2.\ldots\ldots 17^2\}$ = 11874 51971 33062 5

---

§. 2. Aufstellung einiger Relationen zwischen den Combinationssummen der Quadrate der geraden und ungeraden Zahlen.

Betrachtet man das Product

$$P_{(d-1)} = (n+d-1)(n+d-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-(d-2))(n-(d-1)) \qquad 1$$

wo n eine beliebige, d eine ganze positive Zahl vorstellt, und multiplicirt je zwei symmetrisch gegen die Mitte gelegenen Factoren mit einander, so erhält man zunächst

$$P_{(d-1)} = n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)\ldots\ldots\ldots(n^2-(d-2)^2)(n^2-(d-1)^2). \qquad 2$$

Führt man die angezeigten Multiplicationen wirklich aus, und macht von der oben

in § 1 (pag. 5) erläuterten Bezeichnungsweise für die Combinationssummen Gebrauch, so kann man offenbar das Product durch die folgende Summenform ausdrücken:

$$P_{(d-1)} = \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p}\, n^{2p-1}\, C^{d-p}\{1^2, 2^2, \ldots\ldots (d-2)^2, (d-1)^2\}\,.$$

Führt man unter dem Combinationszeichen statt der Quadrate der Zahlen die Quadrate der geraden Zahlen für die Elemente ein, so findet sich sofort

$$P_{(d-1)} = \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}}\, C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots\ldots (2d-2)^2\}\,. \qquad (3)$$

Kehrt man nun zur Gleichung (1) zurück und führt in dieselbe ein

$$n = m + \tfrac{1}{2}\,, \qquad (4)$$

so erhält man sogleich, wenn man die Multiplication der Summen und Differenzen ausführt für das obige Product

$$P_{(d-1)} = (m + (d - \tfrac{1}{2}))\,(m^2 - (d-\tfrac{3}{2})^2)\,(m^2 - (d-\tfrac{5}{2})^2) \ldots\ldots (m^2 - (\tfrac{3}{2})^2)\,(m^2 - (\tfrac{1}{2})^2)\,. \qquad (5)$$

Transformirt man diesen Ausdruck durch Einführung des Combinationszeichens in eine Summenformel und reducirt die Elemente auf die Quadrate der ungeraden Zahlen, so erhält man

$$P_{(d-1)} = (m + (d - \tfrac{1}{2}))\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{m^{2p-2}}{2^{2(d-p)}}\, C^{d-p}\{1^2, 3^2, \ldots\ldots (2d-3)^2\}\,. \qquad (6)$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke (3) und (6) und Einstellung des Werthes n aus (4) in letzter Gleichung resultirt die folgende wichtige Relation

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}}\, C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots\ldots (2d-2)^2\}$$
$$= (n + d - 1)\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(n-\frac{1}{2})^{2p-2}}{2^{2(d-p)}}\, C^{d-p}\{1^2, 3^2, \ldots\ldots (2d-3)^2\}\,. \qquad (7)$$

Ehe ich auf die Ableitung einiger Folgerungen übergehe, die man aus der Gleichung (7) erhalten kann, will ich vorerst auf einige Relationen eingehen, die sich aus den Ausdrücken (2) und (5) erhalten lassen. Bezeichnet man mit $P_{(d)}$ das mit $P_{(d-1)}$ analoge Product, welches man bekommt, wenn man bis zu dem Gliede $(n^2 - d^2)$ vorschreitet, so findet sich

$$P_{(d)} = (n^2 - d^2)\, P_{(d-1)}\,, \qquad (8)$$
$$P_{(d)} = (m - d + \tfrac{1}{2})(m + d + \tfrac{1}{2})\, P_{(d-1)}\,. \qquad (9)$$

Führt man in (8) die Combinationssummen für P ein, so wird

$$\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d+1-p)}}\, C^{d+1-p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d)^2\} =$$
$$= (n^2 - d^2)\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}}\, C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}\,.$$

Ändert man links vom Gleichheitszeichen die Grenzen für p in 0 und d ab, so erhält man auch

$$\sum_{p=0}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{n^{2p+1}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{2^2,\,4^2,\,\ldots,\,(2d)^2\right\} =$$

$$= (n^2-d^2)\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{2^2,\,4^2,\,\ldots,\,(2d-2)^2\right\}. \qquad 10)$$

Aus der Gleichung 9) findet sich durch ähnliche Schlussfolgerungen

$$\sum_{p=0}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{m^{2p}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2\ldots(2d-1)^2\right\} =$$

$$= (m+d-\tfrac{1}{2})(m-d+\tfrac{1}{2})\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{m^{2p-2}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2,\ldots,\,(2d-3)^2\right\}. \qquad 11)$$

Betrachtet man Combinationen aus e und $e+1$ Elementen, so enthalten die vorstehenden Gleichungen 10) und 11) die Relationen, die zwischen den Combinationssummen dieser Elemente bestehen und zwar gilt die erste Gleichung, wenn die Quadrate der geraden Zahlen, die zweite, wenn die Quadrate der ungeraden Zahlen in Betracht kommen.

Multiplicirt man die Gleichung 11) mit dm und integrirt, wobei zu beachten ist, dass der Werth Null für die Integrationsconstante durch die Specialisirung $m=0$ resultirt, so findet sich

$$\sum_{p=0}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{m^{2p+1}}{(2p+1)\,2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2,\,\ldots,\,(2d-1)^2\right\} =$$

$$= \sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}}\left\{\frac{m^{2p+1}}{2p+1}-\left(\frac{2d-1}{2}\right)^2\frac{m^{2p-1}}{2p-1}\right\}C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2,\,\ldots,\,(2d-3)^2\right\}.$$

Führt man in diese Gleichung die Specialisirung $m=\frac{1}{2}$ ein, so erhält man nach einer leichten Umformung

$$\sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)}\,C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2,\ldots,(2d-1)^2\right\} + 4d(d-1)\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}}{(2p-1)}\,C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2,\,\ldots,\,(2d-3)^2\right\}$$

$$= -2\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2,\ldots,\,(2d-3)^2\right\}}{(2p+1)(2p-1)}.$$

Schreibt man der Kürze halber für $d-1$ den Buchstaben δ im zweiten Gliede links vom Gleichheitszeichen und führt überdies in demselben für p die Grenzen 0 und $(d-1)$ ein, so erhält man die in der Folge verwendete Relation

$$\sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}}{2p+1}\,C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2,\,\ldots,\,(2d-1)^2\right\} + 4d\delta\sum_{p=0}^{p=\delta}\frac{(-1)^{\delta-p}}{(2p+1)}\,C^{\delta-p}\left\{1^2,\,3^2,\,\ldots,\,(2\delta-1)^2\right\} =$$

$$= -2\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{C^{d-p}\left\{1^2,\,3^2,\,\ldots,\,(2d-3)^2\right\}}{(2p+1)(2p-1)}. \qquad 12)$$

In ähnlicher Weise könnten weitere Relationen entwickelt werden, doch begnüge ich mich mit den hier angeführten Relationen und gehe auf einige Gleichungen über, die sich aus 7) ableiten lassen und die für die folgenden Untersuchungen von Bedeutung sind.

Setzt man in Gleichung 7) den Specialwerth $n=\frac{1}{2}$ ein und beachtet, dass

rechts vom Gleichheitszeichen für $p = 1$ der auftretende, unbestimmte Factor $(n-\frac{1}{2})^{2p-2} = 0^0$ offenbar der Einheit gleich gesetzt werden muss, so findet sich leicht die bemerkenswerthe Relation

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots, (2d-2)^2\} = (-1)^{d-1}(2d-1)\,1^2, 3^2, \ldots\ldots (2d-3)^2 . \quad 13)$$

Setzt man aber in 7) $n = 0$, so erhält man

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots, (2d-3)^2\} = 0 . \quad 14)$$

welche Formel aber dadurch beschränkt erscheint, dass die Giltigkeit derselben für den Fall $d = 1$ besonders untersucht werden muss. Schreibt man jedoch in 7) für $p = \pi + 1$ und $d = \delta + 1$, und führt nach erfolgter Umsetzung für π und δ wieder $p = d$ ein, so erhält man für $n = 0$, den Fall $d = 0$ als in der Folge nicht wichtig, ausschliessend

$$\sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2 \ldots (2d-1)^2\} = 0 . \quad 15)$$

Setzt man endlich $n = 1$, so erhält man aus 7) sofort

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\} = \frac{d}{2^{2d}} \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\} ,$$

und mit Rücksicht auf 14)

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\} = \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \overset{d-p}{C}\{1, 2, \ldots (d-1)\} = 0 . \quad 16)$$

Die Gleichung 7) wird aber auch eine Reihe von Relationen bieten, die leicht erhalten werden können, wenn man auf diese Gleichung wiederholt die Differentiation und Integration anwendet, wobei noch eine vor diesen Operationen mit einer willkürlichen Potenz von n oder m ausgeführte Multiplication die Relationen vervielfältigt. Ich werde nur jene Relationen hier ableiten, von denen später Gebrauch gemacht wird.

Durch Differentiation erhält man

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-1)\,n^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\} =$$

$$= \left(\frac{2d-1}{2}\right) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-2)(n-\frac{1}{2})^{2p-3}}{2^{2(d-p)}} \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-1)(n-\frac{1}{2})^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\} . \quad 17)$$

Diese hier ausgeführte Differentiation erleichtert sich ganz ausserordentlich und führt sofort zu übersichtlichen Resultaten, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen in 7) statt n, m substituirt und die Differentiation rechts nach m ausführt und nachher, da

$$dm = dn ,$$

wieder n statt m in die Formel einführt. Weitere Relationen durch die Differentiation abzuleiten, scheint für die nächsten Zwecke nicht nöthig. Für die Ausführung der Integration denke ich mir vorerst die Gleichung 7) beiderseits mit n multiplicirt und dann linker Hand die Integration nach n, rechter Hand nach m ausgeführt, was gestattet ist, da ja $dm = dn$. Bezeichnet man die auftretende Integrationsconstante mit J, so wird

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, n^{2p+1}}{(2p+1)\, 2^{2(d-p)}}\, C^{d-p}\{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\} =$$

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \left\{ \frac{m^{2p+1}}{2p+1} + \frac{1}{2}\frac{m^{2p}}{2p} + \frac{2d-1}{2}\left[\frac{m^{2p}}{2p} + \frac{1}{2}\frac{m^{2p-1}}{2p-1}\right]\right\} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2\} + J.$$

Der Werth der Integrationsconstante findet sich in zweifacher Weise, wenn man $n = 0$ setzt und auch $m = 0$

$$J = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \left\{ \frac{1}{(2p+1)\, 2^{2p+1}} - \frac{1}{2\cdot 2p\, 2^{2p}} + \frac{2d-1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2p\, 2^{2p}} - \frac{1}{2(2p-1)\, 2^{2p-1}}\right)\right\} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2\}$$

$$J = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \frac{C^{d-p}\{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\}}{2^{2p+1}(2p+1)}$$

Die Gleichsetzung beider Resultate ergibt nach Ausführung einiger offenkundiger Reductionen

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C^{d-p}\{2^2, 4^2 \dots (2d-2)^2\} = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2p} \left\{\frac{2d-1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1}\right\} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2\}. \quad 18)$$

Es soll die Gleichung 7) nochmals in abgeänderter Form vorgenommen werden. Ersetzt man nämlich rechter Hand die Combinationssumme der Elemente $1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2$ durch $1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2$, indem man von der Relation 11) des vorliegenden Paragraphen Gebrauch macht und beachtet, dass

$$\frac{n+d-1}{m+d-\frac{1}{2}\,(m-d+\frac{1}{2})} = \frac{1}{n-d}\,.$$

ist, so findet sich sofort

$$(n-d) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{m^{2p}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}. \quad 19)$$

Multiplicirt man links mit dn, rechts mit dm, integrirt und bestimmt die Integrationsconstante in zweifacher Weise, indem man einerseits dieselbe durch $n = 0$, andererseits durch $m = 0$ ermittelt und setzt die beiden Resultate einander gleich, so findet sich

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\} - d \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{p} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}. \quad 20)$$

Diese Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, zu welchen zahlreichen und verschiedenartigen Resultaten man durch das vorstehende Verfahren gelangen kann; ich habe dieselben so gewählt, dass die gewonnenen Relationen später Verwendung finden.

§ 3. Darstellung einer Funktion durch ihre Differenzwerthe.

Lässt man in irgend einer Funktion von a, den Werth a in $(a+nw)$ übergehen, so wird sich stets, sobald die Funktion nicht discontinuirlich ist, innerhalb der gestellten Grenzen eine Entwicklung nach steigenden Potenzen von nw bewerkstelligen lassen. Um die Convergenz dieser Reihen für praktische Zwecke hinreichend rasch zu gestalten, wird es allerdings nothwendig sein, nw keinen allzugrossen Werth zu ertheilen, doch lassen sich hierüber keine allgemeinen Regeln feststellen und es wird dem praktischen Takte des Rechners von Fall zu Fall überlassen bleiben müssen, die Wahl entsprechend dem vorgesteckten Ziele zu treffen.

Die eben hingestellte Behauptung rechtfertigt sich sofort durch Benutzung des Taylor'schen Lehrsatzes und man wird bemerken, dass die oben aufgestellte Einschränkung ebenfalls für den letzteren gilt. Man hat also nach demselben

$$f(a+nw) = f(a) + nw\,\frac{d\,f(a)}{d\,a} + \frac{n^2 w^2}{1\cdot 2}\,\frac{d^2 f(a)}{d\,a^2} + \ldots\ldots$$

Denkt man sich diese Entwicklung bis $(nw)^m$ durchgeführt und sei dadurch die Reihe so weit fortgesetzt, dass die vorgeschriebene Genauigkeitsgrenze in der Entwicklung erreicht wird, so kann man die übrigen Glieder, die mit höheren Potenzen von nw als m multiplicirt sind, fortlassen, ohne der Genauigkeit etwas zu vergeben. Hiermit aber erscheint die vorgelegte Funktion innerhalb der vorgesteckten Grenzen mit einer arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung identificirt. Rechnet man nun mit den entwickelten Coëfficienten eine Reihe in Bezug auf das Argument äquidistanter Werthe, indem man für n der Reihe nach die Werthe ...... -2, -1, 0, $+1$, $+2$, ... setzt, so erhält man eine Folge von Funktionswerthen, die der in § 1 auseinandergesetzten Bezeichnungsweise entsprechend, mit .... $f(a-2w)$, $f(a-w)$, $f(a)$, $f(a+w)$, $f(a+2w)$ ... bezeichnet werden sollen. Bildet man entsprechend den Vorschriften des § 1 die ersten und höheren Differenzwerthe, so erhält man das folgende Schema

$$\begin{array}{llll}
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & \\
f(a-2w) & f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{5}{2}w) & f^{\mathrm{II}}(a-2w) & \ldots\ldots \\
f(a-w) & f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{3}{2}w) & f^{\mathrm{II}}(a-w) & \ldots\ldots \\
f(a) & f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) & f^{\mathrm{II}}(a) & \ldots\ldots \\
f(a+w) & f^{\mathrm{I}}(a+\tfrac{1}{2}w) & f^{\mathrm{II}}(a+w) & \ldots\ldots \\
f(a+2w) & f^{\mathrm{I}}(a+\tfrac{3}{2}w) & f^{\mathrm{II}}(a+2w) & \ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

in welchem Schema nothwendig, der Voraussetzung nach, die m^{ten} Differenzen constant sein müssen. Um über die Bezeichnungsweise des Argumentindex eine sichere Regel zu haben, denke man sich unter m eine gerade Zahl; dies schränkt die Allgemeinheit der folgenden Ableitung nicht ein, weil, wenn die Entwicklung nach Potenzen von nw für ein ungerades m schon hinreichend genau wäre, die Entwicklung um eine Ordnung weiter geführt werden kann, wodurch nur eine Genauigkeitszunahme erreicht wird. Ist also m gerade, so wird nothwendig die Relation für die $m-1^{ten}$ Differenzwerthe bestehen:

$$\overset{m-1}{f}(a+\tfrac{3}{2}w) = \overset{m-1}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + \overset{m}{f}(a)$$

$$\overset{m-1}{f}(a+\tfrac{5}{2}w) = \overset{m-1}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + 2\overset{m}{f}(a),$$

oder allgemein

$$\overset{m-1}{f}(a+(n+\tfrac{1}{2})w) = \overset{m-1}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + n\overset{m}{f}(a).$$

Wendet man sich zu den $m-2^{ten}$ Differenzwerthen, so wird man finden

$$\overset{m-2}{f}(a+w) = \overset{m-2}{f}(a) + \overset{m-1}{f}(a+\tfrac{1}{2}w)$$

$$\overset{m-2}{f}(a+2w) = \overset{m-2}{f}(a) + 2\overset{m-1}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + \overset{m}{f}(a)$$

$$\overset{m-2}{f}(a+3w) = \overset{m-2}{f}(a) + 3\overset{m-1}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + 3\overset{m}{f}(a)$$

oder allgemein

$$\overset{m-2}{f}(a+nw) = \overset{m-2}{f}(a) + n\overset{m-1}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\overset{m}{f}(a).$$

Weiter erhält man für die $m-3^{ten}$ Differenzwerthe allgemein

$$\overset{m-3}{f}(a+(n+\tfrac{1}{2})w) = \overset{m-3}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + n\overset{m-2}{f}(a) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\overset{m-1}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\overset{m}{f}(a).$$

Setzt man dieses Verfahren fort, bis man zur Reihe der Funktionswerthe selbst gelangt, so findet sich der allgemeine Ausdruck für dieselben leicht

$$\left.\begin{aligned} f(a+nw) = f(a) + n\overset{\mathrm{I}}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\overset{\mathrm{II}}{f}(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\overset{\mathrm{III}}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\overset{\mathrm{IV}}{f}(a) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\overset{\mathrm{V}}{f}(a+\tfrac{1}{2}w) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

welcher Ausdruck die bekannte Interpolationsformel ist und die vorgelegte Funktion der Voraussetzung nach in hinreichender Annäherung darstellt.

Die Formel (1) soll nun in Etwas abgeändert geschrieben werden, um später den Ausgangspunkt der Funktion beliebig wählen zu können. Ich setze nämlich statt n den allgemeineren Ausdruck $i+n$, wo i eine beliebige ganze Zahl vorstellt; dann kann man auch schreiben

$$f(a+(i+n)w) = f(a+iw) + n\overset{\mathrm{I}}{f}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\overset{\mathrm{II}}{f}(a+iw) + \ldots \quad (2)$$

führt man in diesem Ausdrucke die arithmetischen Mittel der ungeraden Differenzen nach der oben (pag. 4) festgesetzten Schreibweise ein und erinnert sich, dass darnach ist

$$\overset{2d-1}{f}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = \overset{2d-1}{f}(a+iw) + \tfrac{1}{2}\overset{2d}{f}(a+iw),$$

so erhält man nach einer unmittelbar ersichtlichen Reduction aus 2) den Ausdruck:

$$f(a+(i+n)w) = f(a+iw) + nf^{\text{I}}(a+iw) + \frac{n^2}{1\cdot 2}f^{\text{II}}(a+iw) + \frac{n(n^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}f^{\text{III}}(a+iw) +$$

$$+ \frac{n^2(n^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{\text{IV}}(a+iw) + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^{\text{V}}(a+iw) + \ldots\ldots \qquad 3)$$

Denkt man sich die in den Factoren angezeigten Multiplicationen ausgeführt, jeden Factor nach Potenzen von n geordnet und die in § 1 (pag. 5) angezeigte Combinationsbezeichnung angewendet, so erhält man, wenn man überdies den Differenzindex durch $2d$ oder $2d-1$ bezeichnet, je nachdem derselbe gerade oder ungerade ist, die folgende Gleichung, durch welche die obige Reihe in einer Summenform ausgedrückt erscheint:

$$f(a+(i+n)w) = f(a+iw) + \sum_{d=1}^{d=\infty}\left\{\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}(2d-1)!}\,\overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}f^{2d-1}(a+iw) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}n^{2p}}{2^{2(d-p)}(2d)!}\,\overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}f^{2d}(a+iw)\right\} \qquad 4)$$

Für d ist in dieser Gleichung als obere Grenze ∞ gesetzt, in der Anwendung wird aber d nur soweit mitgenommen zu werden brauchen, so weit die Differenzwerthe, multiplicirt in den zugehörigen meist sehr kleinen Factor, etwas Merkliches geben, und man wird selten bei zweckmässiger Wahl der Intervalle w über $d=4$ hinauszugehen haben.

Man kann der Gleichung 4) auch eine andere Form geben, deren Kenntniss für die folgenden Entwicklungen erwünscht erscheint. Führt man nämlich in der Gleichung 2) statt der geraden Differenzwerthe die arithmetischen Mittel derselben ein, so hat man nach den Festsetzungen des § 1 (pag. 4) anzunehmen

$$f^{2d}(a+iw) = f^{2d}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{1}{2}f^{2d+1}(a+(i+\tfrac{1}{2})w);$$

setzt man überdies, wie dies in Gleichung 4) geschehen, statt n den Werth $m+\frac{1}{2}$, so findet sich ähnlich wie früher

$$f(a+(i+n)w) = f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + mf^{\text{I}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \frac{m^2-(\frac{1}{2})^2}{1\cdot 2}f^{\text{II}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) +$$

$$+ \frac{m(m^2-(\frac{1}{2})^2)}{1\cdot 2\cdot 3}f^{\text{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \frac{(m^2-(\frac{1}{2})^2)(m^2-(\frac{3}{2})^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{\text{IV}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\ldots$$

Durch Einführung der Combinationsbezeichnung erhält man dann

$$f(a+(i+n)w) = f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \sum_{d=1}^{d=\infty}\left\{\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}m^{2p-1}}{2^{2(d-p)}(2d-1)!}\,\overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2 \ldots (2d-3)^2\}f^{2d-1}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}m^{2p}}{2^{2(d-p)}(2d)!}\,\overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2 \ldots (2d-1)^2\}f^{2d}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)\right\} \qquad 5)$$

Die Gleichungen 4) und 5) bilden die Grundlagen für die weiteren Entwicklungen und sind nichts anderes, als die Darstellung einer Funktion durch die

Differenzwerthe. Die hiefür gewählte neue Bezeichnungsweise wird aber die Uebersichtlichkeit der weiteren Transformationen erleichtern und die Gesetzmässigkeit der auftretenden numerischen Factoren auffinden lassen.

---

§ 4. Ermittlung der numerischen Differentialquotienten einer Funktion.

Wiewohl die Ausführung der numerischen Differentiation weniger nöthig erscheint, weil in sehr vielen Fällen, wenn die numerischen Werthe einer Funktion gegeben sind, auch der analytische Ausdruck derselben bekannt ist, also die Differentiation auf directen Wege ausgeführt werden kann, so tritt doch häufig in der astronomischen Praxis z. B. bei Ermittlung der speciellen Störungen, Ableitung der Differentialquotienten nach Ephemeridenorten der Fall ein, dass in der That die Funktion nur durch eine Reihe numerischer Werthe definirt erscheint und das Verlangen gestellt wird, den ersten und die höheren Differentialquotienten für dieselbe numerisch zu bestimmen. Ich werde daher die hiefür nöthigen Formeln hier ableiten.

Differentiirt man den Ausdruck 4 in § 3 pag. 15 q mal nach dem Argumente

$$a + (i + n) w = l,$$

wobei der Buchstabe l als Abkürzung eingeführt wird, so ist

$$dl = w\,dn \tag{1}$$

und man hat

$$w^q \frac{d^q f(l)}{dl^q} = \sum_{d=1}^{d=s} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots, (2d-2)^2\}}{2^{2(d-p)}(2d-1)!} \frac{d^q n^{2p-1}}{dn^q} f^{2d-1}(a+iw) +$$

$$+ \sum_{d=1}^{d=s} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots, (2d-2)^2\}}{2^{2(d-p)}(2d)!} \frac{d^q n^{2p}}{dn^q} f^{2d}(a+iw).$$

Löst man hier die Summen nach d und p auf, so findet sich

$$\left.\begin{aligned}
w^q \frac{d^q f(l)}{dl^q} = {} & f^{\mathrm{I}}(a+iw) \left\{\frac{d^q n}{dn^q}\right\} + \\
& + \frac{f^{\mathrm{II}}(a+iw)}{1\cdot 2} \left\{\frac{d^q n^2}{dn^q}\right\} + \\
& + \frac{f^{\mathrm{III}}(a+iw)}{1\cdot 2\cdot 3} \left\{\frac{d^q n^3}{dn^q} - \frac{C^1\{2^2\}}{2^2}\frac{d^q n}{dn^q}\right\} + \\
& + \frac{f^{\mathrm{IV}}(a+iw)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \left\{\frac{d^q n^4}{dn^q} - \frac{C^1\{2^2\}}{2^2}\frac{d^q n^2}{dn^q}\right\} + \\
& + \frac{f^{\mathrm{V}}(a+iw)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \left\{\frac{d^q n^5}{dn^q} - \frac{C^1\{2^2, 4^2\}}{2^2}\frac{d^q n^3}{dn^q} + \frac{C^2\{2^2, 4^2\}}{2^4}\frac{d^q n}{dn^q}\right\} + \\
& + \frac{f^{\mathrm{VI}}(a+iw)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \left\{\frac{d^q n^6}{dn^q} - \frac{C^1\{2^2, 4^2\}}{2^2}\frac{d^q n^4}{dn^q} + \frac{C^2\{2^2, 4^2\}}{2^4}\frac{d^q n^2}{dn^q}\right\} + \\
& + \frac{f^{\mathrm{VII}}(a+iw)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} \left\{\frac{d^q n^7}{dn^q} - \frac{C^1\{2^2, \ldots, 6^2\}}{2^2}\frac{d^q n^5}{dn^q} + \frac{C^2\{2^2, \ldots, 6^2\}}{2^4}\frac{d^q n^3}{dn^q} - \frac{C^3\{2^2, \ldots, 6^2\}}{2^6}\frac{d^q n}{dn^q}\right\} + \\
& + \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei das Gesetz der Fortschreitung in diesem Ausdrucke sofort klar ist; ausserdem wird man leicht bemerken, dass alle jene Coëffizienten, wo q grösser ist als der Exponent von n, verschwinden.

Ein ganz analoger Ausdruck wird sich aus Gleichung (5) (pag. 15) finden lassen. Es ist

$$a+[i+n]w = a+[i+\tfrac{1}{2}+m]w = l,$$

damit

$$dl = w\,dm \tag{3}$$

und

$$w^q\frac{d^q f(l)}{dl^q} = \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^d_p\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\}}{2^{2(d-p)}\,(2d-1)!}\,\frac{d^q m^{2p-1}}{dm^q}\,f^{2d-1}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) +$$

$$+\sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^d_p\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\}}{2^{2(d-p)}\,(2d)!}\,\frac{d^q m^{2p}}{dm^q}\,f^{2d}(a+(i+\tfrac{1}{2})w).$$

Löst man die Summenzeichen auf, so hat man

$$\left.\begin{aligned}
w^q\frac{d^q f(l)}{dl^q} &= f^{I}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)\left\{\frac{d^q m}{dm^q}\right\}+\\
&+\frac{f^{II}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)}{1\cdot 2}\left\{\frac{d^q m^2}{dm^q}\right\}+\\
&+\frac{f^{III}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\frac{d^q m^3}{dm^q}-\frac{C^1\{1^2\}}{2^2}\frac{d^q m}{dm^q}\right\}+\\
&+\frac{f^{IV}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left\{\frac{d^q m^4}{dm^q}-\frac{C^1\{1^2, 3^2\}}{2^2}\frac{d^q m^2}{dm^q}\right\}+\\
&+\frac{f^{V}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left\{\frac{d^q m^5}{dm^q}-\frac{C^1\{1^2, 3^2\}}{2^2}\frac{d^q m^3}{dm^q}+\frac{C^2\{1^2, 3^2\}}{2^4}\frac{d^q m}{dm^q}\right\}+\\
&+\frac{f^{VI}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left\{\frac{d^q m^6}{dm^q}-\frac{C^1\{1^2\ldots 5^2\}}{2^2}\frac{d^q m^4}{dm^q}+\frac{C^2\{1^2\ldots 5^2\}}{2^4}\frac{d^q m^2}{dm^q}\right\}+\\
&+\frac{f^{VII}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\left\{\frac{d^q m^7}{dm^q}-\frac{C^1\{1^2\ldots 5^2\}}{2^2}\frac{d^q m^5}{dm^q}+\frac{C^2\{1^2\ldots 5^2\}}{2^4}\frac{d^q m^3}{dm^q}-\frac{C^3\{1^2\ldots 5^2\}}{2^6}\frac{d^q m}{dm^q}\right\}+\\
&+\ \ldots\ldots
\end{aligned}\right| \tag{4}$$

Auch hier werden alle jene Glieder für gegebene Werthe von q verschwinden, wo q grösser als der Exponent von m ist.

Im Allgemeinen wird man selten Veranlassung haben, diese Formeln für andere Fälle als $q=1$ und $q=2$ anzuwenden. Unter der speziellen Voraussetzung: $q=1$, hat man in der Gleichung (2) (pag. 16) die folgenden Factoren:

$$\left.\begin{aligned}
N_1^3(n) &= \frac{1}{3!}\left\{-\frac{C^1\{2^2\}}{2^2}+3n^2\right\}\\
N_1^5(n) &= \frac{1}{5!}\left\{+\frac{C^2\{2^2, 4^2\}}{2^4}-3n^2\frac{C^1\{2^2, 4^2\}}{2^2}+5n^4\right\}\\
N_1^7(n) &= \frac{1}{7!}\left\{-\frac{C^3\{2^2\ldots 6^2\}}{2^6}+3n^2\frac{C^2\{2^2\ldots 6^2\}}{2^4}-5n^4\frac{C^1\{2^2\ldots 6^2\}}{2^2}+7n^6\right\}\\
N_1^9(n) &= \frac{1}{9!}\left\{+\frac{C^4\{2^2\ldots 8^2\}}{2^8}-3n^2\frac{C^3\{2^2\ldots 8^2\}}{2^6}+5n^4\frac{C^2\{2^2\ldots 8^2\}}{2^4}-7n^6\frac{C^1\{2^2\ldots 8^2\}}{2^2}+9n^8\right\}\\
&\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\\
N_1^4(n) &= \frac{1}{4!}\left\{-2\cdot\frac{C^1\{2^2\}}{2^2}+4n^2\right\}\\
N_1^6(n) &= \frac{1}{6!}\left\{+2\cdot\frac{C^2\{2^2, 4^2\}}{2^4}-4n^2\frac{C^1\{2^2, 4^2\}}{2^2}+6n^4\right\}
\end{aligned}\right| \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
N_1^8(n) &= \frac{1}{8!}\left\{-2\cdot\frac{C^3\{2^2\ldots6^2\}}{2^6} + 4n^2\frac{C^2\{2^2\ldots6^2\}}{2^4} - 6n^4\frac{C^1\{2^2\ldots6^2\}}{2^2} + 8n^6\right\}\\
N_1^{10}(n) &= \frac{1}{10!}\left\{+2\cdot\frac{C^4\{2^2\ldots8^2\}}{2^8} - 4n^2\frac{C^3\{2^2\ldots8^2\}}{2^6} + 6n^4\frac{C^2\{2^2\ldots8^2\}}{2^4} - 8n^6\frac{C^1\{2^2\ldots8^2\}}{2^2} + 10n^8\right\}\\
&\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke ist offenkundig und man erhält mit denselben

$$\begin{aligned}
w\cdot\frac{df(t)}{dt} &= f^{\mathrm{I}}(u+iw) + N_1^3(n)\,f^{\mathrm{III}}(u+iw) + N_1^5(n)\,f^{\mathrm{V}}(u+iw) + N_1^7(n)\,f^{\mathrm{VII}}(u+iw) + \ldots\ldots\\
&+ n\,\{f^{\mathrm{II}}(u+iw) + N_1^4(n)\,f^{\mathrm{IV}}(u+iw) + N_1^6(n)\,f^{\mathrm{VI}}(u+iw) + N_1^8(n)\,f^{\mathrm{VIII}}(u+iw) + \ldots.\}
\end{aligned} \quad 6)$$

Die Tafel I enthält die Logarithmen der hier entwickelten Werthe von $N_1^d(n)$ nach dem Argumente n und schreitet bis $N_1^{10}(n)$ fort, also bis zur Berücksichtigung zehnter Differenzen, was die Grenzen der gewöhnlichen Anwendung weit überschreitet. Die äussersten Argumente sind ± 0.25, weil, wie dies der Anblick der Formel zeigt, für die Fälle $n > \pm\frac{1}{4}$ die Rechnung bequemer und kürzer wird nach der Formel, die m enthält. Da n in den obigen Ausdrücken für die N-Coëfficienten durchaus quadratisch auftritt, so werden dieselben für alle positiven und negativen Werthe die gleichen. Die Tafel ist 7stellig von Herrn F. K. Ginzel berechnet worden, dem practischen Bedürfniss entsprechend aber auf 6 Stellen abgekürzt, so dass der Fehler der Tafel nicht häufig eine halbe Einheit der 6. Stelle betragen wird. Die Reihe selbst ist, um gleich die logarithmischen Werthe bequem tabuliren zu können, in zwei Reihen zerfällt; in der zweiten erscheint n als gemeinsamer Factor herausgehoben.

In analoger Weise wie aus 2) die Gleichungen 5) abgeleitet wurden, erhält man aus 4) (pag. 17) die Relationen

$$\left.\begin{aligned}
M_1^3(m) &= \frac{1}{3!}\left\{-\frac{C^1\{1^2\}}{2^2} + 3m^2\right\}\\
M_1^5(m) &= \frac{1}{5!}\left\{+\frac{C^2\{1^2, 3^2\}}{2^4} - 3m^2\frac{C^1\{1^2, 3^2\}}{2^2} + 5m^4\right\}\\
M_1^7(m) &= \frac{1}{7!}\left\{-\frac{C^3\{1^2, 5^2\}}{2^6} + 3m^2\frac{C^2\{1^2, 5^2\}}{2^4} - 5m^4\frac{C^1\{1^2, 5^2\}}{2^2} + 7m^6\right\}\\
M_1^9(m) &= \frac{1}{9!}\left\{+\frac{C^4\{1^2\ldots7^2\}}{2^8} - 3m^2\frac{C^3\{1^2\ldots7^2\}}{2^6} + 5m^4\frac{C^2\{1^2\ldots7^2\}}{2^4} - 7m^6\frac{C^1\{1^2\ldots7^2\}}{2^2} + 9m^8\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\\
M_1^4(m) &= \frac{1}{4!}\left\{-2\frac{C^1\{1^2, 3^2\}}{2^2} + 4m^2\right\}\\
M_1^6(m) &= \frac{1}{6!}\left\{+2\frac{C^2\{1^2\ldots5^2\}}{2^4} - 4m^2\frac{C^1\{1^2\ldots5^2\}}{2^2} + 6m^4\right\}\\
M_1^8(m) &= \frac{1}{8!}\left\{-2\frac{C^3\{1^2\ldots7^2\}}{2^6} + 4m^2\frac{C^2\{1^2\ldots7^2\}}{2^4} - 6m^4\frac{C^1\{1^2\ldots7^2\}}{2^2} + 8m^6\right\}\\
M_1^{10}(m) &= \frac{1}{10!}\left\{+2\frac{C^4\{1^2\ldots9^2\}}{2^8} - 4m^2\frac{C^3\{1^2\ldots9^2\}}{2^6} + 6m^4\frac{C^2\{1^2\ldots9^2\}}{2^4} - 8m^6\frac{C^1\{1^2\ldots9^2\}}{2^2} + 10m^8\right\}
\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

und mit denselben

$$w\frac{df(l)}{dl} = f^{\mathrm{I}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + M_1^3(m)f^{\mathrm{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + M_1^5(m)f^{\mathrm{V}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots$$
$$+ m\{f^{\mathrm{II}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + M_1^4(m)f^{\mathrm{IV}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + M_1^6(m)f^{\mathrm{VI}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\} \qquad 8)$$

Die logarithmischen M-Coëfficienten, die wie oben für positive und negative Werthe identisch werden, finden sich in Tafel II, und zwar mit dem Argumente m zwischen den Grenzen ∓ 0.25. Durch Benützung der Formeln 6) und 8) ist man daher in den Stand gesetzt, jeden geforderten ersten Differentialquotienten zu bestimmen.

Für $q = 2$ erhält man aus Gleichung 2)

$$\left.\begin{aligned}
N_2^4(n) &= \frac{1}{4!}\left\{-2\frac{C^1\{2^2\}}{2^2} + 3\cdot4\,n^2\right\}\\
N_2^6(n) &= \frac{1}{6!}\left\{+2\frac{C^2\{2^2,4^2\}}{2^4} - 3\cdot4\,n^2\frac{C^1\{2^2,4^2\}}{2^2} + 5\cdot6\,n^4\right\}\\
N_2^8(n) &= \frac{1}{8!}\left\{-2\frac{C^3\{2^2\ldots6^2\}}{2^6} + 3\cdot4\,n^2\frac{C^2\{2^2\ldots6^2\}}{2^4} - 5\cdot6\,n^4\frac{C^1\{2^2\ldots6^2\}}{2^2} + 7\cdot8\,n^6\right\}\\
N_2^{10}(n) &= \frac{1}{10!}\left\{+2\frac{C^4\{2^2\ldots8^2\}}{2^8} - 3\cdot4\,n^2\frac{C^3\{2^2\ldots8^2\}}{2^6} + 5\cdot6\,n^4\frac{C^2\{2^2\ldots8^2\}}{2^4} - 7\cdot8\,n^6\frac{C^1\{2^2\ldots8^2\}}{2^2} + 9\cdot10\,n^8\right\}\\
&\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\\
N_2^5(n) &= \frac{1}{5!}\left\{-2\cdot3\frac{C^1\{2^2,4^2\}}{2^2} + 4\cdot5\,n^2\right\}\\
N_2^7(n) &= \frac{1}{7!}\left\{+2\cdot3\frac{C^2\{2^2\ldots6^2\}}{2^4} - 4\cdot5\,n^2\frac{C^1\{2^2\ldots6^2\}}{2^2} + 6\cdot7\,n^4\right\}\\
N_2^9(n) &= \frac{1}{9!}\left\{-2\cdot3\frac{C^3\{2^2\ldots8^2\}}{2^6} + 4\cdot5\,n^2\frac{C^2\{2^2\ldots8^2\}}{2^4} - 6\cdot7\,n^4\frac{C^1\{2^2\ldots8^2\}}{2^2} + 8\cdot9\,n^6\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad 9)$$

und damit

$$w^2\frac{d^2f(l)}{dl^2} = f^{\mathrm{II}}(a+iw) + N_2^4(n)f^{\mathrm{IV}}(a+iw) + N_2^6(n)f^{\mathrm{VI}}(a+iw) + N_2^8(n)f^{\mathrm{VIII}}(a+iw) + \ldots$$
$$+ n\{f^{\mathrm{III}}(a+iw) + N_2^5(n)f^{\mathrm{V}}(a+iw) + N_2^7(n)f^{\mathrm{VII}}(a+iw) + N_2^9(n)f^{\mathrm{IX}}(a+iw) + \ldots\} \qquad 10)$$

Die Logarithmen der in diesen Ausdrücken auftretenden Coëfficienten sind in der Tafel III aufgenommen.

Ganz ähnlich ist in Gleichung 4) für $q = 2$

$$\left.\begin{aligned}
M_2^4(m) &= \frac{1}{4!}\left\{-2\frac{C^1\{1^2,3^2\}}{2^2} + 3\cdot4\,m^2\right\}\\
M_2^6(m) &= \frac{1}{6!}\left\{+2\frac{C^2\{1^2\ldots5^2\}}{2^4} - 3\cdot4\,m^2\frac{C^1\{1^2\ldots5^2\}}{2^2} + 5\cdot6\,m^4\right\}\\
M_2^8(m) &= \frac{1}{8!}\left\{-2\frac{C^3\{1^2\ldots7^2\}}{2^6} + 3\cdot4\,m^2\frac{C^2\{1^2\ldots7^2\}}{2^4} - 5\cdot6\,m^4\frac{C^1\{1^2\ldots7^2\}}{2^2} + 7\cdot8\,m^6\right\}\\
M_2^{10}(m) &= \frac{1}{10!}\left\{+2\frac{C^4\{1^2\ldots9^2\}}{2^8} - 3\cdot4\,m^2\frac{C^3\{1^2\ldots9^2\}}{2^6} + 5\cdot6\,m^4\frac{C^2\{1^2\ldots9^2\}}{2^4} - 7\cdot8\,m^6\frac{C^1\{1^2\ldots9^2\}}{2^2} + 9\cdot10\,m^8\right\}\\
&\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\\
M_2^5(m) &= \frac{1}{5!}\left\{-2\cdot3\frac{C^1\{1^2,3^2\}}{2^2} + 4\cdot5\,m^2\right\}
\end{aligned}\right\} \quad 11)$$

$$\left.\begin{aligned} M_2^7(m) &= \frac{1}{7!}\left\{+2\cdot3\,\frac{C^2\{1^2\ldots5^2\}}{2^4}-4\cdot5\,m^2\,\frac{C^1\{1^2\ldots5^2\}}{2^2}+6\cdot7\,m^4\right\}\\ M_2^9(m) &= \frac{1}{9!}\left\{-2\cdot3\,\frac{C^3\{1^2\ldots7^2\}}{2^6}+4\cdot5\,m^2\,\frac{C^2\{1^2\ldots7^2\}}{2^4}-6\cdot7\,m^4\,\frac{C^1\{1^2\ldots7^2\}}{2^2}+8\cdot9\,m^6\right\}\\ &\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \end{aligned}\right| \quad 11)$$

daher also der Ausdruck:

$$\begin{aligned} w^2\frac{d^2f(t)}{dt^2} = {} & f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)+M_2^4(m)\,f^{IV}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)+M_2^6(m)\,f^{VI}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)+\ldots\\ & +M_2^8(m)\,f^{VIII}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)+\ldots\\ & +m\,f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)+M_2^5(m)\,f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)+M_2^7(m)\,f^{VII}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)+\\ & +M_2^9(m)\,f^{IX}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)+\ldots \end{aligned} \quad 12)$$

dessen logarithmische Coëfficienten sich in der Tafel IV finden.

Indem so ganz allgemein die Berechnung irgend eines Differentialquotienten möglich ist, wird die Betrachtung der speciellen Fälle n und m gleich Null, keine weiteren Schwierigkeiten bieten; es soll auf die letzteren hier näher eingegangen werden, weil gerade diese speciellen Fälle in der Anwendung häufig hervortreten.

Man gelangt sofort zu den diesbezüglichen Ausdrücken, wenn man in den Gleichungen 2) und 4) (pag. 16, 17) nach Ausführung der angezeigten Differentiation beziehungsweise n und $m = 0$ setzt. Eine ganz einfache Ueberlegung zeigt, dass dann alle Differentialquotienten verschwinden, in denen der Exponent von n und m entweder kleiner oder grösser als q ist, und nur jene Coëfficienten übrig bleiben, wo der Exponent von n und m gleich q wird. Man erhält also, indem man in dem Ausdruck $a+(i+n)w = t$ den Werth $n = 0$ einführt, der Reihe nach für die verschiedenen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} w\,\frac{df(a+iw)}{d(a+iw)} &= f^{I}(a+iw)-\frac{C^1\{2^2\}}{2^2(3)!}\,f^{III}(a+iw)+\frac{C^2\{2^2,4^2\}}{2^4(5)!}\,f^{V}(a+iw)-\\ &\quad -\frac{C^3\{2^2\ldots6^2\}}{2^6(7)!}\,f^{VII}(a+iw)+\ldots\\ w^2\,\frac{d^2f(a+iw)}{d(a+iw)^2} &= f^{II}(a+iw)-2\,\frac{C^1\{2^2\}}{2^2(4)!}\,f^{IV}(a+iw)+2\,\frac{C^2\{2^2,4^2\}}{2^4(6)!}\,f^{VI}(a+iw)-\\ &\quad -2\cdot\frac{C^3\{2^2\ldots6^2\}}{2^6(8)!}\,f^{VIII}(a+iw)+\ldots\\ w^3\,\frac{d^3f(a+iw)}{d(a+iw)^3} &= f^{III}(a+iw)-2\cdot3\,\frac{C^1\{2^2\ldots4^2\}}{2^2(5)!}\,f^{V}(a+iw)+2\cdot3\,\frac{C^2\{2^2\ldots6^2\}}{2^4(7)!}\,f^{VII}(a+iw)-\\ &\quad -2\cdot3\,\frac{C^3\{2^2\ldots8^2\}}{2^6(9)!}\,f^{IX}(a+iw)+\ldots\\ w^4\,\frac{d^4f(a+iw)}{d(a+iw)^4} &= f^{IV}(a+iw)-2\cdot3\cdot4\,\frac{C^1\{2^2\ldots4^2\}}{2^2(6)!}\,f^{VI}(a+iw)+2\cdot3\cdot4\,\frac{C^2\{2^2\ldots6^2\}}{2^4(8)!}\,f^{VIII}(a+iw)-\\ &\quad -2\cdot3\cdot4\,\frac{C^3\{2^2\ldots8^2\}}{2^6(10)!}\,f^{X}(a+iw)+\ldots\\ &\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right| \quad 13a)$$

so dass das Gesetz der Fortschreitung klar vor Augen liegt. Da diese Coëfficienten eine erhöhte Bedeutung haben, so habe ich dieselben vollständig bis zur

20. Differenz angesetzt und zu diesem Ende die obigen Coëfficienten abkürzend geschrieben:

$$w^q \frac{d^q f(a+iw)}{d(a+iw)^q} = f^q(a+iw) + N_q^{q+2} f^{q+2}(a+iw) + N_q^{q+4} f^{q+4}(a+iw)$$
$$+ N_q^{q+6} f^{q+6}(a+iw) + \ldots \qquad 13b$$

In der folgenden Zusammenstellung sind die mitgetheilten Zahlen im Zähler und Nenner relative Primzahlen.

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$N_1^1 = +$	1 :	1	$N_2^2 = +$	1 :	1
$N_1^3 = -$	1 :	6	$N_2^4 = -$	1 :	12
$N_1^5 = +$	1 :	30	$N_2^6 = +$	1 :	90
$N_1^7 = -$	1 :	140	$N_2^8 = -$	1 :	560
$N_1^9 = +$	1 :	630	$N_2^{10} = +$	1 :	3150
$N_1^{11} = -$	1 :	2772	$N_2^{12} = -$	1 :	16632
$N_1^{13} = +$	1 :	12012	$N_2^{14} = +$	1 :	84084
$N_1^{15} = -$	1 :	51480	$N_2^{16} = -$	1 :	4 11840
$N_1^{17} = +$	1 :	2 18790	$N_2^{18} = +$	1 :	10 69110
$N_1^{19} = -$	1 :	9 23780	$N_2^{20} = -$	1 :	92 37800

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$N_3^3 = +$	1 :	1	$N_4^4 = +$	1 :	1
$N_3^5 = -$	1 :	4	$N_4^6 = -$	1 :	6
$N_3^7 = +$	7 :	120	$N_4^8 = +$	7 :	240
$N_3^9 = -$	41 :	3024	$N_4^{10} = -$	41 :	7560
$N_3^{11} = +$	479 :	1 51200	$N_4^{12} = +$	479 :	4 53600
$N_3^{13} = -$	59 :	79200	$N_4^{14} = -$	59 :	2 77200
$N_3^{15} = +$	2 66681 :	15135 12000	$N_4^{16} = +$	2 66681 :	60540 48000
$N_3^{17} = -$	63397 :	15135 12000	$N_4^{18} = -$	63397 :	68108 04000
$N_3^{19} = +$	97 78141 :	97 77287 52000	$N_4^{20} = +$	97 78141 :	488 86437 60000

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$N_5^5 = +$	1 :	1	$N_6^6 = +$	1 :	1
$N_5^7 = -$	1 :	3	$N_6^8 = -$	1 :	4
$N_5^9 = +$	13 :	144	$N_6^{10} = +$	13 :	240
$N_5^{11} = -$	139 :	6048	$N_6^{12} = -$	139 :	12096
$N_5^{13} = +$	37 :	6480	$N_6^{14} = +$	37 :	15120
$N_5^{15} = -$	4201 :	29 93760	$N_6^{16} = -$	4201 :	79 83360
$N_5^{17} = +$	37 39217 :	1 08972 86400	$N_6^{18} = +$	37 39217 :	3 26918 59200
$N_5^{19} = -$	3 64919 :	13589 14560	$N_6^{20} = -$	3 64919 :	1 45297 15200

	Zahler	Nenner		Zahler	Nenner
$N_7^7 = +$	1 :	1	$N_8^8 = +$	1 :	1
$N_7^9 = -$	5 :	12	$N_8^{10} = -$	1 :	3
$N_7^{11} = +$	31 :	240	$N_8^{12} = +$	31 :	360
$N_7^{13} = -$	311 :	8640	$N_8^{14} = -$	311 :	15120
$N_7^{15} = +$	2473 :	2 59200	$N_8^{16} = +$	2473 :	5 18400
$N_7^{17} = -$	4679 :	19 00800	$N_8^{18} = -$	4679 :	42 76800
$N_7^{19} = +$	58 39219 :	93405 31200	$N_8^{20} = +$	58 39219 :	2 33513 28000
$N_9^9 = +$	1 :	1	$N_{10}^{10} = +$	1 :	1
$N_9^{11} = -$	1 :	2	$N_{10}^{12} = -$	5 :	12
$N_9^{13} = +$	7 :	40	$N_{10}^{14} = +$	1 :	8
$N_9^{15} = -$	67 :	1260	$N_{10}^{16} = -$	67 :	2016
$N_9^{17} = +$	2021 :	1 34400	$N_{10}^{18} = +$	2021 :	2 41920
$N_9^{19} = -$	21713 :	53 22240	$N_{10}^{20} = -$	21713 :	106 44480
$N_{11}^{11} = +$	1 :	1	$N_{12}^{12} = +$	1 :	1
$N_{11}^{13} = -$	7 :	12	$N_{12}^{14} = -$	1 :	2
$N_{11}^{15} = +$	41 :	180	$N_{12}^{16} = +$	41 :	240
$N_{11}^{17} = -$	757 :	10080	$N_{12}^{18} = -$	757 :	15120
$N_{11}^{19} = +$	5473 :	2 41920	$N_{12}^{20} = +$	5473 :	4 03200
$N_{13}^{13} = +$	1 :	1	$N_{14}^{14} = +$	1 :	1
$N_{13}^{15} = -$	2 :	3	$N_{14}^{16} = -$	7 :	12
$N_{13}^{17} = +$	23 :	80	$N_{14}^{18} = +$	161 :	720
$N_{13}^{19} = -$	619 :	6048	$N_{14}^{20} = -$	619 :	8640
$N_{15}^{15} = +$	1 :	1	$N_{16}^{16} = +$	1 :	1
$N_{15}^{17} = -$	3 :	4	$N_{16}^{18} = -$	2 :	3
$N_{15}^{19} = +$	17 :	48	$N_{16}^{20} = +$	17 :	60
$N_{17}^{17} = +$	1 :	1	$N_{18}^{18} = +$	1 :	1
$N_{17}^{19} = -$	5 :	6	$N_{18}^{20} = -$	3 :	4

Stellt man in den Gleichungen 4) pag. 17 statt l den Werth $a + (i + \frac{1}{2})w$ ein, indem hiebei $m = o$ vorausgesetzt ist, so finden sich die Differentialquotienten

$$w\frac{df(a+[i+\frac{1}{2}]w)}{d(a+[i+\frac{1}{2}]w)} = f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \frac{C^1\{1^2\}}{2^2(3)!}f^{\mathrm{III}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + $$
$$+ \frac{C^2\{1^2, 3^2\}}{2^4(5)!}f^{\mathrm{V}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \frac{C^3\{1^2 \ldots 5^2\}}{2^6(7)!}f^{\mathrm{VII}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots$$

$$w^2\frac{d^2f(a+[i+\frac{1}{2}]w)}{d(a+[i+\frac{1}{2}]w)^2} = f^{\mathrm{II}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - 2\frac{C^1\{1^2, 3^2\}}{2^2(4)!}f^{\mathrm{IV}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + $$
$$+ 2\frac{C^2\{1^2 \ldots 5^2\}}{2^4(6)!}f^{\mathrm{VI}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - 2\frac{C^3\{1^2 \ldots 7^2\}}{2^6(8)!}f^{\mathrm{VIII}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots$$

$$w^3\frac{d^3f(a+[i+\frac{1}{2}]w)}{d(a+[i+\frac{1}{2}]w)^3} = f^{\mathrm{III}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - 2\cdot 3\frac{C^1\{1^2, 3^2\}}{2^2(5)!}f^{\mathrm{V}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + $$
$$+ 2\cdot 3\frac{C^2\{1^2 \ldots 5^2\}}{2^4(7)!}f^{\mathrm{VII}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - 2\cdot 3\frac{C^3\{1^2 \ldots 7^2\}}{2^6(9)!}f^{\mathrm{IX}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots \qquad (14a)$$

$$w^4\frac{d^4f(a+[i+\frac{1}{2}]w)}{d(a+[i+\frac{1}{2}]w)^4} = f^{\mathrm{IV}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - 2\cdot 3\cdot 4\frac{C^1\{1^2 \ldots 5^2\}}{2^2(6)!}f^{\mathrm{VI}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + $$
$$+ 2\cdot 3\cdot 4\frac{C^2\{1^2 \ldots 7^2\}}{2^4(8)!}f^{\mathrm{VIII}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - 2\cdot 3\cdot 4\frac{C^3\{1^2 \ldots 9^2\}}{2^6(10)!}f^{\mathrm{X}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + $$

. . . .

In ähnlicher Weise wie früher erhält man allgemein

$$w^q\frac{d^qf(a+[i+\frac{1}{2}]w)}{d(a+[i+\frac{1}{2}]w)^q} = f^q(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + M_q^{q+2}f^{q+2}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) +$$
$$M_q^{q+4}f^{q+4}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots \qquad (14b)$$

Die in diesem Ausdrucke enthaltenen M-Coëfficienten folgen hier, wie vorher die N-Coëfficienten, im Zähler und Nenner als relative Primzahlen mitgetheilt:

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$M_0^0 = +$	1 :	1	$M_1^1 = +$	1 :	1
$M_0^2 = -$	1 :	8	$M_1^3 = -$	1 :	24
$M_0^4 = +$	3 :	128	$M_1^5 = +$	3 :	640
$M_0^6 = -$	5 :	1024	$M_1^7 = -$	5 :	7168
$M_0^8 = +$	35 :	32768	$M_1^9 = +$	35 :	2 94912
$M_0^{10} = -$	63 :	2 62144	$M_1^{11} = -$	63 :	28 83584
$M_0^{12} = +$	231 :	41 94304	$M_1^{13} = +$	231 :	545 25952
$M_0^{14} = -$	429 :	335 54432	$M_1^{15} = -$	143 :	1677 72160
$M_0^{16} = +$	6435 :	21474 83648	$M_1^{17} = +$	6435 :	3 65072 22016
$M_0^{18} = -$	12155 :	1 71798 69184	$M_1^{19} = -$	12155 :	32 64175 14496
$M_0^{20} = +$	46189 :	27 48779 06944			

	Zähler		Nenner
$M_2^2 = +$	1	:	1
$M_2^4 = -$	5	:	24
$M_2^6 = +$	259	:	5760
$M_2^8 = -$	3229	:	3 22560
$M_2^{10} = +$	1 17469	:	516 09600
$M_2^{12} = -$	71 56487	:	1 36249 34400
$M_2^{14} = +$	21308 98831	:	1983 79044 86400
$M_2^{16} = -$	609 97921	:	211 60431 45216
$M_2^{18} = +$	11 14330 03757	:	20 72029 14779 55072
$M_2^{20} = -$	2558 72967 81661	:	15717 12380 32458 54720

	Zahler		Nenner
$M_3^3 = +$	1	:	1
$M_3^5 = -$	1	:	8
$M_3^7 = +$	37	:	1920
$M_3^9 = -$	3229	:	9 67680
$M_3^{11} = +$	10679	:	172 03200
$M_3^{13} = -$	5 50409	:	45416 44800
$M_3^{15} = +$	24308 98831	:	9918 95224 32000
$M_3^{17} = -$	35 88113	:	70 53477 15072
$M_3^{19} = +$	71438 42303	:	6 90670 48259 85024
$M_4^4 = +$	1	:	1
$M_4^6 = -$	7	:	24
$M_4^8 = +$	47	:	640
$M_4^{10} = -$	17281	:	9 67680
$M_4^{12} = +$	19 97021	:	4644 86400
$M_4^{11} = -$	12 06053	:	11678 51520
$M_4^{16} = +$	2 46157 17239	:	9918 95224 32000
$M_4^{18} = -$	42 65404 17343	:	7 14164 56151 04000
$M_4^{20} = +$	7092 35115 02753	:	5550 07887 80236 80000
$M_5^5 = +$	1	:	1
$M_5^7 = -$	5	:	24
$M_5^9 = +$	17	:	1152
$M_5^{11} = -$	1571	:	1 93536
$M_5^{13} = +$	1 53617	:	928 97280
$M_5^{15} = -$	12 06053	:	35035 54560
$M_5^{17} = +$	14479 83307	:	1083 79044 86400
$M_5^{19} = -$	2 24494 97227	:	1 42832 91230 20800
$M_6^6 = +$	1	:	1
$M_6^8 = -$	3	:	8
$M_6^{10} = +$	209	:	1920
$M_6^{12} = -$	28067	:	9 67680
$M_6^{14} = +$	2 30413	:	309 65760
$M_6^{16} = -$	153 13957	:	81749 60640
$M_6^{18} = +$	24 99387 65093	:	53562 34211 32800
$M_6^{20} = -$	7 07268 85883	:	61214 10527 23200

	Zähler		Nenner
$M_7^7 = +$	1	:	1
$M_7^9 = -$	7	:	24
$M_7^{11} = +$	133	:	1920
$M_7^{13} = -$	2159	:	1 38240
$M_7^{15} = +$	2 30443	:	663 55200
$M_7^{17} = -$	9 00821	:	11678 51520
$M_7^{19} = +$	1 31540 71847	:	7031 70315 90400
$M_8^8 = +$	1	:	1
$M_8^{10} = -$	11	:	24
$M_8^{12} = +$	871	:	5760
$M_8^{14} = -$	8521	:	1 93536
$M_8^{16} = +$	55 96013	:	4644 86400
$M_8^{18} = -$	3010 80857	:	12 26244 09600
$M_8^{20} = +$	31 01002 58731	:	38258 81579 52000
$M_9^9 = +$	1	:	1
$M_9^{11} = -$	3	:	8
$M_9^{13} = +$	67	:	640
$M_9^{15} = -$	8521	:	3 22560
$M_9^{17} = +$	3 29389	:	516 09600
$M_9^{19} = -$	205 83203	:	1 30249 34400

	Zähler		Nenner
$M_{10}^{10} = +$	1	:	1
$M_{10}^{12} = -$	13	:	24
$M_{10}^{14} = +$	77	:	384
$M_{10}^{16} = -$	4067	:	64512
$M_{10}^{18} = +$	5 74123	:	309 65760
$M_{10}^{20} = -$	344 30621	:	66178 25280

	Zähler		Nenner
$M_{11}^{11} = +$	1	:	1
$M_{11}^{13} = -$	11	:	24
$M_{11}^{15} = +$	847	:	5760
$M_{11}^{17} = -$	2051	:	64512
$M_{11}^{19} = +$	3 32387	:	309 65760

	Zähler		Nenner
$M_{12}^{12} = +$	1	:	1
$M_{12}^{14} = -$	5	:	8
$M_{12}^{16} = +$	493	:	1920
$M_{12}^{18} = -$	85177	:	9 67680
$M_{12}^{20} = +$	6 04841	:	221 18400

	Zähler		Nenner
$M_{13}^{13} = +$	1	:	1
$M_{13}^{15} = -$	13	:	24
$M_{13}^{17} = +$	377	:	1920
$M_{13}^{19} = -$	58279	:	9 67680

	Zähler		Nenner
$M_{14}^{14} = +$	1	:	1
$M_{14}^{16} = -$	17	:	24
$M_{14}^{18} = +$	1843	:	5760
$M_{14}^{20} = -$	16333	:	1 38240

	Zähler		Nenner
$M_{15}^{15} = +$	1	:	1
$M_{15}^{17} = -$	5	:	8
$M_{15}^{19} = +$	97	:	384

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$M_{16}^{16} = +$	1 :	1	$M_{17}^{17} = +$	1 :	1
$M_{16}^{18} = -$	19 :	24	$M_{17}^{19} = -$	17 :	24
$M_{16}^{20} = +$	749 :	1920			

$M_{18}^{18} = +$	1 :	1	$M_{19}^{19} = +$	1 :	1
$M_{18}^{20} = -$	7 :	8			

Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass die bisherigen Entwicklungen sofort auch die Möglichkeit an die Hand geben, eine Funktion nach steigenden Potenzen von n oder m zu entwickeln. Am bequemsten werden die Formeln, wenn man von einem Argumentwerthe oder dem Mittel derselben ausgeht, denn es ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$f(a+(i+n)w) = f(a+iw) + nw\frac{df(a+iw)}{d(a+iw)} + \frac{n^2w^2}{1\cdot 2}\frac{d^2f(a+iw)}{d(a+iw)^2} + \cdots$$

und analog:

$$\left.\begin{aligned} f(a+(i+\tfrac{1}{2}+m)w) = F(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &+ mw\frac{df(a+(i+\frac{1}{2})w)}{d(a+(i+\frac{1}{2})w)} + \\ &+ \frac{m^2w^2}{1\cdot 2}\frac{d^2f(a+(i+\frac{1}{2})w)}{d(a+(i+\frac{1}{2})w)^2} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

wobei zu beachten ist, dass in der letztern Formel statt $f(a+(i+\frac{1}{2})w)$ geschrieben wurde $F(a+(i+\frac{1}{2})w)$, da nach der Idee des Taylor'schen Lehrsatzes offenbar unter dieser Funktion der Werth der vorgelegten Funktion für das Mittel der Argumente zu verstehen ist; denn durch die Bezeichnung mittels des Buchstabens f könnte eine Verwechslung mit dem arithmetischen Mittel zweier Funktionswerthe eintreten; in der unten folgenden Formel 17) ist auf diesen Umstand Rücksicht genommen und in der That unter $f(a+(i+\frac{1}{2})w)$ das arithmetische Mittel zweier Funktionswerthe zu verstehen.

Man findet leicht, dass mit Rücksicht auf die früher gewählten Bezeichnungen pag. 21 (13b) und pag. 23 (14b)) die folgenden Relationen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} f(a+(i+n)w) = f(a+iw) &+ n\left\{f'(a+iw) + N_1^3 f'''(a+iw) + N_1^5 f^{V}(a+iw) + \cdots\right\} \\ &+ \frac{n^2}{1\cdot 2}\left\{f''(a+iw) + N_2^4 f^{IV}(a+iw) + N_2^6 f^{VI}(a+iw) + \cdots\right\} \\ &+ \frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{f'''(a+iw) + N_3^5 f^{V}(a+iw) + N_3^7 f^{VII}(a+iw) + \cdots\right\} \\ &+ \frac{n^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left\{f^{IV}(a+iw) + N_4^6 f^{VI}(a+iw) + N_4^8 f^{VIII}(a+iw) + \cdots\right\} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad 16)$$

und:

$$
\begin{aligned}
f(a+[i+\tfrac{1}{2}+m]w) = &\Big\{ f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + M_0^2 f^{II}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \\
&\quad + M_0^4 f^{IV}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots \Big\} \\
&+ m\Big\{ f^{I}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + M_1^3 f^{III}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \\
&\quad + M_1^5 f^{V}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots \Big\} \\
&+ \frac{m^2}{1\cdot 2}\Big\{ f^{II}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + M_2^4 f^{IV}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \\
&\quad + M_2^6 f^{VI}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots \Big\} \\
&+ \frac{m^3}{1\cdot 2\cdot 3}\Big\{ f^{III}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + M_3^5 f^{V}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \\
&\quad + M_3^7 f^{VII}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots \Big\} \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

wobei die hier auftretenden N und M-Coëfficienten der oben angeführten Zusammenstellung zu entnehmen sind und wie schon bemerkt, unter $f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$ in der That das arithmetische Mittel zweier Funktionswerthe zu verstehen ist.

Es sollen nun die vorstehend entwickelten Formeln durch ausführliche Beispiele erläutert werden.

Ich benütze hiefür die Störungen, die der Planet (62) Erato in der X-Coordinate erfährt, die mit ξ bezeichnet werden sollen und in Einheiten der 7. Decimale zu verstehen sind. Die angeführten Zahlen können leicht aus den später bei der Störungsrechnung gegebenen ausführlichen Beispielen hergeholt werden. Man hat so, wenn man die Differenzwerthe bildet:

	ξ	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}
1871 April 26	+ 230820.18								
		— 44270.38							
Juni 5	+ 186549.80		— 8882.24						
		— 53152.62		+ 1695.32					
Juli 15	+ 133397.18		— 7186.92		+ 893.35				
		— 60339.54		+ 2588.67		97.65			
Aug. 24	+ 73057.64		— 4598.25		+ 795.70		— 186.28		
		— 64937.79		+ 3384.37		283.93		+ 11.42	
Octob. 3	+ 8119.85		— 1213.88		+ 511.77		— 174.86		+ 65.50
		— 66151.67		+ 3896.14		— 458.79		+ 76.92	
Nov. 12	— 58031.82		+ 2682.26		+ 52.98		— 97.94		
		— 63469.41		+ 3949.12		— 556.73			
Dec. 22	— 121501.23		+ 6631.38		— 503.75				
		— 56838.03		+ 3445.37					
1872 Jan. 31	— 178339.26		+ 10076.75						
		— 46761.28							
März 11	— 225100.54								

Um vorerst die Formel 13 (pag. 20) durch ein Beispiel zu belegen, soll der erste und zweite Differentialquotient von ξ für 1871 October 3 ermittelt werden. Da hier das Argument für ξ die Zeit ist, so ist es klar, dass diese Differentialquotienten nach der Zeit verstanden sind, und um sofort in den obigen Formeln w der Einheit gleich setzen zu können, soll für die Zeiteinheit in den hier folgenden Beispielen stets das gewählte Intervall von 40 Tagen angenommen werden; es wird daher, wenn man die Differentialquotienten auf den mittlern Sonnentag als Einheit

beziehen will, der erhaltene erste, zweite, dritte .... Differentialquotient beziehungsweise durch 10, 10^2, 10^3 .... zu dividiren sein.

Für den ersten Differentialquotienten stellt sich also die Rechnung wie folgt:

$$\begin{aligned} f^{\text{I}}(a+iw) &= -\ 65514.73 \\ N_1{}^3 f^{\text{III}}(a+iw) &= -\quad 606.71 \\ N_1{}^5 f^{\text{V}}(a+iw) &= -\quad 12.38 \\ N_1{}^7 f^{\text{VII}}(a+iw) &= -\quad 0.32 \\ \hline 10^7 \cdot \frac{d\xi}{dt} &= -\ 66164.14 \end{aligned}$$

Für den zweiten Differentialquotienten wird:

$$\begin{aligned} f^{\text{II}}(a+iw) &= -\ 1213.88 \\ N_2{}^4 f^{\text{IV}}(a+iw) &= -\quad 42.65 \\ N_2{}^6 f^{\text{VI}}(a+iw) &= -\quad 1.94 \\ N_2{}^8 f^{\text{VIII}}(a+iw) &= -\quad 0.12 \\ \hline 10^7 \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\ 1258.59 \end{aligned}$$

Zur Erläuterung der Formel 14 (pag. 23) wählen wir als Datum 1871 Sept. 13, also ein Zeitmoment, welches in die Mitte eines Intervalls fällt; man erhält, indem man wieder als Zeiteinheit 40 Tage ansetzt, für den ersten Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} f^{\text{I}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &= -\ 64937.79 \\ M_1{}^3 f^{\text{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &= -\quad 141.02 \\ M_1{}^5 f^{\text{V}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &= -\quad 1.33 \\ M_1{}^7 f^{\text{VII}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &= -\quad 0.01 \\ \hline 10^7 \cdot \frac{d\xi}{dt} &= -\ 65080.15 \end{aligned}$$

Für den zweiten Differentialquotienten stellt sich die Rechnung wie folgt:

$$\begin{aligned} f^{\text{II}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &= -\ 2906.06 \\ M_2{}^4 f^{\text{IV}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &= -\quad 136.10 \\ M_2{}^6 f^{\text{VI}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &= -\quad 8.12 \\ M_2{}^8 f^{\text{VIII}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) &= -\quad 0.66 \\ \hline 10^7 \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\ 3051.03 \end{aligned}$$

(die 8. Differenz constant vorausgesetzt).

Um ein Beispiel für die Anwendung der Formel 6 (pag. 18) zu erhalten, soll der erste Differentialquotient der oben hingeschriebenen ξ Funktionen entwickelt werden für das Datum 1871 Sept. 23. Es ist also, indem man von October 3 als nächstliegenden Werth ausgeht, $n = -0.25$ anzunehmen; man gelangt hiermit bis an die Grenze der N Tafeln (Tafel I) und man sieht, dass mit derselben Berechtigung als Ausgangspunkt das arithmetische Mittel zweier Argumente, nämlich Sept. 13 hätte gewählt werden können; in der That wird in der Folge von dieser Wahl Gebrauch gemacht werden. Die Rechnung stellt sich wie folgt, indem die 8. Differenz als constant angenommen und überall, wo die Bildung der arithmetischen Mittel auf eine halbe Einheit der 2. Decimale führte, dieselbe fortgelassen wurde:

$d \ldots\ldots$	3	5	7
$\log f^d(a+iw)$	3.501131	$2_n500737$	1.64513
$\log N_1^d(-0.25)$	$0_n131672$	8.400656	7_n73020

$d \ldots\ldots$	4	6	8
$\log f^d(a+iw)$	2.709075	2_n24260	1.810
$\log N_1^d(-0.25)$	$8_n862827$	7.97348	7_n173

$f^{I}(a+iw)$	$= -65541.73$	$f^{II}(a+iw)$	$= -1213.88$
$N_1^3(-0.25)f^{III}(a+iw)$	$= -402.05$	$N_1^4(-0.25)f^{IV}(a+iw)$	$= -37.32$
$N_1^5(-0.25)f^{V}(a+iw)$	$= -9.54$	$N_1^6(-0.25)f^{VI}(a+iw)$	$= -1.65$
$N_1^7(-0.25)f^{VII}(a+iw)$	$= -0.24$	$N_1^8(-0.25)f^{VIII}(a+iw)$	$= -0.10$
S_u	$= -66047.46$	S_g	$= -1252.05$
$u\,S_g$	$= +313.24$	$\log S_g$	$= 3_n097633$
$10^7 \cdot \frac{d\xi}{dt}$	$= -65734.22$	$\log u$	$= 9_n397940$

Es ist hiebei klar, dass die hier und in den folgenden Beispielen logarithmisch ausgeführte Multiplikation von S_g mit u nur der Allgemeinheit halber durchgeführt ist, während in dem speciellen hier vorliegenden Falle natürlich die directe Division von S_g durch 4 kürzer wäre.

Zur Erläuterung der Formel (10) pag. 19 soll der zweite Differentialquotient der ξ-Funktion für das Datum 1871 Sept. 23, October 3 als Ausgangspunkt genommen, berechnet werden. Man erhält mit Benutzung der Tafel III:

$d \ldots\ldots$	4	6	8
$\log f^d(a+iw)$	2.709075	2_n24260	1.810
$\log N_2^d(-0.25)$	$8_n710090$	7.78287	6_n961

$d \ldots\ldots$	5	7
$\log f^d(a+iw)$	$2_n500737$	1.64513
$\log N_2^d(-0.25)$	$0_n379457$	8.73052

$f^{II}(a+iw)$	$= -1213.88$	$f^{III}(a+iw)$	$= +3640.25$
$N_2^4(-0.25)f^{IV}(a+iw)$	$= -26.05$	$N_2^5(-0.25)f^{V}(a+iw)$	$= +88.96$
$N_2^6(-0.25)f^{VI}(a+iw)$	$= -1.06$	$N_2^7(-0.25)f^{VII}(a+iw)$	$= +2.42$
$N_2^8(-0.25)f^{VIII}(a+iw)$	$= -0.06$	S_g	$= +3731.63$
S_u	$= -1241.05$	$\log S_g$	$= 3.571898$
$u\,S_g$	$= -932.91$	$\log u$	$= 9_n397940$
$10^7 \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}$	$= -2174.56$		

Will man nun dieselben Differentialquotienten beziehungsweise nach (8) und (12) pag. 19, 20 rechnen, so wird man für den ersten Differentialquotienten haben, indem man beachtet, dass der Ausgangspunkt Sept. 13, also $m = +\frac{1}{4}$ anzunehmen ist mit Hilfe der Tafel II:

d	3	5	7
$\log f^d(a+(i+\frac{1}{2})w)$	3.529478	2_n45321	1.0577
$\log M_1^d(+0.25)$	$8_n017729$	6.97498	6_n1103

d	4	6	8
$\log f^d(a+(i+\frac{1}{2})w)$	2.815398	2_n25665	1.8162
$\log M_1^d(+0.25)$	$9_n296482$	8.62283	7_n9665

$$f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 64937.79$$
$$M_1^3(+0.25)\, f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 35.25$$
$$M_1^5(+0.25)\, f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 0.27$$
$$M_1^7(+0.25)\, f^{VII}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = \ 0$$
$$S_u = -\ 64973.31$$
$$m\, S_g = -\ 760.91$$
$$10^7 \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = -\ 65734.22$$

$$f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 2906.06$$
$$M_1^4(+0.25)\, f^{IV}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 129.38$$
$$M_1^6(+0.25)\, f^{VI}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 7.58$$
$$M_1^8(+0.25)\, f^{VIII}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 0.61$$
$$S_g = -\ 3043.63$$
$$\log S_g = 3_n483392$$
$$\log m = 9.397940$$

Für den zweiten Differentialquotienten für dasselbe Datum hat man zu rechnen nach (12) pag. 20) unter Zuziehung der Tafel IV:

d	4	6	8
$\log f^d(a+(i+\frac{1}{2})w)$	2.815398	2_n25665	1.8162
$\log M_2^d(+0.25)$	$9_n248178$	8.55646	7_n8908

d	5	7
$\log f^d(a+(i+\frac{1}{2})w)$	2_n45321	1.0577
$\log M_2^d(+0.25)$	9_n05912	8.2338

$$f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 2906.06$$
$$M_2^4(+0.25)\, f^{IV}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 115.76$$
$$M_2^6(+0.25)\, f^{VI}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 6.50$$
$$M_2^8(+0.25)\, f^{VIII}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 0.51$$
$$S_u = -\ 3028.83$$
$$m\, S_g = +\ 854.28$$
$$10^7 \cdot \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\ 2174.55$$

$$f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = +\ 3384.37$$
$$M_2^5(+0.25)\, f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = +\ 32.53$$
$$M_2^7(+0.25)\, f^{VII}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = +\ 0.20$$
$$S_g = +\ 3417.10$$
$$\log S_g = 3.533658$$
$$\log m = 9.397940$$

Vergleicht man die nach den beiden Formelsystemen erhaltenen Resultate, so wird man die befriedigenste Uebereinstimmung finden.

Schliesslich sollen die Formeln (16) und (17) (pag. 26, 27) an dem gewählten Beispiele erläutert werden; indem man 1871 Octob. 3 als Ausgangspunkt annimmt und sich überall auf die zweite Decimale beschränkt, stellt sich die Rechnung wie folgt:

d =	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^d(a+iw)$ =	− 65544.73	− 1213.88	+ 3640.25	+ 511.77	− 371.36	− 174.86	+ 44.17	+ 65.50
$N_d^{(2+d)} f^{(2+d)}(a+iw)$ =	− 606.71	− 42.65	+ 92.84	+ 29.14	− 14.72	− 16.37		
$N_d^{(4+d)} f^{(4+d)}(a+iw)$ =	− 12.38	− 1.94	+ 2.58	+ 1.91				
$N_d^{(6+d)} f^{(6+d)}(a+iw)$ =	− 0.32	− 0.12						
	− 66164.14	− 1258.59	+ 3735.67	+ 542.82	− 386.08	− 191.23	+ 44.17	+ 65.50
Divisor . . .	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Dividirt man durch die entsprechenden als Divisoren angesetzten Factoriellen, so wird, wenn man auch hier nicht über die 2. Decimale hinausgeht, indem man bei solchen Entwicklungen t selten die Einheit überschreiten lässt:

$$\begin{aligned} \xi = + 8119.85 &- 66164.14\,t \\ &- 629.29\,t^2 \\ &+ 622.61\,t^3 \\ &+ 22.62\,t^4 \\ &- 3.22\,t^5 \\ &- 0.27\,t^6 \\ &+ 0.01\,t^7 \end{aligned}$$

für t gilt als Einheit 40 Tage; $t = 0$ für 1871 Oct. 3.

Als Probe kann man den Werth ξ für Aug. 24 $t = -1$ und Novbr. 12 $t = +1$ berechnen; man erhält

Aug. 24 = + 73057.65
Nov. 12 = − 58031.83,

was mit den zu Grunde gelegten Werthen hinreichend nahe stimmt.

Nimmt man aber als Ausgangspunkt 1871 Septbr. 13, so hat man nach Formel 17 pag. 27 zu rechnen:

d. . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^d(a+i+\frac{1}{2}w)$	+40588.74	−64937.79	−2906.06	+3384.37	+653.73	283.93	180.57	+11.42	+65.50
$M_d^{(2+d)}f^{(2+d)}(a+i+\frac{1}{2}w)$	+363.26	−141.02	−136.19	+35.49	+52.67	−2.38	24.56		
$M_d^{(4+d)}f^{(4+d)}(a+i+\frac{1}{2}w)$	+15.32	−1.33	−8.12	+0.22	+4.81				
$M_d^{(6+d)}f^{(6+d)}(a+i+\frac{1}{2}w)$	+0.88	−0.01	−0.66						
$M_d^{(8+d)}f^{(8+d)}(a+i+\frac{1}{2}w)$	+0.07								
	+40968.27	−65080.15	−3051.03	+3420.08	+711.21	−286.31	205.13	+11.42	+65.50
Divisor . .	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Es ist also

$$\begin{aligned} \xi = + 40968.27 &- 65080.15\,t \\ &- 1525.51\,t^2 \\ &+ 570.01\,t^3 \\ &+ 29.63\,t^4 \\ &- 2.39\,t^5 \\ &- 0.28\,t^6 \end{aligned}$$

für t gilt als Einheit 40 Tage; $t = 0$ für 1871 Sept. 13.

Rechnet man als Probe die Werthe der Funktion für Aug. 24 ($t = -0.5$) und October 3 ($t = +0.5$), so findet sich in guter Uebereinstimmung

Aug. 24 = + 73057.64
Octob. 3 = + 8119.84.

§. 5. Ermittlung der numerischen Integrale einer Funktion.

A. Einfache Integrale.

Integrirt man die Gleichung (1) (pag. 15), nachdem man links mit

$$dI = d(a + (i+n)w)$$

rechts mit dem gleichwerthigen

$$w\,dn$$

multiplicirt hat, so findet sich sogleich

$$\frac{1}{w}\int f(a+(i+n)w)\,dI = n f(a+iw) + \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p}}{2^{2(d-p)}(2d-1)!\,(2p)!}\, C^{d-p}_{\{2^2,4^2,\ldots,(2d-2)^2\}} f^{(2d-1)}(a+iw)$$
$$+ \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p+1}}{2^{2(d-p)}(2d)!\,(2p+1)!}\, C^{d-p}_{\{2^2,4^2,\ldots,(2d-2)^2\}} f^{(2d)}(a+iw) + J_n^1, \qquad (1)$$

wobei unter J_n^1 die Integrationsconstante zu verstehen ist. Es ist klar, dass bei dem vorliegenden Probleme die Integration zwischen bestimmten Grenzen nur eine praktische Bedeutung hat, dass demnach, wenn man sich auf die einfache Integration beschränkt, die Integrationsconstante aus dem Resultate herausfällt; geht man aber auf die doppelten und mehrfachen (eigentlich iterirten) Integrale über, so wird man die Bestimmung von J_n^1 nicht umgehen können. Zu ihrer Bestimmung kann man leicht die Bedingung heranziehen, dass für $n = 0$

$$J_n^1 = \frac{1}{w}\int^{a+iw} f(a+(i+n)w)\,dI, \qquad (2)$$

d. h. die Integrationsconstante J_n^1 erhält stets den Werth des Integrales, den dasselbe für die Grenze $a + iw$ annimmt, eine Bedingung, die weiter unten eine Bestimmung der Constante ermöglichen wird.

Behandelt man in ähnlicher Weise die Gleichung (5) (pag. 15) und beachtet dass

$$dI = d(a+(i+n)w) = d(a+(i+\tfrac{1}{2}+m)w) = w\,dm$$

so wird

$$\frac{1}{w}\int f(a+(i+n)w)\,dI = m f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) +$$
$$\sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} m^{2p}}{2^{2(d-p)}(2d-1)!\,(2p)!}\, C^{d-p}_{\{1^2,3^2,\ldots,(2d-3)^2\}} f^{(2d-1)}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) +$$
$$+ \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} m^{2p+1}}{2^{2(d-p)}(2d)!\,(2p+1)!}\, C^{d-p}_{\{1^2,3^2,\ldots,(2d-1)^2\}} f^{(2d)}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + J_m^1. \qquad (3)$$

Für die Auswerthung der Integrationsconstante hat man (ähnlich wie früher) für $m = 0$ die Bedingung

$$J_m^1 = \frac{1}{w}\int^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(a+(i+n)w)\,dI \qquad (4)$$

Es sollen vorerst die einfachen bestimmten Integrale, die sich aus den obigen Relationen (1) und (3) (pag. 32) ergeben, vorgenommen werden. Man wird zuerst zu beachten haben, dass man sowohl für n als auch für m ohne Nachtheil für die Genauigkeit der Rechnung die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreiten darf, denn sonst würde jeder Fehler in dem Differenzwerthe vergrössert auf das Resultat übergehen. Nimmt man aber für n und m als Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$, was offenbar möglich ist, so wird dadurch die Genauigkeit der numerischen Rechnung wesentlich gefördert erscheinen.

Die obigen Formeln wird man im Allgemeinen nur anzuwenden haben, sobald für n und m willkürliche Angaben vorliegen, dieselben werden sich aber wesentlich vereinfachen, wenn man, wie dies meistens in der Anwendung gestattet ist, nur von speciellen Werthen für n und m Gebrauch macht. Setzt man die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ ein, so findet sich sofort aus (1) und (3) (pag. 32):

$$\frac{1}{w}\int\limits_{a+(i-\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(a+(i+n)w)\,dl = f(a+iw) + \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\, f^{2d}(a+iw) \qquad 5)$$

$$\frac{1}{w}\int\limits_{a+iw}^{a+(i+1)w} f(a+(i+n)w)\,dl = f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, C^{d-p}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\, f^{2d}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) \,. \qquad 6)$$

Man wird aber in der Anwendung meist gezwungen sein, die Integration auf viel weitere Grenzen auszudehnen, als dies oben geschehen ist, und zu diesem Ende wird man für i die Reihe der ganzen Zahlen eintreten lassen und sich erinnern, dass für die vorgelegte continuirliche Funktion ist:

$$\int\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl = \int\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+\frac{1}{2}w} f(l)\,dl + \int\limits_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\frac{3}{2}w} f(l)\,dl + \ldots + \int\limits_{a+(i-\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl \,.$$

$$\int\limits_{a}^{a+iw} f(l)\,dl = \int\limits_{a}^{a+w} f(l)\,dl + \int\limits_{a+w}^{a+2w} f(l)\,dl + \ldots + \int\limits_{a+(i-1)w}^{a+iw} f(l)\,dl \,.$$

Wenn man von diesen Relationen in (5) und (6) Gebrauch macht und beachtet, dass durch diese Zerlegung die Factoren der Differenzwerthe nicht abgeändert werden und dass nur die Differenzwerthe selbst verschieden sind, je nach der Wahl der Grenze, so erhält man Summen von Differenzwerthen derselben Ordnung mit einem gemeinsamen Factor multiplicirt. Erinnert man sich aber der Relation 5) (pag. 5), wo allgemein nachgewiesen wurde, dass:

$$f^{l}(a+(i_n+k)w) - f^{l}(a+(i_1+k)w) = \sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{l+1}(a+(i+k+\tfrac{1}{2})w)$$

so findet sich sofort statt der Relationen 5 und 6 pag. 33:

$$\frac{1}{w}\int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(a+(i+n)w)\,dt = {}^{1}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) +$$

$$+\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^{d-p}\{2^2,4^2,\ldots(2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,f^{2d-1}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)$$

$$-{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w)-\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^{d-p}\{2^2,4^2,\ldots(2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,f^{2d-1}(a-\tfrac{1}{2}w) \qquad 7)$$

und

$$\frac{1}{w}\int_{a}^{a+iw} f(a+(i+n)w)\,dt = {}^{1}f(a+iw) +$$

$$+\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^{d-p}\{1^2,3^2,\ldots(2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,f^{2d-1}(a+iw)$$

$$-{}^{1}f(a)-\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^{d-p}\{1^2,3^2,\ldots(2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,f^{2d-1}(a) \qquad 8)$$

Die Bestimmung der einfachen Integrale erscheint demnach mit Hilfe der ersten summirten Reihe ausgeführt; die erste summirte Reihe wird man aber ohne Schwierigkeiten bilden können, sobald nur ein Werth in derselben, etwa ${}^{1}f(a-\frac{1}{2}w)$, gegeben ist, wobei man wegen der Formel 8) sich zu erinnern haben wird, dass ist

$${}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = {}^{1}f(a) - \tfrac{1}{2}f(a).$$

Die Wahl für diesen Anfangswerth in der ersten summirten Reihe ist völlig willkürlich, wie man dies auch sofort bei Betrachtung der Formeln 7) und 8) sieht, denn durch die nachträglich nothwendige Subtraction von ${}^{1}f(a-\frac{1}{2}w)$ oder ${}^{1}f(a)$ verschwindet der angenommene Werth der Anfangsconstante im Integrationsresultate. Es möchte auf den ersten Anblick am bequemsten erscheinen, derselben den Werth $=0$ zu ertheilen, und in der That wird diese Wahl häufig genug angewendet werden dürfen. Doch in der Anwendung, die bei den astronomischen Rechnungen von dieser Methode gemacht wird, wird es meist bequem sein, diese willkürliche Anfangsconstante so zu wählen, dass das Integral für eine bestimmte untere Grenze, etwa für das Argument oder das Mittel zweier Nachbarargumente, verschwindet; für den ersten Fall wird man haben:

$${}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^{d-p}\{2^2,4^2,\ldots(2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,f^{2d-1}(a-\tfrac{1}{2}w) \qquad 9)$$

und für den zweiten Fall:

$${}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{2}f(a)-\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^{d-p}\{1^2,3^2,\ldots(2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,f^{2d-1}(a) \qquad 10)$$

womit also an die Anfangsconstante die oben gestellten Bedingungen geknüpft sind.

Bezeichnet man die Coëfficienten, mit denen die Differenzwerthe verbunden sind, in der Formel 7) mit P, in der Formel 8) (pag. 34) mit Q und ertheilt diesen Buchstaben 2 Index, wo der obere den Hinweis auf den Differenzwerth, der untere den Hinweis auf die Anzahl der Integrationen enthält, also in dem vorliegenden Falle durchaus der Einheit gleich zu setzen ist, so wird man die folgenden Formeln für die Combinationen der verschiedenen Grenzen haben:

Grenzen: $a - \frac{1}{2}w$ und $a + (i + \frac{1}{2})w$

$$w\,{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w\{P_1^1 f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^3 f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^5 f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) + \ldots\}$$

$$\int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl = w\{{}^{1}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^1 f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^3 f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^5 f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\} \qquad A_1$$

Grenzen: a und $a + iw$

$$w\,{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w\{\tfrac{1}{2}f(a) + Q_1^1 f^{I}(a) + Q_1^3 f^{III}(a) + Q_1^5 f^{V}(a) + \ldots\}$$

$$\int_{a}^{a+iw} f(l)\,dl = w\{{}^{1}f(a+iw) + Q_1^1 f^{I}(a+iw) + Q_1^3 f^{III}(a+iw) + Q_1^5 f^{V}(a+iw) + \ldots\} \qquad B_1$$

Grenzen: $a - \frac{1}{2}w$ und $a + iw$

$$w\,{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w\{P_1^1 f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^3 f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^5 f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) + \ldots\}$$

$$\int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(l)\,dl = w\{{}^{1}f(a+iw) + Q_1^1 f^{I}(a+iw) + Q_1^3 f^{III}(a+iw) + Q_1^5 f^{V}(a+iw) + \ldots\} \qquad C_1$$

Grenzen: a und $a + (i + \frac{1}{2})w$

$$w\,{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w\{\tfrac{1}{2}f(a) + Q_1^1 f^{I}(a) + Q_1^3 f^{III}(a) + Q_1^5 f^{V}(a) + \ldots\}$$

$$\int_{a}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl = w\{{}^{1}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^1 f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^3 f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^5 f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\} \qquad D_1$$

Die Bestimmung der Coëfficienten Q und P hat keine Schwierigkeit, wenn man die eben hingeschriebenen Formeln mit 7) und 8) (pag. 34) vergleicht; es wird sein:

$$P\binom{2d-1}{1} = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, C^{d-p}\{2^2.4^2,\ldots(2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}$$

$$Q\binom{2d-1}{1} = \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, C^{d-p}\{1^2,3^2,\ldots(2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \qquad 11)$$

Die numerischen Werthe dieser Coëfficienten sind in der hinten angehängten Tafel V aufgenommen, in einer Ausdehnung, die weit die Grenzen der gewöhnlichen Anwendung übertrifft, indem bis zum 20. Differenzwerthe vorgeschritten wurde. Ausserdem sind die Logarithmen der Coëfficienten 20stellig angesetzt, wobei die Unsicherheit der letzten Stelle eine Einheit betragen kann. Die diesbezüglichen

Rechnungen sind mit grosser Sorgfalt unter Benützung zahlreicher Controllen durch die Herren Anton und Schram durchgeführt worden.

Um die eminenten Vortheile dieser Methode anschaulich zu machen, will ich dieselbe zur Berechnung der Gammafunction:

$$\int_0^t e^{-tt}\,dt$$

anwenden. Man gelangt durch eine sehr einfache Rechnung zur numerischen Tafel dieses bestimmten Integrales, während die Anwendung der Reihen zur Auswerthung dieses Integrales ein sehr beschwerliches Verfahren ist; in der That verdient die eben auseinander gesetzte Methode zur Auswerthung numerischer bestimmter Integrale viel häufiger angewendet zu werden, als dies sonst geschieht, besonders wenn es sich um die Anlegung einer Integraltafel handelt. Ich werde die Rechnung so anlegen, dass nur Fehler von wenigen Einheiten in der 10. Decimale auftreten können, eine Genauigkeit, die durch Anwendung der sonst üblichen Reihen nur mit einem ungeheuren Aufwande von Arbeit erlangt werden könnte; ausserdem habe ich das Intervall ($w = 0.1$) verhältnissmässig sehr gross gewählt, um zu zeigen, wie bald der Einfluss der höheren Differenzwerthe verschwindend klein wird. Bei der symmetrischen Form der Funktion ist es klar, dass die Anfangsconstante gleich 0 gesetzt werden kann, wenn man die Funktionen für die Argumente 0.05, 0.15, 0.25 .... berechnet. Um nicht nachträglich bei der Bildung des Integrals mit w multipliciren zu müssen, habe ich diese Multiplication sofort bei der Berechnung der Differentialquotienten, die in der mit $we^{-tt} = f$ überschriebenen Columne angesetzt sind, ausgeführt und das folgende Zahlensystem erhalten, wobei jedoch wegen des Formates die 8. und 9. Differenzwerthe fortgelassen werden mussten, die übrigens für die Integration keinen wesentlichen Beitrag mehr leisten und leicht von Fall zu Fall, wenn zur Uebung ein Beispiel ausgerechnet wird, nachgetragen werden können.

Mit Hilfe dieser Summations- und Differenztafel ist es ein Leichtes, den Werth des Integrales für eine obere Grenze, die zwischen oder auf ein Argument fällt, anzugeben, indem die untere Grenze der gewählten Bestimmung der Anfangsconstante nach nothwendig $= 0$ anzunehmen ist; so erhält man z. B. für $t = 0.50$ nach der Formel (A_1) (pag. 35):

$$
\begin{aligned}
{}'f\,(a + (i+\tfrac{1}{2})w) &= +\ 0.461\ 0050\ 810 \\
P_1^{1}\,f^{\mathrm{I}}\,(a + (i+\tfrac{1}{2})w) &= -\qquad 3238\ 240.8 \\
P_1^{3}\,f^{\mathrm{III}}\,(a + (i+\tfrac{1}{2})w) &= \qquad\quad 11\ 375.6 \\
P_1^{5}\,f^{\mathrm{V}}\,(a + (i+\tfrac{1}{2})w) &= -\qquad\quad 118.3 \\
P_1^{7}\,f^{\mathrm{VII}}\,(a + (i+\tfrac{1}{2})w) &= \qquad\qquad 2.1 \\
\int_{t=0}^{t=0.5} e^{-tt}\,dt &= +\ 0.461\ 2810\ 064
\end{aligned}
$$

für $t = 0.75$ nach der Formel (C_1) (pag. 35):

Arg. $=t$	$\int f$	$w e^{-u} = f$	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}
	+0.000 0000 000		−0 0000 000		0000 000		000 000		00 000
0.05		+0.099 7503 122		−1 9751 885		+1165 596		113 887	
	0.099 7503 122		−1 9751 885		+1165 596		−113 887		+15 480
0.15		+0.097 7751 237		−1 8586 289		+1051 709		−98 407	
	0.197 5254 359		−3 8338 174		+2217 305		−212 294		+28 257
0.25		+0.093 9413 063		−1 6368 984		+839 415		−70 150	
	0.291 4667 422		−5 4707 158		+3056 720		−282 444		+36 266
0.35		+0.088 4705 905		−1 3312 264		+556 971		−33 884	
	0.379 9373 327		−6 8019 422		+3613 691		−316 328		+38 279
0.45		+0.081 6686 483		−9698 573		+240 643		+4 395	
	0.461 6059 810		−7 7717 995		+3854 334		−311 933		+34 478
0.55		+0.073 8968 488		−5844 239		−71 290		+38 873	
	0.535 5028 298		−8 3562 234		+3783 044		−273 060		+25 884
0.65		+0.065 5406 254		−2061 195		−344 350		+64 757	
	0.601 0434 552		−8 5623 429		+3438 694		−208 303		+14 448
0.75		+0.056 9782 825		+1377 499		−552 653		+79 205	
	0.658 0217 377		−8 4245 930		+2886 041		−129 098		+2 437
0.85		+0.048 5536 895		+4263 540		−681 751		+81 642	
	0.706 5754 272		−7 9982 390		+2204 290		47 456		−8 239
0.95		+0 040 5554 505		+6467 830		−729 207		+73 403	
	0.747 1308 777		−7 3514 560		+1475 083		+25 947		−15 932
1.05		+0.033 2039 945		+7942 913		−703 260		+57 471	
	0.780 3348 722		−6 5571 647		+771 823		+83 418		−20 074
1.15		+0.026 6468 298		+8714 736		−619 842		+37 397	
	0.806 9817 020		−5 6856 911		+151 981		+120 815		−20 515
1.25		+0.020 9611 387		+8866 717		−499 027		+16 882	
	0.827 9428 407		−4 7990 194		−347 046		+137 697		−18 109
1.35		+0.016 1621 193		+8519 671		−361 330		−1 227	
	0.844 1049 600		−3 9470 523		−708 376		+136 470		−13 688
1.45		+0.012 2150 670		+7811 295		224 860		−14 915	
	0.856 3200 270		−3 1659 228		−933 236		+121 555		−8 527
1.55		+0.009 0491 442		+6878 059		−103 305		−23 442	
	0.865 3691 712		−2 4781 169		−1036 541		+98 113		−3 506
1.65		+0.006 5710 273		+5841 518		−5 192		−26 948	
	0.871 9401 985		−1 8939 651		−1041 733		+71 165		+606
1.75		+0 004 6770 622		+4799 785		+65 973		−26 342	
	0.876 6172 607		−1 4139 866		−975 760		+44 823		+3 466
1.85		+0.003 2630 756		+3824 025		+110 796		−22 876	
	0.879 8803 363		−1 0315 841		−864 964		+21 947		+5 028
1.95		+0.002 2314 915		+2959 061		+132 743		−17 848	
	0.882 1118 278		−7356 780		−732 221		+4 099		+5 434
2.05		+0.001 4958 135		+2226 840		+136 842		−12 414	
	0.883 6076 413		−5129 940		−595 379		−8 315		+5 032
2.15		+0 000 9828 195		+1631 461		+128 527		−7 382	
	0.884 5904 608		−3498 479		−466 852		−15 697		+4 089
2.25		+0 000 6329 716		+1164 609		+112 830		−3 293	
	0.885 2234 324		−2333 870		−354 022		−18 990		+3 007
2.35		+0.000 3995 846		+810 587		+93 840		−286	
	0.885 6230 170		−1523 283		−260 182		−19 276		+1 901
2.45		+0.000 2472 563		+550 405		+74 564		+1 615	
	0.885 8702 733		−972 878		−185 618		−17 661		+1 016
2.55		+0.000 1499 685		+364 787		+56 903		+2 631	
	0.886 0202 418		−608 091		−128 715		−15 030		+311
2.65		+0.000 0891 594		+236 072		+41 873		+2 942	
	0.886 1094 012		−372 019		86 842		12 088		−113
2.75		+0.000 0519 575		+149 230		+29 785		+2 829	
	o 886 1613 587		−222 789		−57 057		−9 259		−371
2.85		+0.000 0296 786		+92 173		+20 526		+2 458	
	0.886 1910 373		−130 616		−36 531		6 801		−464
2.95		+0.000 0166 170		+55 642		+13 725		+1 094	
	0.886 2076 543		−74 974		−22 806		−4 807		−473
3.05		+0.000 0091 196		+32 836		+8 918		+1 521	
	0.886 2167 739		−42 138		−13 888		−3 286		−402
3.15		+0.000 0049 058		+18 948		+5 632		+1 119	
	0.886 2216 797		−23 190		−8 256		−2 167		−339
3.25		+0 000 0025 868		+10 692		+3 465		+780	
	o 886 2242 665		−12 498		4 791		−1 387		−264
3.35		+0.000 0013 370		+5 901		+2 078		+516	
	0.886 2256 035		−6 597		−2 713		−871		−157
3.45		+0.000 0006 773		+3 188		+1 207		+359	
	0.886 2262 808		−3 409		−1 506		512		−162
3.55		+0.000 0003 364		+1 682		+695		+197	
	0.886 2266 172		−1 727		−811		−315		−53
3.65		+0.000 0001 637		+871		+380		+144	
	o 886 2267 809		−856		−431		−171		−72
3.75		+0.000 0000 781		+440		+209		+72	
	0.886 2268 590		−416		−222		−99		−37
3.85		+0.000 0000 365		+218		+110		+45	
	0.886 2268 955		−198		−112		−54		−18
3.95		+0.000 0000 167		+106		+56		+27	
	0.886 2269 122		−92		−56		−27		−14
4.05		+0 000 0000 075		+50		+29		+13	
	0.886 2269 197		−42		−27		−14		−8
4.15		+0.000 0000 033		+23		+15		+5	
	0.886 2269 230		−19		−12		−9		
4.25		+0.000 0000 014		+11		+6			
	0.886 2269 244		−8		6				
4.35		+0.000 0000 006		+5		+2			
	o 886 2269 250		−3		−4				
4.45		+0.000 0000 003		+1					
	0.886 2269 253		−2		0				
4.55		+0.000 0000 001		+1					
	0.886 2269 254		−1						
4.65		+0.000 0000 000							
	0.886 2269 254								

$f(a+iw)$	$+$	0.629 5325 964.5
$Q_1^1 f^{I}(a+iw)$	$+$	7077 889.9
$Q_1^3 f^{III}(a+iw)$	$+$	48 313.9
$Q_1^5 f^{V}(a+iw)$	$+$	532.8
$Q_1^7 f^{VII}(a+iw)$	$+$	5.8
$Q_1^9 f^{IX}(a+iw)$	$+$	0.1

$$\int_{t=0}^{t=0.75} e^{-tt}\,dt = +\ 0.630\ 2452\ 707$$

Will man aber für die untere Grenze nicht o haben, sondern ebenfalls einen Werth, der entweder mit einem Argumentwerthe oder dem Mittelwerthe übereinkommt, so wird man einfach nach A_1 oder D_1 einerseits, und B_1 oder C_1 (pag. 35) andrerseits, den Werth des Integrales für diese Grenze berechnen und von der oberen Grenze in Abzug bringen; es wird also sofort mit Benützung der Zahlen der obigen Beispiele:

$$\int_{t=0.50}^{t=0.75} e^{-tt}\,dt = +\ 0.168\ 9642\ 643\ .$$

Wendet man alternirend die Formeln A_1 und C_1 an, indem man von Intervall zu Intervall fortschreitet, so gelangt man zu der im Anhange als Tafel X enthaltenen Integraltafel, die ich deshalb in extenso mittheile, da dieses Integral in so vielen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt und eine Tafel für dasselbe in der hier gegebenen Genauigkeit meines Wissens nicht besteht. Indem so durch die Formeln A_1 C_1 die Werthe des Integrals von 0.05 zu 0.05 des Argumentes erhalten waren, wurden die zwischenliegenden Werthe für das Intervall 0.01 durch einfache Interpolation abgeleitet.

Schliesslich kann in diesem Falle die Richtigkeit der Rechnung leicht geprüft werden, denn das vorgelegte Integral zwischen den Grenzen o und ∞ nimmt den Werth $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ an; der numerische Werth desselben ändert sich aber nicht mehr von der Grenze 4.0 ab innerhalb der gesetzten Genauigkeitsgrenze. Es ist also

$$\int_0^{4} e^{-tt}\,dt = 0.880\ 2209\ 254\ ,$$

während andererseits bis auf die 11. Decimale richtig ist

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.886\ 2269\ 254.5\ ,$$

so dass der durch die numerische Integration erhaltene Werth auf eine halbe Einheit der letzten mitgenommenen Stelle stimmt, was eine bessere Uebereinstimmung ist, als im Allgemeinen erwartet werden kann; doch würde eine Abweichung von 4 Einheiten bei sorgfältiger Rechnung wenig Wahrscheinlichkeit für sich haben, denn bezeichnet man die Anzahl sämmtlicher Werthe mit n und beachtet, dass durchschnittlich die Unsicherheit der letzten Stelle des angesetzten Funktionswerthes

etwa 0.25 Einheiten beträgt, so ist der durchschnittlich zu erwartende Fehler bei der Anwendung der einfachen Integration:

$$u = \frac{1}{4}\sqrt{w}\ ,$$

also im vorgelegten Falle, wo $w = 46$ anzunehmen ist:

$$u = 1.7\ .$$

Man wird demnach behaupten dürfen, dass selbst am Ende in der angeführten Integraltafel die eingesetzten Werthe selten um 2 oder mehr Einheiten falsch sein werden; ein Fehler von 4 Einheiten hat aber kaum mehr eine beträchtliche Wahrscheinlichkeit für sich.

Es kann aber unter Umständen erwünscht sein, von den oben angenommenen bestimmten speciellen Grenzen abzugehen, wobei vorausgesetzt ist, dass hiebei die Herstellung einer Integraltafel selbst nicht beabsichtigt ist. Man wird ähnlich, wie dies bei der Differentiation hervorgehoben wurde, stets jene Form anwenden, die es ermöglicht, dass man n oder m kleiner als $\pm\frac{1}{4}$ anzunehmen im Stande ist, um die möglichste Convergenz in die Formel zu bringen, wobei also von den Formeln (1) und (3) (pag. 32) Gebrauch zu machen wäre. Die Rechnung würde aber recht beschwerlich werden und es wäre viel einfacher, in der Nähe der Grenzen durch alternirende Anwendung der Gleichung A_1 und C_1 (pag. 35) sich kleine Integraltafeln herzustellen, nach denen man den Werth des Integrales für die obere und untere Grenze nach den Regeln der Interpolation ermittelt. Es wird sich aber wieder ein Ausweg finden lassen, der in bequemerer Weise das Ziel erreichen lässt. Es sei die vorgesteckte Grenze so gelegen, dass die Grösse n vortheilhaft wird ($n < \pm\frac{1}{4}$); es liegt also das geforderte Argument näher an einem berechneten Argumentwerthe als an dem Mittel der letztern. Man wird dem entsprechend das Integral nach Formel C_1 bis zum Argumentwerthe bestimmen und dann die erforderliche Correction hinzufügen. Es wird also sein:

$$\int^{a+(i+n)w} f(l)\,dl = w\left\{{}'f(a+iw) + Q_1^{1}f'(a+iw) + Q_1^{3}f'''(a+iw) + \ldots\right\} + \int_{a+iw}^{a+(i+n)w} f(l)\,dl + J_1 . \quad (12)$$

wo J_1 eine willkürliche Integrationsconstante ist und nach Einsetzung der Grenzen verschwindet; ich will auf dieselbe daher nicht weiter Rücksicht nehmen. Multiplicirt man die Gleichung (16) (pag. 26) links mit dl, rechts mit $w\,dn$, was nach der Eingangs dieses Paragraphen gemachten Auseinandersetzung erlaubt ist, so ergibt sich, wenn man integrirt:

$$\begin{aligned}\int f(a+[i+n]w)\,dl = w\Big[\,n f(a+iw) &+ \frac{n^2}{1\cdot 2}\left\{f'(a+iw) + N_1^{3}f'''(a+iw) + N_1^{5}f^{V}(a+iw) + \ldots\right\}\\ &+ \frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{f''(a+iw) + N_2^{4}f^{IV}(a+iw) + N_2^{6}f^{VI}(a+iw) + \ldots\right\}\\ &+ \frac{n^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left\{f'''(a+iw) + N_3^{5}f^{V}(a+iw) + N_3^{7}f^{VII}(a+iw) + \ldots\right\}\\ &+ \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\Big]\end{aligned}$$

wobei die Integrationsconstante gleich fortgelassen ist. Setzt man in dieses Integral die Grenzen n und 0, und führt den so erhaltenen Werth in die Gleichung 12) (pag. 39) ein, so erhält man leicht:

$$\int^{a+(i+n)w} f(t)\,dt = w\Big[\tfrac{1}{2}f(a+iw) + nf(a+iw) +$$
$$+ f^{I}(a+iw)\left\{Q_1^1 + \frac{n^2}{2}\right\}$$
$$+ f^{II}(a+iw)\left\{\frac{n^3}{1\cdot2\cdot3}\right\}$$
$$+ f^{III}(a+iw)\left\{Q_1^3 + \frac{n^2}{1\cdot2}N_1^3 + \frac{n^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\right\} \qquad 13)$$
$$+ f^{IV}(a+iw)\left\{\frac{n^3}{1\cdot2\cdot3}N_2^4 + \frac{n^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\right\}$$
$$+ f^{V}(a+iw)\left\{Q_1^5 + \frac{n^2}{1\cdot2}N_1^5 + \frac{n^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}N_3^5 + \frac{n^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\right\}$$
$$+ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\Big]$$

ein Ausdruck, dessen Coëfficienten leicht in Tafeln gebracht werden können; doch um die Logarithmen derselben tabuliren zu können, wird es sich empfehlen, in den Coëfficienten der geraden Differenzwerthe n^3 als gemeinsamen Factor herauszuheben und zu schreiben:

$$\int^{a+(i+n)w} f(t)\,dt = w\Big[\tfrac{1}{2}f(a+iw) + nf(a+iw) + Q_1^1(n)f^{I}(a+iw) + Q_1^3(n)f^{III}(a+iw)$$
$$+ Q_1^5(n)f^{V}(a+iw) + \ldots + n^3\Big\{Q_1^2(n)f^{II}(a+iw) + Q_1^4(n)f^{IV}(a+iw)$$
$$+ Q_1^6(n)f^{VI}(a+iw) + \ldots\Big\}\Big] \qquad E_1$$

wo also $Q_1^1(n)$, $Q_1^3(n)$, $Q_1^5(n)$ . . . . die folgende Bedeutung haben werden:

$$\left.\begin{aligned}
Q_1^1(n) &= Q_1^1 + \frac{n^2}{1\cdot2}\\
Q_1^3(n) &= Q_1^3 + \frac{n^2}{1\cdot2}N_1^3 + \frac{n^4}{4!}\\
Q_1^5(n) &= Q_1^5 + \frac{n^2}{1\cdot2}N_1^5 + \frac{n^4}{4!}N_3^5 + \frac{n^6}{6!}\\
Q_1^7(n) &= Q_1^7 + \frac{n^2}{1\cdot2}N_1^7 + \frac{n^4}{4!}N_3^7 + \frac{n^6}{6!}N_5^7 + \frac{n^8}{8!}\\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\\
Q_1^2(n) &= \frac{1}{3!}\\
Q_1^4(n) &= \frac{1}{3!}N_2^4 + \frac{n^2}{5!}\\
Q_1^6(n) &= \frac{1}{3!}N_2^6 + \frac{n^2}{5!}N_4^6 + \frac{n^4}{7!}\\
Q_1^8(n) &= \frac{1}{3!}N_2^8 + \frac{n^2}{5!}N_4^8 + \frac{n^4}{7!}N_6^8 + \frac{n^6}{9!}\\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

Diese Coëfficienten sind von Herrn F. K. Ginzel in ähnlicher Weise wie in § 4 die N- und M-Coëfficienten berechnet worden und als Tafel VI. im Anhange aufgenommen. Der constante Coëfficient $Q_1^2(n)$ hat hiebei keine Aufnahme gefunden.

Zu der Gleichung $E_1)$ wäre zu erwähnen, dass die Integrationsconstante fortgelassen werden konnte, weil vorausgesetzt wird, dass eine bestimmte Annahme für die untere Integrationsgrenze gemacht ist. Gewöhnlich wird aber die untere Grenze bestimmten Bedingungen zu genügen haben, die bereits durch die Annahme über ${}^{I}f(a-\frac{1}{2}w)$, der willkürlichen Anfangsconstante, erfüllt sind; wenn dies nicht der Fall ist, so müsste man nach derselben Formel $E_1)$ den Ausdruck für die untere Grenze berechnen und von dem obigen in Abzug bringen.

Der Fall, dass die vorgelegte Grenze näher dem Mittel zweier Argumente liegt, erledigt sich in ähnlicher Weise wie der vorige, man wird hiebei $m < \pm\frac{1}{4}$ zu wählen haben. Es wird zunächst sein

$$\int^{a+(i+\frac{1}{2}+m)w} f(l)\,dl = w\left\{{}^{I}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^1 f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^3 f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \dots\right\}$$
$$+ \int_{a+(i+\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2}+m)w} f(l)\,dl + J; \qquad (15)$$

die durch J angezeigte Integrationsconstante beachte ich nicht weiter, weil dieselbe durch die Einführung der untern Grenze, über die aber vorerst gar nichts festgesetzt ist, verschwindet.

Multiplicirt man die Gl. 17) (pag. 27) links mit dl, rechts mit $w\,dm$, was auf dasselbe hinauskommt und integrirt, so erhält man

$$\int f(a+(i+\tfrac{1}{2}+m)w)\,dl = w\Big[m\left\{f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + M_0^2 f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \right.$$
$$\left. + M_0^4 f^{IV}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \dots\right\}$$
$$+ \frac{m^2}{1\cdot 2}\left\{f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + M_1^3 f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \right.$$
$$\left. + M_1^5 f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \dots\right\}$$
$$+ \frac{m^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + M_2^4 f^{IV}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \right.$$
$$\left. + M_2^6 f^{VI}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \dots\right\}$$
$$\dots\dots \qquad \dots\dots\Big]$$

Setzt man hier die Grenzen m und 0 ein und substituirt in die obige Gleichung 15), so findet sich

$$\int^{a+(i+\frac{1}{2}+m)w} f(l)\,dl = w\Big[{}^{I}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + m f(a+(i+\tfrac{1}{2})w)$$
$$+ f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)\left\{P_1^1 + \frac{m^2}{2!}\right\}$$
$$+ f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)\left\{m\,M_0^2 + \frac{m^3}{3!}\right\}$$
$$+ f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)\left\{P_1^3 + \frac{m^2}{2!}M_1^3 + \frac{m^4}{4!}\right\} \qquad (16)$$

$$+ f^{\text{IV}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)\left\{m M_0^4 + \frac{m^3}{3!} M_2^4 + \frac{m^5}{5!}\right\}$$
$$+ f^{\text{V}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)\left\{P_1^5 + \frac{m^2}{2!} M_1^5 + \frac{m^4}{4!} M_3^5 + \frac{m^6}{6!}\right\}$$
$$+ \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \Big|$$

In diesem Ausdrucke kann m theilweise als Factor herausgehoben werden und man erhält:

$$\int^{a+(i+\frac{1}{2}+m)w} f(t)\,dt = w\Big[f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^1(m) f^{\text{I}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^3(m) f^{\text{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\ldots$$
$$+ m\left\{f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^2(m) f^{\text{II}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^4(m) f^{\text{IV}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\right\}\Big] \qquad F_1)$$

wo die Coëfficienten $P_1^1(m)$, $P_1^3(m)$ ..... folgenden Ausdrücken gleichkommen:

$$\left.\begin{aligned}
P_1^1(m) &= P_1^1 + \frac{m^2}{2!}\\
P_1^3(m) &= P_1^3 + \frac{m^2}{2!} M_1^3 + \frac{m^4}{4!}\\
P_1^5(m) &= P_1^5 + \frac{m^2}{2!} M_1^5 + \frac{m^4}{4!} M_3^5 + \frac{m^6}{6!}\\
&\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\\
P_1^2(m) &= M_0^2 + \frac{m^2}{3!}\\
P_1^4(m) &= M_0^4 + \frac{m^2}{3!} M_2^4 + \frac{m^4}{5!}\\
P_1^6(m) &= M_0^6 + \frac{m^2}{3!} M_2^6 + \frac{m^4}{5!} M_4^6 + \frac{m^6}{7!}\\
&\ldots \qquad \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad 17)$$

Die Logarithmen dieser Coëfficienten findet man in Tafel VII.

Trägt man nun die für die willkürlichen Grenzen geltenden Formeln zusammen, so erhält man die Werthe der Integrale für die oberen Grenzen, je nachdem man von den Formeln E_1 oder F_1 Gebrauch macht:

$$n < \pm \tfrac{1}{4}$$

$$\int^{a+(i+n)w} f(t)\,dt = w\Big[f(a+iw) + n f(a+iw) + Q_1^1(n) f^{\text{I}}(a+iw) + Q_1^3(n) f^{\text{III}}(a+iw) + \ldots$$
$$+ n^3\left\{\tfrac{1}{6} f^{\text{II}}(a+iw) + Q_1^4(n) f^{\text{IV}}(a+iw) + Q_1^6(n) f^{\text{VI}}(a+iw) + \ldots\right\}\Big]$$

$$m < \pm \tfrac{1}{4} \qquad\qquad G_1$$

$$\int^{a+(i+\frac{1}{2}+m)w} f(t)\,dt = w\Big[f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^1(m) f^{\text{I}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^3(m) f^{\text{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots$$
$$+ m\left\{f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^2(m) f^{\text{II}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_1^4(m) f^{\text{IV}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) \ldots\right\}\Big]$$

Die Q_1-Coëfficienten finden sich in Tafel VI.
" P_1- " " " VII.

Für die untere Grenze erhält man daher, wenn man an dieselbe die Bedingung knüpft, dass das Integral für dieselbe verschwindet, zur Berechnung der Anfangsconstante

$$n < \pm \tfrac{1}{4}, \qquad \int^{a+nw} f(l)\, dl = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
w\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) &= -w\Big[(n+\tfrac{1}{2})f(a) + Q_1^{1}(n)f^{I}(a) + Q_1^{3}(n)f^{III}(a) + Q_1^{5}(n)f^{V}(a) + \ldots \\
&\qquad + n^{3}\Big\{\tfrac{1}{6}f^{II}(a) + Q_1^{1}(n)f^{IV}(a) + Q_1^{6}(n)f^{VI}(a) + \ldots\Big\}\Big] \\
m \pm &< \tfrac{1}{4}, \qquad \int^{a-\frac{1}{2}w+mw} f(l)\, dl = 0 \\
w\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) &= -w\Big[P_1^{1}(m)f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{3}(m)f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{5}(m)f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) + \ldots \\
&\qquad + m\Big\{f(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{2}(m)f^{II}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{1}(m)f^{IV}(a-\tfrac{1}{2}w) + \ldots\Big\}\Big]
\end{aligned}\right\} H_1$$

Die Q_1-Coëfficienten finden sich in Tafel VI.

" P_1- " " " " " VII.

Für die Anwendung der vorstehenden Formeln soll abermals das Beispiel der weiter unten folgenden Störungsrechnung für den Planeten Erato entlehnt werden. Aus der Summationstafel für die X-Coordinate findet sich:

	${}^{II}f$	${}^{I}f$	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}
1872 Mai 30	−281174.16		+13320.20		−1205.10		+187.76		−40.87		
		−7345.00		−1570.89		+418.56		−138.17		+62.25	
Juli 9	−288519.16		+11749.31		−786.54		+49.59		+21.38		−30.13
		+4404.31		−2357.43		+468.15		−116.79		+32.12	
Aug. 18	−284114.85		+9391.88		−318.39		−67.20		+53.50		−30.52
		+13796.19		−2675.82		+400.95		−63.29		+1.60	
Sept. 27	−270318.66		+6716.06		+82.56		−130.49		+55.10		−21.06
		+20512.25		−2593.26		+270.46		−8.19		−19.46	
Nov. 6	−249806.41		+4122.80		+353.02		−138.68		+35.64		−4.63
		+24635.05		−2240.24		+131.78		+27.45		−24.09	
Dec. 16	−225171.36		+1882.56		+484.80		−111.23		+11.55		+10.12
		+26517.61		−1755.44		+20.55		+39.00		−13.97	
1873 Jan. 25	−198653.75		+127.12		+505.35		−72.23		−2.42		+6.81
		+26644.73		−1250.09		−51.68		+36.58		−7.16	
Marz 6	−172009.02		−1122.97		+453.67		−35.65		−9.58		+6.62
		+25521.76		−796.42		−87.33		+27.00		−0.54	
Apr. 15	−146487.26		−1919.39		+366.34		−8.65		−10.12		+1.88
		+23602.37		−430.08		−95.98		+16.88		+1.34	
Mai 25	−122884.89		2349.47		+270.36		+8.23		−8.78		+1.88
		+21252.90		−159.72		−87.75		+8.10		+3.22	
Juli 4	−101631.99		−2509.19		+182.61		+16.33		−5.56		−1.64
		+18743.71		+22.89		−71.42		+2.54		+1.58	
Aug. 13	−82888.28		−2486.30		+111.19		+18.87		−3.98		−0.08
		+16257.41		+134.08		−52.55		−1.44		+1.50	
Sept. 22	−66630.87		−2352.22		+58.64		+17.43		−2.48		+0.37
		+13905.19		+192.72		−35.12		−3.92		+1.87	
Nov. 1	−52725.68		−2159.50		+23.52		+13.51		−0.61		

Zu dieser Summationstafel ist in Erinnerung zu bringen, dass für dieselbe als Zeiteinheit 40 Tage gewählt sind. — Wir wollen vorerst durch Anwendung der Formel A_1) p. 35) eine Integraltafel für die einfachen Integrale zwischen den Grenzen 1872 Oct. 17 bis 1873 Mai 5 herstellen. Man erhält so:

	1872 Oct. 17,	1872 Nov. 26,	1873 Jan. 5,	1873 Feb. 14,	1873 Mz 26,	1873 Mai 5
${}^{I}f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 20512.250	+ 24635.050	+ 26517.610	+ 26644.730	+ 25521.760	+ 23602.370
$P_1^{1}f^{I}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	− 108.052	− 93.343	− 73.143	− 52.087	− 33.184	− 17.920
$P_1^{3}f^{III}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	− 0.798	− 0.389	− 0.061	+ 0.153	+ 0.258	+ 0.283
$P_1^{5}f^{V}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	− 0.003	+ 0.010	+ 0.015	+ 0.014	+ 0.010	+ 0.006
$P_1^{7}f^{VII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 0.001	+ 0.001	+ 0.001	0.000	0.000	0.000
	+ 20403.40	+ 24541.33	+ 26444.42	+ 26592.81	+ 25488.84	+ 23584.74

Bestimmt man nach Formel B_1 (p. 35) den Werth des einfachen Integrales zwischen den Grenzen 1872 Sept. 27 bis 1873 Mai 25, so wird man haben:

	1872 Sept. 27	1872 Novb. 6.	1872 Dec. 16.	1873 Jan. 25.	1873 Mz. 6.	1873 April 15.	1873 Mai 25
$f(a+iw)$	+ 17154.220	+ 22573.650	+ 25576.330	+ 26581.170	+ 26083.245	+ 24562.065	+ 22427.635
$Q_1^{I} f^{I}(a+iw)$	+ 219.545	+ 201.396	+ 166.487	+ 125.230	+ 85.271	+ 51.104	+ 24.575
$Q_1^{III} f^{III}(a+iw)$	+ 5.129	+ 3.073	+ 1.164	— 0.238	— 1.062	— 1.400	— 1.403
$Q_1^{V} f^{V}(a+iw)$	+ 0.113	— 0.030	— 0.105	— 0.119	— 0.100	— 0.069	— 0.039
$Q_1^{VII} f^{VII}(a+iw)$	— 0.006	— 0.015	— 0.013	— 0.007	— 0.003	0.000	+ 0.002
	+ 17379.00	+ 22778.07	+ 25743.86	+ 26706.04	+ 26167.35	+ 24611.70	+ 22450.77

Stellt man die beiderseitigen Resultate zusammen, so erhält man eine vollständige Tafel für das vorgelegte einfache Integral innerhalb der gestellten Grenzen; ich setze dieselbe hier an, nebst ihren Differenzwerthen, um nachträglich die aus der Formeln G_1' (pag. 42) resultirenden Werthe einer strengen Prüfung unterziehen zu können.

		$40\frac{dz}{dt}$	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}
1872 Septb.	27	+17379.00						
			+ 3024.40					
Octb.	17	+20403.40		640.77				
			+ 2374.67		+38.36			
Novb	6	+22778.07		— 611.41		+ 12.32		
			+ 1703.26		+50.08		— 1.24	
„	26	+24541.33		— 560.73		+ 8.08		+0.43
			+ 1202.53		+58.76		—3.81	
Decb.	16	+25743.86		— 501.07		+ 1.27		+0.60
			+ 700.56		+63.03		—3.21	
1873 Jan.	5	+26444.42		— 438.04		+ 1.06		+0.68
			+ 261.62		+64.00		—2.53	
„	25	+26706.04		— 374.85		— 1.47		+0.56
			— 113.23		+62.02		—1.07	
Febr	14	+26592.81		— 312.23		— 3.44		+0.65
			— 425.46		+59.18		— 1.32	
März	6	+26167.35		— 253.05		— 4.76		+0.47
			— 678.51		+54.42		—0.85	
„	26	+25488.84		— 198.63		— 5.61		+0.46
			— 877.14		+48.81		—0.39	
April	15	+24611.70		— 149.82		— 6.00		
			—1026.96		+42.81			
Mai	5	+23584.74		— 107.01				
			—1133.07					
	25	+22450.77						

Es soll nun zur Erläuterung der Formeln G_1 (p. 42) die directe Berechnung des Integralwerthes für 1873 Jänner 15 vorgenommen werden, wobei beide Formeln verwendet werden sollen. Die Rechnung nach der ersten stellt sich, wenn man $u = -0.25$ setzt, wie folgt:

d	1	3	5	7
$f^{d}(a+iw)$	—1502.765	—15.565	+37.790	—10.565
$\log f^{d}(a+iw)$	$3_n176891$	1_n19215	1.5774	1_n0230
$\log Q_1^{d}(0.25)$	$8_n716099$	8.00097	7_n3338	0.6760

d	4	6	8
$\log f^{d}(a+iw)$	1_n8587	0_n3838	0.8331
$\log Q_1^{d}(-0.25)$	8_n1201	7.2460	6_n4512

$$^{I}f(a+iw) = +\ 26581.170 \qquad \tfrac{1}{6}f^{II}(a+iw) = +\ 84.22$$
$$nf(a+iw) = -\ 31.780 \qquad Q_1^{4}f^{IV}(a+iw) = +\ 0.97$$
$$Q_1^{1}(n)f^{I}(a+iw) = +\ 78.209 \qquad Q_1^{6}f^{VI}(a+iw) = 0$$
$$Q_1^{3}(n)f^{III}(a+iw) = -\ 0.159 \qquad S_g = +\ 85.10$$
$$Q_1^{5}(n)f^{V}(a+iw) = -\ 0.082$$
$$Q_1^{7}(n)f^{VII}(a+iw) = -\ 0.005$$
$$S_u = +\ 26627.413$$
$$n^3 S_g = -\ 1.331$$
$$\int\!\!\int^{1873\ \text{Jan. 15}} f(J)\,dJ = +\ 26626.08$$

Benützt man aber die zweite der Formeln (G_{II}) (pag. 42), so hat man $m = +0.25$ anzunehmen und erhält:

d	1	3	5	7
$\log f^d(a+(i+\frac{1}{2})w)$	3_n244386	1.3128	1.5911	1_n1452
$\log P_1^d(+0.25)$	8.862827	7_n0118	6.7030	5_n8060

d	2	4	6	8
$f^d(a+(i+\frac{1}{2})w)$	+ 405.075	− 91.730	+ 4.565	+ 8.465
$\log f^d(a+(i+\frac{1}{2})w)$	2.60407	1_n9625	0.6594	0.9276
$\log P_1^d(+0.25)$	9_n05912	8.3284	7_n6458	6.9851

$$^{I}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = +\ 26517.610 \qquad f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = +\ 1004.840$$
$$P_1^{1}(m)f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 128.001 \qquad P_1^{2}(m)f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 56.727$$
$$P_1^{3}(m)f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 0.084 \qquad P_1^{4}(m)f^{IV}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 1.954$$
$$P_1^{5}(m)f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = +\ 0.020 \qquad P_1^{6}(m)f^{VI}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = -\ 0.020$$
$$P_1^{7}(m)f^{VII}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = +\ 0.001 \qquad P_1^{8}(m)f^{VIII}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) = +\ 0.008$$
$$S_u = +\ 26380.546 \qquad S_g = +\ 946.147$$
$$m\,S_g = +\ 236.537$$
$$\int\!\!\int^{1873\ \text{Jan. 15}} f(J)\,dJ = +\ 26626.08$$

Man könnte zur Kenntniss des eben ermittelten Werthes auch gelangen, indem man die obige Integraltafel benützt und man findet durch Interpolation aus derselben einen Werth des Integrales, der völlig mit dem obigen Resultate stimmt.

Hätte man die Aufgabe, das einfache Integral für das Datum 1873 Jan. 21 zu ermitteln, so wird man hiezu nur die erste Formel von (G_I) (pag. 42) benützen können. Da $n = -0.10$ ist, findet sich:

d	1	3	5	7
$f^d(a+iw)$	− 1502.765	− 15.565	+ 37.790	− 10.565
$\log f^d(a+iw)$	3_n176891	1_n19215	1.5774	1_n0239
$\log Q_1^d(-0.10)$	8_n893047	8.15983	7_n4760	6.8147

d	4	6	8
$\log f^d(a+iw)$	1_n8587	0_n3838	0.8331
$\log Q_1^d(-0.10)$	8_n1401	7.2643	6_n4701

$$f(a+iw) = +\ 26581.170 \qquad \tfrac{1}{6}f^{\mathrm{II}}(a+iw) = +\ 84.22$$
$$nf(a+iw) = -\ 12.712 \qquad Q_1^{4}(n)f^{\mathrm{IV}}(a+iw) = +\ 1.00$$
$$Q_1^{1}(n)f^{\mathrm{I}}(a+iw) = +\ 117.717 \qquad S_q = +\ 85.22$$
$$Q_1^{3}(n)f^{\mathrm{III}}(a+iw) = -\ 0.224$$
$$Q_1^{5}(n)f^{\mathrm{V}}(a+iw) = -\ 0.113$$
$$Q_1^{7}(n)f^{\mathrm{VII}}(a+iw) = -\ 0.007$$
$$S_u = +\ 26685.831$$
$$n^3 S_q = -\ 0.085$$
$$\int^{1873\ \text{Jan. } 21} f(l)\,dl = +\ 26685.75$$

welchen Werth die Interpolation in der obigen Integraltafel bestätigt.

Für 1873 Jan. 9 müsste die zweite der Formeln (G_{II}) pag 42 angewendet werden; es ist $m = +0.10$ und die Rechnung wird:

d	1	3	5	7
$\log f^{d}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$3_n244386$	1.3128	1.5911	1_n1452
$\log P_1^{d}(+0.10)$	8.669007	7_n4991	6.6044	5_n8020

d	2	4	6	8
$f^{d}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+\ 405.075$	$-\ 91.730$	$+\ 4.565$	$+\ 8.465$
$\log f^{d}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	2.604071	1_n9625	0.6594	0.9276
$\log P_1^{d}(+0.10)$	$0_n091080$	8.3634	7_n6820	7.0218

$$g(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = +\ 26517.610 \qquad f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = +\ 1004.840$$
$$P_1^{1}(m)f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = -\ 81.921 \qquad P_1^{2}(m)f^{\mathrm{II}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = -\ 61.059$$
$$P_1^{3}(m)f^{\mathrm{III}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = -\ 0.065 \qquad P_2^{4}(m)f^{\mathrm{IV}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = -\ 2.118$$
$$P_1^{5}(m)f^{\mathrm{V}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = +\ 0.016 \qquad P_1^{6}(m)f^{\mathrm{VI}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = -\ 0.022$$
$$P_1^{7}(m)f^{\mathrm{VII}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = +\ 0.001 \qquad P_1^{8}(m)f^{\mathrm{VIII}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = +\ 0.009$$
$$S_u = +\ 26435.641 \qquad S_q = +\ 941.650$$
$$m S_q = +\ 94.156$$
$$\int^{1873\ \text{Jan. } 9} f(l)\,dl = +\ 26529.80$$

Die Interpolation in der obigen Integraltafel bestätigt dieses Resultat.

Die eben angeführten Beispiele mögen genügen und zeigen, wie die einfachen Integrale mit Hilfe der Q_1- und P_1-Tafeln (Tafel VI, VII) durch eine sehr einfache Rechnung erhalten werden.

In den bisherigen Beispielen wurde die Voraussetzung gemacht, dass für die untere Grenze des Integrales bereits eine Bestimmung getroffen ist. Um aber auch für die Bestimmung der untern Grenze ein angemessenes Beispiel zu haben, wähle ich die Störungen in der mittlern siderischen Bewegung (Zeiteinheit 40 Tage) der Erato zur Zeit der Jupiternähe im Jahre 1873—74. Es eignet sich nämlich ein Beispiel aus der Variation der Constanten viel besser, weil die Störungen in den Coordinaten selbst abhängig sind von der Wahl der Osculationsepoche in Folge der indirecten Glieder; durch die Wahl dieses Beispiels jedoch bleiben die Störungs-

werthe unabhängig von dieser Epoche. Aus der Störungstafel entlehne ich die folgenden Werthe:

	$w^2 \frac{d^2\mu}{dt^2}$	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}
1873 Aug. 13	− 8″3841		+ 0.6164		− 0.0671		+ 0.0039	
		+ 0.9235		+ 0.0493		− 0.0428		+ 0.0232
Sept. 22	− 7.4606		+ 0.6657		− 0.1099		+ 0.0271	
		+ 1.5892		− 0.0606		− 0.0157		+ 0.0199
Nov. 1	− 5.8714		+ 0.6051		− 0.1256		+ 0.0470	
		+ 2.1943		− 0.1862		+ 0.0313		− 0.0036
Dec. 11	− 3.6771		+ 0.4189		− 0.943		+ 0.0434	
		+ 2.6132		− 0.2805		+ 0.0747		− 0.0386
1874 Jan. 20	− 1.0639		+ 0.1384		− 0.0196		+ 0.0048	
		+ 2.7516		− 0.3001		+ 0.0795		− 0.0390
März 1	+ 1.6877		− 0.1617		+ 0.0599		− 0.0342	
		+ 2.5899		− 0.2402		+ 0.0453		− 0.0072
April 10	+ 4.2776		− 0.4019		+ 0.1052		− 0.0414	
		+ 2.1800		− 0.1350		+ 0.0039		+ 0.0068
Mai 20	+ 6.4656		− 0.5369		+ 0.1091		− 0.0346	

Es soll nun für die erste summirte Reihe nach der Formel A_1) die Anfangsconstante so bestimmt werden, dass das einfache Integral für die Grenze 1873 Dec. 31 verschwindet, man hat daher den Werth, der für Jan. 20 angesetzt ist, als $f(a)$ anzusehen und es kommt der Werth ${}^{1}f(a-\frac{1}{2}w)$ zwischen die Zeilen, die zu 1873 Dec. 11 und 1874 Jan. 20 gehören. Man findet nach A_1 (pag. 35):

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{24} f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) &= -\ 0''1088.8 \\
+\frac{17}{5760} f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) &= -\qquad 8.3 \\
-\frac{367}{967680} f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) &= -\qquad 0.3 \\
\hline
{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) &= -\ 0''1097
\end{aligned}
$$

Will man aber, dass das einfache Integral für 1874 Jan. 20 verschwindet, so gibt die Formel B_1) pag. 35 für den Anfangswerth der ersten summirten Reihe, der zwischen die Zeilen 1873 Dez. 11 und 1874 Jan. 20 zu setzen ist:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2} f(a) &= +\ 0''5319.5 \\
+\frac{1}{12} f^{I}(a) &= +\ 0.2235.3 \\
-\frac{11}{720} f^{III}(a) &= +\qquad 14.3 \\
+\frac{191}{60480} f^{V}(a) &= +\qquad 2.4 \\
-\frac{2497}{3628800} f^{VII}(a) &= +\qquad 0.3 \\
\hline
{}^{1}f(a+\tfrac{1}{2}w) &= +\ 0''7602
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Anfangswerthe in die erste summirte Reihe ein und bildet das Summationsschema und nachher die einfachen Integrale für dieselben Grenzen, so wird man sich überzeugen können, dass das gebildete Integral je nach der gesetzten Bedingung für die gewählte Epoche verschwindet.

Als Beispiel der Anwendung der Formeln H_1 (p. 43) soll die Anfangsconstante so bestimmt werden, dass das einfache Integral für die Grenze 1874 Jan. 10 verschwindet; der für ${}^{1}f(a-\frac{1}{2}w)$ nach H_1 berechnete Werth ist natürlich zwischen

die Zeilen 1873 Dez. 11 und 1874 Jan. 20 zu setzen, innerhalb welcher Grenzen das eben gewählte Datum fällt. Vermöge der Wahl dieser Grenze wird man mit gleichem Vortheil sowohl die erste als die zweite Formel anwenden können; gebraucht man die erste, so hat man $n = -0.25$ und die Rechnung stellt sich mit Hilfe der Tafel VI wie folgt:

d	1	3	5	7
$f^d(a)$	$+2.68240$	-0.20030	$+0.07710$	-0.03880
$\log f^d(a)$	0.428524	9_n40285	8.8871	8_n5888
$\log Q_1^d(0.25)$	$8_n716609$	8.00907	7_n3338	6.6760

d	4	6
$\log f^d(a)$	8_n2923	7.6812
$\log Q_1^d(0.25)$	8_n1261	7.2466

$$
\begin{aligned}
(n+\tfrac{1}{2})f'(a) &= -0''2659.7 \\
Q_1^1(n)f^{I}(a) &= -0.1397.1 \\
Q_1^3(n)f^{III}(a) &= -0.0029.7 \\
Q_1^5(n)f^{V}(a) &= -0.0001.7 \\
Q_1^7(n)f^{VII}(a) &= -0.0000.2 \\
\hline
S_u &= -0.4088.4 \\
n^3 S_g &= -0.0003.6 \\
\hline
{}^1f(a-\tfrac{1}{2}w) &= +0''4092
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\tfrac{1}{6}f^{II}(a) &= +0''0230.7 \\
Q_1^4 f^{IV}(a) &= +0.0002.6 \\
Q_1^6 f^{VI}(a) &= +0.0000.1 \\
S_g &= -0.0233.4
\end{aligned}
$$

Wendet man dagegen die zweite Formel an, so wird man zu setzen haben $m = +0.25$ und erhält mit Benützung der Tafel VII:

d	1	3	5	7
$\log f^d(a-\frac{1}{2}w)$	0.417173	9_n44793	8.8733	8_n5860
$\log P_1^d(0.25)$	8.862827	7_n01180	6.7039	5_n8060

d	2	4	6
$f^d(a-\frac{1}{2}w)$	$+0.27865$	-0.05605	$+0.02410$
$\log f^d(a-\frac{1}{2}w)$	9.44506	8_n7555	8.3820
$\log P_1^d(0.25)$	9_n05912	8.3284	7_n0458

$$
\begin{aligned}
P_1^1(m)f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) &= +0''1905.5 \\
P_1^3(m)f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) &= +0.0011.5 \\
P_1^5(m)f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) &= +0.0000.4 \\
P_1^7(m)f^{VII}(a-\tfrac{1}{2}w) &= 0.0 \\
\hline
S_u &= +0.1917.4 \\
m S_g &= -0.6009.4 \\
\hline
{}^1f(a-\tfrac{1}{2}w) &= +0''4092
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f(a-\tfrac{1}{2}w) &= 2''3705.0 \\
P_1^2(m)f^{II}(a-\tfrac{1}{2}w) &= -0.0319.3 \\
P_1^4(m)f^{IV}(a-\tfrac{1}{2}w) &= -0.0012.1 \\
P_1^6(m)f^{VI}(a-\tfrac{1}{2}w) &= -0.0001.1 \\
\hline
S_g &= -2.4037.5
\end{aligned}
$$

in völliger Uebereinstimmung mit dem obigen Werthe. Man kann sich auch durch Einsetzung dieser Anfangsconstante in die erste summirte Reihe und Bildung des Integrales für die Grenze 1874 Jan. 20 leicht überzeugen, dass die Bestimmung der Anfangsconstante richtig ausgeführt worden ist.

B) Doppelte Integrale.

Integrirt man die Gleichungen 1) und 3) des vorliegenden Paragraphen (pag. 32) nochmals, so wird man vorerst zu beachten haben, dass man für $J_n{}^1$ und $J_m{}^1$ die durch die Gleichungen 2) und 4) (pag. 32) definirten Werthe einzusetzen hat; es ist aber mit Rücksicht auf die Gleichungen 8) und 7) (pag. 34) anzunehmen:

$$J_n{}^1 = {}^1f(a+iw) + \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+iw)$$

$$J_m{}^1 = {}^1f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)$$

Es wird also aus 1) und 3), nachdem man links mit dl, rechts beziehungsweise mit $w\,dn$ und $w\,dm$ multiplicirt hat, durch nochmalige Integration erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w^2}\iint f(l)\,dl^2 = {} & n\,{}^1f(a+iw) + \frac{n^2}{2} f(a+iw) + \\
& + \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, n^{2p+1}\, \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2(d-p)}\,(2d-1)!\,2p\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+iw) \\
& + \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, n^{2p+2}\, \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2(d-p)}\,(2d)!\,(2p+1)\,(2p+2)} \overset{2d}{f}(a+iw) \\
& + n\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+iw) \\
& + J_n{}^2
\end{aligned} \qquad 18)$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w^2}\iint f(l)\,dl^2 = {} & m\,{}^1f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \frac{m^2}{2} f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \\
& + \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, m^{2p+1}\, \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\}}{2^{2(d-p)}\,(2d-1)!\,2p\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) \\
& + \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, m^{2p+2}\, \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\}}{2^{2(d-p)}\,(2d)!\,(2p+1)\,(2p+2)} \overset{2d}{f}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) \\
& + m\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) \\
& + J_m{}^2
\end{aligned} \qquad 19)$$

Die Werthe der auftretenden Integrationsconstanten bestimmen sich leicht aus:

$$\frac{1}{w^2}\iint^{a+iw} f(l)\,dl^2 = J_n{}^2$$

$$\frac{1}{w^2}\iint^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l)\,dl^2 = J_m{}^2$$

und würden gebraucht werden, wenn man auf dreifache Integrale übergeht, die ich jedoch hier nicht mehr zur Untersuchung aufgenommen habe, da dieselben in der praktischen Anwendung wohl kaum je gebraucht werden. Man kann demnach

diese Integrationsconstanten vorerst ganz ausser Acht lassen, da der später nothwendige Uebergang auf bestimmte Integrale dieselben verschwinden macht.

Geht man sofort auf bestimmte Grenzen über, so empfiehlt es sich, für n die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ anzunehmen; unter dieser Voraussetzung verwandelt sich die Gleichung 18) in:

$$\frac{1}{w^2}\iint\limits_{a+(i-\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl^2 = {}^{I}f(a+iw) + \sum_{d=1}^{d=r}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\,\overset{d}{\underset{}{C}}{}^{p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d-1)!\,2p\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+iw)$$
$$+ \sum_{d=1}^{d=r}\sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\,\overset{d}{C}{}^{p}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \overset{2d+1}{f}(a+iw) \qquad 20)$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die Reductionsformel 20) (pag. 12) an, indem für das letzte Glied gesetzt wird:

$$\frac{1}{2^{2d}(2d)!}\sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}}{2p+1}\,\overset{d}{C}{}^{p}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\} = \frac{1}{2^{2d}(2d)!}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)}\,\overset{d}{C}{}^{p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}$$
$$-\frac{1}{2^{2d}(2d-1)!}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}}{2p}\,C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}$$

so erhält man sogleich:

$$\frac{1}{w^2}\iint\limits_{a+(i-\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl^2 = {}^{I}f(a+iw) + \sum_{d=1}^{d=r}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}(1-2d)\,\overset{d}{C}{}^{p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+iw) \qquad 21)$$

Vergleicht man die Ausdrücke 21) und 7) (pag. 34), so findet sich, dass die numerischen Werthe, mit denen die Differenzwerthe in den beiderseitigen Formeln multiplicirt sind, identisch sind bis auf den Factor $(1-2d)$. Die zu gleichen d gehörigen Factoren werden daher aus den für 21) erhaltenen Werthen gefunden, wenn man dieselben einfach mit dem Factor $(1-2d)$ multiplizirt. Die Rechnung dieser Coëfficienten wird mit Hilfe dieser Bemerkung sehr einfach, doch erwähne ich gleich hier, dass die unten mitgetheilten Coëfficienten zur Controle auch nach der obigen Formel 20) berechnet wurden.

Ehe ich an die weitere Transformation von 21) gehe, will ich die Gleichung 19) ähnlichen Reductionen unterziehen und die Entwicklungen für dieselbe auf denselben Standpunkt bringen. Setzt man in Gl. 19) (pag. 40) die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ für m ein, so findet sich sofort:

$$\frac{1}{w^2}\iint\limits_{a+iw}^{a+(i+1)w} f(l)\,dl^2 = {}^{I}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \sum_{d=1}^{d=r}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^{d-p}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\}}{2^{2d}\,(2d-1)!\,2p\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)$$
$$+ \sum_{d=1}^{d=r}\sum_{p=1}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}\,C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \overset{2d+1}{f}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)$$

Zur Zusammenziehung dieses Ausdruckes wende ich die Gleichung 18) (pag. 12) an. Ersetzt man das letzte Glied nach derselben, so resultirt sofort:

$$\frac{1}{w^2}\iint\limits_{a+iw}^{a+(i+1)w} f(l)\,dl^2 = {}^{II}f\left(a+(i+\tfrac{1}{2})w\right) + \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\,2\,(2d-1)}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)(2p-1)}\,\overset{d-p}{C}\{1^2,3^2,\ldots(2d-3)^2\}\,\overset{2d-1}{f}\left(a+(i+\tfrac{1}{2})w\right) \tag{22}$$

womit leicht die Coëfficienten für die Doppelintegrale berechnet werden können. Es zeigt sich nach diesen Formeln kein so einfacher Zusammenhang zwischen den Coëfficienten der einfachen und Doppelintegrale und doch besteht ein solcher, der sehr zweckmässig zur Controle der numerischen Entwicklungen benützt werden kann. Gebraucht man nämlich die Gleichung (12) (pag. 10), und beachtet, dass in derselben $\delta = (d-1)$ geschrieben ist, so erhält man für den Coëfficienten von $\overset{2d-1}{f}\left(a+(i+\tfrac{1}{2})w\right)$ sofort:

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\,2\,(2d-1)}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)(2p-1)}\,\overset{d-p}{C}\{1^2,3^2,\ldots(2d-3)^2\} = -\sum_{p=0}^{p=d}\frac{(-1)^{d-p}(2d-1)}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,\overset{d-p}{C}\{1^2,3^2,\ldots(2d-1)^2\}$$
$$-\sum_{p=0}^{p=\delta}(-1)^{\delta-p}\left(\frac{d-1}{2}\right)\frac{\overset{\delta-p}{C}\{1^2,3^2,\ldots(2\delta-1)^2\}}{2^{2\delta}\,(2\delta)!\,(2p+1)}$$

Die rechts stehenden Coëfficienten sind aber völlig identisch mit jenen, welche bei den einfachen Integralen gefunden wurden; bezeichnet man demnach einen Coëfficienten der vorgelegten Reihe mit $K^{(\,)}_{(d)}$, so besteht die Relation für ein bestimmtes d:

$$-K^{(2)}_{(d)} = (2d-1)\,K^{(1)}_{(d)} + \left(\frac{d-1}{2}\right)K^{(1)}_{(d-1)}$$

welche Gleichung zweckmässig zur Controle benützt werden kann und auch benützt wurde.

Beachtet man, ähnlich wie bei dem einfachen Integrale, dass ist:

$$\iint\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl^2 = \iint\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+\frac{1}{2}w} f(l)\,dl^2 + \iint\limits_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\frac{3}{2}w} f(l)\,dl^2 + \ldots\ldots + \iint\limits_{a+(i-\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl^2$$

$$\iint\limits_{a}^{a+iw} f(l)\,dl^2 = \iint\limits_{a}^{a+w} f(l)\,dl^2 + \iint\limits_{a+w}^{a+2w} f(l)\,dl^2 + \ldots\ldots + \iint\limits_{a+(i-1)w}^{a+iw} f(l)\,dl^2$$

und erinnert sich der Relation (5) (pag. 5), so kann man aus (21) und (22) ableiten:

$$\frac{1}{w^2}\iint\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl^2 = {}^{II}f\left(a+(i+\tfrac{1}{2})w\right) + \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{(1-2d)\,\overset{d-p}{C}\{2^2,4^2,\ldots(2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,\overset{2d-2}{f}\left(a+(i+\tfrac{1}{2})w\right)$$
$$-{}^{II}f\left(a-\tfrac{1}{2}w\right) - \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{(1-2d)\,\overset{d-p}{C}\{2^2,4^2,\ldots(2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)}\,\overset{2d-2}{f}\left(a-\tfrac{1}{2}w\right) \tag{23}$$

$$\frac{1}{w^2}\iint\limits_{a}^{a+iw} f(l)\,dl^2 = {}^{II}f(a+iw) + \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{2\,(2d-1)\,\overset{d-p}{C}\{1^2,3^2,\ldots(2d-3)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)(2p-1)}\,\overset{2d-2}{f}(a+iw)$$
$$-{}^{II}f(a) - \sum_{d=1}^{d=s}\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{2\,(2d-1)\,\overset{d-p}{C}\{1^2,3^2,\ldots(2d-3)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)(2p-1)}\,\overset{2d-2}{f}(a) \tag{24}$$

Die Ausmittlung der Doppelintegrale in Bezug auf die gewählten Grenzen erscheint somit bestimmt, sobald die 2[te] summirte Reihe gebildet ist. Um aber diese zu erhalten, muss eine Anfangsconstante zur Bildung der ersten und eine weitere An-

fangsconstante zur Bildung der zweiten summirten Reihe angenommen sein, so dass in der That, wie es die allgemeine Forderung eines Doppelintegrales mit sich bringt, zwei willkürliche Constanten in dem Probleme auftreten, deren Bestimmung aber nur durch anderweitige Bedingungen des Problems vorgenommen werden kann. Diese Bestimmung wird gewöhnlich dadurch geleistet werden können, dass das vorgelegte Doppelintegral die Eigenschaft haben muss, für einen bestimmten Argumentwerth einen gewissen Werth zu ergeben, und dass das zugehörige einfache Integral ebenfalls einer solchen Bedingung genügen muss. Bei den astronomischen Rechnungen in der Störungstheorie wird es sich wohl meistens empfehlen, der Bedingung zu genügen, dass sowohl das einfache als auch das doppelte Integral für die untere Grenze verschwindet. Diese Annahme soll nun weiter verfolgt werden.

Nimmt man die Formel 23) (pag. 51) vor, so wird zunächst die Bedingung, dass das Doppelintegral für die Grenze $a-\frac{1}{2}w$ verschwindet, ausgedrückt sein durch:

$$^{II}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\sum_{d=1}^{d=r}\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{(1-2d)\,C^{d-p}\{2^2,4^2,\ldots(2d-2)^2\}}{2^{2d}(2d)!(2p+1)}\overset{2d-2}{f}(a-\tfrac{1}{2}w)\,. \qquad 25)$$

dass aber das einfache Integral für dieselbe Grenze verschwindet, nach Formel 7) (pag. 34) des vorliegenden Paragraphen:

$$^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\sum_{d=1}^{d=r}\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{C^{d-p}\{2^2,4^2,\ldots(2d-2)^2\}}{2^{2d}(2d)!(2p+1)}\overset{2d-1}{f}(a-\tfrac{1}{2}w) \qquad 26)$$

Genügen die Anfangsconstanten der summirten Reihe diesen Bedingungen, so ist die gestellte Forderung erfüllt. In der That gibt die Formel 26) unmittelbar jenen Werth an, den man an der betreffenden Stelle in das Summationsschema einzutragen hat, um die erste summirte Reihe bilden zu können. Die Formel 25) dagegen entspricht nur einem arithmetischen Mittel zweier Werthe, nämlich von $^{II}f(a-w)$ und $^{II}f(a)$; da aber $^{I}f(a-\frac{1}{2}w)$ durch 26) gegeben ist, so kann man ohne Schwierigkeit berechnen:

$$\left.\begin{aligned} {}^{II}f(a) &= {}^{II}f(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) \\ \text{oder}\quad {}^{II}f(a-w) &= {}^{II}f(a-\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) \end{aligned}\right\} \qquad 27)$$

welche beiden Formeln nach Belieben gewählt werden können. Wenn sich auch gegen diese Art der Bestimmung der Anfangsconstante nichts einwenden lässt, so zieht man es, soweit mir der Gebrauch bekannt ist, vor, eine unmittelbare Bestimmung der Anfangsconstante $^{II}f(a-w)$ oder $^{II}f(a)$ zu erlangen. Schreibt man in den Formeln 25), 26):

$$\overset{2d-2}{f}(a-\tfrac{1}{2}w) = \tfrac{1}{2}\overset{2d-2}{f}(a-w) + \tfrac{1}{2}\overset{2d-2}{f}(a)$$

$$\overset{2d-1}{f}(a-\tfrac{1}{2}w) = \overset{2d-2}{f}(a) \qquad - \overset{2d-2}{f}(a-w)$$

und beachtet, dass je nachdem die erste oder zweite der Formeln 27) verwendet wird, der letztere Werth mit *plus* oder *minus* $\frac{1}{2}$ multiplicirt werden muss, so findet sich, wenn man in 27) die Werthe aus 25) und 26) einsetzt:

$$
\begin{aligned}
{}^{\text{II}}f(a) &= \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \left\{ d\overset{2d-2}{f}(a-w) + (d-1)\overset{2d-2}{f}(a) \right\} \\
{}^{\text{II}}f(a-w) &= \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \left\{ (d-1)\overset{2d-2}{f}(a-w) + d\overset{2d-2}{f}(a) \right\}
\end{aligned} \tag{28}
$$

Man kann also die Anfangsconstanten ${}^{\text{II}}f(a)$ und ${}^{\text{II}}f(a-w)$ ohne Schwierigkeit nach 28) ermitteln. Zur Controle kann man nach 26) berechnen ${}^{\text{I}}f(a-\frac{1}{2}w)$, wobei die Relation bestehen muss:

$$
{}^{\text{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = {}^{\text{II}}f(a) - {}^{\text{II}}f(a-w).
$$

Hiermit erscheint die Bestimmung der Integrationsconstanten für die Grenze $-\frac{1}{2}$ erledigt und es soll nun die analoge Bestimmung für die Grenze o vorgenommen werden, d. h. die Constanten sind so zu bestimmen, dass das einfache und doppelte Integral für diese Grenze verschwindet.

Die Bedingung, dass das einfache Integral für die Grenze o verschwindet, ist nach Formel 10) (pag. 34) ausgedrückt durch:

$$
{}^{\text{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\left\{ \tfrac{1}{2}f(a) + \sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)} \overset{2d-1}{f}(a) \right\}; \tag{29}
$$

dieselbe Bedingung für das Doppelintegral ergibt aus 24) (pag. 51):

$$
{}^{\text{II}}f(a) = -\sum_{d=1}^{d=\infty}\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p}\, \frac{2(2d-1)\, \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\}}{2^{2d}\,(2d)!\,(2p+1)(2p-1)} \overset{2d-2}{f}(a). \tag{30}
$$

Da die beiden hierdurch bestimmten Werthe im Summationsschema auftreten, so können dieselben ohne weitere Transformation zur Bildung der ersten und zweiten summirten Reihe verwendet werden und es ist die gestellte Aufgabe hiermit erledigt.

Bezeichnet man die Coëfficienten, mit denen die Differenzwerthe verbunden sind in der Formel 23) (pag. 51) mit P, in der Formel 24) (pag. 51) mit Q, und ertheilt diesen Buchstaben, wie dies bei den einfachen Integralen (nach pag. 35) geschehen ist, zwei Index, wo der obere auf den Differenzwerth, der untere auf die Ordnung der Integration hinweist, welch letzterer Index also in diesem Fall gleich 2 ist, so wird man die folgenden 4 Formelsysteme für die Combinationen der eben abgehandelten Grenzen haben:

Grenzen: $a-\frac{1}{2}w$ und $a+(i+\frac{1}{2})w$

$$
\left.
\begin{aligned}
w^2\,{}^{\text{II}}f(a) &= w^2\{P_1^{\,1}f^{\text{I}}(a-w) + P_1^{\,3}(2f^{\text{II}}(a-w) + f^{\text{II}}(a)) + P_1^{\,5}(3f^{\text{IV}}(a-w) + 2f^{\text{IV}}(a)) + \ldots\} \\
w^2\,{}^{\text{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) &= -w^2\{P_1^{\,1}f^{\text{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{\,3}f^{\text{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{\,5}f^{\text{V}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \ldots\} \\
\iint\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl^2 &= w^2\{{}^{\text{II}}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^{\,0}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^{\,2}f^{\text{II}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\}
\end{aligned}
\right\} A_{\text{II}})
$$

Grenzen: a und $a+iw$

$$
\left.
\begin{aligned}
w^2\,{}^{\text{II}}f(a) &= -w^2\{Q_2^{\,0}f(a) + Q_2^{\,2}f^{\text{II}}(a) + Q_2^{\,4}f^{\text{IV}}(a) + \ldots\} \\
w^2\,{}^{\text{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) &= -w^2\{\tfrac{1}{2}f(a) + Q_1^{\,1}f^{\text{I}}(a) + Q_1^{\,3}f^{\text{III}}(a) + Q_1^{\,5}f^{\text{V}}(a) + \ldots\} \\
\iint\limits_{a}^{a+iw} f(l)\,dl^2 &= w^2\{{}^{\text{II}}f(a+iw) + Q_2^{\,0}f(a+iw) + Q_2^{\,2}f^{\text{II}}(a+iw) + Q_2^{\,4}f^{\text{IV}}(a+iw) + \ldots\}
\end{aligned}
\right\} B_{\text{II}})
$$

Grenzen: $a - \frac{1}{2}w$ und $a + iw$

$$w^2\,{}^{II}f(a) = w^2\{P_1^1 f(a-w) + P_1^3[2f^{II}(a-w) + f^{II}(a)] + P_1^5[3f^{IV}(a-w) + 2f^{IV}(a)] + \ldots\}$$

$$w^2\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w^2\{P_1^1 f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^3 f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^5 f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) + \ldots\} \qquad (C_{II})$$

$$\iint\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(l)\,dl^2 = w^2\{{}^{II}f(a+iw) + Q_2^0 f(a+iw) + Q_2^2 f^{II}(a+iw) + \ldots\}$$

Grenzen: a und $a + (i + \frac{1}{2})w$

$$w^2\,{}^{II}f(a) = -w^2\{Q_2^0 f(a) + Q_2^2 f^{II}(a) + Q_2^4 f^{IV}(a) + \ldots\}$$

$$w^2\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w^2\{\tfrac{1}{2}f(a) + Q_1^1 f^{I}(a) + Q_1^3 f^{III}(a) + \ldots\} \qquad (D_{II})$$

$$\iint\limits_{a}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(l)\,dl^2 = w^2\{{}^{II}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^0 f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^2 f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\}$$

Die numerischen Werthe der hier auftretenden P- und Q-Coëfficienten sind, wie früher die bei der einfachen Integration vorkommenden Werthe, in der hinten angeführten Tafel V aufgenommen; in derselben ist, indem ich die mit dem Index 1 unten versehenen Buchstaben (vergl. pag. 35) noch einmal anführe, gesetzt worden:

$$\left.\begin{aligned}
P\binom{2d-1}{1} &= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}(2d)!\,(2p+1)} \\
Q\binom{2d-1}{1} &= \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-1)^2\}}{2^{2d}(2d)!\,(2p+1)} \\
P\binom{2d-2}{2} &= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}(1-2d)\, \overset{d-p}{C}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}}{2^{2d}(2d)!\,(2p+1)} \\
Q\binom{2d-2}{2} &= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\,2(2d-1)\, \overset{d-p}{C}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\}}{2^{2d}(2d)!\,(2p+1)(2p-1)}
\end{aligned}\right\} \qquad 31)$$

Die bisher entwickelten Formeln sind an specielle Grenzen gebunden. Es kann aber unter Umständen erwünscht sein, von denselben abzugehen, wiewohl dies selten genug der Fall sein wird; ich setze wie bei den einfachen Integralen voraus, dass nur ein specieller Werth nöthig ist, und hierbei die Herstellung einer vollständigen Integraltafel nicht beabsichtigt wird.

Um wieder eine möglichst rasche Convergenz herzustellen, wird man n und m stets kleiner als $\frac{1}{4}$ annehmen müssen und die Benützung der Formeln 18) und 19) pag. 45 wird sofort das gewünschte Ziel erreichen lassen. Die Anwendung dieser Formeln wird jedoch sehr beschwerlich sein und man würde jedenfalls, wenn sich nicht andere Hilfsmittel beschaffen liessen, wesentlich an Zeit ersparen, wenn man in der Nähe der geforderten Grenze durch alternirende Anwendung der Gleichungen A_{II}) und B_{II}) (pag. 53) sich kleine Integraltafeln herstellen würde, nach denen man den Werth des Integrales für die obere und untere Grenze mit Hilfe der Interpolation ermitteln könnte. Hierbei wäre nur zu beachten, dass die Berücksichtigung der Bedingungen für das einfache Integral noch einer besonderen Aufmerksamkeit bedarf. Es wird sich aber die vorgelegte Aufgabe durch Transformation und Herstellung von allgemeinen Hilfstafeln in bequemerer Weise lösen lassen.

Es soll zunächst die willkürliche Grenze so gelegen gedacht sein, dass die

Wahl von n vortheilhaft ist, also diese Grenze näher an einen Argumentwerth zu liegen kommt als $\frac{1}{4}w$. Integrirt man die Gleichung B_{II}) bis zum Argumentwerthe und legt die wegen n nöthige Correction hinzu, so erhält man:

$$\iint\limits^{a+(i+n)w} f(l)\, dl^2 = w^2 \{ {}^{II}f(a+iw) + Q_2^{\,0} f(a+iw) + Q_2^{\,2} f^{II}(a+iw) + \ldots\ldots \} + \tag{32}$$

$$+ \iint\limits_{a+iw}^{a+(i+n)w} f(l)\, dl^2 + J_2 \,.$$

wo J_2 eine willkürliche Integrationsconstante ist, die nach Einsetzung der unteren Grenze verschwindet und vorerst ausser Acht gelassen werden kann. Multiplicirt man die Gleichung 16 (pag. 26) links mit $\frac{dl^2}{w^2}$, rechts mit dn^2 und integrirt zweimal, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w^2}\iint f(l)\, dl^2 = \Big[& \frac{n^2}{1\cdot 2} f(a+iw) + \frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3} \{ f^{I}(a+iw) + N_1^{\,3} f^{III}(a+iw) + \ldots \} \\
& + \frac{n^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \{ f^{II}(a+iw) + N_2^{\,4} f^{IV}(a+iw) + \ldots \} \\
& + \frac{n^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \{ f^{III}(a+iw) + N_3^{\,5} f^{V}(a+iw) + \ldots \} \\
& + \ldots\ldots \\
& + n J_1 + J_2 \Big]
\end{aligned} \tag{33}$$

wo J_1 und J_2 die durch die Doppelintegration auftretenden Constanten sind. J_2 zu bestimmen, ist nicht nöthig, da es nach Einsetzen der Grenzen wegfällt; J_1 aber muss berücksichtigt werden. Es ist aber offenbar, wenn man das Resultat der ersten Integration ins Auge fasst (pag. 32):

$$J_1 = \int\limits^{a+iw} f(a+(i+n)w)\, dl$$

oder mit Berücksichtigung der Formel B_I) (pag. 35):

$$J_1 = {}^{I}f(a+iw) + Q_1^{\,1} f^{I}(a+iw) + Q_1^{\,3} f^{III}(a+iw) + Q_1^{\,5} f^{V}(a+iw) + \ldots$$

Setzt man in 33) die Grenzen n und o, sowie J_1 ein, so findet sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w^2}\iint\limits_{a+iw}^{a+(i+n)w} f(l)\, dl^2 = {} & n\,{}^{I}f(a+iw) \\
& + \frac{n^2}{2!} f(a+iw) \\
& + n f^{I}(a+iw) \left\{ Q_1^{\,1} + \frac{n^2}{3!} \right\} \\
& + n^4 f^{II}(a+iw) \left\{ \frac{1}{4!} \right\} \\
& + n f^{III}(a+iw) \left\{ Q_1^{\,3} + \frac{n^2}{3!} N_1^{\,3} + \frac{n^4}{5!} \right\} \\
& + n^4 f^{IV}(a+iw) \left\{ \frac{N_2^{\,4}}{4!} + \frac{n^2}{6!} \right\} \\
& + \ldots
\end{aligned}$$

Führt man diesen Werth in 32) ein und beachtet, dass J_2 durch die Einführung der Grenzen verschwindet, so erhält man das Doppelintegral für die Grenze $a+(i+n)w$:

$$\iint^{a+(t+n)w} f(t)\,dt^2 = w^2 \Big[{}^{II}f(a+iw)$$

$$+ f(a+iw) \left\{ Q_2^0 + \frac{n^2}{2!} \right\}$$

$$+ f^{II}(a+iw) \left\{ Q_2^2 + \frac{n^4}{4!} \right\}$$

$$+ f^{IV}(a+iw) \left\{ Q_2^4 + \frac{n^4}{4!} N_2^4 + \frac{n^6}{6!} \right\}$$

$$+ f^{VI}(a+iw) \left\{ Q_2^6 + \frac{n^4}{4!} N_2^6 + \frac{n^6}{6!} N_4^6 + \frac{n^8}{8!} \right\}$$

$$+ \ldots\ldots \Big]$$

$$+ w^2 n \Big[{}^{I}f(a+iw) + f^{I}(a+iw) \left\{ Q_1^1 + \frac{n^2}{3!} \right\}$$

$$+ f^{III}(a+iw) \left\{ Q_1^3 + \frac{n^2}{3!} N_1^3 + \frac{n^4}{5!} \right\}$$

$$+ \ldots\ldots \Big]$$

Das vorstehende Doppelintegral lässt sich daher leicht in die folgende Form bringen:

$$\iint^{a+(t+n)w} f(t)\,dt^2 = w^2 \Big[{}^{II}f(a+iw) + Q_2^0(n) f(a+iw) + Q_2^2(n) f^{II}(a+iw) + Q_2^4(n) f^{IV}(a+iw) + \ldots +$$

$$+ n \left\{ {}^{I}f(a+iw) + Q_2^1(n) f^{I}(a+iw) + Q_2^3(n) f^{III}(a+iw) + Q_2^5(n) f^{V}(a+iw) + \ldots \right\} \Big] \qquad 34a)$$

wo die hier auftretenden Coëfficienten die nachstehende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned}
Q_2^0(n) &= Q_2^0 + \frac{n^2}{2!} \\
Q_2^2(n) &= Q_2^2 + \frac{n^4}{4!} \\
Q_2^4(n) &= Q_2^4 + \frac{n^4}{4!} N_2^4 + \frac{n^6}{6!} \\
Q_2^6(n) &= Q_2^6 + \frac{n^4}{4!} N_2^6 + \frac{n^6}{6!} N_4^6 + \frac{n^8}{8!} \\
&\ldots\ldots \quad \ldots \\
&\ldots\ldots \\
Q_2^1(n) &= Q_1^1 + \frac{n^2}{3!} \\
Q_2^3(n) &= Q_1^3 + \frac{n^2}{3!} N_1^3 + \frac{n^4}{5!} \\
Q_2^5(n) &= Q_1^5 + \frac{n^2}{3!} N_1^5 + \frac{n^4}{5!} N_3^5 + \frac{n^6}{7!} \\
&\ldots\ldots \quad \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad 35)$$

Diese Coëfficienten finden sich in der Tafel VIII. Zu der Formel 34) wäre nur zu bemerken, dass die Integrationsconstante fortgelassen wurde, weil die Annahme gemacht ist, dass bestimmte Bedingungen für die untere Integrationsgrenze gelten, die bereits durch die Einführung der ersten Summationsconstanten ${}^{II}f(a)$ und ${}^{I}f(a - \frac{1}{2}w)$ erfüllt sind. Es gibt somit die Formel 34) den vollständigen Werth des Doppelintegrales unter den eben angeführten Voraussetzungen.

Durch die bisherigen Erörterungen ist für die Fälle vorgesorgt, wo das Integral für die speciellen Grenzen a oder $a - \frac{1}{2}w$ verschwindet; es soll jetzt die Bestimmung der Anfangsconstanten, ${}^{\text{II}}f(a)$ und ${}^{\text{I}}f(a - \frac{1}{2}w)$, vorgenommen werden, wenn der Bedingung genügt werden soll, dass das einfache und doppelte Integral für eine willkürliche untere Grenze verschwindet, wobei vorerst nur die Beschränkung statt hat, dass die Wahl von $n \lessgtr \frac{1}{4}$ möglich ist; die Bestimmung der Anfangsconstante ${}^{\text{I}}f(a - \frac{1}{2}w)$ für diese Bedingung bietet die Formel H_1 (pag. 43). Denkt man sich für ${}^{\text{II}}f(a)$ vorerst Null geschrieben, so gibt die Gleichung 34a), auf die betreffende Anfangsconstante angewendet, einen Werth für das Doppelintegral, der von Null verschieden ist. Derselbe, mit umgekehrten Zeichen angewandt, gibt aber den Werth dieser Constante; man hat also:

$$\begin{aligned} w^2\, {}^{\text{II}}f(a) = &- w^2 \{ Q_2^0(n) f(a) + Q_2^2(n) f^{\text{II}}(a) + Q_2^4 f^{\text{IV}}(a) + \dots \} \\ &+ n \{ {}^{\text{I}}f(a) + Q_2^1(n) f^{\text{I}}(a) + Q_2^3(n) f^{\text{III}}(a) + \dots \}, \end{aligned} \tag{34b}$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst erscheint.

Ist die willkürliche Grenze so gelegen, dass sie dem Mittel zweier Argumente näher ist, so hat man $m \lesseqgtr \frac{1}{4}$ und ähnlich wie vorher:

$$\begin{aligned} \iint\limits^{a+[i+\frac{1}{2}+m]w} f(l)\, dl^2 = w^2 \{ &{}^{\text{II}}f(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + P_2^0 f(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + P_2^2 f^{\text{II}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + \dots \} + \\ &+ \iint\limits_{a+[i+\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}+m]w} f(l)\, dl^2 \end{aligned} \tag{36}$$

wobei die Integrationsconstante fortgelassen ist. Multiplicirt man die Gleichung 17) (pag. 27) links mit $\frac{dl^2}{w^2}$, rechts mit dm^2 und integrirt zweimal, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \iint f(l)\, dl^2 = \Big[&\frac{m^2}{1\cdot 2} \{ f(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + M_0^2 f^{\text{II}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + M_0^4 f^{\text{IV}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + \dots \} \\ &+ \frac{m^3}{1\cdot 2\cdot 3} \{ f^{\text{I}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + M_1^3 f^{\text{III}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + M_1^5 f^{\text{V}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + \dots \} \\ &+ \frac{m^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \{ f^{\text{II}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + M_2^4 f^{\text{IV}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + M_2^6 f^{\text{VI}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + \dots \} \\ &+ \dots \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \Big] \\ &+ m (J)_1 + (J)_2 \end{aligned} \tag{37}$$

Es wird wieder die Bestimmung der Integrationsconstante $(J)_1$ nothwendig werden; man wird dafür mit Rücksicht auf Gl. 4) (pag. 32) und A_1 (pag. 35) finden:

$$(J)_1 = {}^{\text{I}}f(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + P_1^1 f^{\text{I}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + P_1^3 f^{\text{III}}(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) + \dots\dots$$

Setzt man diesen Werth, sowie die Grenzen m und 0 in 37) ein, so erhält man statt 36):

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \iint\limits^{a+[i+\frac{1}{2}+m]w} f(l)\, dl^2 = {}^{\text{II}}f(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) &+ {}^{\text{I}}f(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) \{ m \} \\ &+ f(a + [i+\tfrac{1}{2}]w) \{ P_2^0 + \frac{m^2}{2!} \} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ f^{\mathrm{I}}(a+i+\tfrac{1}{2})w) \left\{P_1^{1}(m) + \frac{m^3}{3!}\right\} \\
&+ f^{\mathrm{II}}(a+i+\tfrac{1}{2})w) \left\{P_2^{2} + \frac{m^2}{2!} M_0^{2} + \frac{m^4}{4!}\right\} \\
&+ \ldots\ldots
\end{aligned}\right\}$$

mit Hilfe welches Ausdruckes sich der Werth des Doppelintegrales (36) auf folgende Gestalt bringen lässt:

$$\iint\limits^{a+(i+\frac{1}{2}+m)w} f(t)\,dt^2 = w^2 \Big[{}^{\mathrm{II}}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^{0}(m) f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^{2}(m) f^{\mathrm{II}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)$$

$$+ P_2^{4}(m) f^{\mathrm{IV}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots + m\Big\{{}^{\mathrm{I}}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^{1}(m) f^{\mathrm{I}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)$$

$$+ P_2^{3}(m) f^{\mathrm{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \ldots\Big\}\Big] \qquad (38)$$

wo die hier vorkommenden Coëfficienten $P_2^{0}(m)$, $P_2^{2}(m)$ ..... $P_2^{1}(m)$, $P_2^{3}(m)$ ..... durch nachstehende Ausdrücke definirt sind:

$$\left.\begin{aligned}
P_2^{0}(m) &= P_2^{0} + \frac{m^2}{2!} \\
P_2^{2}(m) &= P_2^{2} + \frac{m^2}{2!} M_0^{2} + \frac{m^4}{4!} \\
P_2^{4}(m) &= P_2^{4} + \frac{m^2}{2!} M_0^{4} + \frac{m^4}{4!} M_2^{4} + \frac{m^6}{6!} \\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\
P_2^{1}(m) &= P_1^{1} + \frac{m^2}{3!} \\
P_2^{3}(m) &= P_1^{3} + \frac{m^2}{3!} M_1^{3} + \frac{m^4}{5!} \\
P_2^{5}(m) &= P_1^{5} + \frac{m^2}{3!} M_1^{5} + \frac{m^4}{5!} M_3^{5} + \frac{m^6}{7!} \\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Die in der Formel (38) auftretenden Coëfficienten sind wie die vorhergehenden von Herrn F. K. Ginzel berechnet und in der Tafel IX aufgenommen, es bietet daher keine Schwierigkeit, mit denselben das Doppelintegral für eine willkürliche Grenze zu berechnen. Die Integrationsconstanten sind wieder wie früher fortgelassen, weil die Annahme gemacht ist, dass bestimmte Bedingungen für die untere Grenze gelten, die bereits durch die Einführung der ersten Summationsconstanten ${}^{\mathrm{II}}f(a)$ und ${}^{\mathrm{I}}f(a-\frac{1}{2}w)$ erfüllt sind; es gibt demnach die Formel (38) den vollständigen Werth des Doppelintegrales.

Soll das Doppelintegral für eine willkürliche Grenze verschwinden, für die $m \lessgtr +\frac{1}{2}$ gewählt werden kann, was in Verbindung mit der Formel (34b) die Möglichkeit an die Hand gibt, die Lage der untern Grenze ganz willkürlich annehmen zu dürfen, so erhält man durch ähnliche Schlüsse wie früher die Relation:

$$w^2\,{}^{\mathrm{II}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w^2\Big[P_2^{0}(m) f(a-\tfrac{1}{2}w) + P_2^{2}(m) f^{\mathrm{II}}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_2^{4}(m) f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \ldots\ldots$$

$$+ m\Big\{{}^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) + P_2^{1}(m) f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_2^{3}(m) f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \ldots\Big\}\Big] \qquad (40)$$

Hierbei hat man sich zu erinnern, dass ist:

$${}^{II}f(a) = {}^{II}f(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w)$$

Die für die Doppelintegrale gestellte Aufgabe erscheint hiermit erledigt und es erübrigt nur noch, die Formeln zusammenzutragen und durch Beispiele zu erläutern.

Man hat für den Werth des Doppelintegrales für die willkürliche obere Grenze die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
&\qquad\qquad n < \pm\tfrac{1}{4}\\
&\iint\limits^{a+(i+n)w} f(l)\,dl^2 = w^2\Big[{}^{II}f(a+iw) + Q_2^{0}(n)f(a+iw) + Q_2^{2}(n)f^{II}(a+iw) + Q_2^{4}(n)f^{IV}(a+iw) + \dots\\
&\qquad + n\Big\{{}^{I}f(a+iw) + Q_2^{1}(n)f^{I}(a+iw) + Q_2^{3}(n)f^{III}(a+iw) + \dots\Big\}\Big]\\
&\qquad\qquad m < \pm\tfrac{1}{4}\\
&\iint\limits^{a+(i+\frac{1}{2}+m)w} f(l)\,dl^2 = w^2\Big[{}^{II}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^{0}(m)f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^{2}(m)f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) +\\
&\qquad + P_2^{4}(m)f^{IV}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \dots + m\Big\{{}^{I}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + P_2^{1}(m)f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w)\\
&\qquad + P_2^{3}(m)f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \dots\Big\}\Big]
\end{aligned}\right\} (G_{II})$$

Für die untern Grenzen wird man haben, wenn an diese die Bedingung geknüpft ist, dass das einfache und doppelte Integral für dieselben verschwindet:

$$\left.\begin{aligned}
&n < \pm\tfrac{1}{4}, \qquad \int\limits^{a+nw} f(l)\,dl = \iint\limits^{a+nw} f(l)\,dl^2 = 0\\
&w^2\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w^2\Big[(n+\tfrac{1}{2})f(a) + Q_1^{1}(n)f^{I}(a) + Q_1^{3}(n)f^{III}(a) + Q_1^{5}(n)f^{V}(a) + \dots\\
&\qquad + n^3\Big\{\tfrac{1}{6}f^{II}(a) + Q_1^{4}(n)f^{IV}(a) + Q_1^{6}(n)f^{VI}(a) + \dots\Big\}\Big]\\
&w^2\,{}^{II}f(a) = -w^2\Big[Q_2^{0}(n)f(a) + Q_2^{2}(n)f^{II}(a) + Q_2^{4}(n)f^{IV}(a) + \dots\\
&\qquad + n\Big\{{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2}f(a) + Q_2^{1}(n)f^{I}(a) + Q_2^{3}(n)f^{III}(a) + \dots\Big\}\Big]\\
&m < \pm\tfrac{1}{4}, \qquad \int\limits^{a-\frac{1}{2}w+mw} f(l)\,dl = \iint\limits^{a-\frac{1}{2}w+mw} f(l)\,dl^2 = 0\\
&w^2\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w^2\Big[P_1^{1}(m)f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{3}(m)f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{5}(m)f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) + \dots\\
&\qquad + m\Big\{f(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{2}(m)f^{II}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{4}(m)f^{IV}(a-\tfrac{1}{2}w) + \dots\Big\}\Big]\\
&w^2\,{}^{II}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -w^2\Big[P_2^{0}(m)f(a-\tfrac{1}{2}w) + P_2^{2}(m)f^{II}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_2^{4}(m)f^{IV}(a-\tfrac{1}{2}w) + \dots\\
&\qquad + m\Big\{{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) + P_2^{1}(m)f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) + P_1^{3}(m)f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) + \dots\Big\}\Big]\\
&{}^{II}f(a) = {}^{II}f(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w)
\end{aligned}\right\} (H_{II})$$

Die Q_1-Coëfficienten finden sich in Tafel VI.
» P_1 » » » » » VII.
» Q_2 » » » » » VIII.
» P_2 » » » » » IX.

Nehmen wir zur Erläuterung der im Vorhergehenden entwickelten Formeln das auf pag. 13 angeführte Erato-Beispiel vor, in dem bereits die zweite summirte Reihe gebildet ist. Wir wollen zuerst durch die Anwendung der Formel A_{II} (pag. 53) eine Integraltafel für das Doppelintegral zwischen den Grenzen 1872 Oct. 17 bis 1873 Mai 5 herstellen. Bei diesem und den folgenden Beispielen ist wie oben die Zeiteinheit 40 Tage gewählt, so dass w der Einheit gleich zu setzen ist. Man erhält:

	1872 Oct. 17,	1872 Nov. 26,	1873 Jan 5,	1873 Feb 14,	1873 Mz. 26,	1873 Mai 5
${}^{II}f(a+(i+\frac{1}{2})w)$	260062.535	−237488.885	−211912.555	−185331.385	−159248.140	−134686.075
$P_0^2 f(a+(i+\frac{1}{2})w)$	225.810	−125.112	−41.868	+20.747	+63.382	+88.935
$P_2^2 f^{II}(a+(i+\frac{1}{2})w)$	+1.928	+3.709	+4.383	+4.246	+3.630	+2.819
$P_2^4 f^{IV}(a+(i+\frac{1}{2})w)$	+0.255	+0.237	+0.174	+0.102	+0.042	0
$P_2^6 f^{VI}(a+(i+\frac{1}{2})w)$	+0.019	+0.010	+0.002	−0.003	−0.004	−0.004
$P_2^8 f^{VIII}(a+(i+\frac{1}{2})w)$	+0.001	0	−0.001	−0.001	0	0
	260286.14	237610.04	−211949.86	−185306.29	−159181.09	−134594.32

Bestimmt man nach der Formel B_{II}) (pag. 53) den Werth des Doppelintegrales zwischen den Grenzen 1872 Sept. 27 bis 1873 Mai 25, so wird sich ergeben:

	1872 Sept. 27,	1872 Nov. 6,	1872 Dec. 16,	1873 Jan. 25,	1873 Mz. 6,	1873 Apr. 15,	1873 Mai 25
${}^{II}f(a+iw)$	−270318.660	−249806.410	−225171.360	198653.750	−172009.020	−146487.260	−122884.890
$Q_2^0 f(a+iw)$	+559.672	+343.567	+156.880	+10.593	−93.581	−159.941	−195.789
$Q_2^2 f^{II}(a+iw)$	−0.344	−1.471	−2.020	−2.105	−1.890	−1.526	−1.126
$Q_2^4 f^{IV}(a+iw)$	−0.067	−0.071	−0.057	0.037	−0.018	−0.004	+0.004
$Q_2^6 f^{VI}(a+iw)$	−0.004	−0.003	−0.001	0	+0.001	+0.001	+0.001
	−269759.40	−249464.39	−225016.56	−198645.30	−172104.51	−146648.73	−123081.80

Man ist nun in der Lage, durch Vereinigung der vorstehenden Werthe die unten folgende Integraltafel herzustellen, aus der man den Werth des Integrales für eine beliebige, innerhalb der Ausdehnung der Tafel gelegene Grenze durch Interpolation bestimmen kann. Den Werth des Integrales für eine solche beliebige Grenze auf dem eben gezeigten Wege zu erlangen, wäre indess sehr umständlich und es wird deshalb die Formel G_{II} zu diesem Zwecke durch passende Beispiele später erläutert werden.

	ξ	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}
1872 Sept. 27	−269759.40						
		+9473.26					
" Oct. 17	−260286.14		+1348.49				
		+10821.75		−315.89			
" Nov. 6	−249464.39		+1032.60		+22.42		
		+11854.35		−293.47		+5.14	
" 26	−237610.04		+739.13		+27.56		−2.15
		+12593.48		−265.91		+2.99	
" Dec. 16	−225016.56		+473.22		+30.55		−1.59
		+13066.70		−235.36		+1.40	
1873 Jan. 5	−211949.86		+237.86		+31.95		−1.62
		+13304.56		−203.41		−0.22	
" " 25	−198645.30		+34.45		+31.73		−0.96
		+13330.01		−171.68		−1.18	
Febr. 14	−185306.29		−137.23		+30.55		−0.04
		+13201.78		−141.13		−2.12	
März 6	−172104.51		−278.36		+28.43		−0.50
		+12923.42		−112.70		−2.62	
26	−159181.09		−391.06		+25.81		−0.24
		+12532.36		−86.89		−2.86	
April 15	−146648.73		−477.05		+22.95		
		+12054.41		−63.94			
Mai 5	−134594.32		−541.89				
		+11512.52					
25	−123081.80						

Wählt man als obere Grenze für den Integralwerth 1873 Jan. 15, so können hierfür sowohl die erste als auch die zweite Formel G_{II} (pag. 59) mit gleichem Vortheil zur Anwendung gebracht werden. Man findet mit Hilfe der ersten, indem man $n = -0.25$ setzt:

d	0	2	4	6
$\log f^d(a+iw)$	2.104214	2.70350	1_n8587	0_n384
$\log Q_2^d(n)$	9.059121	7_n00248	6.6984	5_n891

d	1	3	5	7
$f^d(a+iw)$	-1502.765	-15.565	$+37.790$	-10.565
$\log f^d(a+iw)$	$3_n176891$	1_n19215	1.5774	1_n024
$\log Q_2^d(n)$	$8_n862827$	8.13271	7_n4501	6.789

${}^{II}f(a+iw)$	-198653.750		${}^{I}f(a+iw)$	$+26581.170$
$Q_2^0(n)f(a+iw)$	$+14.566$		$Q_2^1(n)f^{I}(a+iw)$	$+109.577$
$Q_2^2(n)f^{II}(a+iw)$	-2.023		$Q_2^3(n)f^{III}(a+iw)$	-0.211
$Q_2^4(n)f^{IV}(a+iw)$	-0.004		$Q_2^5(n)f^{V}(a+iw)$	-0.011
S_g	-198641.211		$Q_2^7(n)f^{VII}(a+iw)$	-0.001
nS_u	-6672.631		S_u	$+26690.524$

$$\iint^{1873\ \text{Jan.}\ 15} f(l)\,dl^2 = -205313.84$$

Für die Anwendung der zweiten Formel G_{II} (pag. 59) ergibt sich, indem man $m = +0.25$ setzt:

d	0	2	4	6
$f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+1004.840$	$+405.075$	-91.730	$+4.565$
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	3.002007	2.60467	1_n96251	0.6594
$\log P_2^d(m)$	$8_n017729$	7.70848	7_n07825	6.4385

d	1	3	5	7
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$3_n244386$	1.3128	1.5011	1_n1452
$\log P_2^d(m)$	8.710600	7_n5254	6.0274	5_n8236

${}^{II}f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-211912.555		${}^{I}f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= +26517.610$
$P_2^0(m)f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-10.467		$P_2^1(m)f^{I}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-91.429
$P_2^2(m)f^{II}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+2.530$		$P_2^3(m)f^{III}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-0.069
$P_2^4(m)f^{IV}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+0.110$		$P_2^5(m)f^{V}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+0.017$
$P_2^6(m)f^{VI}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+0.001$		$P_2^7(m)f^{VII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+0.001$
S_g	-211920.381		S_u	$+26426.130$
mS_u	$+6606.532$			

$$\iint^{1873\ \text{Jan.}\ 15} f(l)\,dl^2 = -205313.85$$

Die auf beide Arten erhaltenen Werthe des Doppelintegrales stimmen somit vollständig innerhalb der Unsicherheit der Rechnung; die Interpolation aus der obigen Integraltafel bestätigt ebenfalls das gefundene Resultat.

Soll das Doppelintegral für das Datum 1873 Jan. 21 bestimmt werden, so wird man hierzu die erste Formel G_{II} (pag. 59) verwenden können und $n = -0.10$ zu setzen haben. Die Rechnung stellt sich wie folgt:

d	0	2	4	6
$\log f^d(a+iw)$	2.104214	2.70359	1_n8587	0_n384
$\log Q_2^d(n)$	8.046125	7_n61935	6.7095	5_n901

d	1	3	5	7
$f^d(a+iw)$	− 1502.765	− 15.565	+ 37.790	− 10.565
$\log f^d(a+iw)$	$3_n176891$	1_n19215	1.5774	1_n024
$\log Q_2^d(n)$	$8_n012045$	8.17612	7_n4917	6.830

${}^{II}f(a+iw)$	− 198653.750		${}^{I}f(a+iw)$	+ 26581.170
$Q_2^0(n)f(a+iw)$	+ 11.229		$Q_2^1(n)f^{I}(a+iw)$	+ 122.726
$Q_2^2(n)f^{II}(a+iw)$	− 2.103		$Q_2^3(n)f^{III}(a+iw)$	− 0.233
$Q_2^4(n)f^{IV}(a+iw)$	− 0.037		$Q_2^5(n)f^{V}(a+iw)$	− 0.117
$Q_2^6(n)f^{VI}(a+iw)$	0		$Q_2^7(n)f^{VII}(a+iw)$	− 0.007
S_g	− 198644.661		S_u	+ 26703.539
nS_u	− 2670.354			

$$\iint^{1873 \text{ Jan. } 21} f(t)\,dt^2 = -\,201315.01$$

welches Resultat durch die obige Integraltafel leicht bestätigt werden kann.

Für 1873 Jan. 9 muss die zweite Formel G_{II} (pag. 59) in Anwendung gebracht werden und es ist $m = +0.10$ zu setzen:

d	0	2	4	6	8
$f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 1004.840	+ 495.075	− 91.730	+ 4.565	+ 8.465
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	3.002097	2.694671	1_n9625	0.6594	0.9276
$\log P_2^d(m)$	$8_n564271$	7.915576	7_n2504	6.5973	5_n9533

d	1	3	5	7
$f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$3_n244386$	1.3128	1.5911	1_n1452
$\log P_2^d(m)$	8.636822	7_n4800	6.5877	5_n7862

${}^{II}f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= − 211912.555		${}^{I}f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 26517.610
$P_2^0(m)f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	− 36.844		$P_2^1(m)f^{I}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= − 76.069
$P_2^2(m)f^{II}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 4.076		$P_2^3(m)f^{III}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= − 0.062
$P_2^4(m)f^{IV}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 0.163		$P_2^5(m)f^{V}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 0.015
$P_2^6(m)f^{VI}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 0.002		$P_2^7(m)f^{VII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 0.001
$P_2^8(m)f^{VIII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	− 0.001		S_u	+ 26441.495
S_g	− 211945.159			
mS_u	+ 2644.149			

$$\iint^{1873 \text{ Jan. } 9} f(t)\,dt^2 = -\,209301.01$$

Die directe Interpolation bestätigt dieses Resultat.

Weitere Beispiele zur Erläuterung der Anwendung der Q- und P-Tafeln zur Berechnung der Doppelintegrale erscheinen wohl nicht nöthig und ich gehe daher auf die Anwendung der Formeln über, welche zur Bestimmung der Anfangsconstante der 2ten summirten Reihe dienen, nachdem über die Anfangsconstante der 1ten summirten Reihe bereits früher Beispiele durchgeführt wurden. Der Rechnung lege ich das schon auf pag. 47 angesetzte Beispiel zu Grunde. Es soll die Anfangsconstante der 2ten summirten Reihe für verschiedene Zeitgrenzen so bestimmt werden, dass das Integral für diese Datum (untere Grenzen) verschwindet.

Als erstes Beispiel wähle ich für die untere Grenze das Datum 1873 Dec. 31 und knüpfe daran die Bedingung, dass das Doppelintegral für diese Grenze verschwindet. Die Formel A_{II}) (pag. 53) gibt für ${}^{II}f(a)$, welcher Werth auf die Zeile 1874 Jan. 20 zu setzen ist:

$$
\begin{aligned}
+\frac{1}{24}\, f'(a-w) & = -0''1532.1 \\
-\frac{17}{5760}\left[2f^{III}(a-w)+f^{III}(a)\right] & = -0.0028.8 \\
+\frac{367}{967680}\left[3f^{V}(a-w)+2f^{V}(a)\right] & = -0.0001.1 \\
\hline
{}^{II}f(a) & = -0''1562\ ;
\end{aligned}
$$

soll aber das Doppelintegral für 1874 Jan. 20 verschwinden, so gibt die Formel B_{II} (pag. 53) für ${}^{II}f(a)$, welcher Werth wieder auf die Zeile 1874 Jan. 20 zu setzen ist:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{12}\, f'(a) & = +0''0886.6 \\
+\frac{1}{240}\, f^{III}(a) & = +0.0005.8 \\
-\frac{31}{60480}\, f^{V}(a) & = +0.0000.1 \\
\hline
{}^{II}f(a) & = +0''0892\ .
\end{aligned}
$$

Setzt man nun die so ermittelten Anfangsconstanten als Anfangswerth in die zweite summirte Reihe und ebenso die zugehörigen auf pag. 47 ermittelten Werthe für die erste summirte Reihe, bildet das Summationsschema für jeden Fall und berechnet dann nach den Formeln A_{II} und B_{II} (pag. 53) den Werth der Integrale für die zwei Grenzen, so wird man sich leicht überzeugen, dass in der That die Werthe dieser Integrale für die angesetzten Grenzen Null werden, welche Controle für die Richtigkeit der Bestimmung der Anfangsconstanten stets vorgenommen werden kann. Man wird für den ersten Fall (1873 Dec. 31), indem ich nur die Argumentwerthe und die dadurch gebildete Summationsreihe anführe und mich wegen der Differenzwerthe auf die pag. 47 mitgetheilten Zahlen beziehe, und, um überdies die Stellung der Anfangsconstanten hervorzuheben, dieselben in eckige Klammern setze, erhalten:

	${}^{II}f$	${}^{I}f$	f
1873 Nov. 1	$-3''6139$		$-5''8714$
		$+3.5674$	
» Dec. 11	-0.0465		-3.6771
		[-0.1097]	

	${}^{II}f$	${}^{I}f$	f
1874 Jan. 20	− 0.1562		1.0639
		− 1.1736	
» März 1	− 1.3298		+ 1.6877

Man findet dann durch Anwendung der Formel A_I (pag. 35) für das einfache Integral für die Grenze 1873 Dec. 31:

$$
\begin{aligned}
& {}^{I}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) && = - 0.1097 \\
+ & \tfrac{1}{24} f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) && = + 0.1088.8 \\
- & \tfrac{17}{5760} f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) && = + 0.0008.3 \\
+ & \tfrac{367}{967680} f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) && = + 0.0000.3 \\
& \int^{1873 \text{ Dec. } 31} f(t)\,dt && = \quad 0''0000\,;
\end{aligned}
$$

für das Doppelintegral nach A_{II} (pag. 53):

$$
\begin{aligned}
& {}^{II}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) && = - 0''1013.5 \\
- & \tfrac{1}{24} f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) && = + 0.0987.7 \\
+ & \tfrac{17}{1920} f^{II}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) && = + 0.0024.6 \\
- & \tfrac{367}{193536} f^{IV}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) && = + 0.0001.1 \\
& \iint^{1873 \text{ Dec. } 31} f(t)\,dt^2 && = \quad 0''0000\,.
\end{aligned}
$$

so dass in der That die Anfangswerthe der summirten Reihen als richtig erwiesen sind.

Für das Datum 1874 Jan. 20 wird mit Rücksicht auf die obigen Werthe (pag. 47 u. 63) das folgende Summationsschema sich ergeben:

	${}^{II}f$	${}^{I}f$	f
1872 Novbr. 1	− 5''1083		− 5''8714
		+ 4''4373	
» Decbr. 11	− 0.6710		− 3.6771
		+ 0.7602	
1874 Jan. 20	+ 0.0892		− 1.0639
		− 0.3037	
» März 1	− 0.2145		+ 1.6877

Mittelst der Formel B_I pag. 35 findet man:

$$
\begin{aligned}
& {}^{I}f(a+iw) && = + 0''2282.5 \\
- & \tfrac{1}{12} f^{I}(a+iw) && = - 0.2235.3 \\
+ & \tfrac{11}{720} f^{III}(a+iw) && = - 0.0044.4 \\
- & \tfrac{191}{60480} f^{V}(a+iw) && = - 0.0002.4 \\
+ & \tfrac{2497}{3628800} f^{VII}(a+iw) && = - 0.0000.3 \\
& \int^{1874 \text{ Jan. } 20} f(t)\,dt && = \quad 0''0000
\end{aligned}
$$

und durch Anwendung der Formel B_{II}) (pag. 53):

$$\begin{aligned} {}^{II}f(a+iw) &= +\ 0''0892{,}0 \\ +\frac{1}{12}f(a+iw) &= -\ 0.0886{,}6 \\ -\frac{1}{240}f^{II}(a+iw) &= -\ 0.0005{,}8 \\ +\frac{31}{60480}f^{IV}(a+iw) &= -\ 0.0000{,}1 \\ \int\int^{1873\ \text{Jan.}\ 20} f(t)\,dt^2 &= \ \ 0''0000 \end{aligned}$$

Als Beispiel der Anwendung der Formeln H_{II}) (pag. 59) endlich soll die Anfangsconstante so bestimmt werden, dass das einfache und doppelte Integral für die Grenze 1874 Jan. 10 verschwindet; die Bestimmung der Anfangsconstante ${}^{I}f(a-\frac{1}{2}w)$ ist bereits dieser Bedingung gemäss auf pag. 48 durchgeführt und es erübrigt nur die Bestimmung von ${}^{II}f(a)$. Man erhält hierfür nach H_{II}) pag. 59, indem man beachtet, dass beide Formeln mit gleicher Berechtigung in Anwendung gezogen werden können, zuerst, wenn man $n = -0.25$ setzt:

d	0	2	3
$\log f^d(a)$	$0_n026901$	9.14114	8_n2923
$\log Q_2^d(n)$	9.059121	7_n60248	6.6984

d	1	3	5	7
$f^d(a)$	+ 2.68240	− 0.29030	+ 0.07710	− 0.03880
$\log f^d(a)$	0.428524	9_n46285	8.8871	8_n589
$\log Q_2^d(n)$	$8_n862827$	8.13271	7_n4501	6.789

$$\begin{aligned} Q_2^0(n)f(a) &= -\ 0''1219.1 \\ Q_2^2(n)f^{II}(a) &= -\ 0.0005.5 \\ Q_2^4(n)f^{IV}(a) &= -\ 0.0000.1 \\ S_g &= -\ 0''1224.7 \\ n\,S_u &= +\ 0.0806.3 \\ {}^{II}f(a) &= +\ 0''0418 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w)+\tfrac{1}{2}f(a) &= -\ 0''1227.5 \quad \text{(pag. 48)} \\ Q_2^1(n)f^{I}(a) &= -\ 0.1955.9 \\ Q_2^3(n)f^{III}(a) &= -\ 0.0039.4 \\ Q_2^5(n)f^{V}(a) &= -\ 0.0002.2 \\ Q_2^7(n)f^{VII}(a) &= -\ 0.0000.2 \\ S_u &= -\ 0.3225.2 \end{aligned}$$

Durch Benützung der zweiten Formel ($m = +0.25$) findet sich:

d	0	2	4
$f^d(a-\frac{1}{2}w)$	− 2.37050	+ 0.27865	− 0.05695
$\log f^d(a-\frac{1}{2}w)$	$0_n374840$	9.44506	8_n7555
$\log P_2^d(m)$	$8_n017729$	7.70848	7_n0783

d	1	3	5
$\log f^d(a-\frac{1}{2}w)$	0.417173	9_n44793	8.8733
$\log P_2^d(m)$	8.716699	7_n52542	6.0274

$$P_2^0(m)f\,(a-\tfrac{1}{2}w) = +\,0''0246{,}9 \qquad {}'f\,(a-\tfrac{1}{2}w) = +\,0''1092.0 \text{ (p. 48)}$$
$$P_2^2(m)f^{II}(a-\tfrac{1}{2}w) = +\,0.0014.2 \qquad P_2^1(m)f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) = +\,0.1361.0$$
$$P_2^4(m)f^{IV}(a-\tfrac{1}{2}w) = +\,0.0000.7 \qquad P_2^3(m)f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) = +\,0.0009.4$$
$$S_g = +\,0''0261.8 \qquad P_2^5(m)f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) = +\,0.0000{,}3$$
$$mS_u = +\,0.1365.7 \qquad S_u = +\,0''5462.7$$
$$''f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\,0''1627{,}5$$
$$\tfrac{1}{2}\,'f(a-\tfrac{1}{2}w) = +\,0.2046.0$$
$$''f(a) = +\,0''0418\,.$$

mit dem obigen Werthe völlig übereinstimmend.

Das Summationsschema wird also, mit Weglassung der Differenzwerthe:

	$''f$	$'f$	f
1873 Nov. 1	$-\,1''4537$		$-\,5''8714$
		$+\,4''0863$	
» Dec. 11	$-\,0.3674$		$-\,3.6771$
		$[+\,0.4092]$	
1874 Jan. 20	$[+\,0.0418]$		$-\,1.0639$
		$-\,0.6547$	
» März 1	$-\,0.6129$		$+\,1.6877$

Bestimmt man nun nach den Formeln G_I und G_{II} (pag. 42. 59) die Werthe der Integrale für 1874 Jan. 10. so überzeugt man sich leicht, dass das einfache und doppelte Integral in der That für die angesetzte Grenze verschwindet.

Anhang.

Es wird sich bei der Ermittelung der speciellen Störungswerthe häufig der Fall ereignen. dass man den Werth eines einfachen oder doppelten Integrales kennen muss. der die Grenzen der durch die vorausgehenden Rechnungen erhaltenen Störungswerthe überschreitet; es ist klar. dass eine genaue Annahme in diesem Falle nicht gemacht werden kann. doch genügen in den meisten Fällen ganz beiläufige Näherungen. Wie die letzteren erhalten werden können. ist der Gegenstand der folgenden Auseinandersetzungen.

Sei $f^d(m)$ irgend ein Differenzwerth der d^{ten} Differenzreihe. so wird der diesem Werthe in der Richtung der Fortschreitung folgende Werth sein:

$$\overset{d}{f}(m+1) = \overset{d}{f}(m) + \overset{d+1}{f}(m-\tfrac{1}{2}) + \overset{d+2}{f}(m-1) + \overset{d+3}{f}(m-\tfrac{3}{2}) + \ldots\,;$$

welcher Ausdruck völlig bekannte Differenzwerthe enthält. und eine genügende Annäherung erreichen lässt. da ja vorausgesetzt wird, dass die Berechnung der vorgelegten Funktion innerhalb hinreichend enger Intervalle ausgeführt. oder allgemein. dass die Funktion nach Potenzen des Argumentes entwickelt ist.

Wollte man die Rechnung rückwärts fortsetzen. so wird man. sich auf bekannte Differenzwerthe beschränkend. haben:

$$\overset{d}{f}(m-1) = \overset{d}{f}(m) - \overset{d+1}{f}(m+\tfrac{1}{2}) + \overset{d+2}{f}(m+1) - \overset{d+3}{f}(m+\tfrac{3}{2}) + \ldots$$

Indem man auf das Intervall $\overset{d}{f}(m \pm 2)$, wo das Zeichen je nach der Richtung des Fortschreitens zu nehmen ist, übergeht, hat man vorerst für das obere Zeichen:

$$\overset{d}{f}(m+2) = \overset{d}{f}(m+1) + \overset{d+1}{f}(m+\tfrac{1}{2}) + \overset{d+2}{f}(m) + \overset{d+3}{f}(m-\tfrac{1}{2}) \ldots$$

wo jetzt rechter Hand noch unbekannte Differenzwerthe vorkommen. Man beachtet, dass ist:

$$\begin{aligned}
\overset{d}{f}(m+1) &= \overset{d}{f}(m) + \overset{d+1}{f}(m-\tfrac{1}{2}) + \overset{d+2}{f}(m-1) + \overset{d+3}{f}(m-\tfrac{3}{2}) + \ldots \\
\overset{d+1}{f}(m+\tfrac{1}{2}) &= \overset{d+1}{f}(m-\tfrac{1}{2}) + \overset{d+2}{f}(m-1) + \overset{d+3}{f}(m-\tfrac{3}{2}) + \ldots \\
\overset{d+2}{f}(m) &= \overset{d+2}{f}(m-1) + \overset{d+3}{f}(m-\tfrac{3}{2}) + \ldots \\
\overset{d+3}{f}(m-\tfrac{1}{2}) &= \overset{d+3}{f}(m-\tfrac{3}{2}) + \ldots \\
\ldots & \qquad\qquad \ldots
\end{aligned}$$

und findet daher leicht:

$$\overset{d}{f}(m+2) = \overset{d}{f}(m) + 2\overset{d+1}{f}(m-\tfrac{1}{2}) + 3\overset{d+2}{f}(m-1) + 4\overset{d+3}{f}(m-\tfrac{3}{2}) + \ldots$$

und für die Fortsetzung der Funktionswerthe nach rückwärts:

$$\overset{d}{f}(m-2) = \overset{d}{f}(m) - 2\overset{d+1}{f}(m+\tfrac{1}{2}) + 3\overset{d+2}{f}(m+1) - 4\overset{d+3}{f}(m+\tfrac{3}{2}) + \ldots$$

oder allgemein zum Uebergang auf einen beliebigen Differenzwerth:

$$\overset{d}{f}(m \pm n) = \overset{d}{f}(m) \pm n\overset{d+1}{f}(m \mp \tfrac{1}{2}) + \frac{n(n+1)}{1.2}\overset{d+2}{f}(m \mp 1) \pm \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\overset{d+3}{f}(m \mp \tfrac{3}{2}) + \ldots \quad (1)$$

welches Resultat übrigens sofort aus der Newton'schen Interpolationsformel erhalten werden kann. Mit Hilfe dieser Formel wird man sich also ohne Schwierigkeit die im Differenzschema noch fehlenden Differenzwerthe direct bilden können. Ich ziehe dieses Verfahren dem sonst üblichen vor, die Differenzen mit Rücksicht auf den Gang der Funktion im Voraus zu bilden.

Ein specieller Fall, der bei der Methode der Variation der Constanten in Betracht kommt, lässt sich direct noch etwas einfacher erledigen, indem man unmittelbar zur Kenntniss des geforderten Integralwerthes gelangt.

Es sei die Rechnung bis zu dem Intervalle $(a+iw)$ vorgeschritten und es wird das einfache Integral der vorgelegten Funktion für das Argument $(a+[i+1]w)$ gefordert. Man hat hierfür zunächst die Formel:

$$\int^{a+[i+1]w} f(l)\,dl = w\left\{{}^{\prime}f(a+[i+1]w) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a+[i+1]w) + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a+[i+1]w) - \ldots\right\}$$

Lässt man, was völlig gestattet ist, in diesem Falle die aus den dritten Differenzen resultirende Correction des Integrales weg und beachtet, dass ist, indem wir mit im Differenzschema wirklich vorkommenden Grössen zu thun haben:

$$\begin{aligned}
{}^{\prime}f(a+[i+1]w) &= \tfrac{1}{2}\,{}^{\prime}f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \tfrac{1}{2}\,{}^{\prime}f(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) \\
f^{\mathrm{I}}(a+[i+1]w) &= \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{3}{2}]w),
\end{aligned}$$

so erhält man leicht nach (1), da ${}^{\prime}f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w)$ schon durch die Summation

selbst gegeben ist, die vorkommenden Funktionswerthe durch bekannte Zahlen ausdrückend:

$$\mathfrak{f}(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) = \mathfrak{f}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + f(a+iw) + f^{\mathrm{I}}(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) + f^{\mathrm{II}}(a+[i-1]w) + \ldots$$

$$f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) = f^{\mathrm{I}}(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) + f^{\mathrm{II}}(a+[i-1]w) + f^{\mathrm{III}}(a+[i-\tfrac{3}{2}]w) + \ldots$$

$$f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) = f^{\mathrm{I}}(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) + 2f^{\mathrm{II}}(a+[i-1]w) + 3f^{\mathrm{III}}(a+[i-\tfrac{3}{2}]w) + \ldots$$

Setzt man diese Werthe in die obige Integralformel ein, so findet man:

$$\int^{a+(i+1)w} f(l)\,dl = w\left\{\mathfrak{f}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \tfrac{1}{2}f(a+iw)\right\} + \frac{w}{24}\left\{10f^{\mathrm{I}}(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) + 9f^{\mathrm{II}}(a+[i-1]w) + 8f^{\mathrm{III}}(a+[i-\tfrac{3}{2}]w) + 7f^{\mathrm{IV}}(a+[i-2]w) + \ldots\right\} \qquad (2)$$

Würde man dieses Verfahren für die Fortsetzung der Rechnung nach rückwärts benützen, so erhielte man:

$$\int^{a+(i-1)w} f(l)\,dl = w\left\{\mathfrak{f}(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) - \tfrac{1}{2}f(a+iw)\right\} + \frac{w}{24}\left\{10f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - 9f^{\mathrm{II}}(a+[i+1]w) + 8f^{\mathrm{III}}(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) - 7f^{\mathrm{IV}}(a+[i+2]w) + \ldots\right\} \qquad (3)$$

welche Formeln in der Anwendung wegen der einfachen Zahlencoëfficienten Vortheile bieten.

Ermittlung der speciellen Störungen.

§ 1. Allgemeines und Entwicklung der Grundgleichungen.

Die Methoden der Bahnbestimmung, die im ersten Bande vorgetragen wurden, haben die störende Wirkung der Planeten auf die Bewegung des in Betracht kommenden Himmelskörpers nicht berücksichtigt; der Einfluss dieser letzteren wird jedoch, wenn man die Bewegung desselben durch eine längere Zeit verfolgt, sehr merklich, und kann dann ohne Nachtheil für die Genauigkeit der Bahnbestimmung nicht übergangen werden. Die Berechnung dieser störenden Einwirkung kann aber, wie es in der Einleitung zum ersten Bande angedeutet wurde, nach zwei wesentlich verschiedenen Formen durchgeführt werden, indem man einerseits von einem Punkte der Bahn ausgehend, an dem der Ort und die Bewegung (gleiche Tangente) in der gestörten und ungestörten Bahn identisch sind, die Störungen Schritt für Schritt verfolgt und deren Anwachsen successive berechnet; man nennt diese Art der Berechnung die Methode der speciellen Störungen, und diejenigen Elemente, die für einen gegebenen Augenblick den Ort und die Bewegung des Himmelskörpers identisch mit der gestörten finden lassen, die osculirenden Elemente. Andererseits kann man aber die Zeit unbestimmt lassen, indem man die in Betracht kommenden Störungswerthe als Funktionen der unbestimmt gelassenen Zeit darstellt. Die Ermittlung der Coëfficienten dieser Funktionen stösst aber in der Regel, wenn die Excentricitäten und Neigungen der Bahnen nicht klein sind, auf ganz erhebliche Schwierigkeiten und deren Ermittlung ist nach den bisherigen Methoden sehr zeitraubend und kann bisweilen in Folge des Anwachsens der Rechnungsoperationen zu einem übermässigen Umfange, als nahezu unausführbar bezeichnet werden. Jedoch bietet diese Methode in ihrer Anwendung auf die grossen Planeten, wo es sich darum handelt, die Störungen durch Jahrhunderte zu verfolgen, ganz wesentliche Vortheile und gewährt manchen Einblick in den Mechanismus des Sonnensystems, der bei der Anwendung der speciellen Störungen nicht möglich wäre. Da aber für die nächsten Zwecke des vorliegenden Lehrbuches die Auseinandersetzung der speciellen Störungen genügt, so werde ich mich hier auf dieselbe beschränken.

Auf pag. 30 des ersten Bandes wurden die Kräfte, mit der die Sonne und der in Betracht kommende Himmelskörper auf einander wirken, gefunden:

$$X_0 = -k^2(1+m)\frac{x}{r^3}$$

$$Y_0 = -k^2(1+m)\frac{y}{r^3}$$

$$Z_0 = -k^2(1+m)\frac{z}{r^3}$$

wobei gesetzt ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

überdiess stellt m die Masse des Himmelskörpers in Einheiten der Sonnenmasse und k die bekannte Constante des Sonnensystems vor.

Tritt nun ein dritter Körper hinzu, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind, und dessen Masse m_1 in Einheiten der Sonnenmasse ist, so wird die Wirkung dieses störenden Planeten in der Entfernung ϱ und in der Zeiteinheit sein:

$$\frac{k m_1}{\varrho^2},$$

wobei ϱ berechnet wird nach:

$$\varrho^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$$

Zerlegt man die eben hingeschriebene Gesammtwirkung nach den Coordinaten-Achsen und bedenkt, dass die Cosinus der Winkel, welche die Linie ϱ mit den drei Achsen einschliesst, der Reihe nach durch:

$$\frac{x_1 - x}{\varrho}, \quad \frac{y_1 - y}{\varrho}, \quad \frac{z_1 - z}{\varrho}$$

dargestellt werden, so erhält man die Kräfte, die der störende Planet auf den gestörten Himmelskörper direct ausübt, für die drei Achsen

$$k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\varrho^3}, \quad k^2 m_1 \frac{y_1 - y}{\varrho^3}, \quad k^2 m_1 \frac{z_1 - z}{\varrho^3}.$$

Doch muss noch eine weitere indirecte Einwirkung berücksichtigt werden; da die Bewegung auf den Mittelpunkt der Sonne als Anfangspunkt der Coordinaten bezogen wird, so muss man noch die Kräfte in Rechnung ziehen, welche der störende Planet auf die Sonne ausübt. Bezeichnet man mit r_1 die heliocentrische Entfernung desselben, also seinen Radiusvector, so ist:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

und die die Sonne bewegenden Kräfte sind:

$$k^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3}, \quad k^2 m_1 \frac{y_1}{r_1^3}, \quad k^2 m_1 \frac{z_1}{r_1^3},$$

die naturgemäss von den obigen in Abzug gebracht werden müssen, um die relative Bewegung gegen das Sonnencentrum zu erhalten; hiermit wird also als das Resultat der Einwirkung des störenden Planeten zu setzen sein:

$$X = k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\}$$

$$Y = k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\}$$

$$Z = k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} .$$

Würde man weitere störende Planeten berücksichtigen, so ist es klar, dass ganz ähnliche Ausdrücke für die Kräfte entstehen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass die entsprechend abgeänderten Massen und Coordinaten in Rechnung zu ziehen sind; man wird also erhalten:

$$X = k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + k^2 m_2 \left\{ \frac{x_2 - x}{\varrho_2^3} - \frac{x_2}{r_2^3} \right\} + k^2 m_3 \left\{ \frac{x_3 - x}{\varrho_3^3} - \frac{x_3}{r_3^3} \right\} + \ldots$$
$$= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\}$$

$$Y = k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho_1^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + k^2 m_2 \left\{ \frac{y_2 - y}{\varrho_2^3} - \frac{y_2}{r_2^3} \right\} + k^2 m_3 \left\{ \frac{y_3 - y}{\varrho_3^3} - \frac{y_3}{r_3^3} \right\} + \ldots$$
$$= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\}$$

$$Z = k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho_1^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} + k^2 m_2 \left\{ \frac{z_2 - z}{\varrho_2^3} - \frac{z_2}{r_2^3} \right\} + k^2 m_3 \left\{ \frac{z_3 - z}{\varrho_3^3} - \frac{z_3}{r_3^3} \right\} + \ldots$$
$$= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} ,$$

und da:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X_0 + X$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = Y_0 + Y$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z_0 + Z$$

ist, so erhält man als Grundgleichungen der gesammten Störungstheorie:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{x}{r^3} = \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1} \right\}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{y}{r^3} = \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{z}{r^3} = \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} ,$$

welche man jedoch, in Anbetracht, dass die Massen derjenigen Himmelskörper, auf die die Störungsrechnung nach der hier vorgetragenen Methode zur Anwendung kommt, stets der Null gleichgesetzt werden dürfen, in der folgenden einfacheren Form schreiben kann:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} = \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 \frac{y}{r^3} = \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} \qquad 1$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} = \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\}$$

Vergleicht man diese Grundgleichungen der Störungstheorie mit jenen, welche für das Problem zweier Körper gelten (Band I pag. 40 (1)), so findet man linker Hand vom Gleichheitszeichen eine völlige Uebereinstimmung, rechter Hand aber steht anstatt der Null die Summe der störenden Kräfte. Je kleiner aber die störenden Massen m_1 sind, um so mehr wird sich der Ausdruck rechter Hand der Null annähern, und da die Massen der Planeten in Theilen der Sonnenmasse genommen kleine Grössen sind, so wird diese Ueberlegung sofort den Schluss erlauben, dass in der That in der ersten Annäherung die Störungen vernachlässigt werden können, ohne dass das erlangte Resultat allzusehr von der Wahrheit abweichen würde. Man wird jedoch hierbei noch in Erwägung ziehen müssen, dass die Ausdrücke rechter Hand selbst bei der Kleinheit der Massen bedeutende Werthe erlangen können, wenn die Nenner ϱ und r_1 sehr klein werden; die Kleinheit von r_1 hat vorerst keine Bedeutung in unserem Sonnensystem, wohl aber kann besonders für Kometenbahnen unter Umständen ϱ ganz ausserordentlich klein werden; in der That findet man Beispiele, wo Kometenbahnen durch die störende Einwirkung der Planeten total geändert wurden; es ist sogar einigermassen wahrscheinlich, dass die Kometen von kurzer Umlaufszeit ihre stark von der Parabel abweichenden Bahnen hierdurch erhalten haben. Die für die Kometen gemachte Bemerkung gilt ebenfalls für die Trabanten, bei denen in Folge der Kleinheit von ϱ nicht einmal die Differentialgleichung für die ungestörte Bewegung um die Sonne eine Näherung abgeben würde, und man bei Weitem brauchbarere Näherungen erhält, wenn man die Gleichungen so umsetzt, dass die Sonne als störender Körper auftritt, dessen Einfluss in der ersten Näherung übergangen werden kann.

Die Gleichungen 1 (pag. 71) lassen sofort erkennen, dass man dieselben in zwei wesentlich verschiedenen Formen für die Rechnung benützen kann; einerseits wird man die Störungen in den Coordinaten selbst berechnen können, wobei die Wahl der Coordinaten noch dem Ermessen überlassen bleibt, andererseits weiss man, dass die obigen drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, falls keine Störungen vorhanden sind, sechs Constanten, die Elemente, enthalten, durch deren entsprechende Variation offenbar erreicht werden kann, dass den Störungsgleichungen genügt wird. Beide Arten der Lösung sollen im Folgenden auseinandergesetzt und vorerst die Störung in den Coordinaten entwickelt werden, wobei die zwei Hauptmethoden in Betracht kommen, je nachdem man die rechtwinkligen oder die polaren Coordinaten wählt.

A). Encke's Methode der Berechnung der speciellen Störungen.

§ 2. Transformation der Grundgleichungen.

Encke's Methode der Störungsrechnung beruht auf der unmittelbaren Verwendung der obigen Störungsgleichungen; dieselbe wurde durch Encke unabhängig von Bond aufgefunden; wiewohl Bond in der Auffindung der Methode das

Prioritätsrecht unbezweifelt in Anspruch nehmen kann, so geben doch die lichtvolle Darstellung der Methode, die vorgenommenen zweckentsprechenden Transformationen und die glückliche Anwendung **Encke** das unbestrittene Verdienst, dieselbe der Praxis zugeführt zu haben; man kann daher diese Methode in der gegenwärtigen Form wohl an **Encke's** Namen knüpfen.

Encke's Methode ermittelt die Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten. Bezeichnet man die ungestörten, auf ein fixes in den Sonnenmittelpunkt als Anfangspunkt gelegtes Coordinatensystem bezogenen, Coordinaten mit x_0, y_0, z_0, die Störungen in den einzelnen Coordinaten mit ξ, η, ζ, so sind die thatsächlich stattfindenden, also gestörten, Coordinaten x, y, z dargestellt durch:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Die zweimalige Differentiation dieser Gleichungen nach der Zeit giebt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= \frac{d^2 \xi}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= \frac{d^2 \eta}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Bezeichnet man mit r_0 den ungestörten Radiusvector, so ist

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\,,$$

und nach Band I pag. 40 hat man für die ungestörte Bewegung die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= -k^2 (1 + m) \frac{x_0}{r_0^3} \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= -k^2 (1 + m) \frac{y_0}{r_0^3} \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= -k^2 (1 + m) \frac{z_0}{r_0^3}\,; \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (2) und führt in denselben für die zweiten Differentialquotienten der gestörten Coordinaten die auf pag. 71 gefundenen Gleichungen ein, so findet man sofort die **Encke**'schen Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + k^2 (1 + m) \left\{ \frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + k^2 (1 + m) \left\{ \frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} + k^2 (1 + m) \left\{ \frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3} \right\} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Die Berechnung der ersten Glieder rechts vom Gleichheitszeichen bietet im Allgemeinen wenig Schwierigkeit, doch sowohl in diesen Gliedern, als auch in den zweiten sind die Störungswerthe ξ, η, ζ, also jene Werthe selbst enthalten, die man

zu bestimmen sucht; doch ist es wesentlich zu bemerken, dass in den ersten Gliedern wegen des Factors m_1 die Substitution x_0, y_0, z_0 für x, y, z erlaubt erscheint, ohne dass man mehr als Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt. Man kann demnach diese ersten Glieder, wenn man die Störungswerthe zweiter Ordnung übergehen will, direct berechnen, und bezeichnet dieselben deshalb als die directen Glieder; später wird aber gezeigt werden, wie man in diesen directen Gliedern auch die Störungswerthe zweiter und höherer Ordnung ohne Mühe aufnehmen kann.

Eine wesentliche Schwierigkeit bieten aber die zweiten Glieder; vorerst stehen dieselben in einer Form, die eine genaue Berechnung ohne Anwendung sehr grosser Tafeln nicht gestattet, und ferner bedarf man zu ihrer Ermittlung einer verhältnissmässig genauen Kenntniss der Störungswerthe; da diese Glieder in Folge des letzteren Umstandes nur durch eine indirecte Rechnung erlangt werden können, bezeichnet man dieselben als die indirecten Glieder.

Der erstere oben angeführte Nachtheil kann leicht genug behoben werden; man kann nämlich leicht finden, dass ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3}\left\{\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) x - \xi\right\} \\ \frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3}\left\{\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) y - \eta\right\} \\ \frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3}\left\{\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) z - \zeta\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

und es ist dadurch zunächst der Vortheil erreicht, dass für alle drei Coordinaten das schwierig zu berechnende Glied auf den allen drei gemeinsamen Ausdruck: $1 - \frac{r_0^3}{r^3}$, reducirt erscheint.

Es ist offenbar:

$$r^2 = (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2,$$

also auch:

$$r^2 = r_0^2 + (2x_0 + \xi)\,\xi + (2y_0 + \eta)\,\eta + (2z_0 + \zeta)\,\zeta$$

und man wird daher schreiben können:

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2}{r_0^2}\left\{(x_0 + \tfrac{1}{2}\xi)\,\xi + (y_0 + \tfrac{1}{2}\eta)\,\eta + (z_0 + \tfrac{1}{2}\zeta)\,\zeta\right\} = 1 + 2q,$$

wobei q eine Grösse von der Ordnung der Störungen sein wird und bestimmt erscheint durch die Relation:

$$q = \frac{(x_0 + \frac{1}{2}\xi)\,\xi + (y_0 + \frac{1}{2}\eta)\,\eta + (z_0 + \frac{1}{2}\zeta)\,\zeta}{r_0^2}; \qquad (5)$$

es wird also:

$$\frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}$$

sein, oder wenn man nach Potenzen von q entwickelt, so findet sich sofort:

$$\frac{r_0^3}{r^3} = 1 - 3q + \frac{3\cdot 5}{1\cdot 2}\,q^2 - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\,q^3 + \ldots$$

Setzt man demnach:

$$f = 3 \left\{ 1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 + \ldots \right\} \tag{6}$$

so wird sich f leicht mit Hilfe des Argumentes q berechnen lassen. Indem ich vorerst nicht darauf eingehe, wie die Berechnung dieser Tafel durchgeführt werden kann, bemerke ich nur, dass die Tafel XI mit dem Werthe q als Argument $\log f$ unmittelbar ergibt; als Grenzwerthe für q sind -0.03 und $+0.03$ angenommen, was für alle Fälle, die bei dieser Methode eintreten können, mehr als ausreichend ist. Die Tafel selbst bedarf wohl kaum einer näheren Erläuterung; dieselbe ist auf 6 Decimalen beschränkt, da diese Genauigkeit selbst bei den umfassendsten Störungsrechnungen genügend erscheint.

Man kann daher mit Rücksicht auf (4) schreiben:

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} (f q x - \xi)$$

$$\frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} (f q y - \eta)$$

$$\frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} (f q z - \zeta);$$

setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (3) (pag. 73) ein und nimmt, da die Massen der Himmelskörper, die dieser Rechnungsmethode unterworfen werden, stets unmerklich sind,

$$m = 0$$

an, so erhalten die Gleichungen die folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ f q x - \xi \right\} \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ f q y - \eta \right\} \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ f q z - \zeta \right\}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ehe ich diese Gleichungen weiter für die praktische Anwendung verwerthe, will ich dieselben auf jene einfachere Form bringen, die dieselben annehmen, wenn man nur die ersten Potenzen der Störungen mitnehmen will; man hat dann offenbar:

$$\left.\begin{aligned}
q &= \frac{x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta}{r_0^2} \\
\varrho^2 &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{x_1 - x_0}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ 3 q x - \xi \right\} \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{y_1 - y_0}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ 3 q y - \eta \right\} \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{z_1 - z_0}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ 3 q z - \zeta \right\}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

In vielen Fällen wird man mit diesen Gleichungen, die also der f-Tafel nicht bedürfen, eine genügende Genauigkeit erhalten; doch ist die Abkürzung der Rechnung nicht allzu bedeutend und es wird sich daher wohl empfehlen in der Regel

von den strengen Gleichungen (7) Gebrauch zu machen. Uebrigens lassen sich für den Fall, dass man nur die ersten Potenzen der störenden Massen berücksichtigen will, wesentlich bequemere Rechnungsformen angeben, auf die später eingegangen wird.

Ich werde nun zeigen, wie man ohne grosse Schwierigkeit die Werthe der f-Tafel herstellen kann. An sich würde schon die Anwendung der in (6) angegebenen Reihe nicht unbequem sein, doch würde man, um die letzte Stelle in der Tafel XI sicher zu stellen, einer zehnstelligen Rechnung bedürfen, welche wegen der dabei nothwendigen Interpolationen ziemlich beschwerlich ausfallen würde; ich werde demnach die Rechnungsoperationen so transformiren, dass man in der zehnstelligen Tafel jede Interpolation vermeidet. Vorerst will ich aber für f die geschlossene Form hinschreiben, die unter Umständen mit Vortheil benützt werden kann.

Man erhält zunächst:

$$f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}}{q};$$

schreibt man nun, um die Form $\frac{0}{0}$ zu vermeiden, die für unendlich kleine Werthe von q eintritt:

$$2q = (\sqrt{1 + 2q} - 1)(\sqrt{1 + 2q} + 1)$$

so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + 2q} - 1} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 2q}};$$

führt man nun die, mit Rücksicht auf

$$\left\{ 1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} \right\} : \left\{ \sqrt{1 + 2q} - 1 \right\} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2q}} + \frac{1}{1 + 2q} + \frac{1}{(1 + 2q)^{\frac{3}{2}}}$$

geschlossen mögliche Division aus, und setzt der Kürze halber:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2q}};$$

so ist:

$$f = \frac{\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}{1 + \alpha}$$

womit die verlangte Form erreicht ist, welche in der That eine bequeme und sichere Rechnung gestattet, aber für die Anwendung zehnstelliger Tafeln beschwerlich wäre. Der obigen Reihe für f kann man aber sofort eine stärkere Convergenz ertheilen, wenn man die folgende Transformation benützt:

$$f = -(1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} \frac{1 - (1 + 2q)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

Die Entwicklung gibt:

$$\frac{f}{3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}q - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} q^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q^5 - \ldots \right\};$$

setzt man also für den Klammerausdruck:

$$1 + q^{\frac{1}{2}} + R$$

so wird R gefunden durch die Vergleichung der beiden Werthe und es ist:

$$R = -\frac{1}{24}q^2 + \frac{1}{16}q^3 - \frac{11}{128}q^4 + \frac{91}{768}q^5 - \frac{171}{1024}q^6 + \frac{495}{2048}q^7 - \ldots;$$

schreibt man also:

$$(\varrho) = \frac{R}{\sqrt{1+q}}$$

so wird:

$$\frac{f}{3} = (1+2q)^{-\frac{3}{2}}(1+q)^{\frac{1}{2}}(1+(\varrho));$$

oder unter Anwendung der logarithmischen Reihe:

$$\log f = \log 3 - \tfrac{3}{2}\log(1+2q) + \tfrac{1}{2}\log(1+q) + \text{Mod}\,\{(\varrho) - \tfrac{1}{2}(\varrho)^2 + \tfrac{1}{3}(\varrho)^3 - \ldots\}.$$

Das letzte Glied kann selbst für die Grenzwerthe von q mit Hilfe 7stelliger Tafeln auf 11 Decimalstellen genau bestimmt werden, und es erscheint demnach die Berechnung der Werthe für $\log f$ mit Hilfe zehnstelliger Tafeln ohne jede Interpolation in den letzteren hergestellt.

Die hinten angehängte f-Tafel ist nach dieser Formel durch Herrn F. Anton mit grosser Sorgfalt 10stellig berechnet und ist daher völlig auf eine halbe Einheit der letzten Stelle richtig. Für einen Fall ($q = +0.0251$) musste, um die sichere Richtigstellung der letzten Decimale zu erhalten, der Logarithmus 12stellig berechnet werden. In Nummer 2130 der astronomischen Nachrichten habe ich die Fehler der Encke'schen 7stelligen Tafel, die sich nach dieser Rechnung ergaben, mitgetheilt; die daselbst angeführten Correctionen können daher benützt werden, falls das Bedürfniss nach einer völlig correcten 7stelligen Tafel eintreten sollte.

Ich werde nun zeigen, wie man die Gleichungen 7) (pag. 75) der Störungsrechnung zu Grunde legen kann und setze vorerst voraus, dass die Störungsrechnung bereits im Gange ist; die Vorschriften, die man beim Beginne derselben zu befolgen hat, werde ich später vornehmen.

Die Störungsrechnung selbst gibt die zweiten Differentialquotienten der Störungswerthe; wendet man auf die durch die Rechnung für gewisse fixe Zeitintervalle festgestellten Werthe die doppelte Summation an, wie dies bei der mechanischen Quadratur ausführlich erläutert wurde, so gelangt man durch diese zu genäherten Integralwerthen, die für die Zeit der Störungsrechnung durch Correktionen, die von dem Argumentwerthen und deren geraden Differenzen abhängen, strenge erhalten werden können. Man hat nämlich mit Uebergehung von Gliedern, die wohl nie merkbares bewirken können nach B_{II} (pag. 53), w der Einheit gleichsetzend:

$$\iint^{a+iw} f(x)\,dx^2 = {}^{II}f(a+iw) + \frac{1}{12}f(a+iw) - \frac{1}{240}f^{II}(a+iw) + \ldots;$$

wäre der letzte Werth des 2ten Differentialquotienten $f(a+(i-1)w)$ gefunden worden, so findet man, wenn man die Summirung ausführt, streng ${}^{II}f(a+iw)$; ebenso würde, wenn die Rechnung nach rückwärts fortgesetzt bis zu $f(a-(i-1)w)$ gelangt wäre, ${}^{II}f(a-iw)$ erhalten werden. Das Resultat dieser Betrachtungen führt

uns zu dem Schlusse, dass für das nächste Intervall, für welches die Störungsrechnung noch nicht fortgeführt erscheint, durch die mechanische Doppel-Quadratur der doppelt summirte Werth bekannt ist; man hat demnach durch die Hilfsmittel der mechanischen Quadratur bereits einen Näherungswerth für ξ, η, ζ, der in die Formeln 7) eingesetzt einen schon sehr genäherten Werth für den zu berechnenden zweiten Differentialquotienten abgeben wird; ist einmal dieser Werth ermittelt, so wird man denselben benützen, um einen der Wahrheit näher kommenden Integralwerth der Rechnung zu Grunde zu legen und die Operationen so lange fortsetzen, bis keine Aenderung der berechneten Werthe eintritt. Dieses Verfahren wäre aber sehr zeitraubend und beschwerlich, und man sieht sofort ein, dass man das Ziel weit rascher erreichen kann, wenn man nach dem Gange der Funktion, etwa mit Hilfe der auf pag. 67 entwickelten Formeln, den zu erwartenden zweiten Differentialquotienten extrapolirt und den so erhaltenen Werth sofort zur Correktion des doppelt summirten Werthes benützt. In der That erreicht man dadurch meist schon im ersten Versuche eine so bedeutende Annäherung, dass die zweite Rechnung bereits die genauen Werthe ergibt, ein Verfahren, welches von Encke für diesen Fall in Vorschlag gebracht und vielfach angewendet wurde. Dieses Rechnungsverfahren vermeidet jedoch nicht völlig die indirecte Rechnung, indem die Erfahrung lehrt, dass es, wenn die Störungen nur halbwegs anwachsen, eben unmöglich wird, den zu erwartenden Werth mit einem solchen Grade der Sicherheit zu bestimmen, dass die Wiederholung der Rechnung mit dem verbesserten Werthe immer vermieden werden könnte. Es lässt sich jedoch eine Vorschrift angeben, die auch diesen Mangel behebt.

Das Glied $-\frac{1}{240}f^{II}(a+iw)$ fügt in der Regel wenig merkbares hinzu, und man kann den Werth des Integrales ohne Mitnahme dieses Gliedes als genügend genau ansehen; man kann dieses Glied also entweder ganz übergehen, oder dasselbe, was vorzuziehen ist, überschlagsweise nach dem Gange der Funktion in Rechnung ziehen; bei der Kleinheit des Factors, mit dem der zweite Differenzwerth zu multipliciren ist, wird die Unsicherheit über den Gang der Funktion, die nothwendigerweise die Extrapolation mit sich bringt, von keiner Erheblichkeit sein und man kann daher die Behauptung aufstellen, dass das Glied $-\frac{1}{240}f^{II}(a+iw)$ schon vor Beginn der Rechnung des diesbezüglichen Störungsintervalles als genügend genau bekannt angesehen werden kann.

Gibt man den Gleichungen (7) (pag. 75) durch Einführen einiger Abkürzungen eine concisere Form, indem man setzt:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\, k^2 m_1 \left\{\frac{x_1-x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right\} &= \Sigma\,(X)\\ \Sigma\, k^2 m_1 \left\{\frac{y_1-y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right\} &= \Sigma\,(Y)\\ \Sigma\, k^2 m_1 \left\{\frac{z_1-z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right\} &= \Sigma\,(Z)\\ \frac{k^2}{r^3} &= h\end{aligned}\right\} \quad 9)$$

so wird geschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + h\,\xi &= \Sigma\,X + hfqx \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + h\,\eta &= \Sigma\,Y + hfqy \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + h\,\zeta &= \Sigma\,Z + hfqz\,; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

in diesen Ausdrücken kann man die Werthe für die gestörten Coordinaten des Planeten als bekannt voraussetzen nach den obigen Auseinandersetzungen; denn es genügt für dieselben die Störungen nur beiläufig zu kennen, da die Coordinaten selbst durchaus mit Grössen von der Ordnung der Störungen multiplicirt erscheinen. Man wird also mit Rücksicht auf den Gang der Funktionswerthe und auf die Regeln der mechanischen Integration leicht genügende Annäherungen für dieselben erhalten, die keiner Verbesserung bedürfen. Setzt man nun:

$$\left.\begin{aligned} S_{(x)} &= {}^{\text{II}}f_{(x)}(a+iw) + \tfrac{1}{12}\,\Sigma(X) - \tfrac{1}{240}f^{\text{II}}_{(x)}(a+iw) \\ S_{(y)} &= {}^{\text{II}}f_{(y)}(a+iw) + \tfrac{1}{12}\,\Sigma(Y) - \tfrac{1}{240}f^{\text{II}}_{(y)}(a+iw) \\ S_{(z)} &= {}^{\text{II}}f_{(z)}(a+iw) + \tfrac{1}{12}\,\Sigma(Z) - \tfrac{1}{240}f^{\text{II}}_{(z)}(a+iw) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

welche Werthe als völlig bekannt angesehen werden dürfen, so ist mit Rücksicht auf die obige (pag. 77) für die mechanische Integration angesetzte Formel, wenn man dieselbe auf alle drei Coordinaten anwendet und statt des Doppelintegrales beziehungsweise die Werthe ξ, η und ζ schreibt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= S_{(x)} + \tfrac{1}{12}\frac{d^2\xi}{dt^2} = S_{(x)} + \tfrac{1}{12}\,hfqx - \tfrac{1}{12}\,h\xi \\ \eta &= S_{(y)} + \tfrac{1}{12}\frac{d^2\eta}{dt^2} = S_{(y)} + \tfrac{1}{12}\,hfqy - \tfrac{1}{12}\,h\eta \\ \zeta &= S_{(z)} + \tfrac{1}{12}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = S_{(z)} + \tfrac{1}{12}\,hfqz - \tfrac{1}{12}\,h\zeta\,; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

man findet also:

$$\left.\begin{aligned} \xi\,(1 + \tfrac{1}{12}h) &= S_{(x)} + \tfrac{1}{12}\,hfqx \\ \eta\,(1 + \tfrac{1}{12}h) &= S_{(y)} + \tfrac{1}{12}\,hfqy \\ \zeta\,(1 + \tfrac{1}{12}h) &= S_{(z)} + \tfrac{1}{12}\,hfqz\,; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

nun ist aber mit Rücksicht auf (5) (pag. 74):

$$r_0^2\,q = (x_0 + \tfrac{1}{2}\xi)\,\xi + (y_0 + \tfrac{1}{2}\eta)\,\eta + (z_0 + \tfrac{1}{2}\zeta)\,\zeta\,; \tag{14}$$

wo wieder die in den runden Klammern stehenden Werthe mit Rücksicht auf den Factor von der Ordnung der Störungen als hinreichend genau bekannt angesehen werden können, indem die Werthe $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$ und $\frac{1}{2}\zeta$ durch Extrapolation hierfür mit genügender Schärfe zu erhalten sind. Führt man nun für ξ, η und ζ in (14) die Werthe aus (13) ein und schreibt der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{r_0^2\,(1 + \frac{1}{12}h)} \\ b &= \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{r_0^2\,(1 + \frac{1}{12}h)} \\ c &= \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{r_0^2\,(1 + \frac{1}{12}h)} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

welche Werthe also wieder direct erhalten werden, so wird:

$$q = \frac{a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}}{1 - \frac{h}{12} f(ax + by + cz)} \qquad 16)$$

womit der Werth von q sofort direct gegeben ist, sobald der Werth von f bekannt ist; diese scheinbar indirecte Rechnung wird aber durch den verhältnissmässig einfachen Gang der f-Funktion so erleichtert, dass aus diesem Umstande kein Nachtheil für die directe Rechnung erwächst. Da überdiess der Nenner oder vielmehr der Logarithmus des Nenners in (16) in Folge des kleinen Factors $\frac{h}{12}$ selbst bei sehr stark anwachsenden Störungen einen fast linearen Gang zeigt, so scheint es zweckmässig zur Bestimmung des Werthes von f nicht den Gang der vorausgehenden Werthreihe für f zu benützen, sondern einfach den Werth des Nenners zu extrapoliren, und den so erlangten Näherungswerth von q als Argument für die f-Tafel zu benützen. In dem weiter unten folgenden Beispiele wird man sich leicht überzeugen, dass auch diese Operation in der That als direct bezeichnet werden kann, indem eine Verbesserung und Wiederholung der Rechnung niemals nöthig erscheint.

Indem der Werth von q hiermit also durch ein directes Verfahren bestimmt erscheint, erhält man durch die Verbindung der Gleichungen (10) und (13) (pag 79):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma(X) + h f q x - \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h} \left\{ S_{(x)} + \tfrac{1}{12} h f q x \right\}$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma(Y) + h f q y - \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h} \left\{ S_{(y)} + \tfrac{1}{12} h f q y \right\}$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma(Z) + h f q z - \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h} \left\{ S_{(z)} + \tfrac{1}{12} h f q z \right\}$$

oder indem man setzt:

$$h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h} \qquad 17)$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma(X) + h' \{ f q x - S_{(x)} \} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma(Y) + h' \{ f q y - S_{(y)} \} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Sigma(Z) + h' \{ f q z - S_{(z)} \} \end{aligned}\right| \qquad 18)$$

womit die als direct zu bezeichnende Berechnung des geforderten zweiten Differentialquotienten erreicht ist.

Die vorausgehenden Vorschriften sind aber nur verwendbar, wenn die Störungsrechnung bereits im Gange ist und bedürfen einer Modification, wenn man, von bestimmten osculirenden Elementen ausgehend, die Rechnung beginnt. Es sind nämlich in diesem Falle die doppelt summirten Werthe ${}^{II}f\,(a + iw)$ unbekannt, die der obigen Rechnung als Grundlage gedient haben. Der Umstand aber, dass die indirecten Glieder wegen des kleinen Factors h' anfänglich einen sehr geringen Einfluss üben, gestattet auch hier, die nothwendigen Näherungen rasch durchzuführen.

Hierbei mag bemerkt werden, dass h' mit der Grösse des gewählten Zeitintervalles anwächst, weshalb letzteres nicht allzu gross angenommen werden darf. Ueber die Grösse des anzuwendenden Intervalles entscheiden die speciellen Umstände und es können hierüber keine allgemeinen Vorschriften gegeben werden; 40tägige Intervalle sind im Allgemeinen bei der Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten ausreichend, wiewohl bei starker Annäherung an Jupiter dieses Intervall fast zu gross erscheint; im Allgemeinen wirkt entscheidend für die Wahl des Intervalles die Masse des störenden Körpers, die Grösse der Annäherung und die Bewegung des gestörten Körpers. Es kann daher z. B. bei Kometen oft erwünscht sein, das Intervall im Verlaufe der Rechnung abzuändern, wobei jedoch stets gehörig auf die richtige Bestimmung der Integrationsconstanten zu achten ist. Man wird das Intervall demnach stets so zu wählen haben, dass sich die Störungen hinreichend regelmässig gestalten und demnach die Sicherheit der mechanischen Quadraturen nicht in Frage stellen. Man wird also bei Beginn der Rechnung vorerst die indirecten Glieder der Null gleich setzen, und indem man zweckmässig die Osculationsepoche so wählt, dass dieselbe in die Mitte eines Intervalles fällt, zwei Orte vor und zwei Orte nach der Osculationsepoche rechnen. Für diese Zeit wird man, ohne Erhebliches zu übergehen, in der Rechnung der Werthe $\Sigma\,(X)$, $\Sigma\,(Y)$, $\Sigma\,(Z)$ die ungestörten Coordinaten anwenden dürfen, da die Störungen zweiter Ordnung in der That ganz unbedeutend sind. Indem man diese Werthe vorerst mit den gesuchten zweiten Differentialquotienten identificirt, wird man die so erhaltene Werthreihe benützen, um die Anfangsconstanten für die erste und zweite Summation (vergl. pag. 35, 53) nach den Formeln:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{I}}f\,(a-\tfrac{1}{2}w) &= -\tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}\,(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}\,(a-\tfrac{1}{2}w) - \ldots \\
{}^{\mathrm{II}}f\,(a-w) &= \tfrac{1}{24}f\,(a) - \tfrac{17}{5760}\left\{2\,f^{\mathrm{II}}\,(a)+f^{\mathrm{II}}\,(a-w)\right\} + \ldots
\end{aligned}
$$

zu bestimmen, und die Summirung auf einem gesonderten Blatte durchführen; dadurch gelangt man zur Kenntniss der Werthe der zweiten summirten Reihe, die nach den obigen Vorschriften zur genaueren Bestimmung der diesbezüglichen Differentialquotienten verwendet werden; man erhält in der Regel schon dadurch hinreichend genaue Werthe für dieselben; indess kann man, wenn man befürchten sollte, dass diese Werthe keine völlig genügenden Annäherungen ergeben, die Rechnung nochmals mit den so gefundenen Werthen wiederholen. In dem unten folgenden Beispiele werden diese Vorschriften ausführlich besprochen und ich begnüge mich hier deshalb mit diesen Andeutungen; ist aber einmal die Rechnung im Gange, dann kann man sich an die oben auseinander gesetzten Vorschriften gleichmässig halten.

§ 3. Die Bestimmung der Coordinaten.

Die Berechnung der Coordinaten der störenden Planeten kann meist ganz umgangen werden, da man dieselben gesammelt in den Publicationen der astronomischen Gesellschaft Band I und VI findet; da dieselben in dieser Sammlung in bestimmten Zeitintervallen fortlaufend mitgetheilt sind, so wird es zweckmässig erscheinen, sich bei der Störungsrechnung an diese Intervalle zu halten, um jede Interpolation zu vermeiden. Jener Theil der Störungen, der von dem Einflusse des störenden Planeten auf die Sonne herrührt, ist in die Sammlung ebenfalls aufgenommen, wobei die daselbst angeführten Massen benützt sind, die man dann für die anderweitigen Rechnungen anzuwenden hat. Die Coordinaten sind auf bestimmte Aequinoctien bezogen; es ist daher angemessen, auch diese der Rechnung zu Grunde zu legen.

Es wird daher von Zeit zu Zeit die Nothwendigkeit hervortreten, die Störungen auf ein anderes Aequinoctium zu übertragen; indem ich aber diese Transformation auf den Schluss dieses Paragraphen verschiebe, will ich hier die Methode auseinandersetzen, wie man mit Hilfe der astronomischen Ephemeriden, speciell unter Berücksichtigung der Einrichtungen des Berliner Jahrbuches, sich die Coordinaten des störenden Planeten verschaffen kann, da wohl hier und da das Bedürfniss eintreten kann, von den Angaben, die oben citirt wurden, abzuweichen.

Die älteren Bände des Berliner Jahrbuches geben bis zum Jahrgange 1867 inclusive die heliocentrischen Längen λ', Breiten β' und Entfernungen r_1 der grossen Planeten meist in so engen Intervallen, dass die Interpolation für ein beliebiges Datum ohne Mühe ausgeführt werden kann; die polaren Coordinaten beziehen sich dabei auf das wahre Aequinoctium. In den anderen astronomischen Ephemeriden finden sich die heliocentrischen Orte der grossen Planeten in ähnlicher Weise mitgetheilt und man hat dieselben vorerst auf das der Rechnung zu Grunde liegende fixe mittlere Aequinoctium zu beziehen; dieses geschieht nach den Vorschriften, die im ersten Bande pag. 88 auseinandergesetzt sind; ich will daher hier die Endformeln nur übersichtlich sammeln.

Ist N die für das betreffende Datum geltende Nutation, die ebenfalls in den Ephemeriden Aufnahme findet, ist t_1 die Zeit des betreffenden Datums, t_0 die Zeit der fixen Epoche, auf welche sich das gewählte fixe mittlere Aequinoctium bezieht, und setzt man die Differenz $t_1 - t_0 = \tau$ in Einheiten des tropischen Jahres an, so ist die heliocentrische Länge λ_0' und Breite β_0' in Bezug auf dasselbe Aequinoctium bestimmt durch:

$$\lambda_0' = \lambda' - N - \tau \{ l + \pi \operatorname{tang} \beta' \cos(\lambda' - \Pi) \}$$
$$\beta_0' = \beta' + \tau \pi \sin(\lambda' - \Pi) .$$

wobei für die constanten Werthe anzunehmen ist:

$$\Pi = 173^\circ\, 0'\, 12'' + 32''.847 \{ \tfrac{1}{2}(t_1 + t_0) - 1850 \}$$
$$\pi = 0''.4705 - 0''.000\,0062 \{ \tfrac{1}{2}(t_1 + t_0) - 1850 \}$$
$$l = 50''.23465 + 0''.000\,2258 \{ \tfrac{1}{2}(t_1 + t_0) - 1850 \} ;$$

man wird hierbei die Glieder zweiter Ordnung strenge berücksichtigen, wenn man für λ' und β' in den letzten Gliedern rechter Hand die für die Zeit $\frac{t_1+t_0}{2}$ geltenden Werthe einsetzt; für die Verhältnisse, wie dieselben durch die Planeten geboten werden, genügt es aber, für λ' den Werth

$$\lambda' - 50''23 \frac{t_1 - t_0}{2}$$

einzusetzen und für β' den unveränderten Werth anzunehmen.

Sind einmal diese Grössen berechnet, so finden sich die rechtwinkeligen Coordinaten nach den Formeln:

$$x_1 = r_1 \cos \lambda_0' \cos \beta_0'$$
$$y_1 = r_1 \sin \lambda_0' \cos \beta_0'$$
$$z_1 = r_1 \sin \beta_0' \;;$$

bei dieser Rechnung wird man zweckmässig sofort auch den störenden Einfluss des Planeten auf die Sonne bestimmen und somit zu rechnen haben:

$$-(kw)^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3}, \quad -(kw)^2 m_1 \frac{y_1}{r_1^3}, \quad -(kw)^2 m_1 \frac{z_1}{r_1^3},$$

wobei unter k die Constante des Sonnensystems, unter w das der Störungsrechnung zu Grunde liegende Zeitintervall in Einheiten des mittleren Sonnentages und unter m_1 die Masse des störenden Planeten in Einheiten der Sonnenmasse verstanden ist.

Die Massen der grossen Planeten und die Producte $(kw)^2 m_1$ finden sich unter Annahme des Werthes $w = 40$ in der Tafel XII aufgenommen und hierbei ist vorausgesetzt, dass Alles in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt erscheint.

Die Berliner Jahrbücher für 1868, 1869 und 1870 geben direct die rechtwinkeligen Coordinaten und die störenden Kräfte, soweit dieselben von dem Orte des gestörten Planeten unabhängig sind. Vom Jahre 1871 an finden sich Angaben für die heliocentrischen Orte, die unmittelbar die Grössen r_1, λ_0' und β_0' finden lassen. Der Logarithmus von r_1 und die Grösse β_0' finden sich direct unter den Columnen »log R« und »Breite«, λ_0' findet sich, wenn man zu den Werthen »Länge in der Bahn« die Grösse »Reduction auf die Ecliptik« mit dem angesetzten Zeichen addirt. Es ist natürlich klar, dass man sich an die im Berliner Jahrbuche gewählten Epochen und Aequinoctien halten wird, um die sonst nöthigen, immerhin zeitraubenden, Interpolationen und Reductionen zu vermeiden.

Was nun die Berechnung der ungestörten Coordinaten x_0, y_0, z_0 und r_0 des gestörten Planeten anlangt, so wird man vorerst die der Rechnung zu Grunde liegenden Elemente auf das mittlere fixe Aequinoctium der Coordinaten des störenden Planeten beziehen und hierzu allenfalls die Formeln, die im ersten Bande entwickelt sind (I pag. 81 u. ff.), benützen.

Mit diesen Elementen rechnet man nun vorerst (vergl. I pag. 17):

$$\sin a \sin A = \cos \Omega \qquad \sin b \sin B = \sin \Omega \qquad C = 0$$
$$\sin a \cos A = -\sin \Omega \sin i \qquad \sin b \cos B = \cos \Omega \cos i \qquad \sin c = \sin i$$
$$\omega = \pi - \Omega, \qquad e'' = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''}$$
$$A' = A + \omega \qquad B' = B + \omega \qquad C' = \omega$$

dann weiter für die einzelnen Intervalle:

$$\left.\begin{aligned} M &= M_0 + \mu t \\ M &= E - e'' \sin E \end{aligned}\right\} \quad \text{I pag. 17.}$$

$$\left.\begin{aligned} r_0 \sin v_0 &= a \cos \varphi \sin E \\ r_0 \cos v_0 &= a (\cos E - e) \end{aligned}\right\} \quad \text{I pag. 48.}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= r_0 \sin a \sin (A' + v_0) \\ y_0 &= r_0 \sin b \sin (B' + v_0) \\ z_0 &= r_0 \sin c \sin (C' + v_0) \end{aligned}\right\} \quad \text{I pag. 17.}$$

$$h = \frac{(wk)^2}{r_0^3}$$

$$R^2 = r_0^2 \{ 1 + \tfrac{1}{12} h \}$$

$$h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h} \quad ,$$

wobei $\log (wk)^2 = 9.675283$ das Intervall w zu 40 Tagen vorausgesetzt ist, und erhält so alle Coordinaten, die für die Störungsrechnung nöthig sind. Der Umstand, dass es von 10 zu 10 Jahren nöthig ist, das mittlere Aequinoctium abzuändern, um die Angaben des Berliner Jahrbuches ausnützen zu können, stellt schliesslich noch die Aufgabe, die Störungen ξ, η, ζ in den Coordinaten und deren Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ von einem mittleren Aequinoctium auf ein anderes zu übertragen. Um diese Aufgabe vorzunehmen, wird man, da wohl ausschliesslich Ekliptikalcoordinaten bei diesen Rechnungen angewendet werden, die im ersten Bande pag. 84 angeführten Formeln als Ausgangspunkt benützen können.

Bezeichnet man mit x, y, z die Coordinaten in Bezug auf das Ausgangs-Aequinoctium, mit x_1, y_1, z_1 die auf das neue Aequinoctium bezogenen Coordinaten, so hat man, wenn als Ausgangspunkt der Zählung die Knotenlinie zwischen den beiden in Betracht kommenden Ekliptiken angenommen wird, die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos \beta \cos (\lambda - \Pi) \\ y &= \cos \beta \sin (\lambda - \Pi) \\ z &= \sin \beta \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos (\beta + d\beta) \cos (\lambda + d\lambda - \Pi - l) \\ y_1 &= \cos (\beta + d\beta) \sin (\lambda + d\lambda - \Pi - l) \\ z_1 &= \sin (\beta + d\beta) \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= y \cos \pi + z \sin \pi \\ z_1 &= - y \sin \pi + z \cos \pi \, . \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Wählt man, wie es in der Störungsrechnung geschieht, die Richtung nach dem jeweiligen mittleren Frühjahrspunkte als die positive X-Achse, so erhält man leicht aus (1) und (2), wenn man die so gezählten Coordinaten durch den Exponentialindex »0« unterscheidet:

$$
\begin{aligned}
x &= x^0 \cos H + y^0 \sin H \\
y &= y^0 \cos H - x^0 \sin H \\
z &= z^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1{}^0 \cos(H + l) + y_1{}^0 \sin(H + l) \\
y_1 &= y_1{}^0 \cos(H + l) - x_1{}^0 \sin(H + l) \\
z_1 &= z_1{}^0 \;;
\end{aligned}
$$

werden diese Werthe in (3) substituirt, so erhält man für $x_1{}^0$, $y_1{}^0$, $z_1{}^0$ die Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
x_1{}^0 &= x^0\{\cos H \cos(H+l) + \sin H \sin(H+l) \cos i\} + y^0\{\sin H \cos(H+l) - \\
&\qquad - \cos H \sin(H+l) \cos i\} - z^0 \sin i \sin(H+l) \\
y_1{}^0 &= x^0\{\cos H \sin(H+l) - \sin H \cos(H+l) \cos i\} + y^0\{\sin H \sin(H+l) + \\
&\qquad + \cos H \cos(H+l) \cos i\} + z^0 \sin i \cos(H+l) \\
z_1{}^0 &= x^0 \sin H \sin i - y^0 \cos H \sin i + z^0 \cos i .
\end{aligned}
$$

Setzt man also:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_x &= -2\{\sin^2 \tfrac{1}{2} l + \sin H \sin(H + l) \sin^2 \tfrac{1}{2} i\} \\
Y_x &= -\sin l + 2 \cos H \sin(H + l) \sin^2 \tfrac{1}{2} i \\
Z_x &= -\sin i \sin(H + l) \\
X_y &= \sin l + 2 \sin H \cos(H + l) \sin^2 \tfrac{1}{2} i \\
Y_y &= -2\{\sin^2 \tfrac{1}{2} l + \cos H \cos(H + l) \sin^2 \tfrac{1}{2} i\} \\
Z_y &= \sin i \cos(H + l) \\
X_z &= \sin H \sin i \\
Y_z &= -\cos H \sin i \\
Z_z &= -2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \;,
\end{aligned}
\right\} \qquad 4)
$$

so sind die allgemeinen Transformationsformeln, mit denen man die letzten Summations-, Argument- und Differenzwerthe der Störungstafeln zu übertragen hat, wenn man das Aequinoctium ändern will, bestimmt durch:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1{}^0 &= x^0 + X_x \cdot x^0 + Y_x \cdot y^0 + Z_x \cdot z^0 \\
y_1{}^0 &= y^0 + X_y \cdot x^0 + Y_y \cdot y^0 + Z_y \cdot z^0 \\
z_1{}^0 &= z^0 + X_z \cdot x^0 + Y_z \cdot y^0 + Z_z \cdot z^0 .
\end{aligned}
\right\} \qquad 5)
$$

Die nachstehende Tafel gibt von 10 zu 10 Jahren für das gegenwärtige Jahrhundert die Logarithmen der nach obigen Formeln streng berechneten Coëfficienten für die Uebertragung auf das nächstfolgende Jahrzehnt; um keinen Zweifel über die Charakteristik zu lassen, ist dieselbe vollständig angesetzt:

	$\log X_x$	$\log Y_x$	$\log Z_x$	$\log X_y$	$\log Y_y$	$\log Z_y$	$\log X_z$	$\log Y_z$	$\log Z_z$
1800	$4_n4719-10$	$7_n386490-10$	$4_n4728-10$	$7.386490-10$	$4_n4720-10$	$5_n36305-10$	$4.4810-10$	$5.36291-10$	0_n43-10
1810	$4_n4720-10$	$7_n386510-10$	$4_n4674-10$	$7.386510-10$	$4_n4720-10$	$5_n36308-10$	$4.4756-10$	$5.36294-10$	0_n43-10
1820	$4_n4720-10$	$7_n386529-10$	$4_n4619-10$	$7.386529-10$	$4_n4721-10$	$5_n36311-10$	$4.4702-10$	$5.36297-10$	0_n43-10
1830	$4_n4721-10$	$7_n386549-10$	$4_n4563-10$	$7.386549-10$	$4_n4721-10$	$5_n36314-10$	$4.4647-10$	$5.36300-10$	0_n43-10
1840	$4_n4721-10$	$7_n386568-10$	$4_n4506-10$	$7.386568-10$	$4_n4721-10$	$5_n36317-10$	$4.4591-10$	$5.36303-10$	0_n43-10
1850	$4_n4721-10$	$7_n386588-10$	$4_n4448-10$	$7.386588-10$	$4_n4722-10$	$5_n36320-10$	$4.4535-10$	$5.36307-10$	0_n43-10
1860	$4_n4722-10$	$7_n386607-10$	$4_n4390-10$	$7.386607-10$	$4_n4722-10$	$5_n36323-10$	$4.4478-10$	$5.36310-10$	0_n43-10
1870	$4_n4722-10$	$7_n386627-10$	$4_n4331-10$	$7.386627-10$	$4_n4723-10$	$5_n36325-10$	$4.4420-10$	$5.36313-10$	0_n43-10
1880	$4_n4723-10$	$7_n386646-10$	$4_n4271-10$	$7.386646-10$	$4_n4723-10$	$5_n36328-10$	$4.4362-10$	$5.36316-10$	0_n43-10
1890	$4_n4723-10$	$7_n386666-10$	$4_n4211-10$	$7.386666-10$	$4_n4723-10$	$5_n36330-10$	$4.4303-10$	$5.36318-10$	0_n43-10
1900	$4_n4723-10$	$7_n386685-10$	$4_n4149-10$	$7.386685-10$	$4_n4724-10$	$5_n36332-10$	$4.4243-10$	$5.36320-10$	0_n43-10

Da man aber wohl auch häufig den Uebergang in der umgekehrten Richtung oder auch in anderen Intervallen zu machen hat, so dürfte es sich empfehlen, ähnlich wie dies bei den Präcessionsconstanten geschehen ist, die Entwickelung der diesbezüglichen Glieder nach Potenzen der Zeit vorzunehmen.

Bleibt man bei den Gliedern 2ter Ordnung inclusive stehen, so erhält man leicht aus 4):

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= -\tfrac{1}{2}l^2 - \tfrac{1}{2}(\pi \sin \Pi)^2 \\
Y_x &= -l + \tfrac{1}{2}\pi \cos \Pi \,.\, \pi \sin \Pi \\
Z_x &= -\pi \sin \Pi - l\pi \cos \Pi \\
X_y &= l + \tfrac{1}{2}\pi \cos \Pi \,.\, \pi \sin \Pi \\
Y_y &= -\tfrac{1}{2}l^2 - \tfrac{1}{2}(\pi \cos \Pi)^2 \\
Z_y &= \pi \cos \Pi - l\pi \sin \Pi \\
X_z &= \pi \sin \Pi \\
Y_z &= -\pi \cos \Pi \\
Z_z &= -\tfrac{1}{2}\pi^2 .
\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Die in diesen Ausdrücken erscheinenden Präcessionsconstanten haben die Form:

$$\left.\begin{aligned}
l &= \lambda(t_1 - t_0) + \lambda'(t_1 - t_0)^2 \\
\pi &= \gamma(t_1 - t_0) + \gamma'(t_1 - t_0)^2 \\
\Pi &= \Pi_0 + \alpha(t_0 - 1850) + \beta(t_1 - t_0)
\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

wobei die numerischen Werthe sich aus der Vergleichung mit I pag. 81 wie folgt, ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= +\,50''23405 + 0''000\,22576\,(t_0 - 1850) \qquad & \lambda' &= +\,0''000\,11288 \\
\gamma &= +\,0''47950 - 0''000\,00624\,(t_0 - 1850) \qquad & \gamma' &= -\,0''000\,00312 \\
\Pi_0 &= 173^\circ 0' 12'',\quad \alpha = +\,32''847,\quad \beta = -\,8''694
\end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Vor Allem wird es nöthig sein, die Glieder von der Form $\pi \sin \Pi$ und $\pi \cos \Pi$ näher zu entwickeln. Es ist klar, dass hierzu die Band I pag. 77 gegebenen Ausdrücke nicht unmittelbar verwerthet werden dürfen, weil dieselben sich vorerst auf die fixe Ausgangsepoche 1850 beziehen und überdies die durch die allgemeine Präcession bewirkte Aenderung in der Zählung von Π nicht enthalten.

Man findet aus 7) zunächst:

$$\begin{aligned}
\pi \sin \Pi = \{\gamma \sin \Pi_0 + \gamma\alpha \cos \Pi_0\,(t_0 - 1850)\}\,(t_1 - t_0) &+ \{\gamma' \sin \Pi_0 + \gamma\beta \cos \Pi_0 + \\
&+ \alpha\gamma' \cos \Pi_0\,(t_0 - 1850)\}\,(t_1 - t_0)^2 \\
\pi \cos \Pi = \{\gamma \cos \Pi_0 - \gamma\alpha \sin \Pi_0\,(t_0 - 1850)\}\,(t_1 - t_0) &+ \{\gamma' \cos \Pi_0 - \gamma\beta \sin \Pi_0 - \\
&- \alpha\gamma' \sin \Pi_0\,(t_0 - 1850)\}\,(t_1 - t_0)^2;
\end{aligned}$$

führt man hierin die Werthe aus 8) ein, und lässt diejenigen Glieder, welche Produkte $(t_0 - 1850)^2$ in $t_1 - t_0$ und $(t_0 - 1850)$ in $(t_1 - t_0)^2$ ergeben, weg, so erhält man Ausdrücke von der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\pi \sin \Pi &= \{\varkappa_0 + \varkappa_1(t_0 - 1850)\}\,(t_1 - t_0) + \varkappa_0'(t_1 - t_0)^2 \\
\pi \cos \Pi &= \{\zeta_0 + \zeta_1(t_0 - 1850)\}\,(t_1 - t_0) + \zeta_0'(t_1 - t_0)^2
\end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

wobei zu Folge der obigen Ausdrücke die constanten Grössen die folgenden numerischen Werthe haben:

$$\left.\begin{array}{ll} \varkappa_0 = +\,0''05841 & \varkappa_1 = -\,0''000\,07655 \\ \zeta_0 = -\,0''47593 & \zeta_1 = -\,0''000\,00311 \\ \varkappa_0' = +\,0''0000\,1967 & \\ \zeta_0' = +\,0''0000\,0556 & \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Es wird sich also, wenn man:

$$\lambda = \lambda_0 + 2\lambda'(t_0 - 1850)$$

schreibt, aus (6) ergeben:

$$\begin{aligned}
X_x &= -\tfrac{1}{2}\{\lambda_0^2 + \varkappa_0^2\}(t_1-t_0)^2 \\
Y_x &= -\{\lambda_0 + 2\lambda'(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + \{\tfrac{1}{2}\varkappa_0\zeta_0 - \lambda'\}(t_1-t_0)^2 \\
Z_x &= -\{\varkappa_0 + \varkappa_1(t_0-1850)\}(t_1-t_0) - \{\varkappa_0' + \lambda_0\zeta_0\}(t_1-t_0)^2 \\
X_y &= \{\lambda_0 + 2\lambda'(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + \{\tfrac{1}{2}\varkappa_0\zeta_0 + \lambda'\}(t_1-t_0)^2 \\
Y_y &= -\tfrac{1}{2}\{\lambda_0^2 + \zeta_0^2\}(t_1-t_0)^2 \\
Z_y &= \{\zeta_0 + \zeta_1(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + \{\zeta_0' - \lambda_0\varkappa_0\}(t_1-t_0)^2 \\
X_z &= \{\varkappa_0 + \varkappa_1(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + \varkappa_0'(t_1-t_0)^2 \\
Y_z &= -\{\zeta_0 + \zeta_1(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + \zeta_0'(t_1-t_0)^2 \\
Z_z &= -\tfrac{1}{2}\gamma^2(t_1-t_0)^2.
\end{aligned}$$

oder numerisch und in Einheiten der zehnten Decimale:

$$\begin{aligned}
X_x &= -\,296.57\,(t_1-t_0)^2 \\
Y_x &= \{-\,2435445 - 10.95\,(t_0-1850)\}(t_1-t_0) - 5.48\,(t_1-t_0)^2 \\
Z_x &= \{\;\;-\,2832 + \;3.71\,(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + 1.06\,(t_1-t_0)^2 \\
X_y &= \{+\,2435445 + 10.95\,(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + 5.47\,(t_1-t_0)^2 \\
Y_y &= -\,296.00\,(t_1-t_0)^2 \\
Z_y &= \{-\,23074 - 0.15\,(t_0-1850)\}(t_1-t_0) - 0.69\,(t_1-t_0)^2 \\
X_z &= \{+\;\;2832 - 3.71\,(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + 0.95\,(t_1-t_0)^2 \\
Y_z &= \{+\,23074 + 0.15\,(t_0-1850)\}(t_1-t_0) + 0.27\,(t_1-t_0)^2 \\
Z_z &= -\,0.03\,(t_1-t_0)^2.
\end{aligned}$$

Zu den voranstehenden Formeln wäre zu bemerken, dass man bei der Uebertragung auf ein anderes Aequinoctium in der Summationstafel der Störungen in den drei Coordinaten sowohl die summirten Werthe, als auch die Funktions- und Differenzwerthe, wie sie vor der Uebertragung statt haben, entsprechend transformiren muss. Hierbei wird man die zusammengehörigen Werthe der zweiten summirten Reihe als *x*-, *y*-, *z*-Coordinaten auffassen, ebenso die zusammengehörigen Werthe der ersten summirten Reihe u. s. f. und für jedes System dieser zusammengehörigen Werthe die Transformation ausführen. Die Aenderungen in den Differenzwerthen werden in der Regel so klein sein, dass es kaum nöthig sein wird, auf diese Aenderungen Rücksicht zu nehmen.

Schliesslich ist in diesem Paragraphen noch zu erwähnen, wie man die Störungswerthe ξ, η, ζ bei Ableitung einer Oppositionsephemeride verwerthen kann.

ξ, η, ζ sind auf die Ekliptik bezogen, während die Ephemeride sich gewöhnlich auf den Aequator bezieht. Um den Uebergang auf die letztere Ebene zu bewerkstelligen, hat man, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet und ξ', η', ζ' die neuen Werthe vorstellen, nach I (pag. 12) die Formeln:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi\\ \eta' &= \eta\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon\\ \zeta' &= \eta\sin\varepsilon + \zeta\cos\varepsilon\,;\end{aligned}$$

diese Werthe wird man an die ungestörten äquatorealen Coordinaten x_0', y_0', z_0' des Planeten anbringen, um die gestörten, der Ephemeridenrechnung zu Grunde zu legenden äquatorealen Coordinaten x', y', z' zu erhalten; diese sind jetzt:

$$\begin{aligned}x' &= x_0' + \xi'\\ y' &= y_0' + \eta'\\ z' &= z_0' + \zeta'.\end{aligned}$$

Man wird eine Reihe von Werthen für ξ, η, ζ für die Nähe der Opposition nach den Formeln (A_{II}) und (B_{II}) (pag. 53) rechnen, und aus der so erhaltenen Integraltafel die für die Epochen der Ephemeride geltenden speciellen Werthe entlehnen; es ist klar, dass die Berechnung der Coordinaten wohl niemals genauer, als auf Einheiten der 7ten Decimale ausgeführt zu werden braucht.

---

§. 4. Uebergang auf osculirende Elemente bei Encke's Methode.

Die Störungswerthe wachsen mit der Zeit fortwährend an und häufig genug tritt der Fall ein, dass die Fortführung der Störungsrechnung wegen der Grösse der Störungen und wegen des unregelmässigen Ganges derselben nach den obigen Vorschriften sehr beschwerlich und die Genauigkeit der Rechnung fraglich wird. Das unten folgende Beispiel zeigt diesen Uebelstand sehr auffällig, und die Rechnung ist eigentlich weiter fortgesetzt, als es für die Sicherheit derselben wünschenswerth erscheint. Es sollte aber gezeigt werden, was die verschiedenen Methoden leisten, und das gewählte Beispiel zeigt ganz auffällig die Vortheile der Methode der Berechnung der Störungen nach den Hansen'schen Coordinaten, wenn die Störungen sehr anwachsen; in der That ist der Uebergang auf osculirende Elemente nach der letzteren Methode ganz überflüssig und ist nur ausgeführt, um vergleichende Resultate zu erlangen.

Wünscht man also aus irgend einem Grunde die Störungen auf die Elemente zu übertragen, so tritt die Nothwendigkeit auf, hierfür geeignete Formeln zu besitzen. Für die Genauigkeit der Rechnung ist es wünschenswerth, sofort den Ueberschuss der gestörten Elemente über die ungestörten zu bestimmen. Die Formeln werden bei dieser Forderung zwar etwas verwickelter, die grössere Mühe aber kommt

gegen die erzielte Genauigkeitszunahme kaum in Betracht; doch soll, um zweckmässige Controlen zu erhalten, später ebenfalls die Methode entwickelt werden, unmittelbar aus den gestörten Coordinaten und den gestörten Geschwindigkeiten die Elemente zu bestimmen.

Vorerst soll vorausgesetzt sein, dass in geeigneter Weise die Störungen des Radiusvector, des ersten Differentialquotienten desselben nach der Zeit, und die Störung des Werthes der Quadratwurzel des Parameters bekannt seien; es soll also, wenn die ungestörten Grössen durch einen angehängten Nullindex dargestellt sind, bezeichnet werden:

$$r - r_0 = \Delta(r)$$
$$\frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt} = \Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$$
$$\sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \Delta(\sqrt{p})$$

Aus $\Delta(\sqrt{p})$ leitet sich leicht der Unterschied der Parameter $\Delta(p)$ ab; denn multiplicirt man in der letzten Gleichung beiderseits mit $\sqrt{p} + \sqrt{p_0}$, so erhält man leicht:

$$p - p_0 = \Delta(p) = \{2\sqrt{p_0} + \Delta(\sqrt{p})\}\,\Delta(\sqrt{p}). \qquad 1)$$

Die bekannte Polargleichung für r gibt:

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

und die Differentiation dieses Ausdruckes unter Berücksichtigung, dass:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{r^2}\sqrt{p} \qquad 2)$$

ist, lässt finden:

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k}\left(\frac{dr}{dt}\right). \qquad 3)$$

Die letzteren beiden Gleichungen geben die Hilfsmittel an die Hand, die Excentricität und die wahre Anomalie zu finden, und können leicht auf Formen überführt werden, welche die Unterschiede der gestörten gegen die ungestörten Werthe finden lassen; man wird haben:

$$e \sin v = \left(\frac{\sqrt{p_0} + \Delta\sqrt{p}}{k}\right)\left(\frac{dr_0}{dt} + \Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)\right) = e_0 \sin v_0 + \frac{1}{k}\left\{\frac{dr_0}{dt}\,\Delta(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\,\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)\right\}$$

$$e \cos v = \frac{p_0}{r_0} - 1 + \frac{p r_0 - r p_0}{r r_0} = e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r}\left\{\Delta(p) - \frac{p_0}{r_0}\Delta(r)\right\},$$

wobei man für $\frac{dr_0}{dt}$ zu setzen haben wird:

$$\frac{dr_0}{dt} = e_0 \sin v_0 \frac{k}{\sqrt{p_0}}.$$

Setzt man weiter:

$$\frac{1}{k}\left\{\frac{dr_0}{dt}\,\Delta(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\,\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)\right\} = g \sin G$$
$$\frac{1}{r}\left\{\Delta(p) - \frac{p_0}{r_0}\Delta(r)\right\} = g \cos G$$

so wird:

$$e \sin v = e_0 \sin v_0 + g \sin G$$
$$e \cos v = e_0 \cos v_0 + g \cos G$$

woraus man sofort ableitet:

$$\left.\begin{aligned} e \sin (v - v_0) &= \qquad g \sin (G - v_0) \\ e \cos (v - v_0) &= e_0 + g \cos (G - v_0) \end{aligned}\right\} ; \qquad 4)$$

nun hat man zur Bestimmung des Unterschiedes der wahren Anomalien die Gleichung:

$$\operatorname{tang} (v - v_0) = \frac{g \sin (G - v_0)}{e_0 + g \cos (G - v_0)} . \qquad 5)$$

Der Quadrant, in welchem $v - v_0$ zu nehmen ist, kann wohl nie zweifelhaft sein, da $v - v_0$ im Allgemeinen nur ein sehr mässiger Bogen sein kann; sollte aber jemals bei sehr kleiner Excentricität ein Zweifel in dieser Richtung auftreten, so wird man zu beachten haben, dass $\sin (v - v_0)$ das Zeichen des Zählers, $\cos (v - v_0)$ das Zeichen des Nenners hat.

Multiplicirt man in 4) die erste Gleichung mit $\sin \frac{1}{2} (v - v_0)$, die zweite mit $\cos \frac{1}{2} (v - v_0)$ und addirt, so findet sich:

$$\Delta (e) = e - e_0 = \frac{g \cos \{ G - \frac{1}{2} (v + v_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (v - v_0)}$$

wodurch der Unterschied der Excentricitäten ermittelt erscheint; später bedarf man noch des Unterschiedes der Quadrate der Excentricitäten; man findet ähnlich wie in der Gleichung 1):

$$\Delta (e^2) = e^2 - e_0^2 = \{ 2 e_0 + \Delta (e) \} \Delta (e) .$$

Da in den elliptischen Elementen anstatt der Excentricität gewöhnlich der Excentricitätswinkel aufgeführt erscheint, so ist es angemessen, ebenfalls die Bestimmung von $\varphi - \varphi_0$ auszuführen. Man wird zu dem Ende aus e_0 und $\Delta (e)$ den Werth von $e = \sin \varphi$ mit einer genügenden Annäherung berechnen und hat dann:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) = \frac{\Delta (e)}{2 \cos \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0)} .$$

Der durch (5) ermittelte Unterschied der wahren Anomalien kann dazu benützt werden, den Unterschied der mittleren Anomalien zu bestimmen, da die mittlere Anomalie gewöhnlich als Element angesetzt wird. Bei der Kleinheit der Excentricität der Planetenbahnen wird man kaum wesentlich an Sicherheit der Rechnung einbüssen, wenn man M mit Hilfe der bekannten Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} (v - E) &= \sqrt{\frac{r}{p}} \sin \tfrac{1}{2} \varphi \sin v \\ M &= E - e \sin E \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

bestimmt und durch Vergleichung mit M_0 den Werth $M - M_0$ ermittelt. Es scheint aber der vorgesetzten Lösung des Problems angemessen, auch hier die kleine Mehrarbeit nicht zu scheuen und die Formeln direct auf die Unterschiede zurückzuführen. Setzt man:

$$\sin v \cos\varphi = \sin v_0 \cos\varphi_0 + (\sigma)$$
$$\cos v + e = \cos v_0 + e_0 + (\gamma)$$
$$\frac{1}{1 + e\cos v} = \frac{1}{1 + e_0 \cos v_0} + (\varrho)\,,$$

so ergibt sich leicht, wenn man beachtet, dass geschrieben werden kann:

$$(\varrho) = \frac{r}{p} - \frac{r_0}{p_0}\,, \tag{7}$$

$$(\sigma) = 2\sin\tfrac{1}{2}(v - v_0)\cos\tfrac{1}{2}(v + v_0)\cos\varphi - 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)\sin v_0$$
$$(\gamma) = \varDelta(e) - 2\sin\tfrac{1}{2}(v - v_0)\sin\tfrac{1}{2}(v + v_0) \tag{8}$$
$$(\varrho) = \frac{\varDelta(r)}{p} - \frac{r_0}{p p_0}\varDelta(p)\,;$$

nun ist aber:

$$\sin E = \frac{\sin v \cos\varphi}{1 + e\cos v}$$
$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v}\,,$$

demnach wird:

$$\sin E = \sin E_0 + (\varrho)\sin v_0 \cos\varphi_0 + (\sigma)\left\{\frac{r_0}{p_0} + (\varrho)\right\}$$
$$\cos E = \cos E_0 + (\varrho)\left\{\cos v_0 + e_0\right\} + (\gamma)\left\{\frac{r_0}{p_0} + (\varrho)\right\}.$$

Beachtet man aber, dass ist nach (7):

$$\frac{r_0}{p_0} + (\varrho) = \frac{r}{p}$$

und dass geschrieben werden kann:

$$\sin v_0 \cos\varphi_0 = \sin E_0 \frac{p_0}{r_0}$$
$$\cos v_0 + e_0 = \cos E_0 \frac{p_0}{r_0}$$

und setzt:

$$(\lambda) = \frac{p_0}{r_0}(\varrho) = \frac{p_0}{p}\frac{\varDelta(r)}{r_0} - \frac{\varDelta(p)}{p}$$

so kann man auch schreiben $(\lambda) = -\frac{r}{p}\, g\cos G$ und setzt überdies:

$$\left\{(\lambda)\sin E_0 + (\sigma)\right\}\frac{r}{p} = g'\sin G'$$
$$\left\{(\lambda)\cos E_0 + (\gamma)\right\}\frac{r}{p} = g'\cos G' \tag{9}$$

so findet sich leicht:

$$\operatorname{tang}(E - E_0) = \frac{g'\sin(G' - E_0)}{1 + g'\cos(G' - E_0)}\,. \tag{10}$$

Aus der Vergleichung der Ausdrücke:

$$M = E - e\sin E$$
$$M_0 = E_0 - e_0 \sin E_0$$

folgt sofort:

$$M - M_0 = E - E_0 - 2e_0 \sin\tfrac{1}{2}(E - E_0)\cos\tfrac{1}{2}(E + E_0) - \sin E\,\varDelta(e)\,, \tag{11}$$

so dass die Gleichungen (8), (9), (10) und (11) die Resultate aus (6) ersetzen.

Es erübrigt nun, um die Dimensionen des Kegelschnittes völlig zu bestimmen, die Ermittelung des Unterschiedes der grossen Halbachsen. Es ist:

$$a - a_0 = \frac{p}{1-e^2} - \frac{p_0}{1-e_0^2} = \frac{p-p_0}{1-e^2} + p_0\left(\frac{1}{1-e^2} - \frac{1}{1-e_0^2}\right) = \frac{p-p_0}{1-e^2} + a_0\,\frac{\Delta(e^2)}{1-e^2}$$

oder:

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a-a_0}{a_0} = \frac{\Delta(p) + a_0\Delta(e^2)}{p_0 - a_0\Delta(e^2)}\ .$$

Gewöhnlich wird aber statt a die tägliche mittlere siderische Bewegung μ angesetzt. Man hat hierfür:

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu = k\{a_0 + \Delta(a)\}^{-\frac{3}{2}} = \mu_0\left\{1 + \frac{\Delta(a)}{a_0}\right\}^{-\frac{3}{2}};$$

es ist also, wenn man eine Reihenentwickelung ausführt und

$$\frac{\Delta(a)}{2a_0} = q$$

setzt,

$$\mu = \mu_0\left\{1 - 3q + \frac{3\cdot 5}{1\cdot 2}q^2 - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}q^3 + \ldots\right\};$$

die in den Klammern stehende Reihe, vom zweiten Gliede angefangen, ist nichts anderes, als der Werth von $-fq$, wobei $\log f$ aus der f-Tafel (Tafel XI) zu entlehnen ist, die bei früheren Entwickelungen (pag. 75) bereits benützt wurde; man hat also zur Berechnung von μ die Formeln:

$$q = \frac{\Delta(p) + a_0\Delta(e^2)}{2\{p_0 - a_0\Delta(e^2)\}}$$

$$\mu - \mu_0 = -fq\mu_0\ .$$

Die Berechnung von $a - a_0$ oder von $\mu - \mu_0$ kann aber auch in einer anderen Weise vorgenommen werden, die zur Controle benützt werden kann und später in geeigneter Weise Verwendung findet.

Das Quadrat der Geschwindigkeit kann nach der Gleichung für g (I pag. 44) dargestellt werden durch:

$$g^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

setzt man nun den Unterschied der Quadrate in der gestörten und ungestörten Bewegung als bekannt voraus und schreibt:

$$\Delta(g^2) = g^2 - g_0^2$$

so wird:

$$\frac{\Delta(g^2)}{k^2} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0}\right) = \frac{a-a_0}{a\,a_0} - \frac{2(r-r_0)}{r\,r_0};$$

setzt man also abkürzend:

$$\frac{\Delta(g^2)}{k^2} + \frac{2(r-r_0)}{r\,r_0} = P \qquad 12)$$

so wird:

$$\frac{a-a_0}{a\,a_0} = P$$

und

endlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{a-a_0}{a_0} &= \frac{a_0 P}{1-a_0 P} = 2q \\ \mu-\mu_0 &= -fq\mu_0 \end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

Die eben entwickelten Formeln setzen die Kenntniss von $\Delta(r)$, $\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$, $\Delta(\sqrt{p})$ und überdiess, wenn man zur Bestimmung von $\mu-\mu_0$ die zweite Methode benützen will, die Kenntniss von $\Delta(g^2)$ voraus, sind aber übrigens völlig frei von der Methode, die der Berechnung der Störungen zu Grunde gelegt wurde. Die Ermittelung der eben hingeschriebenen Grössen und die Bestimmung der Bahnlage muss aber verschieden durchgeführt werden je nach der Methode der Störungsrechnung, und es wird vorerst vorausgesetzt, dass die Störungen nach den rechtwinkeligen Ekliptikalcoordinaten berechnet sind.

Für die Zeit der gewählten Osculationsepoche sind die Störungen der Coordinaten ξ, η, ζ und die Störungen in den Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ nach der bei der mechanischen Quadratur auseinander gesetzten Methode zu bestimmen; die vorgelegte Aufgabe fordert die Kenntniss der Werthe der einfachen und Doppel-Integrale für die Osculationsepoche, und ich setze zunächst voraus, dass die numerischen Werthe gegeben seien.

Zur Bestimmung des Knotens, der Neigung der Bahn und des Parameters hat man die bekannten Gleichungen (I pag. 41 und 159):

$$\begin{aligned} k\sqrt{p}\cos i &= x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \\ k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega &= y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} \\ k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega &= x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} \end{aligned} \qquad 14)$$

beachtet man, dass ist:

$$\begin{aligned} x &= x_0+\xi, & \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \\ y &= y_0+\eta, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \\ z &= z_0+\zeta, & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned} \qquad 15)$$

und schreibt:

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x_0+\xi)\frac{d\eta}{dt} + \xi\frac{dy_0}{dt}\right\} - \left\{(y_0+\eta)\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{dx_0}{dt}\right\} \\ Y &= \left\{(y_0+\eta)\frac{d\zeta}{dt} + \eta\frac{dz_0}{dt}\right\} - \left\{(z_0+\zeta)\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{dy_0}{dt}\right\} \\ Z &= \left\{(x_0+\xi)\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{dz_0}{dt}\right\} - \left\{(z_0+\zeta)\frac{d\xi}{dt} + \zeta\frac{dx_0}{dt}\right\} \end{aligned} \qquad 16)$$

so erfordert die Berechnung dieser Formeln die Kenntniss der Werthe x_0, y_0, z_0 und $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, d. i. der ungestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten.

Für die Coordinaten hat man (vergl. I. pag. 16):

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \, (\cos u_0 \cos \Omega_0 - \sin u_0 \sin \Omega_0 \cos i_0) \\ y_0 &= r_0 \, (\cos u_0 \sin \Omega_0 + \sin u_0 \cos \Omega_0 \cos i_0) \\ z_0 &= r_0 \sin u_0 \sin i_0 . \end{aligned} \tag{17}$$

Die Berechnung dieser Formeln gestaltet sich durch Einführung einiger Hilfswinkel etwas bequemer; setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega_0 \\ \sin a \cos A &= - \sin \Omega_0 \cos i_0 \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega_0 \\ \sin b \cos B &= \cos \Omega_0 \cos i_0 \end{aligned} \tag{18}$$

so erhält man statt (17):

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \sin a \sin (A + u_0) \\ y_0 &= r_0 \sin b \sin (B + u_0) \\ z_0 &= r_0 \sin i_0 \sin u_0 \quad ; \end{aligned} \tag{19}$$

Differentiirt man nun nach der Zeit und beachtet, dass

$$u_0 = v_0 + \omega_0 ,$$

also

$$\frac{d u_0}{dt} = \frac{d v_0}{dt} ,$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{d x_0}{dt} &= \sin a \sin (A + u_0) \frac{d r_0}{dt} + r_0 \sin a \cos (A + u_0) \frac{d v_0}{dt} \\ \frac{d y_0}{dt} &= \sin b \sin (B + u_0) \frac{d r_0}{dt} + r_0 \sin b \cos (B + u_0) \frac{d v_0}{dt} \\ \frac{d z_0}{dt} &= \sin i_0 \sin u_0 \frac{d r_0}{dt} + r_0 \sin i_0 \cos u_0 \frac{d v_0}{dt} \quad , \end{aligned}$$

führt man für $\frac{d r_0}{dt}$ und $\frac{d v_0}{dt}$ die Werthe ein (vergl. oben (2) und (3) pag. 89):

$$\begin{aligned} \frac{d r_0}{dt} &= e_0 \sin v_0 \frac{k}{\sqrt{p_0}} \\ \frac{d v_0}{dt} &= \frac{k}{r_0^2} \sqrt{p_0} \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \frac{d x_0}{dt} &= \sin a \frac{k}{\sqrt{p_0}} \left\{ \sin (A + u_0) \, e_0 \sin v_0 + \cos (A + u_0) (1 + e_0 \cos v_0) \right\} \\ \frac{d y_0}{dt} &= \sin b \frac{k}{\sqrt{p_0}} \left\{ \sin (B + u_0) \, e_0 \sin v_0 + \cos (B + u_0) (1 + e_0 \cos v_0) \right\} \\ \frac{d z_0}{dt} &= \sin i_0 \frac{k}{\sqrt{p_0}} \left\{ \sin u_0 \, e_0 \sin v_0 + \cos u_0 (1 + e_0 \cos v_0) \right\} . \end{aligned}$$

Setzt man also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{p_0}} (\sin u_0 + e_0 \sin \omega_0) &= c \sin U \\ \frac{k}{\sqrt{p_0}} (\cos u_0 + e_0 \cos \omega_0) &= c \cos U \end{aligned} \right\} \tag{20a}$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= c \sin a \cos (A + U)\\ \frac{dy_0}{dt} &= c \sin b \cos (B + U)\\ \frac{dz_0}{dt} &= c \sin i_0 \cos U\end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Die Rechnung für c und U lässt sich aber einfacher stellen; man findet leicht, wenn man statt u_0 setzt $v_0 + \omega_0$ und entwickelt:

$$\left.\begin{aligned}\gamma \sin \Gamma &= \sin v_0\\ \gamma \cos \Gamma &= \cos v_0 + \sin \varphi_0\\ U &= \Gamma + \omega_0\\ c &= \frac{\gamma k}{\sqrt{p_0}}\ ,\end{aligned}\right\} \quad 20b)$$

Die Gleichungen (18), (19), (20b) und (21) leisten also die Bestimmung der zur Berechnung von (16) nothwendigen Grössen. Man kann demnach schreiben:

$$\left.\begin{aligned}k\sqrt{p} \cos i &= k\sqrt{p_0} \cos i_0 + X\\ k\sqrt{p} \sin i \sin \Omega &= k\sqrt{p_0} \sin i_0 \sin \Omega_0 + Y\\ k\sqrt{p} \sin i \cos \Omega &= k\sqrt{p_0} \sin i_0 \cos \Omega_0 + Z\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Setzt man überdiess:

$$Y = m \sin M$$
$$Z = m \cos M\ ,$$

so erhält man leicht:

$$\left.\begin{aligned}k\sqrt{p} \sin i \sin (\Omega - \Omega_0) &= m \sin (M - \Omega_0)\\ k\sqrt{p} \sin i \cos (\Omega - \Omega_0) &= k\sqrt{p_0} \sin i_0 + m \cos (M - \Omega_0)\end{aligned}\right\} \quad 23)$$

und es wird demnach:

$$\operatorname{tang} (\Omega - \Omega_0) = \frac{m \sin (M - \Omega_0)}{k\sqrt{p_0} \sin i_0 + m \cos (M - \Omega_0)}\ ,$$

wobei also, was bei sehr kleinen Neigungen möglicher Weise beachtet werden müsste, die Tangente so zu betimmen ist, dass $\sin (\Omega - \Omega_0)$ das Zeichen des Zählers, $\cos (\Omega - \Omega_0)$ das Zeichen des Nenners erhält.

Multiplicirt man die Gleichungen (23) beziehungsweise mit $\sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)$ und $\cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)$, addirt und setzt das Resultat dieser Operation mit der ersten der Gleichungen (22) an, so findet sich:

$$k\sqrt{p} \sin i = k\sqrt{p_0} \sin i_0 + m \frac{\cos \{M - \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0)\}}{\cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)}$$

$$k\sqrt{p} \cos i = k\sqrt{p_0} \cos i_0 + X\ ;$$

setzt man nun weiter:

$$m \frac{\cos \{M - \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0)\}}{\cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)} = n \sin N$$
$$X = n \cos N\ ,$$

so findet sich leicht:

$$\text{tang}\,(i - i_0) = \frac{n \sin (N - i_0)}{k\sqrt{p_0} + n \cos (N - i_0)}$$

$$\Delta(\sqrt{p}) = \sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \frac{n}{k}\,\frac{\cos\{N - \frac{1}{2}(i + i_0)\}}{\cos\frac{1}{2}(i - i_0)} \;.$$

Hiermit erscheint die Lage der Bahnebene und die Grösse $\Delta(\sqrt{p})$ bestimmt; es erübrigt aber noch, die Lage der Bahn in dieser Ebene, und die Grössen $\Delta(r)$ sowie $\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$ zu bestimmen.

Aus den Gleichungen (vergl. (17) pag. 94):

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i \\ y &= r \cos u \sin \Omega + r \sin u \cos \Omega \cos i \\ z &= r \sin u \sin i \end{aligned}$$

findet sich leicht:

$$\left.\begin{aligned} r \cos u &= x \cos \Omega + y \sin \Omega \\ r \sin u \cos i &= y \cos \Omega - x \sin \Omega \\ r \sin u \sin i &= z \quad ; \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

führt man in diesen Gleichungen statt x, y, z die Werthe $(x_0 + \xi)$, $(y_0 + \eta)$, $(z_0 + \zeta)$ ein und berücksichtigt ausserdem, dass ist:

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \cos \Omega_0 - 2 \sin \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_0) \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \Omega_0) \\ \sin \Omega &= \sin \Omega_0 + 2 \cos \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_0) \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \Omega_0) \end{aligned}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} r \cos u &= r_0 \cos u_0 + X' \\ r \sin u \cos i &= r_0 \sin u_0 \cos i_0 + Y' \\ r \sin u \sin i &= r_0 \sin u_0 \sin i_0 + \zeta \;. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

wobei offenbar

$$\begin{aligned} X' = &- 2 x_0 \sin \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_0) \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \Omega_0) + \xi \cos \Omega + 2 y_0 \cos \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_0) \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \Omega_0) + \\ &+ \eta \sin \Omega \\ Y' = &- 2 y_0 \sin \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_0) \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \Omega_0) + \eta \cos \Omega - 2 x_0 \cos \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_0) \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \Omega_0) - \\ &- \xi \sin \Omega \end{aligned}$$

angenommen ist.

Diese Formeln lassen sich durch Einführung der folgenden Hilfswinkel etwas zusammenziehen; schreibt man nämlich:

$$\begin{aligned} x_0 &= s \cos S \\ y_0 &= s \sin S \\ \xi &= \sigma \cos \Sigma \\ \eta &= \sigma \sin \Sigma \;. \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} X' &= \sigma \cos (\Sigma - \Omega) + 2 s \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \Omega_0) \sin \{S - \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_0)\} \\ Y' &= \sigma \sin (\Sigma - \Omega) - 2 s \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \Omega_0) \cos \{S - \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_0)\} \;. \end{aligned}$$

Behandelt man die Gleichungen (25) in analoger Weise, wie die Gleichungen (22) (pag. 95) und setzt:

$$\zeta = m' \sin M'$$
$$Y' = m' \cos M'$$
$$\frac{m' \cos \{M' - \frac{1}{2}(i + i_0)\}}{\cos \frac{1}{2}(i - i_0)} = n' \sin N'$$
$$X' = n' \cos N'$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}(u - u_0) &= \frac{n' \sin(N' - u_0)}{r_0 + n' \cos(N' - u_0)} \\ \Delta(r) = r - r_0 &= \frac{n' \cos\{N' - \frac{1}{2}(u + u_0)\}}{\cos \frac{1}{2}(u - u_0)} \end{aligned}\right\} \qquad 26)$$

und hiermit ist auch ω bekannt, denn man hat:

$$\omega = u - v$$
$$\omega_0 = u_0 - v_0\,,$$

daher:

$$\left.\begin{aligned} \omega - \omega_0 &= (u - u_0) - (v - v_0) \\ \pi - \pi_0 &= (\omega - \omega_0) + (\Omega - \Omega_0) \end{aligned}\right\} \qquad 27)$$

Um die Störungen in den Elementen zu berechnen, bedarf es nur noch der Kenntniss des Werthes:

$$\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}\,.$$

Differentiirt man die Gleichung:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

nach der Zeit, so erhält man:

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\,;$$

andererseits besteht die Gleichung:

$$r_0\frac{dr_0}{dt} = x_0\frac{dx_0}{dt} + y_0\frac{dy_0}{dt} + z_0\frac{dz_0}{dt}\,;$$

durch Subtraction und eine einfache Transformation erhält man, wenn

$$D = (x_0 + \xi)\frac{d\xi}{dt} + \xi\frac{dx_0}{dt} + (y_0 + \eta)\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{dy_0}{dt} + (z_0 + \zeta)\frac{d\zeta}{dt} + \zeta\frac{dz_0}{dt}\,,$$

gesetzt wird, sofort:

$$\frac{dr_0}{dt}\Delta(r) + r\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = D\,.$$

und indem man sich erinnert, dass $\frac{dr_0}{dt}$ berechnet werden kann nach:

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{k e_0}{\sqrt{p_0}} \sin v_0\,,$$

so hat man:

$$\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{D - \frac{dr_0}{dt}\Delta(r)}{r} \qquad 28)$$

Die Grösse $(r - r_0)$ kann aber auch in anderer Weise leicht erhalten werden, und man kann diesen Werth entweder zur Controle benützen, oder man wird sich

auf diese Methode der Berechnung beschränken, wenn man nicht die Formeln (12) und (13) (pag. 92, 93) rechnen will; ich werde hier ausserdem die Berechnung von $\Delta(g^2)$ vornehmen, welche Grösse man im vorliegenden Falle ebenfalls nöthig hat.

Es ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Setzt man also:

$$B = \xi(2x_0 + \xi) + \eta(2y_0 + \eta) + \zeta(2z_0 + \zeta), \tag{29}$$

so wird:

$$B = (r - r_0)(r + r_0);$$

um hieraus $r - r_0$ zu bestimmen, kann man den folgenden Kettenbruch benützen:

$$r - r_0 = \cfrac{B}{2r_0 + \cfrac{B}{2r_0 + \cfrac{B}{2r_0 + \ldots}}},$$

oder einfacher da r mit genügender Genauigkeit aus den vorangehenden Rechnungen bekannt ist:

$$r - r_0 = \frac{B}{r + r_0}, \tag{30}$$

womit eine Controle der zweiten Formel (20) (pag. 97) erlangt werden kann; weiter ist:

$$g^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$g_0^2 = \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2;$$

setzt man also:

$$k^2 \Delta = \frac{d\xi}{dt}\left(2\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{d\eta}{dt}\left(2\frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right) + \frac{d\zeta}{dt}\left(2\frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\right), \tag{31}$$

so berechnet sich P (vergl. Formel (12) pag. 92)) nach:

$$P = \Delta + \frac{2(r - r_0)}{r r_0}, \tag{32}$$

und hiermit erscheinen alle Formeln entwickelt, deren man zu dem Uebergange auf osculirende Elemente bedarf.

Um eine scharfe Controle für die Richtigkeit der Rechnung zu erlangen, wird es sich empfehlen, indem man die Formeln (18), (19), (20*b*) und (21) auf die neuen osculirenden Elemente anwendet, die gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten direct abzuleiten, welche innerhalb der Unsicherheit der Rechnung mit den der Rechnung zu Grunde gelegten Werthen nach (15) (pag. 93) stimmen müssen. Hierbei könnte allerdings ein kleiner Fehler in der Bestimmung von μ sich leicht mit der Unsicherheit der Rechnung vermischen; man wird aber in der Bestimmung dieses Elementes kaum einen Fehler begehen können, da vorausgesetzt ist, dass $\mu - \mu_0$ nach beiden oben angeführten Methoden bestimmt wurde, also zwei nahezu unabhängige Resultate für dasselbe Element vorliegen.

Will man jedoch die gestörten Elemente unmittelbar aus den gestörten

Coordinaten und Geschwindigkeiten ableiten, so wird man auf eine sehr kurze Rechnung geführt.

Man bestimmt vorerst nach (15) (pag. 93) die Werthe x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, und erhält so aus (14) (pag. 93) die Elemente $\sqrt{p}$, i, Ω.

Aus den Gleichungen (24) (pag 96) erhält man:

$$r \cos u = x \cos \Omega + y \sin \Omega$$
$$r \sin u = y \cos \Omega \cos i - x \sin \Omega \cos i + z \sin i\ ;$$

hierdurch gelangt man zur Kenntniss von r und u, und man kann nachsehen, ob die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

erfüllt wird. Hierauf berechnet man:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right),$$

und hat zur Bestimmung von φ (vergl. (2) und (3) (pag. 89)) die Gleichungen:

$$\sin \varphi \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k}\left(\frac{dr}{dt}\right)$$
$$\sin \varphi \cos v = \frac{p}{r} - 1\ ;$$

aus v findet sich die mittlere Anomalie nach

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi)$$
$$M = E - \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \sin E$$

und ausserdem ist:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= u - v \\ \pi &= \omega + \Omega \end{aligned}\right\} \qquad 33)$$

so dass alle Elemente bis auf die grosse Halbachse bestimmt sind, welch' letztere sich aber leicht aus:

$$\left.\begin{aligned} a = \frac{p}{\cos^2 \varphi}\ , \quad \mu &= \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}\ . \\ \log k'' &= 3.550\ 0066 \end{aligned}\right\} \qquad 34)$$

berechnet.

Wie man sieht, ist die Rechnung sehr kurz und bequem, doch hat man, da Fehler in der Bestimmung von μ mit der Zeit anwachsen, den Nachtheil, dass, um die nöthige Genauigkeit zu erlangen, grössere Tafeln zur Berechnung benützt werden müssen. Es erscheint daher zweckmässig, statt der Formeln (34) die oben angeführten Formeln (29), (30), (31) und (32) in Verbindung mit (13) zu benützen. Als Controle für die Richtigkeit der Rechnung kann man wieder die Rückrechnung der Coordinaten und Geschwindigkeiten nach den Formeln (18), (19), (20) und (21) unter Zuziehung der neuen Elemente benützen; allerdings entziehen sich sehr kleine Fehler in der Bestimmung von $\mu - \mu_0$ nach den Formeln (29), (30), (31) und (32) der Controle; man wird demnach diesen Theil der Rechnung einer sorgfältigen Revision unterwerfen.

Ich werde nun die für den Uebergang auf osculirende Elemente nach Encke's Methode der Störungsrechnung erforderlichen Formeln hier zusammentragen.

Man rechnet sich vorerst mittelst der Formeln, die bei der mechanischen Quadratur entwickelt wurden, die Werthe von:

$$\xi,\ \eta,\ \zeta \text{ und } \frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\zeta}{dt}\ .$$

Hierbei wird es zweckmässig sein, für die Zeiteinheit das bei der Störungsrechnung gewählte Intervall anzunehmen, wodurch die sonst nöthige Division der einfachen Integrale, die die Störungen in den Geschwindigkeiten ergeben, durch w zu entfallen hat; um diesen Umstand in der folgenden Rechnung einfach zu berücksichtigen, wird man statt der Constante des Sonnensystems k überall den Werth wk zu setzen haben, wobei w das der Störungsrechnung zu Grunde liegende Zeitintervall in mittleren Sonnentagen ausgedrückt vortesllt.

Dann rechnet man zunächst für die Zeit der neuen Osculationsepoche in der bekannten Weise den ungestörten Radiusvector r_0, die wahre Anomalie v_0 und das Argument der Breite u_0 nach $u_0 = v_0 + \omega_0$.

Es ist dann:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega_0 \\ \sin a \cos A &= -\sin \Omega \cos i_0 \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega_0 \\ \sin b \cos B &= \cos \Omega_0 \cos i_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{I)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= r_0 \sin a \sin (A + u_0) \\ y_0 &= r_0 \sin b \sin (B + u_0) \\ z_0 &= r_0 \sin i_0 \sin u_0 \qquad ; \end{aligned}\right\} \qquad \text{II)}$$

bestimmt man c und U nach:

$$\left.\begin{aligned} \gamma \sin \Gamma &= \sin v_0 \\ \gamma \cos \Gamma &= \cos v_0 + \sin \varphi_0 \\ U &= \Gamma + \omega_0 \\ c &= \frac{(wk)\,\gamma}{\sqrt{p_0}} \end{aligned}\right. \qquad \text{III)}$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= c \sin a \cos (A + U) \\ \frac{dy_0}{dt} &= c \sin b \cos (B + U) \\ \frac{dz_0}{dt} &= c \sin i_0 \cos U \quad . \end{aligned}\right\} \qquad \text{IV)}$$

Jetzt wird man sich zu entscheiden haben, ob man die gestörten Elemente direct, oder ob man nur die Störungen derselben bestimmen will; ich sammle zuerst jene Formeln, deren man für die letztere Methode bedarf.

Man ermittelt zunächst:

$$X = \left\{(x_0+\xi)\frac{d\eta}{dt} + \xi\frac{dy_0}{dt}\right\} - \left\{(y_0+\eta)\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{dx_0}{dt}\right\}$$

$$Y = \left\{(y_0+\eta)\frac{d\zeta}{dt} + \eta\frac{dz_0}{dt}\right\} - \left\{(z_0+\zeta)\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{dy_0}{dt}\right\}$$

$$Z = \left\{(x_0+\xi)\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{dz_0}{dt}\right\} - \left\{(z_0+\zeta)\frac{d\xi}{dt} + \zeta\frac{dx_0}{dt}\right\}$$

$$D = (x_0+\xi)\frac{d\xi}{dt} + (y_0+\eta)\frac{d\eta}{dt} + (z_0+\zeta)\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{dx_0}{dt} + \eta\frac{dy_0}{dt} + \zeta\frac{dz_0}{dt} \qquad \text{V)}$$

$$(w k)^2 A = \frac{d\xi}{dt}\left(2\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{d\eta}{dt}\left(2\frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right) + \frac{d\zeta}{dt}\left(2\frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\right)$$

$$B = \xi(2x_0+\xi) + \eta(2y_0+\eta) + \zeta(2z_0+\zeta)\,.$$

dann wird:

$$Y = m\sin M$$

$$Z = m\cos M$$

$$\operatorname{tang}(\lambda-\lambda_0) = \frac{m\sin(M-\lambda_0)}{(w k)\sqrt{p_0}\sin i_0 + m\cos(M-\lambda_0)}$$

$$\frac{m\cos\{M-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_0)\}}{\cos\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)} = n\sin N$$

$$X = n\cos N \qquad \text{VI)}$$

$$\operatorname{tang}(i-i_0) = \frac{n\sin(N-i_0)}{(w k)\sqrt{p_0} + n\cos(N-i_0)}$$

$$\Delta(\sqrt{p}) = \frac{n}{(w k)}\cdot\frac{\cos\{N-\frac{1}{2}(i+i_0)\}}{\cos\frac{1}{2}(i-i_0)}$$

$$\Delta(p) = \{2\sqrt{p_0} + \Delta(\sqrt{p})\}\,\Delta(\sqrt{p})$$

$$p = p_0 + \Delta(p)\,;$$

weiter wird man zu rechnen haben:

$$x_0 = s\cos S$$

$$y_0 = s\sin S$$

$$\xi = \sigma\cos\Sigma$$

$$\eta = \sigma\sin\Sigma$$

$$X' = \sigma\cos(\Sigma-\lambda) + 2s\sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)\sin\{S-\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda_0)\}$$

$$Y' = \sigma\sin(\Sigma-\lambda) - 2s\sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)\cos\{S-\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda_0)\}$$

$$\zeta = m'\sin M'$$

$$Y' = m'\cos M' \qquad \text{VII)}$$

$$\frac{m'\cos\{M'-\frac{1}{2}(i+i_0)\}}{\cos\frac{1}{2}(i-i_0)} = n'\sin N'$$

$$X' = n'\cos N'$$

$$\operatorname{tang}(u-u_0) = \frac{n'\sin(N'-u_0)}{r_0 + n'\cos(N'-u_0)}$$

$$\Delta(r) = r - r_0 = \frac{n'\cos\{N'-\frac{1}{2}(u+u_0)\}}{\cos\frac{1}{2}(u-u_0)}$$

$$r = r_0 + \Delta(r)$$

Um $\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$ zu finden, hat man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d r_0}{dt} &= \frac{(\mu k)\, e_0}{\sqrt{p_0}} \sin v_0 \\ \Delta \left(\frac{d r}{d t}\right) &= \frac{D - \frac{d r_0}{d t}\, \Delta (r)}{r} \,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{VIII)}$$

Für die Ermittelung der Excentricität und der wahren Anomalie ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(\mu k)} \left\{ \frac{d r_0}{d t}\, \Delta (\sqrt{p}) + \sqrt{p}\, \Delta \left(\frac{d r}{d t}\right) \right\} &= g \sin G \\ \frac{1}{r} \left\{ \Delta (p) - \frac{p_0}{r_0}\, \Delta (r) \right\} &= g \cos G \\ \operatorname{tang} (v - v_0) &= \frac{g \sin (G - v_0)}{e_0 + g \cos (G - v_0)} \\ \Delta (e) = e - e_0 &= \frac{g \cos \{ G - \frac{1}{2} (v + v_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (v - v_0)} \\ \sin \varphi &= e_0 + \Delta (e) \\ \Delta (e^2) &= \{ 2 e_0 + \Delta (e) \}\, \Delta (e) \\ \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) &= \frac{\Delta (e)}{2 \cos \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0)} \,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{IX)}$$

dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \omega - \omega_0 &= (u - u_0) - (v - v_0) \\ \pi - \pi_0 &= (\omega - \omega_0) + (\Omega - \Omega_0) \end{aligned}\right\} \qquad \text{X)}$$

Um den Unterschied der mittleren Anomalien zu finden, hat man:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma) &= 2 \sin \tfrac{1}{2} (v - v_0) \cos \tfrac{1}{2} (v + v_0) \cos \varphi - 2 \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) \sin \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi_0) \sin v_0 \\ (\gamma) &= \Delta (e) - 2 \sin \tfrac{1}{2} (v - v_0) \sin \tfrac{1}{2} (v + v_0) \\ (\lambda) &= - \frac{r}{p}\, g \cos G \\ (\lambda) \sin E_0 + (\sigma) \frac{r}{p} &= g' \sin G' \\ (\lambda) \cos E_0 + (\gamma) \frac{r}{p} &= g' \cos G' \\ \operatorname{tang} (E - E_0) &= \frac{g' \sin (G' - E_0)}{1 + g' \cos (G' - E_0)} \\ M - M_0 &= (E - E_0) - \frac{2 e_0}{\sin 1''} \sin \tfrac{1}{2} (E - E_0) \cos \tfrac{1}{2} (E + E_0) - \frac{\Delta (e)}{\sin 1''} \sin E \\ L - L_0 &= (M - M_0) + (\pi - \pi_0) \,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XI)}$$

Zur Bestimmung des letzten noch unbekannten Elementes μ kann man zur Controle den Werth von q als Argument für die Ermittelung von f aus der f-Tafel (Tafel XI) in zweifacher Weise berechnen; man hat sowohl:

$$q = \frac{\Delta (p) + a_0\, \Delta (e^2)}{2 \{ p_0 - a_0\, \Delta (e^2) \}}$$

als auch mittelst:

$$\left.\begin{aligned} P &= A + \frac{2 B}{r\, r_0\, (r + r_0)} \\ q &= \frac{a_0 P}{2 (1 - a_0 P)} \,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XIIa)}$$

welche beiden Werthe von q innerhalb der Unsicherheit der Rechnung übereinstimmen müssen. Hat man mit q als Argument den Werth von f aus der Tafel XI entnommen, so ist schliesslich:

$$\mu - \mu_0 = -f q \mu_0 \,. \qquad \text{XII b)}$$

Zur Controle für die Richtigkeit der Rechnung wird man die Formeln I bis IV) (pag. 100) auf die gestörten Elemente anwenden; man erhält dadurch die gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten, die den folgenden Relationen innerhalb der Unsicherheit der Rechnung genügen müssen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\,, & \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \\ y &= y_0 + \eta\,, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \\ z &= z_0 + \zeta\,, & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XIII}$$

Der Uebergang von q auf $\mu - \mu_0$ muss einer besonderen Revision unterzogen werden.

Will man die Elemente aber unmittelbar ableiten, so bestimmt man sich nach Durchrechnung der Formeln I bis IV) (pag. 100) mittelst der Formeln XIII die gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten und hat dann zunächst zur Bestimmung des Knotens Ω, der Neigung i und des Parameters p die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{p}\cos i &= \frac{1}{(wk)}\left\{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right\} \\ \sqrt{p}\sin i \sin\Omega &= \frac{1}{(wk)}\left\{y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right\} \\ \sqrt{p}\sin i \cos\Omega &= \frac{1}{(wk)}\left\{x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right\} \end{aligned} \qquad \text{V)}$$

Der Radiusvector r und das Argument der Breite u ergibt sich aus:

$$\left.\begin{aligned} r\cos u &= x\cos\Omega + y\sin\Omega \\ r\sin u &= y\cos\Omega\cos i - x\sin\Omega\cos i + z\sin i \end{aligned}\right\} \qquad \text{VI)}$$

zur Controle ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Die Excentricität $\sin\varphi$ und die wahre Anomalie v findet sich aus:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi\sin v &= \frac{\sqrt{p}}{(wk)\,r}\left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right\} \\ \sin\varphi\cos v &= \frac{p}{r} - 1\,, \end{aligned}\right\} \qquad \text{VII)}$$

die mittlere Anomalie aus:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E &= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v\cdot\operatorname{cotg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) \\ M &= E - \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\sin E \end{aligned}\right\} \qquad \text{VIII)}$$

der Abstand des Perihels vom Knoten ω und die Länge des Perihels π nach:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= u - v \\ \pi &= \omega + \Omega \end{aligned}\right\} \qquad \text{IX)}$$

die grosse Halbachse und die tägliche mittlere siderische Bewegung endlich aus:

$$a = \frac{p}{\cos^2\varphi}\,, \qquad \mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}$$
$$\log k'' = 3.550\,0066\,. \qquad\qquad \text{X)}$$

Als Controle rechnet man die Coordinaten und Geschwindigkeiten nach den Formeln I) bis IV) (pag. 100) unter Anwendung der gestörten Elemente. Die Uebereinstimmung mit den Ausgangswerthen muss völlig innerhalb der Unsicherheit der Rechnung liegen. Um μ schärfer zu erhalten als es nach der obigen Formel möglich ist, rechne man überdies:

$$a k^2 A = \frac{d\xi}{dt}\left\{2\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\right\} + \frac{d\eta}{dt}\left\{2\frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right\} + \frac{d\zeta}{dt}\left\{2\frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\right\}$$
$$B = \xi\,(2x_0 + \xi) + \eta\,(2y_0 + \eta) + \zeta\,(2z_0 + \zeta)$$
$$P = A + \frac{2B}{r r_0 (r + r_0)}\,, \qquad q = \frac{a_0 P}{2(1 - a_0 P)}\,. \qquad\qquad \text{XI)}$$
$$\mu - \mu_0 = -f q \mu_0$$

wobei f mit q als Argument aus der f-Tafel (Tafel XI) zu entnehmen ist.

---

§. 5. Rechnungsbeispiel zu Encke's Methode.

Es sollen, um die vorstehenden Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, die Störungen ermittelt werden, die der Planet (62) Erato durch die Anziehung der Planeten Jupiter und Saturn erleidet. Die Berücksichtigung der anderen grossen Planeten erscheint im Allgemeinen bei den kleinen Planeten nicht geboten, doch werden die Wirkungen der Planeten Mars und Erde wohl hier und da eine merkliche Störung veranlassen. Es wird aber Niemandem, der die folgenden Vorschriften einem genauen Studium unterzieht, Schwierigkeiten verursachen, dieselben auf eine beliebige Anzahl von Planeten zu erweitern.

Vorerst wird man sich hinreichend genäherte osculirende Elemente für den gestörten Planeten zu verschaffen haben; im Falle, dass keine genäherten Störungswerthe bereits vorliegen, wird man die Elemente ohne Rücksicht auf Störungen aus den Beobachtungen ableiten; allerdings wird dann wol stets die Nothwendigkeit hervortreten, die aus diesen Elementen abgeleiteten Störungswerthe einer Neurechnung zu unterziehen, der man dann die Elemente zu Grunde legt, die man mit Hilfe der eben genannten genähert richtigen Störungswerthe gefunden hat.

Es wird sich aber in diesen Fällen empfehlen für die erste Rechnung der Störungen nur die ersten Potenzen der Massen zu berücksichtigen und von den diesem Falle angepassten Formen, die weiter unten empfohlen werden, Gebrauch zu machen.

Für Erato lege ich die folgenden osculirenden Elemente zu Grunde, die sich bereits sehr nahe den Beobachtungen mit Rücksicht auf die Störungen anschliessen; dieselben sind:

(62) Erato

Epoche und Osculation 1874 Decbr. 26,0 mittl. Zeit Berlin.

mittl. Aeq. 1870.0

$$
\begin{aligned}
L &= 219^{0}\ 8'\ 6.8 \\
M &= 180\ 40\ 48.9 \\
\pi &= 38\ 27\ 17.9 \\
\Omega &= 125\ 42\ 39.7 \\
i &= 2\ 12\ 23.9 \\
\varphi &= 9\ 59\ 14.9 \\
\mu &= 640''89605 \\
\log a &= 0.4954793
\end{aligned}
$$

Diese Elemente sollen nun benützt werden, um die Störungswerthe von der Zeit der Osculationsepoche an nach rückwärts bis 1871 Juni 5 zu ermitteln; ich habe das Beispiel auf eine Rückrechnung angewendet, weil die Anwendung auf den Fall der Rechnung nach vorwärts etwas leichter ist, und ohne Missverständniss ausgeführt werden kann.

Für die in Betracht kommende Zeit gibt das Berliner Jahrbuch die Coordinaten der störenden Planeten bezogen auf das fixe Aequinoctium 1870.0, auf welches sich auch bereits die oben angeführten Elemente beziehen; wäre dieses nicht der Fall, so müssten dieselben mit Hilfe der bekannten Formeln (I pag. 81) auf dieses Aequinoctium übertragen werden.

Wollte man beispielsweise die Störungsrechnung nach vorwärts führen, so müssten, da die Coordinaten der störenden Planeten von 1875.0 bis 1885.0 sich auf das mittlere Aequinoctium 1880.0 beziehen, auch die Elemente des gestörten Planeten auf dieses Aequinoctium reducirt werden. Man würde mit Hilfe der oben erwähnten Formeln als Correctionen der obigen Elemente für die Uebertragung von 1870.0 auf 1880.0 finden:

$$
\begin{aligned}
\Delta L = \Delta \pi &= +\ 8'\ 22''47 \\
\Delta \Omega &= +\ 6'\ 50''72 \\
\Delta i &= -\quad 3''24\,.
\end{aligned}
$$

Die erste Aufgabe besteht nun darin, das Intervall für die Störungsrechnung passend zu wählen. Die Erfahrung lehrt, dass man für kleine Planeten in der Regel (allzugrosse Annäherung an Jupiter ausgenommen) mit einem Intervalle von 40 Tagen ausreicht, welches auch hier gewählt wird. Man legt weiter zweckmässig die Osculationsepoche in die Mitte eines solchen Intervalles; es werden daher für die Störungsrechnung als Epochen zu gelten haben:

.... 1875 Feber 24, 1875 Januar 15, 1874 Decbr. 6, 1874 Octbr. 27 ....

womit man auf Epochen geführt wird, für welche die Publikationen der astronomischen Gesellschaft und das Berliner Jahrbuch in den neueren Jahrgängen die Coordinaten der störenden Planeten geben. Es könnte jedoch der Fall eintreten,

dass in Folge der gegebenen Osculationsepoche eine derartige Wahl nicht möglich ist; man wird in diesen Fällen aber dennoch trachten, die bereits gewählten Epochen festzuhalten und durch geeignete Bestimmung der Integrationsconstanten ${}^{II}f(a)$ und ${}^{I}f(a - \frac{1}{2}w)$ der Bedingung genügen, dass die einfachen und doppelten Integrale für die Osculationsepoche verschwinden; hierfür bieten die Formeln II pag. 59 die geeigneten Hilfsmittel. Da dieser Fall aber selten eintreten wird, so begnüge ich mich mit diesem Hinweise und werde auf diesen Umstand in der Folge nicht weiter Rücksicht nehmen.

Die Rechnung legt man sich, so lange nicht mehr als 2 störende Planeten berücksichtigt werden, zweckmässig so an, dass auf einem Blatte hauptsächlich die von dem gestörten, auf einem anderen die von dem störenden Planeten abhängigen Grössen Aufnahme finden; ausserdem wird man für die Summation in den Coordinaten für jede Coordinate gesondert ein Blatt anlegen. Ich werde diese Blätter der Reihe nach mit Blatt A, B, X, Y, Z bezeichnen; die diesbezüglichen Rechnungen sind in dem folgenden Beispiele in extenso aufgenommen.

Zuerst wird man sich auf einem besonderen Blatte nach den Formeln pag. 83 die Constanten für die Ermittelung der ungestörten Coordinaten und damit schon in dem eigentlichen Rechnungsschema zunächst die von den Störungen unabhängigen Grössen rechnen; die Rechnung selbst führe ich für den gestörten Planeten und für Jupiter 6stellig, für Saturn 5stellig; im Allgemeinen wird aber eine 5stellige, beziehungsweise 4stellige Rechnung genügen.

Zur Ermittelung der Constanten hat man ein für allemal gesondert die Formeln zu rechnen:

$$\left.\begin{array}{lll} \sin a \sin A = \cos \Omega & \sin b \sin B = \sin \Omega & C = 0 \\ \sin a \cos A = -\sin \Omega \sin i & \sin b \cos B = \cos \Omega \cos i & \sin c = \sin i \\ \omega = \pi - \Omega & e'' = \dfrac{\sin \varphi}{\sin 1''} & \\ A' = A + \omega & & \\ B' = B + \omega & & \\ C' = C + \omega = \omega\,. & & \end{array}\right\} \quad \text{I}$$

Im vorliegenden Beispiele findet sich:

$\sin \varphi_0 = 9.239\,131$	$\cos \varphi = 9.993\,368$
$\log e'' = 4.553\,556$	$a \cos \varphi = 0.488\,847$
$\sin \Omega = 9.909\,540$	$A = 215^\circ 43' 52''4$
$\cos i = 9.999\,678$	$\cos A = 9_n 909\,430$
$\cos \Omega = 9_n 766\,188$	$\sin a = 9.999\,788$
$\cos \Omega \cos i = 9_n 765\,866$	$B = 125^\circ 41' 27''3$
$\sin \Omega \cos i = 9_n 909\,218$	$\sin B = 9.909\,650$
$C = \omega = 272^\circ 44' 38''2$	$\sin b = 9.999\,890$
$\sin c = \sin i = 8.585\,501$	$A' = 128^\circ 28' 30''6$
	$B' = 38^\circ 26' 5''5$
	$C' = 272^\circ 44' 38''2$

Mit diesen Constanten lassen sich sofort für alle Intervalle der ganzen Störungsrechnung die ungestörten Coordinaten x_0, y_0, z_0 nach den Formeln:

$$x_0 = r_0 \sin a \sin(A' + v_0)$$
$$y_0 = r_0 \sin b \sin(B' + v_0)$$
$$z_0 = r_0 \sin c \sin(C' + v_0)$$

berechnen; im vorliegenden Falle hat man also:

$$x_0 = r_0\,[9.999\,788] \sin(v_0 + 128^\circ 28' 30''.6)$$
$$y_0 = r_0\,[9.999\,800] \sin(v_0 + 38^\circ 26' \;5''.5)$$
$$z_0 = r_0\,[8.585\,501] \sin(v_0 + 272^\circ 44' 38''.2) .$$

Die hierbei noch nöthigen Grössen r_0 und v_0 erhält man durch das für jedes einzelne Störungsintervall zu rechnende Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned} M &= M_0 + \mu t \\ M &= E - e'' \sin E \\ r_0 \sin v_0 &= a \cos\varphi \sin E \\ r_0 \sin v_0 &= a(\cos E - e) \end{aligned}\right\} \qquad \text{II)}$$

ausserdem lassen sich nunmehr auch noch die von den Störungswerthen ebenfalls unabhängigen Grössen:

$$h = \frac{wk^2}{r_0^3}, \quad R^2 = r_0^2\left(1 + \frac{1}{12}h\right) \text{ und } h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12}h}$$

für den ganzen Umfang der Störungsrechnung auf einmal durchrechnen, und es ist hierbei unter Voraussetzung eines 40tägigen Intervalles $\log wk^2 = 9.675\,283$ zu nehmen.

Die diesbezügliche Rechnung ist ihrem ganzen Umfange nach auf den Blättern A_1 und A_2 durchgeführt. Ausserdem sind auf den A-Blättern die Coordinaten der störenden Planeten nach den Publikationen der astronomischen Gesellschaft, und auf den B-Blättern die Grössen X_2, Y_2, Z_2, welche die Wirkung des störenden Planeten auf die Sonne darstellen, aufgenommen; diese Grössen sind gleichfalls den eben citirten Publikationen entnommen. Da an der genannten Stelle für Jupiter und Saturn nach Bessel beziehungsweise die Massen $\frac{1}{1047.879}$ und $\frac{1}{3501.6}$ angenommen sind, so wurde für die vorliegende Rechnung ebenfalls diese Massenannahme gewählt.

Wollte man für die Massen eine andere Annahme machen, so hätte man vorerst die Grössen X_2, Y_2, Z_2 mit dem Factor $\frac{m_a}{m_b}$ zu multipliciren, wo m_a die gewählte neue Massenannahme, m_b die den obigen Publikationen zu Grunde liegende Massenannahme wäre. Damit erscheinen nun alle Rechnungen, so weit dieselben ohne Kenntniss der Störungswerthe durchführbar sind, beendet.

Nun werden die directen Glieder für die zwei der Osculationsepoche unmittelbar vorangehenden und die zwei unmittelbar folgenden Epochen berechnet; allerdings bedarf es hierzu der Kenntniss der Werthe ξ, η, ζ; diese Störungswerthe sind aber in der Nähe der Osculationsepoche so klein, dass dieselben keinen sehr merkbaren Einfluss auf das Resultat ausüben können. Die diesbezüglichen Rechnungen sind auf dem Blatte B ausgeführt, wobei die Logarithmen der Grössen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ leicht sofort hingeschrieben werden können, da die Coordinaten des störenden und des gestörten Planeten auf dem Blatte A unmittelbar über einander stehen.

Die Rechnung ist für jeden störenden Planeten gesondert durchzuführen und beruht auf folgendem Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \cos\vartheta \cos\theta &= x_1 - x \\
\varrho \cos\vartheta \sin\theta &= y_1 - y \\
\sin\vartheta &= z_1 - z \\
X_1 &= w k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\varrho^3} \\
Y_1 &= w k^2 m_1 \frac{y_1 - y}{\varrho^3} \\
Z_1 &= w k^2 m_1 \frac{z_1 - z}{\varrho^3} \\
(X) &= X_1 + X_2 \\
(Y) &= Y_1 + Y_2 \\
(Z) &= Z_1 + Z_2 \\
\Sigma(X) &= (X)_{a} + (X)_{b} + \ldots \\
\Sigma(Y) &= (Y)_{a} + (Y)_{b} + \ldots \\
\Sigma(Z) &= (Z)_{a} + (Z)_{b} + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad \text{III}$$

die Werthe für die Factoren $w k^2 m_1$ sind der Tafel XII zu entlehnen, dabei ist zu beachten, dass $w = 40$ Tagen angenommen ist und dass die Störungswerthe in Einheiten der 7[ten] Decimale erhalten werden.

Um nun zur Kenntniss der indirecten Glieder zu gelangen, betrachtet man vorerst die directen Glieder als den vollständigen Ausdruck der zweiten Differentialquotienten der Störungswerthe und bildet die erste und zweite summirte Reihe. Da diese Rechnung blos eine vorläufige Bestimmung für die Störungswerthe ergeben soll, so wird dieselbe als Nebenrechnung auf einem gesonderten Blatte durchgeführt. Man hat zur Bestimmung der Anfangsconstanten, da das einfache und das Doppelintegral für die Epoche 1874 Dec. 26.0 verschwinden soll nach II pag. 53:

$$\left.\begin{aligned}
{}'f(a - \tfrac{1}{2}\omega) &= -\frac{1}{24} f^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}\omega) + \frac{17}{5760} f^{\mathrm{III}}(a - \tfrac{1}{2}\omega) - \ldots \\
{}''f(a - \omega) &= \frac{1}{24} f(a) + \frac{17}{5760} \left\{ 2 f^{\mathrm{II}}(a) + f^{\mathrm{II}}(a - \omega) \right\} + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV}$$

welche Bestimmung für jede der einzelnen Coordinaten auszuführen ist. Man er-

hält so, indem man die Werthe mit der fortschreitenden Zeit ansetzt, und ebenso die Differenzwerthe und Summenwerthe bildet, mit Benützung der auf dem Blatte *B* erlangten Werthe von ΣX, ΣY, ΣZ:

	f^{III}	f^{II}	f^{I}	f	${}^{I}f$	${}^{II}f$	$S_{(x)}$
1874 Oct. 27				−710.99		−667.89	−727.13
			+64.88		+643.56		
Dec. 6		−3.69		−646.11		[− 24.33]	− 78.16
	−0.63		+61.19		[− 2.55]		
1875 Jan. 15		−3.42		−584.92		− 26.88	− 75.61
			+56.87		−587.47		
Feb. 24				−528.05		−614.35	−658.34

	f^{III}	f^{II}	f^{I}	f	${}^{I}f$	${}^{II}f$	$S_{(y)}$
1874 Oct. 27				+281.64		+268.47	+291.96
			−21.95		−258.66		
Dec. 6		−2.56		+259.69		[+ 9.81]	+ 31.46
	+1.83		−24.51		[+ 1.03]		
1875 Jan. 15		−0.73		+235.18		+ 10.84	+ 30.44
			−25.24		+236.21		
Feb. 24				+209.94		+247.05	+264.53

	f^{III}	f^{II}	f^{I}	f	${}^{I}f$	${}^{II}f$	$S_{(z)}$
1874 Oct. 27				− 10.01		− 10.05	− 10.88
			+ 0.31		+ 9.67		
Dec. 6		+0.38		− 9.70		[− 0.38]	− 1.19
	−0.19		+ 0.69		[− 0.03]		
1875 Jan. 15		+0.19		− 9.01		− 0.41	− 1.16
			+ 0.88		− 9.04		
Feb. 24				− 8.13		− 9.45	− 10.13

Ich habe die Anfangsconstanten, um ihre Stellung und ihren Werth besonders hervortreten zu lassen, in dem voranstehenden Schema in eckige Klammern eingeschlossen. Nunmehr rechnet man die Werthe (vergl. II pag. 79):

$$\left.\begin{aligned} S_{(x)} &= f_{(x)}(a+iw) + \tfrac{1}{12}\Sigma X - \tfrac{1}{240} f^{II}_{(x)}(a+iw) \\ S_{(y)} &= f_{(y)}(a+iw) + \tfrac{1}{12}\Sigma Y - \tfrac{1}{240} f^{II}_{(y)}(a+iw) \\ S_{(z)} &= f_{(z)}(a+iw) + \tfrac{1}{12}\Sigma Z - \tfrac{1}{240} f^{II}_{(z)}(a+iw) \end{aligned}\right\} \quad \text{V}$$

welche Werthe ich rechts neben die doppelt summirten Werthe oben angesetzt habe, und deren Logarithmen auf dem Blatte *A* Aufnahme finden könnten; um aber die Rechnung möglichst scharf zu gestalten, werden mit diesen Werthen die indirecten Glieder auf dem Nebenblatte nur provisorisch berechnet und nachher die damit verbesserten Werthe erst in das eigentliche Rechnungsschema eingetragen. Nun sind die Formeln (15) und (16) (pag. 79, 80) heranzuziehen, dieselben lauten:

$$
\left.\begin{aligned}
a &= \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{R^2} \\
b &= \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{R^2} \\
c &= \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{R^2} \\
q &= \frac{a\,S_{(x)} + b\,S_{(y)} + c\,S_{(z)}}{1 + \frac{1}{2} h_0 f (ax + by + cz)}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{VI)}
$$

wobei jetzt noch die Grössen ξ, η, ζ der Null gleich gesetzt und die Grössen x, y, z mit x_0, y_0, z_0 identificirt sind. Als Argument für die Ermittelung des Werthes von f kann in dieser ersten Annäherung hinreichend genau:

$$q = a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}$$

genommen werden. Nunmehr erhält man:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma(X) + h'(fqx - S_{(x)}) \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma(Y) + h'(fqy - S_{(y)}) \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Sigma(Z) + h'(fqz - S_{(z)})
\end{aligned}\right\} \qquad \text{VII)}
$$

wobei wieder x, y, z mit x_0, y_0, z_0 identificirt sind. Die Rechnung auf dem Nebenblatte, die ohne Nachtheil vierstellig geführt werden könnte, gestaltet sich demnach unter Zuziehung der auf den Blättern A und B erhaltenen Werthe folgendermassen:

	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27.
$\log x = \log(x_0 + \frac{1}{2}\xi) = \log x_0 =$	$0_n400715$	$0_n438994$	$0_n470322$	$0_n495641$
$\log y = \log(y_0 + \frac{1}{2}\eta) = \log y_0 =$	$0_n424995$	$0_n385696$	$0_n337869$	$0_n279301$
$\log z = \log(z_0 + \frac{1}{2}\zeta) = \log z_0 =$	9.141641	$9_n148099$	$9_n150349$	9.147436
$\log a$	$9_n272327$	$9_n309028$	$9_n340218$	$9_n366839$
$\log b$	$9_n296607$	$9_n255730$	$9_n207765$	$9_n150589$
$\log c$	8.013253	8.018133	8.020245	8.019634
$\log S_{(x)}$	$2_n818450$	$1_n878579$	$1_n892985$	$1_n861612$
$\log S_{(y)}$	2.422475	1.483445	1.497759	2.465323
$\log S_{(z)}$	$1_n005609$	$0_n064458$	$0_n045547$	$1_n036629$
$a \cdot S_{(x)}$	+ 123.25	+ 15.40	+ 17.11	+169.22
$b \cdot S_{(y)}$	− 52.37	− 5.48	− 5.08	− 41.30
$c \cdot S_{(z)}$	− 0.10	− 0.01	− 0.01	− 0.11
Zähler	+ 70.78	+ 9.91	+ 12.02	+127.81
$a \cdot x$	+0.471023	+0.559786	+0.646457	+0.748585
$b \cdot y$	+0.526747	+0.437951	+0.351264	+0.269141
$c \cdot z$	+0.001429	+0.001466	+0.001481	+0.001473
W	+0.999199	+0.999203	+0.999202	+0.999199

	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27
log W	9.999652	9.999653	9.999653	9.999652
$\frac{1}{2}h$	6.904042	6.901672	6.901465	6.903465
f	0.477113	0.477120	0.477120	0.477107
log $(1-N)$	7.380807	7.378445	7.378238	7.380181
log N	9.998955	9.998961	9.998961	9.998957
log Zähler	1.849911	0.996074	1.079904	2.106565
log q	1.850956	0.997113	1.080943	2.107608
log fq	2.308069	1.474233	1.558063	2.584715
fqx	2.728784	$1_n913227$	2.128385	$3_n080356$
fqy	$2_n753064$	$1_n859929$	$1_n805932$	$2_n864106$
fqz	1.469710	0.622332	0.708308	$1_n733151$
Add. oder Subtrts. log:	9.360447	8.919337	0.563293	9.816105
	0.166460	0.152368	0.146062	0.145887
	0.128231	0.106114	0.090942	0.079590
$fqx-S_{(x)}$	2.089231	$0_n797916$	$1_n450278$	$2_n677717$
$fqy-S_{(y)}$	$2_n919524$	$2_n012297$	$2_n041994$	$3_n009994$
$fqz-S_{(z)}$	1.597941	0.728446	0.799250	1.812741
h'	7.982875	7.980507	7.980300	7.982254
$\Delta\Sigma(X)$	+ 1.18	— 0.06	— 0.27	— 4.57
$\Delta\Sigma(Y)$	— 7.99	— 0.98	— 1.05	— 9.82
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 0.38	+ 0.05	+ 0.06	— 0.06

Vereinigt man diese indirecten Glieder $\Delta\Sigma(X)$, $\Delta\Sigma(Y)$, $\Delta\Sigma(Z)$ mit den directen, so erhält man neue Werthe für die Differentialquotienten, die sich so wenig von der Wahrheit entfernen, dass man dieselben der definitiven Störungsrechnung zu Grunde legen kann. Man erhält so, wenn man neuerdings die Anfangsconstanten bestimmt, für die letzte auf einem Nebenblatte auszuführende Operation:

	f^{III}	f^{II}	f^{I}	f	${}^{I}f$	${}^{II}f$	$S_{(x)}$
1874 Oct. 27				— 715.56		— 668.16	— 727.30
			+ 69.18		+ 643.83		
» Dec. 6		— 7.78		— 646.38		— 24.33	— 78.14
	+ 4.49		+ 61.40		— 2.55		
1875 Jan. 15		— 3.29		— 584.98		— 26.88	— 75.62
			+ 58.11		— 587.53		
» Febr. 24				— 526.87		— 614.41	— 658.42

	f'''	f''	f'	f	$'f$	$''f$	$S_{(y)}$
1874 Oct. 27				+ 271.82		+ 267.45	+ 290.98
			13.18		− 257.64		
» Dec. 6		− 11.26		+ 258.64		+ 9.84	+ 31.53
	+ 3.45		− 24.44		+ 1.03		
1875 Jan. 15		− 7.81		+ 234.20		+ 10.78	+ 30.40
			− 32.25		+ 235.23		
» Febr. 24				+ 201.95		+ 246.10	+ 263.59

	f'''	f''	f'	f	$'f$	$''f$	$S_{(z)}$
1874 Oct. 27				− 9.39		− 9.99	− 10.82
			− 0.25		+ 9.61		
» Dec. 6		+ 0.93		− 9.64		− 0.38	− 1.19
	− 0.40		+ 0.68		− 0.03		
1875 Jan. 18		+ 0.53		− 8.96		− 0.41	− 1.16
			+ 1.21		− 8.99		
» Febr. 24				− 7.75		− 9.40	− 10.08

Nun beginnt die definitive Rechnung nach den Formeln VI, da die aus III resultirenden Werthe der directen Glieder für diese ersten vier Störungsintervalle keiner Verbesserung bedürfen, indem die Störungen rücksichtlich dieser Glieder nahezu unmerklich sind. Die für diese vier Orte in den Tafeln *A*, *B*, *X*, *Y*, *Z*, enthaltenen Grössen werden daher ohne weitere Erklärung verständlich sein und ich will demnach nur noch zeigen, wie die Rechnung für den nächsten Ort, Sept. 17 durchgeführt werden muss.

Vorerst geben die Tafeln *X*, *Y*, *Z* für Sept. 17 die doppelt summirten Werthe:

$$-2027.57 \qquad +790.88 \qquad -28.99\,;$$

nach dem Gange der Funktion wird man für die am 17. Septbr. zu erwartenden Funktionswerthe:

$$-798\,, \qquad +271 \qquad -8$$

in Einheiten der siebenten Stelle annehmen können und nun mittelst der Formeln:

$$\xi = {}''f_{(x)}(a+iw) + \tfrac{1}{12} f_{(x)}(a+iw)$$

$$\eta = {}''f_{(y)}(a+iw) + \tfrac{1}{12} f_{(y)}(a+iw)$$

$$\zeta = {}''f_{(z)}(a+iw) + \tfrac{1}{12} f_{(z)}(a+iw)$$

hinreichend genäherte Werthe für ξ, η, ζ erhalten, welche, auf die fünfte Decimale abgekürzt, an der entsprechenden Stelle in dem Bogen *A* eingetragen werden. Dieselben werden sein:

$$-21\,, \qquad +8\,, \qquad 0\,,$$

und man sieht sofort, dass selbst ganz rohe Annahmen über die Funktionswerthe $f_{(x)}(a+iw)$, $f_{(y)}(a+iw)$, $f_{(z)}(a+iw)$ mehr als genügend genaue Annäherungen für ξ, η, ζ ergeben werden.

Man gelangt jetzt nach Durchführung der Rechnung mittelst der Formeln III) (pag. 108) zu den definitiven Werthen für $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(Z)$, und bildet nun nach V (pag. 109) die Werthe $S_{(x)}$, $S_{(y)}$, $S_{(z)}$, die bis auf die geringfügigen, anfänglich ganz unerheblichen, durch $-\frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+iw)$ veranlassten, Correctionen direct berechnet werden können; man kann diese Correctionen in der Nähe der Osculationsepoche ganz übergehen, später wird man dieselben, da durch die Berechnung mehrer Werthe der Gang der Funktion nahezu bekannt ist, leicht mit hinreichender Genauigkeit berücksichtigen können; doch werden diese Correctionsglieder, die übrigens Encke ganz übergeht, selten sehr merkbar werden.

Die so resultirenden Werthe für $S_{(x)}$, $S_{(y)}$, $S_{(z)}$ sind in den Summationsbögen rechts angesetzt und ohne weitere Aenderung der definitiven Rechnung zu Grunde gelegt. Dabei mag bemerkt werden, dass diese Werthe $S_{(x)}$, $S_{(y)}$, $S_{(z)}$ gegen die sich aus den thatsächlichen Differenzwerthen ergebenden etwas verschieden sein können, da bei deren Bildung eben die zweiten Differenzen bloss näherungsweise berücksichtigt werden konnten.

Die Rechnung gestaltet sich nunmehr ganz direct, und nur für die Ermittelung von f wird man einen vorläufigen Werth von q annehmen müssen. Der Gang der äusserst regelmässig verlaufenden Funktion $\log N$ (Logarithmus des Nenners) wird in Verbindung mit dem völlig bekannten Werthe des Zählers für q stets ohne Mühe eine hinreichende Annäherung ergeben, um f gleichsam als directen Werth betrachten zu können. Zu bemerken ist, dass der Werth von q hierbei in Einheiten der siebenten Stelle gegeben erscheint nach den oben gemachten Voraussetzungen.

In dieser Weise wird die Rechnung fortgeführt, und ich habe in dem unten folgenden Rechnungsbeispiele alle Zahlen der Rechnung innerhalb des ganzen Verlaufes derselben aufgenommen, so dass für den Anfänger ein hinreichend ausführliches Normalbeispiel vorliegt, nach welchem er sich in die Methode einführen kann, bevor an eine selbstständige Rechnung geschritten wird. Bei der Bezeichnung der Horizontalcolumne ist im Allgemeinen kein Unterschied gemacht, ob die Funktion selbst oder deren Logarithmus Aufnahme gefunden hat, da hieraus wohl kein Irrthum zu befürchten ist. Zu den angesetzten Additions- und Subtractionslogarithmen wäre zu bemerken, dass dieselben den zweckmässigen sechsstelligen Tafeln von Bremiker entlehnt sind.

Die Vermeidung zufälliger Rechnungsfehler erscheint durch den regelmässigen Gang der Differenzen bestätigt, und diese Prüfung muss stets sorgsam durchgeführt werden. Hierbei werden grosse Fehler im Allgemeinen sofort erkannt und korrigirt werden können, kleine Fehler werden sich meist erst bemerkbar machen, wenn die Rechnung um einige Intervalle weiter fortgeschritten ist. Tritt die Nothwendigkeit einer Verbesserung ein, so wird im Allgemeinen, so lange der Fehler nicht allzu erheblich ist, die Neurechnung der directen Glieder selten nöthig werden; die indirecten Glieder dagegen müssen von der Fehlerstelle an wohl stets neu gerechnet werden, wenn man das Resultat nicht allzusehr schädigen will. Dieser Umstand macht die

Störungsrechnung für den Anfänger, der noch nicht die hinreichende Sicherheit im numerischen Rechnen erlangt hat, sehr beschwerlich, ein Uebelstand, der bei der Störungsrechnung nach der Variation der Constanten fast ganz vermieden wird. Es ist deshalb, falls nicht andere Umstände massgebend sind, für eine erste Störungsrechnung die Methode der Variation der Constanten zu wählen und die Berechnung der Störungen der Coordinaten erst dann vorzunehmen, wenn man eine hinreichende Sicherheit in den logarithmischen Rechnungsoperationen erlangt hat.

Ich stelle hier zum Schlusse die zur Rechnung nöthigen Formeln übersichtlich ohne weitere Erklärung zusammen, da eine solche Zusammenstellung bei der Rechnung als Gedächtnisshilfe nicht ganz ohne Werth ist:

I.

$$\sin \varphi = e$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin 1''} = e''$$

$$\sin a \sin A = \cos \Omega \qquad \sin b \sin B = \sin \Omega \qquad C = 0$$

$$\sin a \cos A = -\sin \Omega \cos i \qquad \sin b \cos B = \cos \Omega \cos i \qquad \sin c = \sin i$$

$$\omega = \pi - \Omega\,, \qquad A' = A + \omega$$

$$B' = B + \omega$$

$$C' = C + \omega = \omega\,.$$

II.

$$M = M_0 + \mu t$$

$$M = E - e'' \sin E$$

$$r_0 \sin v_0 = a \cos \varphi \sin E$$

$$r_0 \cos v_0 = a\,(\cos E - e)$$

$$x_0 = r_0 \sin a \sin (A' + v_0)$$

$$y_0 = r_0 \sin b \sin (B' + v_0)$$

$$z_0 = r_0 \sin c \sin (C' + v_0)$$

$$h = \frac{w k^2}{r_0^3}\,. \quad \log w k^2 = 9.675283 \quad \text{Intervall 40 Tage}$$

$$R^2 = r_0^2 \left(1 + \tfrac{1}{12} h\right)$$

$$h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h}\,.$$

III.

$$\xi = {}^{II}f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(x)}(a + iw) - \ldots$$

$$\eta = {}^{II}f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(y)}(a + iw) - \ldots$$

$$\zeta = {}^{II}f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(z)}(a + iw) - \ldots$$

$$x = x_0 + \xi$$
$$y = y_0 + \eta$$
$$z = z_0 + \zeta$$

$$\varrho \cos \vartheta \cos \theta = x_1 - x$$
$$\varrho \cos \vartheta \sin \theta = y_1 - y$$
$$\varrho \sin \vartheta = z_1 - z$$

$$X_1 = (wk)^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\varrho^3}$$
$$Y_1 = (wk)^2 m_1 \frac{y_1 - y}{\varrho^3}$$
$$Z_1 = (wk)^2 m_1 \frac{z_1 - z}{\varrho^3}$$

Ueber die Werthe von $(wk)^2 m_1$ siehe Tafel XII.

$$X = X_1 + X_2$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$
$$Z = Z_1 + Z_2$$

X_2, Y_2, Z_2 aus den Ephemeriden oder den Publicationen der astronomischen Gesellschaft zu entnehmen, oder zu berechnen nach:

$$X_2 = (wk)^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3}$$
$$Y_2 = (wk)^2 m_1 \frac{y_1}{r_1^3}$$
$$Z_2 = (wk)^2 m_1 \frac{z_1}{r_1^3}\ .$$

$$\Sigma X = (X)_{♃} + (X)_{♄} + \dots$$
$$\Sigma Y = (Y)_{♃} + (Y)_{♄} + \dots$$
$$\Sigma Z = (Z)_{♃} + (Z)_{♄} + \dots$$

IV.

$$S_{(x)} = {}^{\text{II}}f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma X - \frac{1}{240} f^{\text{II}}_{(x)}(a + iw)$$
$$S_{(y)} = {}^{\text{II}}f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma Y - \frac{1}{240} f^{\text{II}}_{(y)}(a + iw)$$
$$S_{(z)} = {}^{\text{II}}f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma Z - \frac{1}{240} f^{\text{II}}_{(z)}(a + iw)$$

$$a = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{R^2}$$
$$b = \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{R^2}$$
$$c = \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{R^2}$$

$$q = \frac{a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}}{1 - \frac{h}{12} f(ax + by + cz)}$$

f mit dem Argumente q aus Tafel XI.

V.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = f_{(x)}(a+iw) = \Sigma(X) + h'\{fqx - S_{(x)}\}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = f_{(y)}(a+iw) = \Sigma(Y) + h'\{fqy - S_{(y)}\}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = f_{(z)}(a+iw) = \Sigma(Z) + h'\{fqz - S_{(z)}\} \; .$$

Für die Anfangsconstanten der Integration hat man:

$${}^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) - \ldots$$

$${}^{\mathrm{II}}f(a-w) = +\frac{1}{24}f(a) - \frac{17}{5760}\left\{2f^{\mathrm{II}}(a) + f^{\mathrm{II}}(a-w)\right\} + \ldots$$

Ausführliches Beispiel

zu

Encke's Methode

der

Störungsrechnung.

A_1

Datum	1875 Febr. 24	Jan. 15	1874 Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20	April 10
M	191°21'42"7	184°14'26"8	177° 7'11"0	169°59'55"1	162°52'39"3	155°45'23"4	148°38' 7"6	141°30'51"7	134°23'35"9
E	189°41'21"8	183°36'51"7	177°32'43"1	171°28'19"9	165°23' 5"7	159°16'23"9	153° 7'37"5	146°56' 8"7	140°41'19"3
$\sin E$	9$_n$226102	8$_n$799621	8.631742	9.171110	9.401959	9.548894	9.655151	9.736858	9.801770
$\cos E$	9$_n$993760	9$_n$999136	9$_n$999601	9$_n$995172	9$_n$985715	9$_n$970941	9$_n$950370	9$_n$923275	9$_n$888581
Subtract.	0.070386	0.069586	0.069518	0.070175	0.071599	0.073877	0.077160	0.081688	0.087837
$\cos E - e$	0$_n$064146	0$_n$068722	0$_n$069119	0$_n$065347	0$_n$057314	0$_n$044818	0$_n$027530	0$_n$004963	9$_n$976418
$r_0 \sin v_0$	9$_n$714949	9$_n$288468	9.120589	9.659957	9.890806	0.037741	0.143998	0.225705	0.290617
sin / cos	9$_n$995605	9$_n$999391	9$_n$999719	9$_n$996599	9$_n$989938	9$_n$979535	9$_n$965060	9$_n$946025	9$_n$921733
$r_0 \cos v_0$	0$_n$559625	0$_n$564201	0$_n$564598	0$_n$560826	0$_n$552793	0$_n$540297	0$_n$523009	0$_n$500442	0$_n$471897
v_0	188°8'16"5	183°2' 1"6	177°56'23"0	172°50'19"8	167°42'50"8	162°32'54"0	157°19'25"9	152° 1'21"0	146°37'30"4
Δv_0	−5°6'14"9	5°5'38"6	−5° 6' 3"2	−5° 7'29"0	−5° 9'56"8	−5°13'28"1	−5°18' 4"9	−5°23'50"6	−5°30'47"1
r_0	0.564020	0.564810	0.564879	0.564227	0.562855	0.560762	0.557949	0.554417	0.550164
$A + v_0$	316°36'47"1	311°30'32"2	306°24'53"6	301°18'50"4	296°11'21"4	291° 1'24"6	285°47'56"5	280°29'51"6	275° 6' 1"0
$B + v_0$	226°34'22"0	221°28' 7"1	216°22'28"5	211°16'25"3	206° 8'56"3	200°58'59"5	195°45'31"4	190°27'26"5	185° 3'35"9
$C + v_0$	100°52'54"7	95°46'39"8	90°41' 1"2	85°34'58"0	80°27'29"0	75°17'32"2	70° 4' 4"1	64°45'59"2	59°22' 8"6
$r_0 \sin a$	0.563808	0.564598	0.564667	0.564015	0.562643	0.560550	0.557737	0.554205	0.549952
$\sin (A+v_0)$	9$_n$836907	9$_n$874396	9$_n$905655	9$_n$931626	9$_n$952958	9$_n$970083	9$_n$983275	9$_n$992669	9$_n$998277
x_0	−2.51602	−2.74786	−2.95340	−3.13070	−3.27794	−3.39338	−3.47546	−3.52268	−3.53369
$\frac{1}{2}\xi$	0	0	0	0	− 10	− 21	− 36	− 57	− 83
ξ	0	0	0	0	− 21	− 43	− 73	− 114	− 167
x	−2.51602	−2.74786	−2.95340	−3.13070	−3.27815	−3.39381	−3.47619	−3.52382	−3.53536
x_1 𝔄	−5.02505	−5.13125	−5.22245	−5.29843	−5.35895	−5.40385	−5.43298	−5.44621	−5.44350
x_1 𝔟	+7.2581	+7.1169	+6.9723	+6.8243	+6.6730	+6.5185	+6.3608	+6.2000	+6.0363
$r_0 \sin b$	0.563910	0.564700	0.564769	0.564117	0.562745	0.560652	0.557839	0.554307	0.550054
$\sin (B+v_0)$	9$_n$861085	9$_n$820996	9$_n$773100	9$_n$715274	9$_n$644149	9$_n$553997	9$_n$433908	9$_n$258886	8$_n$945461
y_0	−2.66069	−2.43050	−2.17705	−1.90279	−1.61025	−1.30211	−0.98118	−0.65042	−0.31298
$\frac{1}{2}\eta$	0	0	0	0	+ 4	+ 8	+ 13	+ 20	+ 27
η	0	0	0	0	+ 8	+ 16	+ 27	+ 40	+ 54
y	−2.66069	−2.43050	−2.17705	−1.90279	−1.61017	−1.30195	−0.98091	−0.65002	−0.31244
y_1 𝔄	−2.11212	−1.84491	−1.57230	1.29512	−1.01418	−0.73026	−0.44421	−0.15686	+0.13095
y_1 𝔟	−6.7091	6.8709	7.0294	−7.1844	−7.3359	−7.4839	−7.6282	−7.7688	−7.9056
$r_0 \sin c$	9.149521	9.150311	9.150380	9.149728	9.148356	9.146263	9.143450	9.139918	9.135665
$\sin (C+v_0)$	9.992120	9.997788	9.999969	9.998708	9.993950	9.985531	9.973172	9.956446	9.934734
z_0	+0.13856	+0.14064	+0.14137	+0.14075	+0.13877	+0.13545	+0.13080	+0.12484	+0.11760
$\frac{1}{2}\zeta$	0	0	0	0	0	0	0	− 1	− 1
ζ	0	0	0	0	0	− 1	− 1	− 1	− 1
z	+0.13856	+0.14064	+0.14137	+0.14075	+0.13877	+0.13544	+0.13079	+0.12483	+0.11759
z_1 𝔄	+0.12116	+0.12260	+0.12367	+0.12439	+0.12475	+0.12474	+0.12437	+0.12362	+0.12253
z_1 𝔟	−0.1794	−0.1710	−0.1626	0.1541	−0.1455	−0.1368	−0.1280	−0.1192	−0.1104
r_0^3	1.692060	1.694430	1.694637	1.692681	1.688565	1.682286	1.673847	1.663251	1.650492
h	7.983223	7.980853	7.980646	7.982602	7.986718	7.992997	8.001436	8.012032	8.024791
$1 + \frac{1}{12} h$	0.000348	0.000346	0.000346	0.000348	0.000351	0.000356	0.000363	0.000371	0.000383
r_0^2	1.128040	1.129620	1.129758	1.128454	1.125710	1.121524	1.115898	1.108834	1.100328
R^2	1.128388	1.129966	1.130104	1.128802	1.126061	1.121880	1.116261	1.109205	1.100711
$x_0 + \frac{1}{2}\xi$	0$_n$400715	0$_n$438994	0$_n$470322	0$_n$495641	0$_n$515614	0$_n$530660	0$_n$541057	0$_n$546943	0$_n$548330
$y_0 + \frac{1}{2}\eta$	0$_n$424995	0$_n$385696	0$_n$337869	0$_n$279391	0$_n$206883	0$_n$114621	9$_n$991691	9$_n$813060	9$_n$495142
$z_0 + \frac{1}{2}\zeta$	9.141641	9.148099	9.150349	9.148436	9.142296	9.131779	9.116608	9.096319	9.070370
x	0$_n$400715	0$_n$438994	0$_n$470322	0$_n$495641	0$_n$515628	0$_n$530687	0$_n$541104	0$_n$547014	0$_n$548434
y	0$_n$424995	0$_n$385696	0$_n$337869	0$_n$279391	0$_n$206872	0$_n$114594	9$_n$991629	9$_n$812927	9$_n$494767
z	9.141641	9.148099	9.150349	9.148436	9.142296	9.131747	9.116575	9.096319	9.070370
a	9$_n$272327	9$_n$309028	9$_n$340218	9$_n$366839	9$_n$389553	9$_n$408780	9$_n$424796	9$_n$437738	9$_n$447619
b	9$_n$296607	9$_n$255730	9$_n$207765	9$_n$150580	9$_n$080822	8$_n$992741	8$_n$875430	8$_n$703855	8$_n$394431
c	8.013253	8.018133	8.020245	8.019634	8.016235	8.009899	8.000347	7.987114	7.969659
$S_{(x)}$	2$_n$818503	1$_n$878637	1$_n$892873	2$_n$861749	3$_n$320639	3$_n$628891	3$_n$864148	4$_n$056488	4$_n$220722
$S_{(y)}$	2.420929	1.482874	1.498724	2.463863	2.914798	3.210457	3.428299	3.598452	3.736151
$S_{(z)}$	1$_n$003461	0$_n$064458	0$_n$075547	1$_n$034227	1$_n$474362	1$_n$752356	1$_n$943148	2$_n$072140	2$_n$146283
fqx	2$_n$730009	1$_n$913665	2$_n$027662	3$_n$081001	3$_n$610527	3$_n$977436	4$_n$260418	4$_n$490133	4$_n$681651
fqy	2$_n$754289	1$_n$860367	1$_n$805209	2$_n$864751	3$_n$301771	3$_n$561343	3$_n$710943	3$_n$756046	3$_n$627984
fqz	1.470935	0.622770	0.707689	1.733796	2.237195	2.578496	2.835889	3.039438	3.203587
Subtract.	9.354128	8.924262	9.561007	9.817387	9.977422	0.090340	0.173305	9.800422	9.815580
	0.165580	0.152069	0.146544	0.145287	0.149290	0.160100	0.182307	0.229342	0.250306
	0.127371	0.106019	0.091058	0.079081	0.069168	0.060408	0.052314	0.044469	0.036485
$fqx - S_{(x)}$	2.084137	0$_n$802899	1$_n$453880	2$_n$679136	3$_n$298061	3$_n$719231	4$_n$037453	4$_n$290555	4$_n$497231
$fqy - S_{(y)}$	2$_n$919869	2$_n$012436	2$_n$041753	3$_n$010038	3$_n$451061	3$_n$721443	3$_n$893250	3$_n$985388	3$_n$986457
$fqz - S_{(z)}$	1.598306	0.728789	0.798747	1.812877	2.306363	2.638904	2.888203	3.083907	3.240072
h'	7.982875	7.980507	7.980300	7.982254	7.986367	7.992641	8.001073	8.011661	8.024408

A_2

1874		1873						
März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
127°16'20"0	120° 9' 4"2	113° 1'48"4	105°54'32"5	98°47'16"7	91°40' 0"8	84°32'45"0	77°25'29"1	70°18'13"3
134°22'29"8	127°59' 0"1	121°30' 9"1	114°55'14"7	108°13'34"9	101°24'27"1	94°27'10"1	87°21' 3"9	80° 5'32"8
9.854171	9.896631	9.930754	9.957555	9.977645	9.991334	9.998687	9.999535	9.993474
$9_n844696$	$9_n789180$	$9_n718116$	$9_n624658$	$9_n495227$	$9_n296196$	$8_n890074$	8.664791	9.235677
0.096211	0.107822	0.124474	0.149711	0.191591	0.273434	0.160665	9.865413	7.902250
$9_n940907$	$9_n897002$	$9_n842590$	$9_n774369$	$9_n686818$	$9_n569630$	$9_n399796$	$9_n104544$	$7_n137927$
0.343018	0.385478	0.419601	0.446402	0.466492	0.480181	0.487534	0.488382	0.482321
$9_n891189$	$9_n852958$	9.886447	9.920292	9.948072	9.970055	9.986247	9.996399	0.000000
$0_n436386$	$0_n392481$	$0_n338069$	$0_n269848$	$0_n182297$	$0_n065109$	$9_n895275$	$9_n600023$	$7_n633406$
141° 6'43"3	135°27'42"9	129°39'11"2	123°39'42"8	117°27'49"4	111° 1'59"4	104°20'36"7	97°22' 5"5	90° 4'52"1
—5°39' 0"4	—5°48'31"7	—5°59'28"4	—6°11'53"4	—6°25'50"0	—6°41'22"7	—6°58'31"2	—7°17'13"4	—7°37'22"8
0.545197	0.539523	0.533154	0.526110	0.518420	0.510126	0.501287	0.491983	0.482321
269°35'13"9	263°56'13"5	258° 7'41"8	252° 8'13"4	245°56'20"0	239°30'30"0	232°49' 7"3	225°50'36"1	218°33'22"7
179°32'48"8	173°53'48"4	168° 5'16"7	162° 5'48"3	155°53'54"9	149°28' 4"9	142°46'42"2	135°48'11"0	128°30'57"6
53°51'21"5	48°12'21"1	42°23'49"4	36°24'21"0	30°12'27"6	23°46'37"6	17° 5'14"9	10° 6'43"7	2°49'30"3
0.544985	0.539311	0.532942	0.525898	0.518208	0.509914	0.501075	0.491771	0.482109
$9_n999989$	$9_n997564$	$9_n990610$	$9_n978542$	$9_n960524$	$9_n935358$	$9_n901310$	$9_n855784$	$9_n794685$
—3.50731	—3.44251	—3.33851	—3.19477	—3.01115	—2.78787	—2.52572	—2.22615	—1.89145
— 116	— 157	— 206	— 265	— 334	— 415	— 509	— 615	— 733
— 232	— 313	— 411	— 529	— 668	— 831	— 1018	— 1231	— 1466
—3.50963	—3.44564	—3.34262	—3.20006	—3.01783	—2.79618	—2.53590	—2.23846	—1.90611
—5.42482	—5.39020	—5.33967	—5.27339	—5.19148	—5.09412	—4.98153	—4.85396	—4.71173
+5.8697	+5.7003	+5.5281	+5.3533	+5.1760	+4.9962	+4.8140	+4.6296	+4.4430
0.545087	0.539413	0.533044	0.526000	0.518310	0.510016	0.501177	0.491873	0.482211
7.898077	9.026615	9.314730	9.487719	9.611036	9.705880	9.781683	9.843312	9.893448
+0.02774	+0.36815	+0.70433	+1.03209	+1.34693	+1.64398	+1.91805	+2.16364	+2.37497
+ 35	+ 44	+ 55	+ 66	+ 81	+ 100	+ 127	+ 164	+ 218
+ 71	+ 89	+ 109	+ 132	+ 161	+ 200	+ 253	+ 328	+ 435
+0.02845	+0.36904	+0.70542	+1.03341	+1.34854	+1.64598	+1.92058	+2.16692	+2.37932
+0.41836	+0.70454	+0.98865	+1.26983	+1.54726	+1.82008	+2.08746	+2.34857	+2.60259
—8.0387	—8.1679	—8.2932	—8.4145	—8.5317	—8.6448	—8.7539	—8.8588	—8.9596
9.130698	9.125024	9.118655	9.111611	9.103921	9.095627	9.086788	9.077484	9.067822
9.907162	9.872473	9.828831	9.773421	9.701685	9.605498	9.468098	9.244464	8.692733
+0.10911	+0.09943	+0.08861	+0.07674	+0.06392	+0.05025	+0.03588	+0.02099	+0.00576
— 1	— 1	0	0	+ 1	+ 2	+ 4	+ 6	+ 8
— 1	— 1	— 1	+ 1	+ 2	+ 5	+ 8	+ 12	+ 16
+0.10910	+0.09942	+0.08860	+0.07675	+0.06394	+0.05030	+0.03596	+0.02111	+0.00592
+0.12107	+0.11926	+0.11709	+0.11458	+0.11173	+0.10855	+0.10504	+0.10122	+0.09709
—0.1015	—0.0925	—0.0835	—0.0745	—0.0654	—0.0562	—0.0471	—0.0379	—0.0288
1.635591	1.618569	1.599462	1.578330	1.555260	1.530378	1.503861	1.475949	1.446963
8.039692	8.056714	8.075821	8.096953	8.120023	8.144905	8.171422	8.199334	8.228320
0.000396	0.000413	0.000431	0.000452	0.000477	0.000505	0.000537	0.000572	0.000612
1.090394	1.079046	1.066308	1.052220	1.036840	1.020252	1.002574	0.983966	0.964642
1.090790	1.079459	1.066739	1.052672	1.037317	1.020757	1.003111	0.984538	0.965254
$0_n545117$	$0_n537073$	$0_n523820$	$0_n504800$	$0_n479214$	$0_n445918$	$0_n403260$	$0_n348753$	$0_n278474$
8.448552	9.566544	9.848115	0.013995	0.129606	0.216161	0.283147	0.335514	0.376056
9.037825	8.997474	8.947483	8.885022	8.805705	8.701309	8.555336	8.323252	7.766413
$0_n545262$	$0_n537270$	$0_n524087$	$0_n505158$	$0_n479694$	$0_n446565$	$0_n404132$	$0_n349949$	$0_n280148$
8.454082	9.567073	9.848448	0.014272	0.129864	0.216425	0.283432	0.335843	0.376453
9.037825	8.997474	8.947434	8.885078	8.805773	8.701568	8.555820	8.324488	7.772322
$9_n454327$	$9_n457614$	$9_n457081$	$9_n452128$	$9_n441897$	$9_n425161$	$9_n400149$	$9_n364215$	$9_n313220$
7.357762	8.487085	8.781376	8.961323	9.092289	9.195404	9.280036	9.350976	9.410802
7.947035	7.918015	7.880744	7.832350	7.768388	7.680552	7.552225	7.338714	6.801159
$4_n365191$	$4_n494992$	$4_n613409$	$4_n722629$	$4_n824110$	$4_n918803$	$5_n007251$	$5_n089655$	$5_n165912$
3.850733	3.949089	4.037138	4.120871	4.206096	4.297992	4.400016	4.513015	4.635212
$2_n158543$	$2_n075218$	$1_n722305$	1.816771	2.389184	2.690391	2.902949	3.065893	3.193753
$4_n843350$	$4_n980209$	$5_n095282$	$5_n190395$	$5_n266498$	$5_n323777$	$5_n361585$	$5_n378176$	$5_n370128$
2.752170	4.010012	4.419643	4.699509	4.916668	5.093637	5.240885	5.364070	5.466433
3.335913	3.440413	3.518629	3.570315	3.592577	3.578780	3.513273	3.352715	2.862302
9.824426	9.827900	9.826265	9.819154	9.805441	9.782778	0.100775	9.974610	9.778408
9.963931	9.177815	0.150053	9.866965	9.905942	9.924235	9.932345	9.934038	9.930697
0.027949	0.018340	0.006887	9.992272	9.971923	9.939866	9.877782	9.971104	0.058850
$4_n667776$	$4_n808109$	$4_n921547$	$5_n009549$	$5_n071939$	$5_n106555$	$5_n108026$	$5_n064265$	$4_n944320$
$3_n814664$	3.126904	4.187191	4.566474	4.822610	5.017872	5.173230	5.298108	5.397130
3.363862	3.458753	3.525516	3.562587	3.564500	3.518646	3.391055	3.036997	$2_n921152$
8.039296	8.056301	8.075390	8.096501	8.119546	8.144400	8.170885	8.198762	8.227708

A_3

Datum	1873 März 6	1873 Jan. 25	1872 Dec. 16	1872 Nov. 6	1872 Sept. 27	1872 Aug. 18	1872 Juli 9	1872 Mai 30
M	63°10′57″5	56°3′41″7	48°56′25″8	41°49′10″0	34°41′54″1	27°34′38″3	20°27′22″5	13°20′ 6″6
E	72°40′ 6″2	65°4′22″3	57°18′10″1	49°21′35″1	41°15′ 1″0	32°59′15″2	24°35′29″3	16° 5′20″4
$\sin E$	9.979820	9.957533	9.925073	9.880135	9.819115	9.735964	9.619245	9.442684
$\cos E$	9.474073	9.624762	9.732554	9.813786	9.876123	9.923653	9.958707	9.982648
Subtract.	9.855931	0.155378	9.831836	9.865528	9.886108	9.899402	9.908092	9.913548
$\cos E - e$	9.095062	9.394509	9.564390	9.679314	9.762231	9.823055	9.866799	9.896196
$r_0 \sin v_0$	0.468667	0.446380	0.413920	0.368982	0.307962	0.224811	0.108092	9.931531
sin / cos	9.996227	9.983866	9.961164	9.925559	9.873160	9.891329	9.941333	9.975363
$r_0 \cos v_0$	9.590541	9.889988	0.059869	0.174793	0.257710	0.318534	0.362278	0.391675
v_0	82°27′29″3	74°28′44″1	66°7′43″9	57°24′10″2	48°18′26″9	38°51′54″2	29° 6′55″8	19°7′2″8
Δv_0	−7°58′45″2	−8°21′ 0″2	−8°43′33″7	−9° 5′43″3	−9°26′32″7	−9°44′58″4	−9°59′53″0	−10°10′14″3
r_0	0.472440	0.462514	0.452756	0.443423	0.434802	0.427205	0.420945	0.416312
$A + v_0$	210°55′59″9	202°57′14″7	194°36′14″5	185°52′40″8	176°46′57″5	167°20′24″8	157°35′26″4	147°35′33″4
$B + v_0$	120°53′34″8	112°54′49″6	104°33′49″4	95°50′15″7	86°44′32″4	77°17′59″7	67°33′ 1″3	57°33′ 8″3
$C + v_0$	355°12′ 7″5	347°13′22″3	338°52′22″1	330° 8′48″4	321° 3′ 5″1	311°36′32″4	301°51′34″0	291°51′41″0
$r_0 \sin a$	0.472228	0.462302	0.452544	0.443211	0.434590	0.426993	0.420733	0.416100
$\sin(A + v_0)$	$9_n710997$	$9_n591057$	$9_n401637$	$9_n010345$	8.749149	9.340764	9.581176	9.729113
x_0	− 1.52484	− 1.13073	− 0.71479	− 0.28416	+ 0.15266	+ 0.58581	+ 1.00440	+ 1.39705
$\frac{1}{2}\xi$	− 861	− 993	− 1125	− 1247	− 1349	− 1417	− 1438	− 1400
ξ	− 1721	− 1986	− 2250	− 2495	− 2698	− 2833	− 2875	− 2801
x	− 1.54205	− 1.15059	− 0.73729	− 0.30911	+ 0.12568	+ 0.55748	+ 0.97565	+ 1.36904
x_1 ♃	− 4.55521	− 4.38478	− 4.20088	− 4.00398	− 3.79460	− 3.57336	− 3.34086	− 3.09774
x_1 ♄	+ 4.2543	+ 4.0636	+ 3.8710	+ 3.6766	+ 3.4804	+ 3.2827	+ 3.0834	+ 2.8827
$r_0 \sin b$	0.472330	0.462404	0.452646	0.443313	0.434692	0.427095	0.420835	0.416202
$\sin(B + v_0)$	9.933552	9.964303	9.985816	9.997742	9.999297	9.989243	9.965773	9.926282
y_0	+ 2.54614	+ 2.67121	+ 2.74449	+ 2.76093	+ 2.71637	+ 2.60818	+ 2.43561	+ 2.20031
$\frac{1}{2}\eta$	+ 292	+ 393	+ 526	+ 695	+ 903	+ 1147	+ 1421	+ 1713
η	+ 584	+ 786	+ 1052	+ 1391	+ 1806	+ 2294	+ 2842	+ 3427
y	+ 2.55198	+ 2.67907	+ 2.75501	+ 2.77484	+ 2.73443	+ 2.63112	+ 2.46403	+ 2.23458
y_1 ♃	+ 2.84871	+ 3.08612	+ 3.31406	+ 3.53176	+ 3.73845	+ 3.93344	+ 4.11603	+ 4.28555
y_1 ♄	− 9.0561	− 9.1483	− 9.2362	− 9.3197	− 9.3988	− 9.4735	− 9.5438	− 9.6096
$r_0 \sin c$	9.057941	9.048015	9.038257	9.028924	9.020303	9.012706	9.006446	9.001813
$\sin(C + v_0)$	$8_n922422$	$9_n344706$	$9_n556832$	$9_n697037$	$9_n798390$	$9_n873724$	$9_n929085$	$9_n967589$
z_0	− 0.00956	− 0.02470	− 0.03936	− 0.05321	− 0.06587	− 0.07699	− 0.08620	− 0.09320
$\frac{1}{2}\zeta$	+ 10	+ 12	+ 13	+ 13	+ 12	+ 10	+ 5	− 2
ζ	+ 20	+ 23	+ 26	+ 26	+ 24	+ 19	+ 10	− 3
z	− 0.00936	− 0.02447	− 0.03910	− 0.05295	− 0.06563	− 0.07680	− 0.08610	− 0.09323
z_1 ♃	+ 0.09266	+ 0.08796	+ 0.08299	+ 0.07775	+ 0.07227	+ 0.06657	+ 0.06066	+ 0.05455
z_1 ♄	− 0.0196	− 0.0104	− 0.0012	+ 0.0080	+ 0.0172	+ 0.0264	+ 0.0356	+ 0.0447
r_0^3	1.417320	1.387542	1.358268	1.330269	1.304406	1.281615	1.262835	1.248936
h	8.257963	8.287741	8.317015	8.345014	8.370877	8.393668	8.412448	8.426347
$1 + \frac{1}{12} h$	0.000655	0.000702	0.000751	0.000801	0.000849	0.000895	0.000935	0.000964
r_0^2	0.944880	0.925028	0.905512	0.886846	0.869604	0.854410	0.841890	0.832624
R^2	0.945535	0.925730	0.906263	0.887647	0.870453	0.855305	0.842825	0.833588
$x_0 + \frac{1}{2}\xi$	$0_n185669$	$0_n057156$	$9_n860961$	$9_n472215$	9.143546	9.757123	9.995644	0.140838
$y_0 + \frac{1}{2}\eta$	0.406380	0.427346	0.439293	0.442147	0.435430	0.418243	0.389134	0.345852
$z_0 + \frac{1}{2}\zeta$	$7_n975891$	$8_n390582$	$8_n593618$	$8_n724931$	$8_n817896$	$8_n885870$	$8_n935255$	$8_n969509$
x	$0_n188098$	$0_n060920$	$9_n867638$	$9_n490113$	9.099266	9.746229	9.989294	0.136416
y	0.406878	0.427984	0.440124	0.443238	0.436867	0.420140	0.391646	0.349196
z	$7_n971276$	$8_n388634$	$8_n592177$	$8_n723866$	$8_n817102$	$8_n885361$	$8_n935003$	$8_n969556$
a	$9_n240134$	$9_n131426$	$8_n954698$	$8_n584568$	8.273093	8.901818	9.152819	9.307250
b	9.460845	9.501616	9.533030	9.554500	9.564977	9.562938	9.546309	9.512264
c	$7_n030356$	$7_n464852$	$7_n687355$	$7_n837284$	$7_n947443$	$8_n030565$	$8_n092430$	$8_n135921$
$S_{(x)}$	$5_n235631$	$5_n298155$	$5_n352555$	$5_n397634$	$5_n431897$	$5_n453508$	$5_n460182$	$5_n448977$
$S_{(y)}$	4.763068	4.892466	5.019589	5.141317	5.255262	5.359643	5.453148	5.534834
$S_{(z)}$	3.292750	3.364937	3.409299	3.421233	3.389846	3.287945	3.017680	$2_n428572$
$f q x$	$5_n330972$	$5_n247700$	$5_n088901$	$4_n735661$	4.357735	5.004650	5.232503	5.346206
$f q y$	5.549752	5.614764	5.661387	5.688786	5.695336	5.678561	5.634855	5.558986
$f q z$	$3_n114150$	$3_n575414$	$3_n813440$	$3_n969414$	$4_n075571$	$4_n143782$	$4_n178212$	$4_n179346$
Subtract. (1)	9.390037	9.090591	9.921726	9.893326	0.035150	0.132179	0.201943	0.252678
Subtract. (2)	9.922505	9.908732	9.887538	9.855225	9.804128	0.035068	9.715603	8.757300
Subtract. (3)	0.220847	0.208420	0.144366	0.108234	0.081417	0.056664	0.029018	9.992222
$f q x - S_{(x)}$	$4_n625668$	4.338291	5.010627	5.290960	5.467047	5.585687	5.662125	5.701655
$f q y - S_{(y)}$	5.472257	5.523496	5.548925	5.544011	5.499464	5.394711	5.168751	4.292134
$f q z - S_{(z)}$	$3_n513597$	$3_n783834$	$3_n957806$	$4_n077648$	$4_n156988$	$4_n200446$	$4_n207230$	$4_n171568$
h'	8.257308	8.287039	8.316264	8.344213	8.370028	8.392773	8.411513	8.425383

A$_1$

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
6°12′50″8	359°5′34″9	351°58′19″1	344°51′3″2	337°43′47″4	330°36′31″6	323°29′15″7	316°21′59″9	309°14′44″0
7°30′48″4	358°54′9″8	350°17′50″0	341°44′12″5	333°15′30″8	324°53′38″9	316°40′7″7	308°36′2″9	300°42′4″9
9.116471	$8_n282167$	$9_n226696$	$9_n496075$	$9_n653179$	$9_n759735$	$9_n836460$	$9_n892935$	$9_n934418$
9.996255	9.999920	9.993743	9.977553	9.950874	9.912801	9.861773	9.795109	9.708050
9.916488	9.917262	9.915954	9.912417	9.906225	9.896528	9.881711	9.858546	9.819749
9.912743	9.917182	9.909697	9.889970	9.857099	9.809329	9.743484	9.653655	9.527799
9.605318	$8_n771014$	$9_n715543$	$9_n984922$	$0_n142026$	$0_n248582$	$0_n325307$	$0_n381782$	$0_n423265$
9.994683	9.999887	9.991116	9.968126	9.930183	9.875783	$9_n888394$	$9_n936037$	$9_n968053$
0.408222	0.412661	0.405176	0.385449	0.352578	0.304808	0.238963	0.149134	0.023278
8°56′48″5	358°41′33″4	348°27′3″0	338°18′57″7	328°22′29″1	318°41′54″9	309°20′29″5	300°20′20″0	291°42′30″3
−10°15′15″1	−10°14′30″4	−10°8′5″3	−9°56′28″6	−9°40′34″2	−9°21′25″4	−9°0′9″5	−8°37′49″7	
0.413539	0.412774	0.414060	0.417323	0.422395	0.429025	0.436913	0.445745	0.455212
137°25′19″1	127°10′4″0	116°55′33″6	106°47′28″3	96°50′59″7	87°10′25″5	77°49′0″1	68°48′50″6	60°11′0″9
47°22′54″0	37°7′38″9	26°53′8″5	16°45′3″2	6°48′34″6	357°8′0″4	347°46′35″0	338°46′25″5	330°8′35″8
281°41′26″7	271°26′11″6	261°11′41″2	251°3′35″9	241°7′7″3	231°26′33″1	222°5′7″7	213°4′58″2	204°27′8″5
0.413327	0.412562	0.413848	0.417111	0.422183	0.428813	0.436701	0.445533	0.455000
9.830328	9.901388	9.950166	9.981077	9.996889	9.999472	9.990107	9.969608	9.938331
+ 1.75249	+ 2.06039	+ 2.31214	+ 2.50143	+ 2.62465	+ 2.68092	+ 2.67182	+ 2.60101	+ 2.47361
− 1297	− 1126	− 892	− 608	− 290	+ 41	+ 365	+ 667	+ 933
− 2594	− 2251	− 1783	− 1215	− 580	+ 81	+ 731	+ 1334	+ 1866
+ 1.72655	+ 2.03788	+ 2.29431	+ 2.48928	+ 2.61885	+ 2.68173	+ 2.67913	+ 2.61435	+ 2.49227
− 2.84470	− 2.58247	− 2.31183	− 2.03360	− 1.74866	− 1.45788	− 1.16219	− 0.86255	− 0.55997
+ 2.6806	+ 2.4773	+ 2.2729	+ 2.0674	+ 1.8609	+ 1.6535	+ 1.4454	+ 1.2367	+ 1.0274
0.413429	0.412664	0.413950	0.417213	0.422285	0.428915	0.436803	0.445635	0.455102
9.866808	9.780742	9.655342	9.459710	9.073977	$8_n699056$	$9_n325778$	$9_n558770$	$9_n697084$
+ 1.90650	+ 1.56101	+ 1.17298	+ 0.75322	+ 0.31352	− 0.13427	− 0.57887	− 1.01020	− 1.41966
+ 2008	+ 2285	+ 2525	+ 2712	+ 2832	+ 2881	+ 2860	+ 2775	+ 2637
+ 4016	+ 4570	+ 5051	+ 5424	+ 5664	+ 5762	+ 5719	+ 5550	+ 5275
+ 1.94666	+ 1.60671	+ 1.22349	+ 0.80746	+ 0.37016	− 0.07665	− 0.52168	− 0.95470	− 1.36691
+ 4.44134	+ 4.58280	+ 4.70931	+ 4.82038	+ 4.91550	+ 4.99427	+ 5.05621	+ 5.10100	+ 5.12834
− 9.6709	− 9.7277	− 9.7799	− 9.8276	− 9.8707	− 9.9092	− 9.9428	− 9.9724	− 9.9970
8.999040	8.998275	8.999561	9.002824	9.007896	9.014526	9.022414	9.031246	9.040713
$9_n990896$	$9_n999864$	$9_n994851$	$9_n975826$	$9_n942317$	$9_n893197$	$9_n826229$	$9_n737074$	$9_n616934$
− 0.09771	− 0.09957	− 0.09872	− 0.09520	− 0.08917	− 0.08086	− 0.07057	− 0.05866	− 0.04546
− 10	− 20	− 31	− 43	− 53	− 63	− 71	− 77	− 81
− 20	− 40	− 62	− 85	− 107	− 126	− 143	− 155	− 163
− 0.09791	− 0.09997	− 0.09934	− 0.09605	− 0.09024	− 0.08212	− 0.07200	− 0.06021	− 0.04709
+ 0.04827	+ 0.04184	+ 0.03527	+ 0.02858	+ 0.02180	+ 0.01494	+ 0.00804	+ 0.00111	− 0.00583
+ 0.0593	+ 0.0630	+ 0.0721	+ 0.0811	+ 0.0901	+ 0.0991	+ 0.1080	+ 0.1169	+ 0.1257
1.240617	1.238322	1.242180	1.251969	1.267185	1.287075	1.310739	1.337235	1.365636
8.434666	8.436961	8.433103	8.423314	8.408098	8.388208	8.364544	8.338048	8.309647
0.000983	0.000989	0.000980	0.000958	0.000925	0.000884	0.000837	0.000788	0.000738
0.827078	0.825548	0.828120	0.834646	0.844790	0.858050	0.873826	0.891490	0.910424
0.828061	0.826537	0.829100	0.835604	0.845715	0.858934	0.874663	0.892278	0.911162
0.240429	0.311569	0.362336	0.397131	0.418591	0.428350	0.427400	0.416255	0.394966
0.284787	0.199717	0.078540	9.892284	9.533823	$9_n023088$	$9_n740576$	$9_n992310$	$0_n144042$
$8_n990383$	$8_n999000$	$8_n995767$	$8_n980594$	$8_n952792$	$8_n911104$	$8_n852968$	$8_n774006$	$8_n665299$
0.237179	0.309179	0.360652	0.396074	0.418110	0.428415	0.427994	0.417363	0.396595
0.289290	0.205938	0.087600	9.907121	9.568389	$8_n884512$	$9_n717404$	$9_n979867$	$0_n135740$
$8_n990827$	$8_n999870$	$8_n997124$	$8_n982497$	$8_n955399$	$8_n914449$	$8_n857332$	$8_n779669$	$8_n672929$
9.412368	9.485032	9.533236	9.561527	9.572876	9.569416	9.552737	9.523977	9.483804
9.456726	9.373180	9.249440	9.056680	8.688108	$8_n164154$	$8_n865913$	$9_n100032$	$9_n232880$
$8_n162322$	$8_n172463$	$8_n166667$	$8_n144990$	$8_n107077$	$8_n052170$	$7_n978305$	$7_n881728$	$7_n754137$
$5_n415822$	$5_n354409$	$5_n253315$	$5_n086573$	$4_n765344$	3.915083	4.865958	5.127108	5.272525
5.604071	5.660524	5.704149	5.735169	5.754053	5.761453	5.758145	5.744966	5.722749
$3_n294312$	$3_n601212$	$3_n793923$	$3_n930098$	$4_n029867$	$4_n103030$	$4_n155357$	$4_n190704$	$4_n211876$
5.390824	5.376466	5.296728	5.118878	4.677577	$4_n627376$	$5_n105765$	$5_n299027$	$5_n399865$
5.442935	5.273225	5.023676	4.629925	3.827856	3.083473	4.395175	4.861531	5.139010
$4_n144472$	$4_n067157$	$3_n933200$	$3_n705301$	$3_n214866$	3.113410	3.535103	3.661333	3.676199
0.288711	0.290142	0.279866	0.285178	0.259360	0.076989	0.197472	0.223522	0.242011
9.652465	0.158208	9.898340	9.964505	9.994821	9.999087	9.980752	9.939126	9.868779
9.933891	9.818210	9.577593	9.831242	9.927828	0.042346	0.093332	0.112454	0.111023
5.704533	5.666608	5.576594	5.404056	5.024704	$4_n704365$	$5_n303237$	$5_n522549$	$5_n641876$
$5_n095400$	$5_n431433$	$5_n602489$	$5_n699674$	$5_n748874$	$5_n760540$	$5_n738897$	$5_n684092$	$5_n591528$
$4_n078363$	$3_n885367$	$3_n371516$	3.536543	3.957695	4.145376	4.248689	4.303158	4.322899
8.433683	8.435972	8.432123	8.422356	8.407173	8.387324	8.363707	8.337260	8.308909

B_1

Datum	1875		1874						
	Febr. 4	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20	April 10
					♃				
x_1-x	$0_n399506$	$0_n377195$	$0_n355844$	$0_n336005$	$0_n318230$	$0_n303205$	$0_n291544$	$0_n283842$	$0_n280610$
y_1-y	9.739232	9.767594	9.781576	9.783668	9.775239	9.757161	9.729732	9.692988	9.646786
z_1-z	$8_n240549$	$8_n256237$	$8_n247973$	$8_n213783$	$8_n146748$	$8_n029384$	$7_n807535$	$7_n082785$	7.693727
$nk^2m_1\varrho^3$	2.426007	2.485167	2.542698	2.597643	2.648892	2.694663	2.733084	2.761926	2.778882
$\cos$ / $\sin$ Θ	$9_n989861$	$9_n987272$	$9_n985098$	$9_n983573$	$9_n982879$	$9_n983108$	$9_n984250$	$9_n986160$	$9_n988581$
$\varrho\cos\vartheta$	0.409645	0.389923	0.370746	0.352432	0.335351	0.320097	0.307294	0.297682	0.292029
$\cos\vartheta$	9.999990	9.999988	9.999988	9.999989	9.999991	9.999994	9.999998	0.000000	9.999999
ϱ	0.409655	0.389935	0.370758	0.352443	0.335360	0.320103	0.307296	0.297682	0.292030
ϱ^3	1.228965	1.169805	1.112274	1.057329	1.006080	0.960309	0.921888	0.893046	0.876090
X_1	669.13	− 728.39	− 791.67	858.32	− 927.09	− 995.10	−1058.35	−1111.14	−1146.81
X_2	+ 140.09	+ 142.89	+ 145.33	+ 147.41	+ 149.12	+ 150.46	+ 151.43	+ 152.02	+ 152.23
X	− 529.04	− 585.50	646.34	− 710.91	− 777.97	− 844.64	− 906.92	− 959.12	− 994.58
Y_1	+ 146.30	+ 178.96	+ 211.00	+ 240.61	+ 265.54	+ 283.02	+ 290.28	+ 285.05	+ 266.48
Y_2	+ 58.87	+ 51.37	+ 43.76	+ 36.04	+ 28.23	+ 20.33	+ 12.38	+ 4.38	− 3.66
Y	+ 205.17	+ 230.33	+ 254.76	+ 276.65	+ 293.77	+ 303.35	+ 302.66	+ 289.43	+ 262.82
Z_1	4.64	− 5.51	− 6.18	− 6.48	6.25	− 5.30	− 3.47	− 0.70	+ 2.97
Z_2	− 3.38	3.41	− 3.44	− 3.46	− 3.47	− 3.47	− 3.47	− 3.45	− 3.42
Z	− 8.02	− 8.92	− 9.62	− 9.94	− 9.72	− 8.77	− 6.94	− 4.15	− 0.45
					♄				
x_1-x	0.99008	0.99409	0.99676	0.99804	0.99787	0.99618	0.99286	0.98783	0.98099
y_1-y	0_n60728	0_n64742	0_n68596	0_n72277	0_n75783	0_n79113	0_n82265	0_n85241	0_n88042
z_1-z	9_n50243	9_n49360	9_n48287	9_n46953	9_n45378	9_n43489	9_n41296	9_n38739	9_n35793
$nk^2m_1\varrho^3$	0.05704	0.02803	0.00064	9.97490	9.95072	9.92810	9.90710	9.88769	9.86981
$\cos$ / $\sin$ Θ	9.96562	9.95994	9.95346	9.94615	9.93790	9.92866	9.91832	9.90681	9.89400
$\varrho\cos\vartheta$	1.02446	1.03415	1.04330	1.05189	1.05997	1.06752	1.07454	1.08102	1.08699
$\cos\vartheta$	9.99980	9.99982	9.99984	9.99985	9.99987	9.99988	9.99990	9.99991	9.99992
ϱ	1.02466	1.03433	1.04346	1.05204	1.06010	1.06764	1.07464	1.08111	1.08707
ϱ^3	3.07398	3.10299	3.13038	3.15612	3.18030	3.20292	3.22392	3.24333	3.26121
X_1	+ 11.15	+ 10.52	+ 9.94	+ 9.40	+ 8.88	+ 8.40	+ 7.94	+ 7.51	+ 7.09
X_2	− 10.16	− 9.94	− 9.71	− 9.48	− 9.25	− 9.01	− 8.77	− 8.53	− 8.29
X	+ 0.99	+ 0.58	+ 0.23	− 0.08	− 0.37	0.61	− 0.83	− 1.02	− 1.20
Y_1	− 4.62	− 4.74	− 4.86	− 4.99	5.11	− 5.24	− 5.37	− 5.50	− 5.63
Y_2	+ 9.39	+ 9.59	+ 9.79	+ 9.98	+ 10.17	+ 10.35	+ 10.53	+ 10.70	+ 10.86
Y	+ 4.77	+ 4.85	+ 4.93	+ 4.99	+ 5.06	+ 5.11	+ 5.16	+ 5.20	+ 5.23
Z_1	0.36	0.33	− 0.30	0.28	0.25	0.23	− 0.21	− 0.19	− 0.17
Z_2	+ 0.25	+ 0.24	+ 0.22	+ 0.21	+ 0.20	+ 0.19	+ 0.17	+ 0.16	+ 0.15
Z	− 0.11	− 0.09	− 0.08	− 0.07	− 0.05	− 0.04	− 0.04	− 0.03	− 0.02
$a\ S_{(x)}$	+ 123.26	+ 15.41	+ 17.10	+ 169.27	+ 513.09	+1090.62	+1945.11	+3120.51	+4659.52
$b\ S_{(y)}$	− 52.18	5.48	− 5.09	− 41.16	− 99.00	− 159.66	− 201.25	− 200.59	− 135.08
$c\ S_{(z)}$	− 0.10	− 0.01	− 0.01	− 0.11	− 0.31	− 0.58	− 0.88	− 1.15	− 1.31
Zahler	+ 70.98	+ 9.92	+ 12.00	+ 128.00	+ 413.78	+ 930.38	+1742.98	+2918.77	+4523.13
ax	+0.471023	+0.559786	+0.646457	+0.728585	+0.803861	+0.869896	+0.924485	+0.965500	+0.990952
by	+0.526747	+0.437951	+0.351264	+0.269141	+0.193952	+0.128037	+0.073631	+0.032869	+0.007748
cz	+0.001429	+0.001466	+0.001481	+0.001473	+0.001441	+0.001386	+0.001309	+0.001212	+0.001097
W	+0.999199	+0.999203	+0.999202	+0.999199	+0.999254	+0.999319	+0.999425	+0.999581	+0.999797
$\log W$	9.999652	9.999653	9.999653	9.999652	9.999676	9.999704	9.999750	9.999818	9.999912
$\frac{1}{2}h$	6.904042	6.901672	6.901465	6.903421	6.907537	6.913816	6.922255	6.932851	6.945610
f	0.477113	0.477120	0.477120	0.477107	0.477076	0.477020	0.476932	0.476804	0.476629
$1-N$	7.380807	7.378445	7.378238	7.380181	7.384289	7.390540	7.398937	7.409473	7.422151
N	9.998955	9.998961	9.998961	9.998957	9.998946	9.998931	9.998910	9.998884	9.998851
log Zahler	1.851136	0.996512	1.079181	2.107210	2.616769	2.968660	3.241292	3.465199	3.655439
q	1.852181	0.997551	1.080220	2.108253	2.617823	2.969729	3.242382	3.466315	3.656588
fq	2.329294	1.474671	1.557340	2.585360	3.094899	3.446749	3.719314	3.943119	4.133217
ΣX	528.05	584.92	− 646.11	− 710.99	778.34	− 845.25	− 907.75	− 960.14	− 995.78
$\Delta\Sigma X$	+ 1.17	− 0.06	0.27	− 4.59	− 19.25	51.51	− 109.28	− 200.55	− 332.38
ΣY	+ 209.94	+ 235.18	+ 259.69	+ 281.64	+ 298.83	+ 308.46	+ 307.82	+ 294.63	+ 268.05
$\Delta\Sigma Y$	− 7.99	− 0.98	− 1.05	− 9.82	− 27.38	− 51.77	− 78.40	− 99.32	− 102.53
ΣZ	− 8.13	9.01	9.70	10.01	− 9.77	− 8.81	− 6.98	− 4.18	− 0.47
$\Delta\Sigma Z$	+ 0.38	+ 0.05	+ 0.06	+ 0.62	+ 1.96	+ 4.28	+ 7.75	+ 12.46	+ 18.39

B$_2$

1874		1873						
März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
				a				
$0_n282212$	$0_n288821$	$0_n300389$	$0_n316668$	$0_n337190$	$0_n361339$	$0_n388390$	$0_n417555$	$0_n448029$
9.590964	9.525693	9.452139	9.373684	9.298242	9.240799	9.222404	9.259235	9.348830
8.078094	8.297542	8.454692	8.577836	8.679337	8.765296	8.839352	8.903687	8.959852
2.781855	2.769336	2.740701	2.696337	2.637669	2.566809	2.486259	2.398563	2.306088
$9_n991181$	$9_n993631$	$9_n995675$	$9_n997194$	$9_n998193$	$9_n998757$	$9_n998991$	$9_n998955$	$9_n998629$
0.291031	0.295190	0.304714	0.319474	0.338997	0.362582	0.389399	0.418600	0.449400
9.999992	9.999978	9.999957	9.999929	9.999896	9.999861	9.999828	9.999797	9.999772
0.291039	0.295212	0.304757	0.319545	0.339101	0.362721	0.389571	0.418803	0.449628
0.873117	0.885636	0.914271	0.958635	1.017303	1.088163	1.168713	1.256409	1.348884
—1158.96	—1143.29	—1099.23	—1030.40	— 943.75	— 847.52	— 749.29	— 654.81	— 567.70
+ 152.06	+ 151.50	+ 150.55	+ 149.20	+ 147.45	+ 145.31	+ 142.76	+ 139.80	+ 136.44
—1006.90	— 991.79	— 948.68	— 881.20	— 796.30	— 702.21	— 606.53	— 515.01	— 431.26
+ 235.95	+ 197.26	+ 155.90	+ 117.50	+ 86.28	+ 64.21	+ 51.13	+ 45.48	+ 45.18
— 11.72	— 19.80	— 27.87	— 35.92	— 43.95	— 51.92	— 59.82	— 67.64	— 75.37
+ 224.23	+ 177.46	+ 128.03	+ 81.58	+ 42.33	+ 12.29	— 8.69	— 22.16	30.19
+ 7.24	+ 11.66	+ 15.68	+ 18.80	+ 20.75	+ 21.48	+ 21.16	+ 20.06	+ 18.45
— 3.39	— 3.35	— 3.30	— 3.24	— 3.18	— 3.10	— 3.01	— 2.91	2.81
+ 3.85	+ 8.31	+ 12.38	+ 15.56	+ 17.57	+ 18.38	+ 18.15	+ 17.15	+ 15.64
				b				
0.97217	0.96123	0.94796	0.93213	0.91349	0.89167	0.86628	0.83684	0.80271
0_n90672	0_n93130	0_n95417	0_n97534	0_n99477	1_n01245	1_n02834	1_n04241	1_n05457
9_n32346	9_n28307	9_n23578	9_n17955	9_n11160	9_n02735	8_n91960	8_n77085	8_n54033
9.85358	9.83897	9.82610	9.81497	9.80567	9.79841	9.79316	9.79019	9.78965
9.87975	9.86393	9_n85257	9_n87002	9_n88634	9_n90159	9_n91573	9_n92880	9_n94078
1.09242	1.09730	1.10160	1.10532	1.10843	1.11086	1.11261	1.11361	1.11379
9.99994	9.99995	9.99996	9.99997	9.99998	9.99999	9.99999	0.00000	0.00000
1.09248	1.09735	1.10164	1.10535	1.10845	1.11087	1.11262	1.11361	1.11379
3.27744	3.29205	3.30492	3.31605	3.32535	3.33261	3.33786	3.34083	3.34137
+ 6.69	+ 6.31	+ 5.94	+ 5.59	+ 5.24	+ 4.90	+ 4.56	+ 4.24	+ 3.91
— 8.05	— 7.80	— 7.55	— 7.30	— 7.04	— 6.79	— 6.53	— 6.27	— 6.01
— 1.36	— 1.49	— 1.61	— 1.71	— 1.80	— 1.89	— 1.97	— 2.03	— 2.10
— 5.76	— 5.89	— 6.03	— 6.17	— 6.32	— 6.47	— 6.63	— 6.80	— 6.99
+ 11.02	+ 11.17	+ 11.32	+ 11.47	+ 11.61	+ 11.74	+ 11.87	+ 11.99	+ 12.11
+ 5.26	+ 5.28	+ 5.29	+ 5.30	+ 5.29	+ 5.27	+ 5.24	+ 5.19	+ 5.12
— 0.15	— 0.13	— 0.12	— 0.10	— 0.08	— 0.07	— 0.05	— 0.04	— 0.02
+ 0.14	+ 0.12	+ 0.11	+ 0.10	+ 0.09	+ 0.07	+ 0.06	+ 0.05	+ 0.04
— 0.01	— 0.01	— 0.01	0.00	+ 0.01	0.00	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.02
+6599.60	+8966.15	+11762.24	+14954.00	+18450.46	+22078.21	+25550.53	+28436.07	+30139.21
+ 16.16	+ 273.01	+ 658.44	+ 1208.35	+ 1987.85	+ 3114.56	+ 4786.88	+ 7311.23	+11117.67
— 1.28	— 0.98	— 0.40	+ 0.45	+ 1.44	+ 2.35	+ 2.85	+ 2.54	+ 0.99
+6614.48	+9238.18	+12420.28	+16162.80	+20439.75	+25195.12	+30340.26	+35749.84	+41257.87
+0.999054	+0.988290	+0.957564	+0.906330	+0.834816	+0.744262	+0.637207	+0.517802	+0.392074
+0.000065	+0.011328	+0.042641	+0.094535	+0.166783	+0.258124	+0.365989	+0.486204	+0.612710
+0.000966	+0.000823	+0.000673	+0.000522	+0.000375	+0.000241	+0.000128	+0.000046	+0.000004
+1.000085	+1.000441	+1.000878	+1.001387	+1.001974	+1.002627	+1.003324	+1.004052	+1.004788
0.000037	0.000192	0.000381	0.000602	0.000857	0.001140	0.001441	0.001756	0.002075
6.960511	6.977533	6.996640	7.017772	7.040842	7.065724	7.092241	7.120153	7.149139
0.476402	0.476116	0.475771	0.475364	0.474899	0.474383	0.473826	0.473240	0.472643
7.436950	7.453841	7.472792	7.493738	7.516598	7.541247	7.567508	7.595149	7.623857
9.998810	9.998763	9.998708	9.998644	9.998571	9.998487	9.998393	9.998287	9.998170
3.820496	3.965586	4.094132	4.208517	4.310476	4.401316	4.482020	4.553274	4.615507
3.821686	3.966823	4.095424	4.209873	4.311905	4.402829	4.483627	4.554987	4.617337
4.298088	4.442939	4.571195	4.685237	4.786804	4.877212	4.957453	5.028227	5.089980
—1008.26	— 993.28	— 950.29	— 882.91	— 798.10	— 704.10	— 608.50	— 517.04	— 433.36
— 509.42	— 731.83	— 992.97	—1276.59	—1554.12	—1782.20	—1900.69	—1832.43	—1486.03
+ 229.49	+ 182.74	+ 133.32	+ 86.88	+ 47.62	+ 17.56	— 3.45	— 16.97	— 25.07
— 71.44	+ 15.25	+ 183.05	+ 460.23	+ 875.30	+1453.02	+2208.59	+3139.57	+4215.39
+ 3.84	+ 8.30	+ 12.37	+ 15.56	+ 17.58	+ 18.38	+ 18.16	+ 17.16	+ 15.66
+ 25.30	+ 32.74	+ 39.89	+ 45.61	+ 48.31	+ 46.03	+ 36.47	+ 17.21	— 14.09

B₃

Datum	1873 März 6	1873 Jan. 5	1872 Dec. 16	1872 Nov. 6	1872 Sept. 27	1872 Aug. 18	1872 Juli 9	1872 Mai 30
				a				
x_1-x	$0_n479022$	$0_n509766$	$0_n539527$	$0_n567599$	$0_n593317$	$0_n616038$	$0_n635133$	$0_n649995$
y_1-y	9.472361	9.609648	9.747451	9.879050	0.001743	0.114718	0.218010	0.311959
z_1-z	9.008685	9.050882	9.086680	9.116276	9.139564	9.156458	9.166608	9.169616
$wk^2m_1 : \varrho^3$	2.210880	2.114661	2.018853	1.924614	1.832880	1.744413	1.659870	1.579776
$\cos \Theta$, $\sin \Theta$	$9_n997905$	$9_n996587$	$9_n994416$	$9_n991073$	$9_n986205$	$9_n979423$	$9_n970318$	$9_n958459$
$\varrho \cos \vartheta$	0.481117	0.513179	0.545111	0.576526	0.607112	0.636615	0.664815	0.691536
$\cos \vartheta$	9.999753	9.999742	9.999738	9.999740	9.999748	9.999762	9.999781	9.999804
ϱ	0.481364	0.513437	0.545373	0.576786	0.607364	0.636853	0.665034	0.691732
ϱ^3	1.444092	1.540311	1.636119	1.730358	1.822092	1.910559	1.995102	2.075196
X_1	—489.67	—421.14	—361.73	—310.61	—266.81	—229.32	—197.24	—169.73
X_2	+132.65	+128.46	+123.85	+118.83	+113.40	+107.55	+101.30	+ 94.65
X	—357.02	—292.68	—237.88	—191.78	—153.41	—121.77	— 95.94	— 75.08
Y_1	+ 48.22	+ 53.00	+ 58.39	+ 63.63	+ 68.33	+ 72.30	+ 75.49	+ 77.94
Y_2	— 82.96	— 90.41	— 97.71	—104.82	—111.72	—118.39	—124.81	—130.93
Y	— 34.74	— 37.41	— 39.32	— 41.19	— 43.39	— 46.09	— 49.32	— 52.99
Z_1	+ 16.58	+ 14.64	+ 12.75	+ 10.99	+ 9.39	+ 7.96	+ 6.71	+ 5.62
Z_2	— 2.70	— 2.58	— 2.45	— 2.31	— 2.16	— 2.00	— 1.84	— 1.67
Z	+ 13.88	+ 12.06	+ 10.30	+ 8.68	+ 7.23	+ 5.96	+ 4.87	+ 3.95
				b				
x_1-x	0.76315	0.71719	0.66354	0.60051	0.52565	0.43540	0.32383	0.18004
y_1-y	1_n06476	1_n07289	1_n07887	1_n08259	1_n08398	1_n08295	1_n07946	1_n07351
z_1-z	8_n00860	8.14922	8.57864	8.78497	8.91803	9.01368	9.08529	9.13956
$wk^2m_1 : \varrho^3$	9.79172	9.79664	9.80468	9.81605	9.83105	9.84992	9.87281	9.89984
$\cos \Theta$, $\sin \Theta$	9_n95166	9_n96143	9_n97009	9_n97761	9_n98400	9_n98926	9_n99341	9_n99648
$\varrho \cos \vartheta$	1.11310	1.11146	1.10878	1.10498	1.09998	1.09369	1.08605	1.07703
$\cos \vartheta$	0.00000	0.00000	0.00000	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998	9.99997
ϱ	1.11310	1.11146	1.10878	1.10499	1.09999	1.09370	1.08607	1.07706
ϱ^3	3.33930	3.33438	3.32634	3.31497	3.29997	3.28110	3.25821	3.23118
X_1	+ 3.59	+ 3.26	+ 2.94	+ 2.61	+ 2.27	+ 1.93	+ 1.57	+ 1.20
X_2	— 5.75	— 5.48	— 5.21	— 4.94	— 4.67	— 4.40	— 4.13	— 3.86
X	— 2.16	— 2.22	— 2.27	— 2.33	— 2.40	— 2.47	— 2.56	— 2.66
Y_1	— 7.19	— 7.40	— 7.65	— 7.92	— 8.22	— 8.57	— 8.96	— 9.40
Y_2	+ 12.22	+ 12.33	+ 12.43	+ 12.53	+ 12.62	+ 12.71	+ 12.79	+ 12.86
Y	+ 5.03	+ 4.93	+ 4.78	+ 4.61	+ 4.40	+ 4.14	+ 3.83	+ 3.46
Z_1	— 0.01	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.04	+ 0.06	+ 0.07	+ 0.09	+ 0.11
Z_2	+ 0.02	+ 0.01	0.00	— 0.01	— 0.02	— 0.04	— 0.05	— 0.06
Z	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.03	+ 0.04	+ 0.03	+ 0.04	+ 0.05
$a S_{(x)}$	+29906.47	+26889.37	+20288.64	+ 9598.47	— 5069.79	—22663.45	—41020.50	— 57046.25
$b S_{(y)}$	+16746.08	+24778.89	+35695.92	+49638.33	+66105.71	+83672.20	+99875.00	+111454.62
$c S_{(z)}$	— 2.10	— 6.76	— 12.49	18.13	— 21.74	— 20.82	— 12.89	+ 3.67
Zahler	+46650.45	+51661.50	+55972.07	+59218.67	+61014.18	+60987.93	+58841.61	+ 54412.04
$a x$	+0.268060	+0.155721	+0.066426	+0.011876	+0.002357	+0.044468	+0.138712	+0.277757
$b y$	+0.737433	+0.850354	+0.940056	+0.994805	+1.004256	+0.961785	+0.866872	+0.726875
$c z$	+0.000010	+0.000071	+0.000190	+0.000364	+0.000581	+0.000824	+0.001065	+0.001275
W	+1.005503	+1.006146	+1.006672	+1.007045	+1.007194	+1.007077	+1.006649	+1.005907
log W	0.002383	0.002661	0.002888	0.003049	0.003113	0.003063	0.002878	0.002558
$\frac{1}{2} h$	7.178782	7.208560	7.237834	7.265833	7.291696	7.314487	7.333267	7.347166
f	0.472059	0.471516	0.471050	0.470698	0.470502	0.470503	0.470732	0.471209
$1-N$	7.653224	7.682737	7.711772	7.739580	7.765311	7.788053	7.806877	7.820933
N	9.998041	9.997903	9.997758	9.997609	9.997463	9.997326	9.997207	9.997114
log Zahler	4.668856	4.713167	4.747971	4.772459	4.785430	4.785244	4.769684	4.735695
q	4.670815	4.715264	4.750213	4.774850	4.787967	4.787918	4.772477	4.738581
fq	5.142874	5.186780	5.221263	5.245548	5.258469	5.258421	5.243209	5.209790
ΣX	— 359.18	— 294.90	— 240.15	— 194.11	— 155.81	— 124.24	— 98.50	— 77.74
$\varDelta \Sigma X$	— 763.79	+ 422.02	+2122.71	+4316.91	+6871.87	+9516.12	+11847.81	+13397.94
ΣY	— 29.71	— 32.48	— 34.54	— 36.58	— 38.99	— 41.95	— 45.49	— 49.53
$\varDelta \Sigma Y$	+5364.94	—6464.50	+7331.43	+7730.80	+7404.43	+6130.33	+3894.21	+ 521.82
ΣZ	+ 13.89	+ 12.08	+ 10.32	+ 8.71	+ 7.27	+ 5.99	+ 4.91	+ 4.00
$\varDelta \Sigma Z$	59.71	117.73	187.66	264.16	— 336.52	— 391.94	— 415.66	— 395.32

B_4

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
				a				
0_n660035	0_n664675	0_n663337	0_n655415	0_n640234	0_n616959	0_n584480	0_n541192	0_n484619
0.397015	0.473646	0.542305	0.603460	0.657567	0.705087	0.746470	0.782164	0.812596
9.164888	9.151707	9.129077	9.095623	9.049373	8.987040	8.903307	8.787602	8.615529
1.504530	1.434426	1 369635	1.310187	1.255998	1.206894	1.162608	1.122822	1.087182
9_n943392	9_n924637	9_n901676	9_n873912	9.857978	9.889109	9.915712	9.938131	9.956673
0.716643	0.740038	0.761661	0.781503	0.799589	0.815978	0.830758	0.844033	0.855923
9.999829	9.999856	9.999882	9.999908	9 999931	9.999952	9.999970	9.999983	9.999993
0.716814	0.740182	0.761779	0.781595	0.799658	0.816026	0.830788	0.844050	0.855930
2.150442	2.220546	2.285337	2.344785	2.398974	2.448078	2.492364	2.532150	2.567790
−146.07	−125.63	−107.89	− 92.39	− 78.75	− 66.66	− 55.86	− 46.13	− 37.31
+ 87.59	+ 80.15	+ 72.34	+ 64.16	+ 55.63	+ 46.77	+ 37.60	+ 28.15	+ 18 43
− 58.48	− 45.48	− 35.55	− 28.23	− 23.12	− 19.89	− 18.26	− 17.98	− 18.88
+ 79.72	+ 80.92	+ 81.65	+ 81.97	+ 81.95	+ 81.65	+ 81.11	+ 80.35	+ 79.39
−136.75	−142.24	−147.36	−152.08	−156.39	−160.23	−163.60	−166.45	−168.77
− 57.03	− 61.32	− 65.71	− 70.11	− 74.44	− 78.58	− 82.49	− 86.10	− 89.38
+ 4.67	+ 3.86	+ 3.15	+ 2.55	+ 2.02	+ 1.56	+ 1.16	+ 0.81	+ 0.50
− 1.49	− 1.30	− 1.10	− 0.90	− 0.69	− 0.48	− 0.26	− 0.04	+ 0.19
+ 3.18	+ 2.56	+ 2.05	+ 1.65	+ 1.33	+ 1.08	+ 0.90	+ 0.77	+ 0.69
				b				
9.97959	9.64286	8_n33041	9_n62521	9_n87961	0_n01208	0_n09121	0_n13912	0_n16581
1_n06512	1_n05440	1_n04153	1_n02674	1_n01034	0_n99267	0_n97410	0_n95509	0_n93601
9.19645	9.21219	9.23401	9.24822	9.25600	9.25816	9.25527	9.24822	9.23754
9.93116	9.96671	0.00628	0.04960	0.09622	0.14572	0.19741	0.25048	0.30424
9_n99854	9_n99967	0_n00000	9_n99966	9_n99881	9_n99764	9_n99631	9_n99499	9_n99383
1.06658	1.05473	1.04153	1.02708	1.01153	0.99503	0.97779	0.96010	0.94218
9.99996	9.99996	9.99995	9.99994	9.99993	9.99993	9.99992	9.99992	9.99992
1.06662	1.05477	1.04158	1.02714	1.01160	0.99510	0.97787	0.96018	0.94226
3.19986	3.16431	3.12474	3.08142	3.03480	2.98530	2 93361	2.88054	2.82678
+ 0.81	+ 0.41	− 0.02	− 0.47	− 0.95	− 1.44	− 1.94	− 2.45	− 2.95
− 3.59	− 3.31	− 3 04	− 2.76	− 2.48	− 2.20	− 1.93	− 1.65	− 1.37
− 2.78	− 2.90	− 3.06	− 3.23	− 3.43	− 3.64	− 3.87	− 4.10	− 4.32
− 9.91	− 10.50	− 11.16	− 11.92	− 12.78	− 13.75	− 14.84	− 16.05	− 17.39
+ 12.93	+ 13.00	+ 13.06	+ 13.12	+ 13.17	+ 13.21	+ 13.25	+ 13.29	+ 13.32
+ 3.02	+ 2.50	+ 1.90	+ 1.20	+ 0.39	− 0.54	− 1.59	− 2.76	− 4.07
+ 0.13	+ 0.15	+ 0.17	+ 0.20	+ 0.23	+ 0.25	+ 0.28	+ 0.32	+ 0.35
− 0.07	− 0.08	− 0.10	− 0.11	− 0.12	− 0.13	− 0.14	− 0.16	− 0.17
+ 0.06	+ 0.07	+ 0.07	+ 0.09	+ 0.11	+ 0.12	+ 0.14	+ 0.16	+ 0.18
− 67327.1	− 69094.1	− 61171.7	− 44473.4	− 21788.1	+ 3051.4	+ 26223.8	+ 44780.1	+ 57059.6
+115026.3	+108069.7	+ 89864 6	+ 61922.6	+ 27679.7	− 8425.7	− 42078.3	− 69983.8	− 90287.8
+ 28.6	+ 59.4	+ 91.3	+ 118.9	+ 137.1	+ 143.0	+ 136.0	+ 118.1	+ 92.5
+ 47727.8	+ 39035.0	+ 28784.2	+ 17568.1	+ 6028.7	− 5231.3	− 15718.5	− 25085.6	− 33135.7
+0.446218	+0.622603	+0.783228	+0.906987	+0.979458	+0.995018	+0.956601	+0.873656	+0.759275
+0.557206	+0.379418	+0.217290	+0.092003	+0.018051	+0.001119	+0.038310	+0.120199	+0.233679
+0.001423	+0.001487	+0.001458	+0.001341	+0.001155	+0.000926	+0.000685	+0.000459	+0.000267
+1.004847	+1.003508	+1.001976	+1.000331	+0.998664	+0.997063	+0.995596	+0.994314	+0.993221
0.002100	0.001521	0.000857	0.000144	9.999420	9.998722	9.998083	9.997524	9.997045
7.355485	7.357780	7.353922	7.344133	7.328917	7.309027	7.285363	7.258867	7.230466
0.471931	0.472872	0.473984	0.475205	0.476463	0.477693	0.478840	0.479867	0.480750
7.829516	7.832173	7.828763	7.819482	7.804800	7.785442	7.762286	7.736258	7.708261
9.997057	9.997039	9.997062	9.997125	9.997220	9.997342	9.997480	9.997627	9.997776
4.678771	4.591454	4.459154	4.244724	3.780224	3_n718610	4_n196411	4_n399424	4_n520296
4.681714	4.594415	4.462092	4.247599	3.783004	3_n721268	4_n198931	4_n401797	4_n522520
5.153645	5.067287	4.936076	4.722804	4.259467	4_n198961	4_n677771	4_n881664	5_n003270
− 61.26	− 48.38	− 38.61	− 31.46	− 26.55	− 23.53	− 22.13	− 22.08	− 23.20
+13747.25	+12664.26	+10202.74	+ 6705.20	+ 2703.19	− 1235.06	− 4644.56	− 7241.17	− 8928.64
− 54.01	− 58.82	− 63.81	− 68.91	− 74.05	− 79.12	− 84.08	− 88.86	− 93.45
− 3381.29	− 7368 93	−10829.60	−13244.33	−14323.43	−14056.06	−12664.97	−10503.93	− 7951 28
+ 3.24	+ 2.63	+ 2.12	+ 1.74	+ 1.44	+ 1.20	+ 1.04	+ 0.93	+ 0.87
− 325.12	− 209.57	− 63.63	+ 90.97	+ 231.67	+ 340.96	+ 409.63	+ 436.94	+ 428.36

X

Datum	f^{V}	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$f=\frac{d^2\xi}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$S_{(x)}$
1871 Juni 5						− 8951.84		+187299.36	+187294.3
					+1688.59		−53293.05		
Juli 15				+ 907.97		− 7263.25		+134006.31	+134001.0
			− 96.43		+2596.56		−60556.30		
Aug. 24		− 187.98		+ 811.54		− 4666.69		+ 73450.01	+ 73444.3
	+ 7.13		− 284.41		+3408.10		−65222.99		
Oct. 3		− 180.85		+ 527.13		− 1258.59		+ 8227.02	+ 8224.0
	+ 77.53		− 465.26		+3935.23		−66481.58		
Nov. 12		− 103.32		+ 61.87		+ 2676.64		− 58254.56	− 58256.5
	+ 139.97		− 568.58		+3997.10		−63804.94		
Dec. 22		+ 36.65		− 506.71		+ 6673.74		−122059.50	−122060.0
	+ 152.28		− 531.93		+3490.39		−57131.20		
1872 Jan. 31		+ 188.93		−1038.64		+10164.13		−179190.70	−179190.6
	+ 99.81		− 343.00		+2451.75		−46967.07		
März 11		+ 288.74		−1381.64		+12615.88		−226157.77	−226156.2
	− 3.68		− 54.26		+1070.11		−34351.19		
April 20		+ 285.06		−1435.90		+13685.99		−260508.96	−260508.60
	− 97.30		+ 230.80		− 365.79		−20665.20		
Mai 30		+ 187.76		−1205.10		+13320.20		−281174.16	−281175.22
	− 138.17		+ 418.56		−1570.89		− 7345.00		
Juli 9		+ 49.59		− 786.54		+11749.31		−288519.16	−288523.75
	− 116.79		+ 468.15		−2357.43		+ 4404.31		
Aug. 18		− 67.20		− 318.39		+ 9391.88		−284114.85	−284123.89
	− 63.29		+ 400.95		−2675.82		+13796.19		
Sept. 27		− 130.49		+ 82.56		+ 6716.06		−270318.66	−270331.87
	− 8.19		+ 270.46		−2593.26		+20512.25		
Nov. 6		− 138.68		+ 353.02		+ 4122.80		−249806.41	−249824.02
	− 27.45		+ 131.78		−2240.24		+24635.05		
Dec. 16		− 111.23		+ 484.80		+ 1882.56		−225171.36	−225193.33
	+ 39.00		+ 20.55		−1755.44		+26517.61		
1873 Jan. 25		− 72.23		+ 505.35		+ 127.12		−198653.75	−198680.45
	+ 36.58		− 51.68		−1250.09		+26644.73		
März 6		− 35.65		+ 453.67		− 1122.97		−172009.02	−172040.87
	+ 27.00		− 87.33		− 796.42		+25521.76		
April 15		+ 8.65		+ 366.34		− 1919.39		−146487.26	−146524.97
	+ 16.88		− 95.98		− 430.08		+23602.37		
Mai 25		+ 8.23		+ 270.36		− 2349.47		−122884.89	−122929.13
	+ 8.10		− 87.75		− 159.72		+21252.90		
Juli 4		+ 16.33		+ 182.61		− 2509.19		−101631.99	−101683.50
	+ 2.54		− 71.42		+ 22.89		+18743.71		
Aug. 13		+ 18.87		+ 111.19		− 2486.30		− 82888.28	− 82947.42
	− 1.44		− 52.55		+ 134.08		+16257.41		
Sept. 22		+ 17.43		+ 58.64		− 2352.22		− 66630.87	− 66697.61
	− 3.92		− 35.12		+ 192.72		+13905.19		
Nov. 1		+ 13.51		+ 23.52		− 2159.50		− 52725.68	− 52799.37
	− 4.53		− 21.61		+ 216.24		+11745.69		
Dec. 11		+ 8.98		+ 1.91		− 1943.26		− 40979.99	− 41059.13
	− 3.54		− 12.63		+ 218.15		+ 9802.43		
1874 Jan. 20		+ 5.44		− 10.72		− 1725.11		− 31177.56	− 31260.25
	− 2.39		− 7.19		+ 207.43		+ 8077.32		
März 1		+ 3.05		− 17.91		− 1517.68		− 23100.24	− 23184.17
			− 4.14		+ 189.52		+ 6559.64		
April 10		+ 2.38		− 22.05		− 1328.16		− 16540.60	− 16623.49
			− 1.76		+ 167.47		+ 5231.48		
Mai 20		+ 2.18		− 23.81		− 1160.69		− 11309.12	− 11389.04
			+ 0.42		+ 143.66		+ 4070.79		
Juni 29		+ 1.87		− 23.39		− 1017.03		− 7238.33	− 7313.89
			+ 2.29		+ 120.27		+ 3053.76		
Aug. 8		+ 1.65		− 21.10		− 896.76		− 4184.57	− 4254.92
			+ 3.94		+ 99.17		+ 2157.00		
Sept. 17				− 17.16		− 797.59		− 2027.57	− 2092.87
			+ 4.35		+ 82.01		+ 1359.41		
Oct. 27				− 12.81		− 715.58		− 668.16	− 727.36
			+ 5.01		+ 69.20		+ 643.83		
Dec. 6				− 7.80		− 646.38		− 24.33	− 78.14
			+ 4.50		+ 61.40		− 2.55		
1875 Jan. 15				3.30		− 584.98		− 26.88	− 75.62
					+ 58.10		− 587.53		
Febr. 24						− 526.88		− 614.41	− 658.42
							− 1114.41		
								− 1728.82	

Y

Datum	f^{V}	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$f = \frac{d^2 \eta}{d t^2}$	$'f$	$''f$	$S_{(\eta)}$
1871 Juni 5						— 8044.73		+ 528147.61	+ 528139.7
					—2548.06		+27722.11		
Juli 15				+ 391.80		—10592.79		+ 555869.72	+ 555860.8
			+ 378.33		—2156.26		+17129.32		
Aug. 24		— 24.63		+ 770.13		—12749.05		+ 572999.04	+ 572987.3
	— 106.36		+ 353.70		—1386.13		+ 4380.27		
Oct. 3		— 130.99		+1123.83		—14135.18		+ 577379.31	+ 577368.3
	— 102.67		+ 222.71		— 262.30		— 9754.91		
Nov. 12		— 233.66		+1346.54		—14397.48		+ 567624.40	+ 567613.4
	— 45.15		— 10.95		+1084.24		—24152.39		
Dec. 22		— 278.81		+1335.59		—13313.24		+ 543472.01	+ 543461.7
	+ 49.53		— 289.76		+2419.83		—37465.63		
1872 Jan. 31		— 229.28		+1045.83		— 10893.41		+ 506006.38	+ 505997.3
	+ 136.67		— 519.04		+3465.66		—48359.04		
März 11		— 92.61		+ 526.79		— 7427.75		+ 457647.34	+ 457640.0
	+ 167.96		— 611.65		+3992.45		—55786.79		
April 20		+ 75.35		— 84.86		— 3435.30		+ 401860.55	+ 401856.10
	+ 125.34		— 536.30		+3907.59		—59222.09		
Mai 30		+ 200.69		— 621.16		+ 472.29		+ 342638.46	+ 342636.54
	+ 39.09		— 335.61		+3286.43		—58749.80		
Juli 9		+ 239.78		— 956.77		+ 3758.72		+ 283888.66	+ 283888.35
	— 39.63		— 95.83		+2329.66		—54991.08		
Aug. 18		+ 200.15		—1052.60		+ 6088.38		+ 228897.58	+ 228898.24
	— 82.30		+ 104.32		+1277.06		—48902.70		
Sept. 27		+ 117.85		— 948.28		+ 7365.44		+ 179994.88	+ 179995.77
	— 81.45		+ 222.17		+ 328.78		—41537.26		
Nov. 6		+ 36.40		— 726.11		+ 7694.22		+ 138457.62	+ 138457.73
	— 59.35		+ 258.57		— 397.33		—33843.04		
Dec. 16		— 22.95		— 467.54		+ 7296.89		+ 104614.58	+ 104613.73
	— 28.87		+ 235.62		— 864.87		—26546.15		
1873 Jan. 25		— 51.82		— 231.92		+ 6432.02		+ 78068.43	+ 78066.72
	— 6.67		+ 183.80		—1096.79		—20114.13		
März 6		— 58.49		— 48.12		+ 5335.23		+ 57954.30	+ 57952.03
	+ 6.25		+ 125.31		—1144.91		—14778.90		
April 15		— 52.24		+ 77.19		+ 4190.32		+ 43175.40	+ 43172.98
	+ 11.81		+ 73.07		—1067.72		—10588.58		
Mai 25		— 40.43		+ 150.26		+ 3122.60		+ 32586.82	+ 32584.77
	+ 11.79		+ 32.64		— 917.46		— 7465.98		
Juli 4		— 28.64		+ 182.90		+ 2205.14		+ 25120.84	+ 25119.77
	+ 9.59		+ 4.00		— 734.56		— 5260.84		
Aug. 13		— 19.05		+ 186.90		+ 1470.58		+ 19860.00	+ 19860.59
	+ 7.32		— 15.05		— 547.66		— 3790.26		
Sept. 22		— 11.73		+ 171.85		+ 922.92		+ 16069.74	+ 16072.97
	+ 5.80		— 26.78		— 375.81		— 2867.34		
Nov. 1		— 5.93		+ 145.07		+ 547.11		+ 13202.40	+ 13209.03
	+ 4.72		— 32.71		— 230.74		— 2320.23		
Dec. 11		— 1.21		+ 112.36		+ 316.37		+ 10882.17	+ 10892.75
	+ 4.10		— 33.92		— 118.38		— 2003.86		
1874 Jan. 20		+ 2.89		+ 78.44		+ 197.99		+ 8878.31	+ 8893.84
	+ 3.05		— 31.03		— 39.94		— 1805.87		
März 1		+ 5.94		+ 47.41		+ 158.05		+ 7072.44	+ 7091.41
	+ 1.15		— 25.09		+ 7.47		— 1647.82		
April 10		+ 7.09		+ 22.32		+ 165.52		+ 5424.62	+ 5446.92
			— 18.00		+ 29.79		— 1482.30		
Mai 20		+ 6.84		+ 4.32		+ 195.31		+ 3942.32	+ 3966.91
			— 11.16		+ 34.11		— 1286.99		
Juni 29		+ 5.49		— 6.84		+ 229.42		+ 2655.33	+ 2681.01
			— 5.67		+ 27.27		— 1057.57		
Aug. 8		+ 3.79		— 12.51		+ 256.69		+ 1597.76	+ 1623.52
			— 1.88		+ 14.76		— 800.88		
Sept. 17		+ 2.72		— 14.39		+ 271.45		+ 796.88	+ 821.86
			+ 0.84		+ 0.37		— 529.43		
Oct. 27		+ 1.45		— 13.55		+ 271.82		+ 267.45	+ 290.98
			+ 2.29		— 13.18		— 257.61		
Dec. 6		+ 1.16		— 11.26		+ 258.64		+ 9.84	+ 31.53
			+ 3.45		— 24.44		+ 1.03		
1875 Jan. 15				— 7.81		+ 234.20		+ 10.87	+ 30.40
					— 32.25		+ 235.23		
Feb. 24						+ 201.95		+ 246.10	+ 263.59
							+ 437.18		
								+ 683.28	

Z

Datum	f^{V}	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$f = \frac{d^2 z}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$S_{(z)}$
1871 Juni 5						+ 429.23		— 16288.54	— 16288.3
					+ 8.64		+ 774.83		
Juli 15				— 35.84		+ 437.87		— 15513.71	— 15513.3
			— 5.47		— 27.20		+ 1212.70		
Aug. 24		+ 6.24		— 41.31		+ 410.67		— 14301.01	— 14300.7
	+ 2.18		+ 0.77		— 68.51		+ 1623.37		
Oct. 3		+ 8.42		— 40.54		+ 342.16		— 12677.64	— 12677.4
	0.08		+ 9.19		— 109.05		+ 1965.53		
Nov. 12		+ 8.34		— 31.35		+ 233.11		— 10712.11	— 10711.9
	— 3.26		+ 17.53		— 140.40		+ 2198.64		
Dec. 22		+ 5.08		— 13.82		+ 92.71		— 8513.47	— 8513.3
	— 5.99		+ 22.61		— 154.22		+ 2291.35		
1872 Jan. 31		— 0.91		+ 8.79		— 61.51		— 6222.12	— 6221.9
	— 5.78		+ 21.70		— 145.43		+ 2229.84		
März 11		6.69		+ 30.49		— 206.94		— 3992.28	— 3992.2
	— 3.81		+ 15.01		— 114.94		+ 2022.90		
April 20		— 10.50		+ 45.50		— 321.88		— 1969.38	— 1969.30
	+ 0.21		+ 4.51		— 69.44		+ 1701.02		
Mai 30		— 10.29		+ 50.01		— 391.32		— 268.36	— 268.27
	+ 3.74		— 5.78		— 19.43		+ 1309.70		
Juli 9		— 6.55		+ 44.23		— 410.75		+ 1041.34	+ 1041.55
	+ 4.08		— 12.33		+ 24.80		+ 898.95		
Aug. 18		— 2.47		+ 31.90		— 385.95		+ 1940.29	+ 1940.64
	+ 4.18		— 14.80		+ 56.70		+ 513.00		
Sept. 27		+ 1.71		+ 17.10		— 329.25		+ 2453.29	+ 2453.84
	+ 1.55		— 13.09		+ 73.80		+ 183.75		
Nov. 6		+ 3.26		+ 4.01		— 255.45		+ 2637.04	+ 2637.75
	+ 0.93		— 9.83		+ 77.81		— 71.70		
Dec. 16		+ 4.19		— 5.82		— 177.64		+ 2565.34	+ 2566.25
			— 5.64		+ 71.99		— 249.34		
1873 Jan. 25		+ 3.26		— 11.46		— 105.65		+ 2316.00	+ 2317.06
			— 2.38		+ 60.53		— 354.99		
März 6		+ 2.33		— 13.84		— 45.12		+ 1961.01	+ 1962.23
			— 0.05		+ 46.69		— 400.11		
April 15		+ 1.40		— 13.89		+ 1.57		+ 1560.90	+ 1562.26
			+ 1.35		+ 32.80		— 398.54		
Mai 25		+ 0.71		— 12.54		+ 34.37		+ 1162.36	+ 1163.84
			+ 2.06		+ 20.26		— 364.17		
Juli 4		+ 0.12		— 10.48		+ 54.63		+ 798.19	+ 799.74
			+ 2.18		+ 9.78		— 309.54		
Aug. 13				— 8.30		+ 64.41		+ 488.65	+ 490.22
			+ 2.10		+ 1.48		— 245.13		
Sept. 22				— 6.20		+ 65.89		+ 243.52	+ 245.01
			+ 2.01		— 4.72		— 179.24		
Nov. 1				— 4.19		+ 61.17		+ 64.28	+ 65.58
			+ 1.88		— 8.91		— 118.07		
Dec. 11				— 2.31		+ 52.26		— 53.79	— 52.76
			+ 1.63		— 11.22		— 65.81		
1874 Jan. 20				— 0.68		+ 41.04		— 119.60	— 118.91
			+ 1.36		— 11.90		— 24.77		
März 1				+ 0.68		+ 29.14		— 144.37	— 144.06
			+ 0.90		— 11.22		+ 4.37		
April 10				+ 1.58		+ 17.92		— 140.00	— 140.05
			+ 0.55		— 9.64		+ 22.29		
Mai 20				+ 2.13		+ 8.28		— 117.71	— 118.07
			+ 0.08		— 7.51		+ 30.57		
Juni 29				+ 2.21		+ 0.77		— 87.14	— 87.73
			— 0.19		— 5.30		+ 31.34		
Aug. 8				+ 2.02		— 4.53		— 55.80	— 56.54
			— 0.32		— 3.28		+ 26.81		
Sept. 17				+ 1.70		— 7.81		— 28.99	— 29.81
			— 0.37		— 1.58		+ 19.00		
Oct. 27				+ 1.33		— 9.39		— 9.99	— 10.82
			— 0.40		— 0.25		+ 9.61		
Dec. 6				+ 0.93		— 9.64		— 0.38	— 1.19
			— 0.40		+ 0.68		— 0.03		
1875 Jan. 15				+ 0.53		— 8.96		— 0.41	— 1.16
					+ 1.21		— 8.99		
Febr. 24						— 7.75		— 9.40	— 10.08
							— 16.74		
								— 26.14	

Das Beispiel zu den oben für den Uebergang auf osculirende Elemente entwickelten Formeln soll der vorstehenden Störungsrechnung für Erato entlehnt werden; die neue Osculationsepoche lege ich auf 1871 Sept. 13 (in die Mitte des Intervalles), um die Anwendung der mechanischen Quadraturen möglichst einfach zu gestalten; die Elemente, die der Störungsrechnung zu Grunde gelegt waren, sind wie oben:

(62) Erato
Epoche. Osculation 1874 Dec. 26.0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Aeq. 1870.0

$$
\begin{aligned}
L_0 &= 219^\circ\ \ 8'\ \ 6''8 \\
M_0 &= 180\ \ 40\ \ 48.9 \\
\pi_0 &= \ \ 38\ \ 27\ \ 17.0 \\
\Omega_0 &= 125\ \ 42\ \ 39.7 \\
i_0 &= \ \ \ \ 2\ \ 12\ \ 23.9 \\
\varphi_0 &= \ \ \ \ 9\ \ 59\ \ 14.9 \\
\mu_0 &= 640''89605 \\
\log a_0 &= 0.495\ 4793\,.
\end{aligned}
$$

Wählt man als Zeiteinheit das Intervall von 40 Tagen, so berechnen sich die doppelten und einfachen Integrale, weil die neue Osculationsepoche in die Mitte eines Störungsintervalles fällt, nach der Formel (vergl. pag. 35, 53):

$$
\iint\limits^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x)\,dx^2 = {}^{\text{II}}f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \frac{1}{24} f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \frac{17}{1920} f^{\text{II}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) -
$$
$$
- \frac{367}{193536} f^{\text{IV}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \frac{27859}{66355200} f^{\text{VI}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \ldots
$$

$$
\int\limits^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x)\,dx = {}^{\text{I}}f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \frac{1}{24} f^{\text{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \frac{17}{5760} f^{\text{III}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) +
$$
$$
+ \frac{367}{967680} f^{\text{V}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \ldots
$$

und man findet so unter Zugrundelegung der obigen Integraltafeln für:

1871 Sept. 13.

	ξ	η	ζ
${}^{\text{II}}f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 40838.51	+ 575189.17	− 13489.32
$-\frac{1}{24} f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 123.44	+ 500.09	− 15.68
$+\frac{17}{1920} f^{\text{II}}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 5.93	+ 8.38	− 0.36
$-\frac{367}{193536} f^{\text{IV}}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 0.35	+ 0.15	− 0.01
$+\frac{27859}{66355200} f^{\text{VI}}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 0.02	− 0.01	0.00

			$d\xi : dt$		$d\eta : dt$		$d\zeta : dt$
		$f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$-$	65222.99 $+$	1380.27 $-$		1623.37
$+$	$\frac{1}{24}$	$f^{I}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+$	112.00 $-$	57.76 $+$		2.85
$-$	$\frac{17}{5760}$	$f^{III}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+$	0.84 $-$	1.04		0
$+$	$\frac{367}{967680}$	$f^{V}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$		0 $-$	0.04		0

man erhält also, indem man beachtet, dass für t als Zeiteinheit das Störungsintervall (40 Tage) angenommen ist:

$$\xi = +0.0040\,9682\ ,\qquad \eta = +0.0575\,7578\ ,\qquad \zeta = -0.0013\,5054$$
$$d\xi:dt = -0.0065\,0801{,}5\ ,\quad d\eta:dt = +0.0004\,3214.3\ ,\quad d\zeta:dt = +0.0001\,6205{,}2$$

Das erste Geschäft ist nun die Durchrechnung der Formeln I—IV (pag. 100); ich führe diese Rechnung 7stellig durch, um in den später anzuführenden Controlrechnungen die Berechnung dieser Formeln nicht wiederholen zu müssen; im Allgemeinen genügt eine 6stellige Rechnung völlig und ich werde mich für die späteren Formeln demnach auf eine solche 6stellige Rechnung beschränken.

Die Zwischenzeit zwischen der Ausgangsepoche und dem Zeitpunkte der neuen Osculation beträgt — 1200 Tage, man erhält daher zur Bestimmung der Werthe r_0 und u_0 die folgenden Zahlen:

M_0	$327^\circ 2' 53'' 64$	$r_0 \sin v_0$	$0_n 289\ 9304$
$\sin\varphi_0$	9.239 1314		$9_n 857\ 0986$
$\cos\varphi_0$	9.993 3682	$r_0 \cos v_0$	0.274 4266
$a_0 \cos\varphi_0$	0.488 8475	v_0	$313^\circ 58' 39'' 07$
$\sin\varphi_0 : \sin 1''$	4.553 5565	ω_0	272 44 38.20
E_0	$320^\circ 45' 15'' 99$	u_0	226 43 17.27
$\sin E_0$	$9_n 801\ 0829$	$\log r_0$	0.432 8318
$\cos E_0$	9.889 0403		
Subtr.	0.110 0930	(wk)	9.837 6414
$\cos E_0 - e_0$	9.778 9473	$\log p_0$	0.482 2157
		$(wk):\sqrt{p_0}$	9.596 5330
		$(wk):\sqrt{p_0}$	0.078 7493

Für I findet sich nun:

$\cos i_0$	9.999 6778		
$\sin i_0$	8.585 5012		
$\cos z_0 = \sin a \sin A$	$9_n 766\ 1878$	$\sin z_0 = \sin b \sin B$	9.900 5407
	$9_n 909\ 4308$		9.909 6504
$\sin a \cos A$	$9_n 909\ 2185$	$\sin b \cos B$	$9_n 765\ 8056$
A	$215^\circ 43' 52'' 21$	B	$125^\circ 41' 27'' 16$
$\sin a$	9.999 7877	$\sin b$	9.999 8603

und es findet sich nach (II):

$A+u_0$,	$B+u_0$,	u_0	82° 27′ 9″48	352°24′44″43	226°43′17″27
$\sin(A+u_0)$,	$\sin(B+u_0)$,	$\sin u_0$	9.996 2212	9_n120 7150	9_n862 1491
$r_0 \sin a$,	$r_0 \sin b$,	$r_0 \sin i_0$	0.432 6195	0.432 7221	9.018 3330
$\log x_0$,	$\log y_0$,	$\log z_0$	0.428 8407	9_n553 4371	8_n880 4821
x_0,	y_0,	z_0	+ 2.684 3596	− 0.357 6326	− 0.075 9420

Aus der Anwendung von (III) und (IV) folgt:

$\cos v_0$	9.841 5948
Add.	0.096 8294
$\gamma \sin \Gamma$	9_n857 0986
	9.886 3626
$\gamma \cos \Gamma$	9.938 4242
Γ	320°20′ 0″50
$U = \Gamma + \omega$	233° 4′38″70
γ	0.052 0616
$c = (wk\gamma : \sqrt{p_0})$	9.648 5952

$(A+U)$,	$(B+U)$,	U	88°48′31″00	358°46′ 5″95	233° 4′38″70
$\cos(A+U)$,	$\cos(B+U)$,	$\cos U$	8.317 8996	9.999 8996	9_n778 6830
$c \sin a$,	$c \sin b$,	$c \sin i_0$	9.648 3820	9.648 4855	8.234 0964
$\log(dx_0 : dt)$,	$\log(dy_0 : dt)$,	$\log(dz_0 : dt)$	7.966 2825	9.648 3851	8_n012 7794
$dx_0 : dt$,	$dy_0 : dt$,	$dz_0 : dt$	+ 0.009 2530	+ 0.445 0257	− 0.010 2986

Es ist also:

$x = x_0 + \xi$	+ 2.688 4564	$dx : dt = dx_0 : dt + d\xi : dt$	+ 0.002 7450
$y = y_0 + \eta$	− 0.300 0568	$dy : dt = dy_0 : dt + d\eta : dt$	+ 0.445 4578
$z = z_0 + \zeta$	− 0.077 2925	$dz : dt = dz_0 : dt + d\zeta : dt$	− 0.010 1365

Wählt man nun zum Uebergange auf die osculirenden Elemente die erste Methode (Incremente der Elemente durch Störungen), so genügt für die Folge eine 6stellige Rechnung; man erhält darnach nach dem Systeme (V) (pag. 101):

x,	y,	x	0.429 503	9_n477 204	0.429 503
$d\eta$,	$d\zeta$,	$d\zeta$	6.635 627	6.209 654	6.209 654
ξ,	η,	ξ	7.612 447	8.760 239	7.612 447
dy_0,	dz_0,	dz_0	9.648 385	8_n012 779	8_n012 779
X_1,	Y_1,	Z_1	7.065 130	5_n686 858	6.639 157
X_2,	Y_2,	Z_2	7.260 832	6_n773 018	5_n025 226
Additionslog:			0.214 110	0.034 229	9.955 763
(X_1+X_2),	(Y_1+Y_2),	(Z_1+Z_2)	7.474 942	6_n807 247	6.594 920
y,	z,	z	9_n477 204	8_n888 137	8_n888 137
$d\xi$,	$d\eta$,	$d\xi$	7_n813 449	6.635 627	7_n813 449
η,	ζ,	ζ	8.760 239	7_n130 508	7_n130 508
dx_0,	dy_0,	dx_0	7.966 282	9.648 385	7.966 282

$-X_3$,	$-Y_3$,	$-Z_3$	7.290 653	$5_n523\ 764$	6.701 586
$-X_1$,	$-Y_1$,	$-Z_1$	6.726 521	$6_n778\ 893$	$5_n096\ 790$
	Additionslog:		0.104 765	0.023 489	9.989 075
$-(X_3+X_1)$,	$-(Y_3+Y_1)$,	$-(Z_3+Z_1)$	7.395 418	$6_n802\ 382$	6.690 661
	Subtractionslog.		9.303 082	8.051 727	9.392 065
X,	Y,	Z	6.698 500	$4_n854\ 109$	$5_n986\ 985$

log $x\,d\xi$,	$y\,d\eta$,	$z\,d\zeta$	$8_n242\ 952$	$6_n112\ 831$	$5_n097\ 791$
log $\xi\,dx_0$,	$\eta\,dy_0$,	$\zeta\,dz_0$	5.578 729	8.408 624	5.143 287
$x\,d\xi$,	$y\,d\eta$,	$z\,d\zeta$	— 0.017 49652	—0.000 129 67	—0.000 012 53
$\xi\,dx_0$,	$\eta\,dy_0$,	$\zeta\,dz_0$	+ 0.000 03791	+0.025 622 65	+0.000 013 91
			D	+0.008 035 75	

$2\,dx_0$,	$2\,dy_0$,	$2\,dz_0$	8.267 312	9.949 415	$8_n313\ 809$
$d\xi$,	$d\eta$,	$d\zeta$	$7_n813\ 449$	6.635 627	6.209 654
	Additionslog:		9.811 795	0.000 211	9.996 569
			8.079 107	9.949 626	$8_n310\ 378$
$(wk)^2 A_1$,	$(wk)^2 A_2$,	$(wk)^2 A_3$	— 0.000 078 083	+ 0.000 384 816	— 0.000 003 312
			$(wk)^2 A$	+ 0.000 303 421	
			log $(wk)^2 A$	6.482 045	
			$(wk)^2$	9.675 283	
			A	6.806 762	

(x_0+x),	(y_0+y),	(z_0+z)	+ 5.372 816	— 0.657 689	— 0.153 234
log (x_0+x),	(y_0+y),	(z_0+z)	0.730 202	$9_n818\ 020$	$9_n185\ 355$
ξ	η	ζ	7.612 447	8.760 239	$7_n130\ 508$
B_1	B_2	B_3	+ 0.022 0114	— 0.037 8668	+ 0.000 2069
			B	— 0.015 6485	
			log B	$8_n194\ 473$	

Aus VI) pag. 101 findet sich nun:

$m \sin M$	$4_n854\ 109$	$(wk)\sqrt{p_0}\sin i_0$	8.664 250	$n\cos(N-\frac{1}{2}(i+i_0))$	6.699 881
	$9_n998\ 826$	$m\cos(M-\lambda_0)$	5.706 235	$(wk)\cos\frac{1}{2}(i-i_0)$	9.837 641
$m\cos M$	$5_n986\ 985$	Add.	0.000 478	log $\Delta(\sqrt{p})$	6.862 240
M	184°12′42″3	Nenner	8.664 728	$\Delta\sqrt{p}$	+0.000 728 182
$(M-\lambda_0)$	58°30′ 2″6	$m\sin(M-\lambda_0)$	5.918 928		
$\sin(M-\lambda_0)$	9.930 769	$\operatorname{tang}(\vartheta-\lambda_0)$	7.254 200	$2\sqrt{p_0}$	0.542 138
m	5.988 159	T	4.685 575	Add.	0.000 091
$\cos(M-\lambda_0)$	9.718 076	$\vartheta-\lambda_0$	+ 6′10″361	log (Δp)	7.404 469
$\frac{1}{2}(\vartheta-\lambda_0)$	+ 3′ 5″1805	$wk\sqrt{p_0}$	0.078 749	p_0	0.482 216
$\frac{1}{2}(\vartheta+\lambda_0)$	125°15′44″9	$n\cos(N-i_0)$	0.699 881	Add.	0.000 363
$M-\frac{1}{2}(\vartheta+\lambda_0)$	58°26′57″4	Add.	0.000 181	p	0.482 579
$\cos(M-\frac{1}{2}(\vartheta+\lambda_0))$	9.718 712	Nenner	0.078 930	$\sqrt{p}$	0.241 289

$\sec\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_0)$	0.000 000	$n\sin(N-i_0)$	5.500 362
$n\sin N$	5.706 871	$\mathrm{tang}(i-i_0)$	5.421 432
	9.997755	T	4.685 575
$n\cos N$	6.698 500	$i-i_0$	$+5''443$
N	$5^0 49' 15'' 5$		
$N-i_0$	$3^0 36' 51'' 6$	$\frac{1}{2}(i-i_0)$	$+\ \ 2''7$
$\sin(N-i_0)$	8.799 617	$\frac{1}{2}(i+i_0)$	$2^0 12' 26'' 6$
n	6.700 745	$N-\frac{1}{2}(i+i_0)$	$3^0 36' 48'' 9$
$\cos(N-i_0)$	9.999 136	$\cos(N-\frac{1}{2}(i+i_0))$	9.999 136

Ω	$125^0 48' 50'' 06$
i	$2^0 12' 29'' 34$

Aus VII) (pag. 101) ergibt sich:

$s\sin S$	$9_n553\ 437$	$\sigma\sin\Sigma$	8.760 230
	9.996 179		9.998 904
$s\cos S$	0.428 841	$\sigma\cos\Sigma$	7.612 447
S	$352^0 24' 40'' 6$	Σ	$85^0 55' 47'' 8$
$S-\frac{1}{2}(\Omega+\Omega_0)$	$226^0 38' 55'' 7$	$\Sigma-\Omega$	$320^0\ 6' 57'' 7$
$\sin(S-\frac{1}{2}(\Omega+\Omega_0))$	$9_n861\ 629$	$\sin(\Sigma-\Omega)$	$9_n807\ 017$
$2\,s\sin\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_0)$	7.686 862	σ	8.761 335
$\cos(S-\frac{1}{2}(\Omega+\Omega_0))$	$9_n836\ 620$	$\cos(\Sigma-\Omega)$	9.884 990
		X_1'	8.646 325
s	0.432 662	X_2'	$7_n548\ 491$
2	0.301 030	Add.	9.963 868
$\sin\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_0)$	6.953 170	Y_1'	$8_n568\ 352$
		Y_2'	$7_n523\ 482$
$m'\sin M'$	$7_n130\ 508$	Subtr.	9.958 953
	$9_n999\ 651$		
$m'\cos M'$	$8_n527\ 305$	r_0	0.432 832
M'	$182^0 17' 47'' 9$	$n'\cos(N'-u_0)$	$7_n532\ 027$
$M'-\frac{1}{2}(i+i_0)$	$180^0\ 5' 21'' 3$	Add.	9.999 454
$\cos(M'-\frac{1}{2}(i+i_0))$	$9_n999\ 999$	Nenner	0.432 286
m'	8.527 654	$n'\sin(N'-u_0)$	8.722 434
$\sec\frac{1}{2}(i-i_0)$	0.000 000	$\mathrm{tang}(u-u_0)$	8.290 148
$n'\sin N'$	$8_n527\ 653$	T	4.685 630
	9.886 857	$u-u_0$	$1^0\ 7'\ 2'' 70$
$n'\cos N'$	8.610 193		
N'	$320^0 24' 44'' 0$	$\frac{1}{2}(u-u_0)$	$0^0 33' 31'' 3$
$N'-u_0$	$93^0 41' 26'' 7$	$\frac{1}{2}(u+u_0)$	$227^0 16' 48'' 6$
$\sin(N'-u_0)$	9.999 098	$N'-\frac{1}{2}(u+u_0)$	$93^0\ 7' 55'' 4$
n'	8.723 336	$\cos(N'-\frac{1}{2}(u+u_0))$	$8_n737\ 491$
$\cos(N'-u_0)$	$8_n808\ 691$	$\sec\frac{1}{2}(u-u_0)$	0.000 021
		$\log\Delta r$	$7_n460\ 848$
		Add.	9.999 536
		$\log r$	0.432 368

Die Formeln VIII) (pag. 102) lassen finden:

		$\Delta(r)\frac{dr_0}{dt}$	6.153 612
$\sin v_0$	$9_n857\ 099$	D	7.905 026
$e_0 \sin v_0$	$9_n096\ 230$	Subtr.	9.992 233
$dv_0 : dt$	$8_n692\ 764$	Zähler	7.897 259
		$\log \Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$	7.464 891

Aus IX und X (pag. 102) rechnet sich nun:

$\left(\frac{dr_0}{dt}\right)\Delta(\sqrt{p})$	$5_n555\ 004$	e_0	9.239 131
$\sqrt{p}\,\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$	7.706 180	$g \cos(G-v_0)$	$7_n579\ 464$
Add.	9.996 923	Add.	9.990 386
$(wk)\ g \sin G$	7.703 103	Nenner	9.229 517
$p_0 : r_0$	0.049 384	$g \sin(G-v_0)$	7.821 496
$\frac{p_0}{r_0}\Delta(r)$	$7_n510\ 232$	$\tan(v-v_0)$	8.591 979
$\Delta(p)$	7.404 469	T	4.685 796
Subtr.	0.251 360	$v-v_0$	$+\ 2^\circ 14' 17''18$
$r\,g \cos G$	7.761 592		
$g \sin G$	7.865 462	$\frac{1}{2}(v-v_0)$	$1^\circ\ 7'\ 8''59$
	9.982 359	$\frac{1}{2}(v+v_0)$	$315^\circ\ 5' 47''7$
$g \cos G$	7.329 224	$G-\frac{1}{2}(v+v_0)$	$118^\circ 40' 59''0$
G	$73^\circ 46' 46''7$	$\cos(G-\frac{1}{2}(v+v_0))$	$9_n681\ 209$
$G-v_0$	$110^\circ 48'\ 7''6$	$\sec\frac{1}{2}(v-v_0)$	0.000 083
$\sin(G-v_0)$	9.938 303	$\log \Delta(e)$	$7_n564\ 395$
g	7.883 103		
$\cos(G-v_0)$	$9_n696\ 361$		
Add.	9.990 717	$2e_0$	9.540 161
$\sin\varphi$	9.229 848	Add.	9.995 383
φ	$9^\circ 46' 27''0$	$\Delta(e^2)$	$7_n099\ 939$
$\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_0)$	9 52 50.9		
$\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_0)$	9.993 510	$\omega-\omega_0$	$-\ 1^\circ\ 7' 14''48$
$\frac{1}{2}\Delta(e)$	$7_n263\ 365$	$\pi-\pi_0$	$-\ 1^\circ\ 1'\ 4''12$
$\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_0)$	$7_n269\ 855$		
$S-\log 2$	4.384 545		
$\varphi-\varphi_0$	$-\ 12' 47''910$		

Aus XI (pag. 102) findet sich nun:

2	0.301 030	$2\sin\frac{1}{2}(v-v_0)$	8.591 731
$\sin\frac{1}{2}(v-v_0)$	8.290 701	$\sin\frac{1}{2}(v+v_0)$	$9_n848\ 752$
$\cos\frac{1}{2}(v+v_0)$	9.850 216	$\gamma/2$	$8_n440\ 483$
$\cos\varphi$	9.993 650	Subtr.	9.938 010
σ'_1	8.435 597	(γ)	8.378 493

$2\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_0)$	$7_n570\ 885$		
$\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_0)$	9.234 515	$-r:p$	$9_n949\ 789$
$\sin v_0$	$9_n857\ 099$	$g\cos G$	7.329 224
$(\sigma)_2$	6.662 499	(λ)	$7_n279\ 013$
Subtr.	9.992 615	$\sin E_0$	$9_n801\ 083$
(σ)	8.428 212	$\cos E_0$	9.889 040
$(\sigma)\frac{r}{p}$	8378 001		
$(\lambda)\sin E_0$	7.080 096	$g'\cos(G'-E_0)$	$6_n708\ 437$
Add.	0.021 339	Nenner	9.999 778
$(\gamma)\frac{r}{p}$	8.328 282	$g'\sin(G'-E_0)$	8.504 666
$(\lambda)\cos E_0$	$7_n168\ 053$	$\operatorname{tang}(E-E_0)$	8.504 888
Add.	9.968 881	T	4.685 723
$g'\sin G'$	8.399 340	$E-E_0$	$+1^0 49' 54'' 24$
	9.894 618		
$g'\cos G'$	8.297 163	$\frac{1}{2}(E-E_0)$	$0^0 54' 57'' 12$
G'	$51^0 40' 43'' 3$	$\frac{1}{2}(E+E_0)$	$321^0 40' 43'' 1$
$G'-E_0$	$90^0 54' 57'' 3$	$\cos\frac{1}{2}(E+E_0)$	9.894 618
$\sin(G'-E_0)$	9.999 944	$\sin\frac{1}{2}(E-E_0)$	8.203 691
g'	8.504 722	$2\sin\varphi_0 : \sin 1''$	$4_n854\ 586$
$\cos(G'-E_0)$	$8_n203\ 715$	$\log(\Delta M_2)$	$2_n952\ 895$
		ΔM_2	$-14' 57'' 212$
E	$322^0 35' 40'' 2$	ΔM_3	$-\ 7' 39'' 549$
$-\sin E$	9.783 512	$M-M_0$	$+1^0 27' 17'' 48$
$\Delta(e):\sin 1''$	$2_n878\ 820$		
$\log\Delta M_3$	$2_n662\ 332$	$L-L_0$	$+0^0 26' 13'' 36$

Für q erhält man nach XII pag. 102 in zweifacher Weise den entsprechenden Werth wie folgt:

$\Delta(p)$	7.404 469	Add.	0.300 708	$a_0 P$	$6_n663\ 969$
$a_0\Delta(e^2)$	$7_n595\ 418$	$(r+r_0)$	0.733 630	$1-a_0 P$	0.000 200
p_0	0.482 216	$r r_0$	0.865 200	$\frac{1}{2}a_0 P$	$6_n362\ 969$
Subtr.	0.000 563	Nenner	1.598 830	$\log q$	$6_n362\ 769$
Add.	9.742 100	$2B$	$8_n495\ 503$	Beide Werthe stimmen innerhalb der Unsicherheit der Rechnung; es wird angenommen	
$p_0-a_0\Delta(e^2)$	0.482 779	P_2	$6_n896\ 673$		
Nenner	0.783 809	A	6.806 762	$\log q$	$6_n362\ 765$
$\Delta(p)+a_0\Delta(e^2)$	$7_n146\ 569$	Add.	9.361 758	$\log f$	0.477 371
$\log q$	$6_n362\ 760$	$\log P$	$6_n168\ 520$	$\log(-\mu_0)$	$2_n806\ 787$
q	$-0.000\ 2305$			$\log(\mu-\mu_0)$	9.646 923
				$\mu-\mu_0$	$+0'' 44353$

Die neuen Elemente sind also, wenn man die Epoche auf den neuen Osculationspunkt legt:

(62) Erato

Epoche und Osculation 1871 Sept. 13.0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Aeq. 1870.0.

$L = 5°56'24''90$
$M = 328\ 30\ 11.12$
$\omega = 37\ 26\ 13.78$
$\Omega = 125\ 48\ 50.06$
$i = 2\ 12\ 29.34$
$\varphi = 9\ 46\ 26.99$
$\mu = 641''33958$

Um eine sichere Controle für die Richtigkeit der Rechnung zu erhalten, werden aus diesen Elementen die gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten abgeleitet; die 7stellige Rechnung stellt sich unter Benützung der Formeln I) bis IV) (pag. 100) wie folgt:

μ	2.807 0880	$r \sin v$	$0_n272\ 4409$
k''	3.550 0066		9.858 5065
$a^{\frac{3}{2}}$	0.742 9186	$r \cos v$	0.290 8750
$a^{\frac{1}{2}}$	0.247 6395	v	316°12'56''26
a	0.495 2791	ω	271 37 23.72
$\cos\varphi$	9.993 6498	u	227 50 19.98
$a\cos\varphi$	0.488 9289	r	0.432 3685
$\sin\varphi$	9.229 8485		
$\sin\varphi : \sin 1''$	4.544 2730	p	0.482 5787
M	328°30'11''12	$\sqrt{p}$	0.241 2893
E	322 35 40.23	(k)	9.837 6414
$\sin E$	$9_n783\ 4420$	$(k) : \sqrt{p}$	9.596 3521
$\cos E$	9.900 0154		
Subtr.	0.104 4195		
$\cos E - e$	9.795 5959		

Aus I) erhält man:

$\cos i$	9.999 6774		
$\sin i$	8.585 7985		
$\cos\Omega = \sin a \sin A$	$9_n767\ 2706$	$\sin\Omega = \sin b \sin B$	9.908 9790
	$9_n908\ 8685$		9.909 0894
$\sin a \cos A$	$9_n908\ 6564$	$\sin b \cos B$	$9_n766\ 9480$
A	215°50' 2''78	B	125°47'37''36
$\sin a$	9.999 7879	$\sin b$	9.999 8896

Und aus II (pag. 100) folgt:

$A+u$, $B+u$, u	$83^\circ 40' 22''76$	$353^\circ 37' 57''34$	$227^\circ 50' 19''98$
$\sin(A+u)$, $\sin(B+u)$, $\sin u$	9.997 3467	9_n044 9456	9_n869 9708
$r \sin a$, $r \sin b$, $r \sin i$	0.432 1564	0.432 2581	9.018 1670
x, y, z	+ 2.688 4571	— 0.300 0570	— 0.077 2926

Die Unterschiede gegen $x_0+\xi$, $y_0+\eta$, $z_0+\zeta$ sind in Einheiten der siebenten Decimale beziehungsweise:

+ 7 — 2 — 1

was eine gute Uebereinstimmung ist.

Weiter findet sich nach III (pag. 100):

$\cos r$	9.858 5065	F	$322^\circ 11' 22''10$
Add.	0.091 7191	U	233 48 45.88
$\gamma \sin F$	9_n840 0724	γ	9.052 5751
	9.897 0505	c	9.648 9272
$\gamma \cos F$	9.950 2256		

$A+U$, $B+U$, U	$89^\circ 38' 48''66$	$350^\circ 36' 23''24$	$233^\circ 48' 45''88$
$\cos(A+U)$, $\cos(B+U)$, $\cos U$	7.789 8338	9.990 9898	9_n771 1050
$c \sin a$, $c \sin b$, $c \sin i$	0.048 7151	0.048 8108	8.231 7257
$dx:dt$, $dy:dt$, $dz:dt$	+ 0.002 7450	+ 0.445 4578	— 0.010 1306

so dass die Unterschiede wieder nur sind in Einheiten der siebenten Decimale:

0 0 — 1

Es erscheinen demnach die obigen Elemente einer strengen Controle unterworfen.

Ich werde nun das zweite Formelsystem anwenden und direct aus den gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten die Elemente ableiten; hierbei wird wohl die Anwendung siebenstelliger Tafeln nöthig sein, um die wünschenswerthe Genauigkeit zu erhalten. Vorerst sind wieder die ungestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten abzuleiten und nach XIII (pag. 103) die der gestörten Bewegung entsprechenden Werthe derselben zu bestimmen. Der erste Theil der Rechnung fällt demnach mit der oben (pag. 130, 131) durchgeführten zusammen. Ich entlehne deshalb derselben die folgenden Werthe:

$\log x$	0.429 5030	$\log (dx:dt)$	7.438 5423
$\log y$	9_n477 2035	$\log (dy:dt)$	9.648 8606
$\log z$	8_n888 1373	$\log (dz:dt)$	8_n005 8880

Nach V (pag. 103) findet sich:

$x\,dy$	0.078 3096	$y\,dz$	7.483 0915	$x\,dz$	8_n435 3910
$y\,dx$	6_n915 7458	$z\,dy$	8_n530 9439	$z\,dx$	6_n326 6796

Subtr.	0.000 2986	Subtr.	0.036 7638	Subtr.	0.003 3944
	0.078 6682		8.573 7077		8_n431 9966
		(wk)	9.837 6414		

$\sqrt{p}\sin i \sin \Omega$	8.736 0663	$\sqrt{p}\sin i$	8.827 0864	$\sqrt{p}$	0.241 2894
	9.908 9799		9.999 6774	p	0.482 5788
$\sqrt{p}\sin i \cos \Omega$	8_n594 3552	$\sqrt{p}\cos i$	0.240 9668	$\sin i$	8.585 7970
	125°48′49″46		2°12′29″31	$\cos i$	9.999 6774
				$\sin \Omega$	9.908 9799
				$\cos \Omega$	9_n767 2688

Aus VI (pag. 103) findet sich:

$x \cos \Omega$	0_n196 7718	$r \cos u$	0_n259 2305	x^2	0.859 0060
$y \sin \Omega$	9_n386 1834		9_n869 9719	y^2	8.954 4070
Add.	0.062 4587	$r \sin u$	0_n302 3403	Add.	0.005 3764
$y \cos \Omega \cos i$	9.244 1497	u	227°50′20″57	x^2+y^2	0.864 3824
$-x \sin \Omega \cos i$	0_n338 1603	r	0.432 3684	z^2	7.776 2746
Add.	0.036 4652			Add.	0.000 3544
$y \cos \Omega \cos i - x \sin \Omega \cos i$	0_n301 6951			r^2	0.864 7368
$z \sin i$	7_n473 9343			Probe: r	0.432 3684
Add.	0.000 0452				

Die Benützung der Formeln VII (pag. 103) führt zu folgenden Zahlen:

$x\,dx$	7.868 0453	$p : r$	0.050 2104
$y\,dy$	9_n120 0101	$\sin \varphi \sin v$	9_n069 9212
Add.	0.024 6657		9.858 5071
$x\,dx + y\,dy$	9_n101 3444	$\sin \varphi \cos v$	0.088 3564
$z\,dz$	6.894 0253	v	316°12′56″52
Add.	0.002 7028	$\frac{1}{2} v$	158° 6′28″26
$r\,dr$	9_n098 6416	$\sin \varphi$	9.229 8493
$\sqrt{p} : wk$	0.403 6480	φ	9°46′27″05
$1 : r$	0.567 6316	$\cos \varphi$	9.993 6498

Nach VIII (pag. 103) wird:

$45 + \frac{1}{2}\varphi$	49°53′13″52	E	322°35′40″50
$\cot g(45 + \frac{1}{2}\varphi)$	9.925 5510	$\sin E$	9_n783 5112
$\tan g \frac{1}{2} v$	0.604 0513	$\sin \varphi \sin E$	−5°54′30″89
$\frac{1}{2} E$	161°17′50″25	M	328°30′11″39

Durch die Anwendung von IX (pag. 103) findet sich:

ω 271°37′24″05

i 37°20′13″51

Schliesslich folgt aus X) pag. 104:

$$\begin{array}{rl} \log a & 0.405\ 2792 \\ \frac{1}{2}\log a & 0.247\ 6396 \\ \frac{3}{2}\log a & 0.742\ 9188 \\ \log k'' & 3.550\ 0066 \\ \mu & 641''3393 \end{array}$$

Aus der Formel XI) (pag. 104) findet sich aber $\mu = 641''33958$, welcher Werth der genauere ist; die Berechnung dieser Formel habe ich nicht angesetzt, da sich die diesbezüglichen Zahlen in dem obigen Beispiele wieder finden, und zwar in den letzten zwei Formeln von V) (pag. 101) und in XII*a*) und XII*b*) (pag. 102, 103). Als Controle hätte man wieder die Rückrechnung der Coordinaten und Geschwindigkeiten vorzunehmen, welche Controlrechnung ich aber hier übergehe, weil schon ein diesbezügliches Beispiel bei der ersten Methode ausführlich mitgetheilt erscheint. Durch Vergleichung der Zahlen erkennt man leicht die überwiegende Genauigkeit der ersten Methode und ich möchte dieselbe stets empfehlen; sie verursacht zwar einen grösseren Zeitaufwand, in Anbetracht aber, dass der Uebergang auf osculirende Elemente selten vorgenommen wird, und dass die Genauigkeitszunahme eine beträchtliche ist, kann dieser kaum allzusehr ins Gewicht fallen.

B. Specielle Störungen in den polaren Coordinaten.

§ 1. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Die Bestimmung der Störungen nach polaren Coordinaten gewährt in vielen Fällen ganz wesentliche Vortheile gegen die eben vorgetragene Methode, nach welcher die Störungen der rechtwinkeligen Coordinaten ermittelt werden, so dass es wünschenswerth erscheint, auf dieselbe hier näher einzugehen. Die Wahl der polaren Coordinaten kann in sehr verschiedener Weise vorgenommen werden, deren jede ihre gewissen Vortheile bei der Rechnung bietet; die zweckmässigste Form scheint mir aber jene von Hansen vorgeschlagene zu sein, mit den Modificationen, die Tietjen im Berliner Jahrbuche für 1877 veröffentlicht hat (dritte Methode), welche hier mit ganz geringen Abänderungen, auf welche übrigens Tietjen selbst schon hinweist, zum Vortrage gebracht wird.

Es dürfte zwar die von Hansen gewählte Form die Störungen im Allgemeinen etwas kleiner erscheinen lassen, als diese Methode, und deshalb der Uebergang auf osculirende Elemente für längere Zeit hinaus vermieden werden; doch ist der

Rechnungsmechanismus nach der letzteren Methode so bequem, dass er diesen Nachtheil wohl überwiegt.

Es sollen vorerst die Grundgleichungen der Störungstheorie hier wieder angesetzt werden, indem die Buchstaben in ihrer Bedeutung wie auf pag. 71 unverändert beibehalten sind; die Gleichungen sind nach einer einfachen Umsetzung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} &= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ x_1 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) - \frac{x}{\varrho^3} \right\} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} &= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ y_1 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) - \frac{y}{\varrho^3} \right\} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} &= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ z_1 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) - \frac{z}{\varrho^3} \right\} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Führt man die polaren Coordinaten ein durch die Relationen:

$$\begin{aligned} x &= r \cos b \cos l = (r) \cos l & x_1 &= r_1 \cos B_1 \cos L_1 \\ y &= r \cos b \sin l = (r) \sin l & y_1 &= r_1 \cos B_1 \sin L_1 \\ z &= r \sin b & z_1 &= r_1 \sin B_1 \end{aligned}$$

und betrachtet die Ebene der ungestörten Bahn als Fundamentalebene, so wird (r) die Projection des Abstandes des gestörten Körpers von der Sonne auf die ungestörte Bahnebene darstellen. Ueber die Lage der X-Achse in dieser Ebene, die vorläufig willkürlich erscheint, wird später (pag. 144) verfügt werden; überdies aber wird man sich über den Sinn, in welchem die positive Z-Achse zu zählen ist, zu einigen haben; es soll darüber die Annahme gemacht sein, dass vom Pole der positiven Z-Achse aus gesehen, der Himmelskörper sich umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr bewegt.

Setzt man zur Abkürzung:

$$K = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3},$$

so wird man aus den beiden ersten Gleichungen (1) erhalten, wenn man die erste derselben mit $-y$, die zweite mit x multiplicirt und dann addirt:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)}{dt} = \Sigma\, k^2 m_1 \{ x y_1 - y x_1 \} K;$$

Nun ist aber das angezeigte Differential nichts anderes, als das Differential des doppelten Sectordifferentials, für welches letztere man mit Benützung der polaren Coordinaten setzen darf:

$$2\, d\, Fl = (r)^2 \frac{dl}{dt};$$

ersetzt man überdies in dem Factor von K die rechtwinkeligen Coordinaten durch die polaren, so erhält man, wenn man zur Abkürzung die Grösse U einführt durch:

$$\Sigma\, k^2 m_1 \{ x y_1 - y x_1 \} K = \Sigma\, k^2 m_1\, K\, (r)\, r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) = \Sigma\, U,$$

als Resultat der Transformation:

$$\frac{d \left\{ (r)^2 \frac{dl}{dt} \right\}}{dt} = \Sigma\, U;$$

die Integration dieser Gleichung gibt:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = \text{Const} + \int \Sigma\, U\, dt\,,$$

wobei man zu beachten haben wird, dass die Bestimmung des Werthes des angezeigten Integrales mit Hilfe der mechanischen Quadratur erlangt werden kann. Die Bestimmung der Integrations-Constante unterliegt keiner Schwierigkeit, wenn man beachtet, dass in der ungestörten Bewegung (vergl. I pag. 43) die Relation besteht:

$$r_0^2 \frac{dv_0}{dt} = k \sqrt{p_0}\,.$$

wo p_0 den Parameter der ungestörten Bahn vorstellt; nun kann, sobald man von den Störungen absieht, dl mit dv_0 und weiter (r) mit r_0 identificirt werden; in diesem Falle wird aber auch

$$\Sigma\, U = 0$$

und es verschwindet demnach das Integral dieses Ausdruckes; man hat daher die Constante richtig bestimmt durch:

$$\text{Const} = k \sqrt{p_0}$$

und die erste Fundamentalgleichung für die Ermittelung der Störungen in den polaren Coordinaten wird sein:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = k \sqrt{p_0} + \int \Sigma\, U\, dt\,. \qquad \text{I}$$

Da diese Gleichung nur eine Relation zwischen (r) und l aufstellt, muss man bestrebt sein, eine weitere, neue Bedingungen enthaltende, Gleichung aufzusuchen; dieselbe wird leicht aus den beiden ersten Gleichungen in (1) erhalten werden können, wenn man die erste derselben mit x, die zweite mit y multiplicirt und addirt; man erhält so:

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2 (r)^2}{r^3} = \frac{d \left\{ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right\}}{dt} - \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right\} + \frac{k^2 (r)^2}{r^3}$$

$$= \Sigma\, k^2 m_1 \left\{ (x x_1 + y y_1)\, K - \frac{(r)^2}{\varrho^3} \right\}\,;$$

setzt man also, indem man unter dem Summenzeichen die rechtwinkeligen Coordinaten durch die polaren ersetzt, zur Abkürzung:

$$\Sigma\, R = \Sigma\, k^2 m_1 \frac{K\, r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l)}{(r)}$$

$$\Sigma\, w_1 = \Sigma\, k^2 m_1 \frac{1}{\varrho^3}\,,$$

so wird erhalten, wenn man linker Hand für die Differentialien der rechtwinkeligen Coordinaten die polaren einführt:

$$\frac{d \left\{ (r) \frac{d(r)}{dt} \right\}}{dt} - \left\{ \left(\frac{d(r)}{dt}\right)^2 + (r)^2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \right\} + \frac{k^2 (r)^2}{r^3} = (r)^2\, \Sigma\, R - (r)^2\, \Sigma\, w_1\,,$$

oder, indem man die angezeigte Differentiation ausführt und mit (r) beiderseits dividirt:

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k^2 r'}{r^3} = r' \, \Sigma R - r' \, \Sigma w_1 \; .$$

Diese Gleichung enthält aber noch die Grösse r, die durch r' zu ersetzen ist; der Unterschied beider ist aber offenbar zweiter Ordnung in Bezug auf die Breitenstörungen und wird im Allgemeinen fast unmerklich sein; doch kann auch hier die völlige Strenge in einfacher Weise erreicht werden. Man hat vorerst:

$$r^2 = r'^2 + z^2 \; ,$$

also ist

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r'^3} \left\{ 1 + \frac{z^2}{r'^2} \right\}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r'^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{z^2}{r'^2} \left(1 - \frac{5}{2 \cdot 2} \frac{z^2}{r'^2} + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} \frac{z^4}{2^2 r'^4} - \ldots \right) \right\} ;$$

die in den runden Klammern angesetzte Reihe ist aber, wenn man setzt:

$$q = \frac{z^2}{2 r'^2} \; ,$$

völlig identisch mit dem dritten Theile der von Encke bei seiner Methode benützten Grösse f (vergl. pag. 75 und Tafel XI); man kann also setzen:

$$\frac{r'}{r^3} = \frac{1}{r'^2} - \frac{3}{2} \frac{z^2}{r'^4} \left(\frac{f}{3} \right) \; ,$$

wobei man aber bei der Anwendung wohl stets wird annehmen dürfen:

$$\tfrac{1}{3} f = 1 \; ,$$

indem man hierbei nur Glieder vierter Ordnung in Bezug auf die Breitenstörungen übergeht; schreibt man also:

$$\Delta \Sigma R = \frac{3}{2} k^2 \frac{z^2}{r'^5} \left(\frac{f}{3} \right) \; ,$$

so wird man, wenn überdies, um abzukürzen, geschrieben wird:

$$\Sigma R - \Sigma w_1 + \Delta \Sigma R = H_2$$

für die obige Differentialgleichung haben:

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{r'^2} = r' \, H_2 \; . \qquad \text{II}$$

welches die zweite Fundamentalgleichung ist, die in Verbindung mit I (pag. 141) zur Kenntniss der Werthe r' und l führen wird.

Um nun die dritte Gleichung in (1) (pag. 140) in eine für die Bestimmung der auf der Fundamentalebene senkrechten Coordinate z passende Form überzuführen, setze man:

$$\Sigma W_1 = \Sigma k^2 m_1 \, K r_1 \sin B_1 \; ,$$

und wie dieses schon oben geschehen ist:

$$\Sigma w_1 = \Sigma k^2 m_1 \frac{1}{\varrho^3} \; ,$$

so wird man schreiben dürfen:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z \left\{ \frac{k^2}{r^3} + \Sigma w_1 \right\} = \Sigma W_1 \; ;$$

ersetzt man nun, wie dieses früher gezeigt wurde, r durch (r), so wird man haben:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(r)^3}\left\{1 + \frac{z^2}{(r)^2}\right\}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(r)^3}\left\{1 - \frac{3}{2}\,\frac{z^2}{(r)^2}\left(\frac{f}{3}\right)\right\}$$

wobei f mit dem Argumente $q = \frac{z^2}{2\,(r)^2}$ aus Encke's f-Tafel (Tafel XI) zu nehmen ist, und übrigens $\frac{1}{3}f$ wohl stets der Einheit gleich gesetzt werden darf, da dadurch nur Fehler 5ter Ordnung in Bezug auf die Breitenstörungen entstehen. Führt man nun die Abkürzungen:

$$w = \frac{k^2}{(r)^3} + \Sigma w_1$$

$$W_0 = \Sigma W_1 + \Delta \Sigma W$$

ein, wobei

$$\Delta \Sigma W = \frac{3}{2}k^2\,\frac{z^3}{(r)^5}\left(\frac{f}{3}\right)$$

angenommen ist, so erhält man als dritte Fundamentalgleichung:

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + w\,z = W_0 \quad . \qquad \text{III)}$$

Diese Gleichung III) unterscheidet sich vortheilhaft von den Gleichungen I) und II) dadurch, dass dieselbe unmittelbar eine Differentialgleichung für die Störung selbst ist, während die beiden anderen Gleichungen die Gesammtbewegung des gestörten Körpers, die derselbe durch seine gestörte Bewegung um die Sonne ausführt, beschreiben. Es wird daher für die Genauigkeit und Bequemlichkeit der Rechnung wünschenswerth erscheinen, die Gleichungen I) und II) so zu transformiren, dass dieselben sich in Differentialgleichungen für die Störungen in (r) und l verwandeln.

Dieses kann in mehrfacher Weise geschehen, je nachdem man die Störungen zerlegt und auf die Coordinaten r und l vertheilt; die von Hansen und Tietjen gewählte Zerlegung scheint die grössten Vortheile zu bieten, weshalb ich dieselbe den weiteren Entwickelungen zu Grunde lege.

Zerlegt man den Bogen l in die zwei Theile V und N, so ist diese Zerlegung willkürlich und man kann für eine dieser Grössen eine beliebige Annahme machen, wenn man nur dafür Sorge trägt, dass durch entsprechende Bestimmung des anderen Bogens der Relation

$$l = V + N$$

stets genügt wird.

Es soll nun N so bestimmt werden, dass der Gleichung:

$$(r)^2\,\frac{d N}{d t} = \int \Sigma\,U\,d t \qquad 2)$$

genügt wird. Da hier N nur an eine Differentialgleichung gebunden erscheint, so bleibt noch eine willkürliche Constante übrig, deren zweckmässige Bestimmung später offenkundig wird.

Differentiirt man die Relation zwischen l, V und N, so wird:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dN}{dt} \tag{3}$$

und wenn nun beiderseits mit $(r)^2$ multiplicirt und die durch die Gleichung 2) ausgedrückte Bedingung einführt, so findet sich:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = (r)^2 \frac{dV}{dt} + \int \Sigma U dt\,; \tag{4}$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit I (pag. 141) so resultirt sofort eine Bestimmung für V, indem beide Gleichungen gleichzeitig nur bestehen können, wenn man:

$$(r)^2 \frac{dV}{dt} = k\sqrt{p_0} \tag{5}$$

setzt, so dass V ebenfalls durch eine Differentialgleichung bestimmt erscheint, sobald über N eine der eben gewählten Bedingung entsprechende Annahme gemacht ist. Setzt man nun die erlangten Bedingungen in 3) ein, so wird:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{k\sqrt{p_0}}{(r)^2} + \frac{1}{(r)^2} \int \Sigma U dt \tag{5a}$$

und hieraus folgt durch Integration:

$$l = \int \frac{k\sqrt{p_0}}{(r)^2}\, dt + \int \frac{1}{(r)^2}\, dt \int \Sigma U dt + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstante wird man durch die folgenden Betrachtungen gelangen. Wären keine Störungen vorhanden, so würde das zweite Integral verschwinden, das erstere kann aber, da:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}$$

ist, wo v die wahre Anomalie vorstellt, als die wahre Anomalie aufgefasst werden und wir haben daher in dem Falle der ungestörten Bewegung:

$$l_0 = v_0 + \text{Const.}$$

Bei der Einführung der polaren Coordinaten statt der rechtwinkeligen wurde zwar die XY-Ebene als Fundamentalebene bezeichnet, jedoch über die Lage der X-Achse oder über den Ausgangspunkt der Zählung von l wurde nichts festgesetzt; trifft man jetzt, um Alles unzweideutig bestimmt zu haben, die Verfügung, dass l vom aufsteigenden Knoten der ungestörten Bahn in der Ekliptik gezählt wird, so ist l das Argument der Breite und die Integrations-Constante ist demnach nichts anderes, als der Abstand des Perihels vom Knoten, eine Grösse, die durch ω_0 bezeichnet werden soll, indem der Index »0« darauf hinweist, dass dieser Werth den ungestörten Elementen zu entlehnen ist.

Mit Rücksicht auf diese gewählte Bezeichnung möge weiter eingeführt werden:

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = \frac{1}{(r)^2} \int \Sigma U dt \tag{IVa}$$

wobei man leicht erkennen wird, dass man durch eine mechanische Integration den Werth von $\Delta\omega$ wird ermitteln können. Man hat dann statt des obigen Ausdruckes für l zu setzen:

$$l = V + \omega_0 + \Delta\omega\,. \tag{IVb}$$

Der gewählten Bestimmung gemäss wird sich demnach V nur um eine Grösse von der Ordnung der Störungen von der wahren Anomalie v unterscheiden und es wird daher möglich sein, an die ungestörte mittlere Anomalie M eine Correction ΔM von derselben Ordnung anzubringen, die bewirkt, dass durch Anwendung der bekannten Formeln zur Bestimmung der wahren Anomalie unter Benützung der ungestörten Elemente für dieselbe V resultirt. Indem vorerst diese Correktion ΔM als bekannt vorausgesetzt wird und die Bestimmung derselben für später vorbehalten bleibt, ergibt sich das folgende Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned} M &= M_0 + \mu_0 t + \Delta M \\ M &= E - e_0'' \sin E \\ (r) \sin V &= a_0 \cos\varphi_0 \sin E \\ (r) \cos V &= a_0 (\cos E - e_0) \end{aligned}\right\} \qquad \text{V)}$$

In diesen Ausdrücken stellt, wie man leicht sieht, M_0 die ungestörte mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche, t die seit der Epoche verflossene Zeit in mittleren Sonnentagen, μ_0, a_0, $\sin\varphi_0 = e_0$, beziehungsweise die mittlere siderische Bewegung, die grosse Achse und die Excentricität der ungestörten Elemente vor. Es ist klar, dass der durch diese Formeln gefundene Radiusvector, der gleichsam den Radiusvector in der ungestörten Bahn zur gestörten mittleren Anomalie vorstellt, nicht mit (r) übereinstimmen, sondern sich ebenfalls um eine Grösse von der Ordnung der Störungen von demselben unterscheiden wird. Setzt man also:

$$(r) = (r)(1 + \nu) \qquad \text{VI)}$$

so wird die Bestimmung des gestörten Ortes keine Schwierigkeit haben, sobald ΔM und ν gegeben sind. Es wird daher als die nächste Aufgabe bezeichnet werden müssen, aus den Differentialgleichungen I) und II) (pag. 141, 142) solche abzuleiten, welche die Bestimmung von ΔM und ν ermöglichen, womit, falls diese Bestimmung gelungen ist, noch der Vortheil erreicht wird, dass die Rechnung statt der Gesammtbewegung nur die verhältnissmässig geringen Störungen zu bestimmen hat.

Ehe aber an die Lösung dieser Aufgabe geschritten werden soll, mag noch die Bemerkung Platz greifen, dass diese Wahl der Coordinaten ohne Schwierigkeit auf Bahnen von beliebiger Excentricität angewendet werden kann, und nicht auf solche von mässiger Excentricität beschränkt ist, wie dies auf den ersten Blick erscheinen könnte, da die Störung in der mittleren Anomalie hier auftritt. Es erweist sich sogar gerade in solchen Fällen die von Hansen getroffene Wahl der Coordinaten besonders vortheilhaft; doch kann auf die nothwendigen Aenderungen erst eingegangen werden, wenn die diesbezüglichen Formeln entwickelt sind.

Um nun die oben angesetzte Aufgabe zu lösen, muss die differentielle Relation zwischen (r) und ν ermittelt werden. Aus der Gleichung VI) resultirt sofort:

$$(r) = \frac{p_0 (1 + \nu)}{1 + e_0 \cos V}; \qquad 6)$$

die Differentiation nach den mit der Zeit veränderlichen Grössen ergibt:

$$\frac{d\,(r)}{dt} = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos V} \cdot \frac{d\nu}{dt} + \frac{p_0\,(1+\nu)}{(1 + e_0 \cos V)^2}\, e_0 \sin V\, \frac{dV}{dt}$$

welcher Ausdruck mit Rücksicht auf die Gleichungen 5) und 6) (pag. 144, 145) sich in:

$$\frac{d\,(r)}{dt} = \frac{(r)}{1+\nu} \cdot \frac{d\nu}{dt} + \frac{k\, e_0 \sin V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}} \tag{7}$$

verwandelt; diese Gleichung ergibt durch weitere Differentiation:

$$\frac{d^2\,(r)}{dt^2} = \frac{(r)}{1+\nu}\,\frac{d^2\nu}{dt^2} - \frac{(r)}{(1+\nu)^2}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 + \frac{1}{1+\nu}\,\frac{d\,(r)}{dt} \cdot \frac{d\nu}{dt} + \frac{k\, e_0 \cos V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}}\,\frac{dV}{dt} - \frac{k\, e_0 \sin V}{(1+\nu)^2\sqrt{p_0}}\,\frac{d\nu}{dt}\ ;$$

führt man nun in dem mittleren Gliede dieses Ausdruckes für $\frac{d\,(r)}{dt}$ den Werth aus 7) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2\,(r)}{dt^2} = \frac{(r)}{1+\nu} \cdot \frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k\, e_0 \cos V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}} \cdot \frac{dV}{dt}\ ,$$

und wenn jetzt noch $\frac{dV}{dt}$ durch die Relation aus 5) (pag. 144) ersetzt und dabei beachtet wird, dass zu Folge der Gleichung 6) (pag. 145):

$$e_0 \cos V = \frac{p_0\,(1+\nu)}{(r)} - 1$$

und zudem:

$$\frac{1}{1+\nu} = 1 - \frac{\nu}{1+\nu}$$

ist, so folgt:

$$\frac{d^2\,(r)}{dt^2} - \frac{k^2 p_0}{(r)^3} + \frac{k^2}{(r)^2} = \frac{(r)}{1+\nu} \cdot \frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2}{(r)^2} \cdot \frac{\nu}{1+\nu}\ ; \tag{8}$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit II) (pag. 142), so findet man linker Hand vom Gleichheitszeichen bis auf das mittlere Glied eine völlige Uebereinstimmung; dasselbe lässt sich jedoch ohne Schwierigkeit so zerlegen, dass auch dieses Glied identisch gemacht wird. Die Quadrirung der Gleichung I) (pag. 141) gibt nämlich:

$$(r)^4 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = k^2 p_0 + 2k\sqrt{p_0}\left\{1 + \frac{\int \Sigma\, U\, dt}{2k\sqrt{p_0}}\right\}\int \Sigma\, U\, dt\ ;$$

schreibt man, um abzukürzen:

$$\int U'\, dt = \left(1 + \frac{\int \Sigma\, U\, dt}{2k\sqrt{p_0}}\right)\int \Sigma\, U\, dt$$

so bestimmt sich aus dieser Gleichung der Werth von $\frac{k^2 p_0}{(r)^3}$, wie folgt:

$$\frac{k^2 p_0}{(r)^3} = (r)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - \frac{2k\sqrt{p_0}}{(r)^3}\int U'\, dt$$

und hiermit kann die Gleichung 8) geschrieben werden:

$$\frac{d^2\,(r)}{dt^2} - (r)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{(r)^2} = \frac{(r)}{1+\nu}\,\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2}{(r)^2} \cdot \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{2k\sqrt{p_0}}{(r)^3}\int U'\, dt$$

welche nun in Verbindung mit II) (pag. 142) die sofortige Elimination von $d^2\,(r)$ und dl gestattet. Führt man die Elimination aus und schreibt:

$$H_1 = \frac{2k\sqrt{p_0}}{r_1^4}\int V'\,dt$$

$$H_1 + H_2 = H_0$$

$$h = \frac{k^2}{r^3} - H_0$$

so wird die verlangte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + h\,r = H_0\,. \qquad \text{VII)}$$

welche rücksichtlich der Form mit der Gleichung III (pag. 143) identisch ist und eine Differentialgleichung zur Bestimmung von r abgibt, während III) zur Bestimmung von z gedient hat. Da überdies $\Delta\omega$ bereits durch die Differentialgleichung IV (pag. 144) bestimmt erscheint, so erübrigt zur Bestimmung von l nichts weiter, als die Ermittelung des Differentialausdruckes für ΔM. Um diesen zu erhalten, nehme man die zwei Gleichungen:

$$\sin V = \frac{a_0 \cos\varphi_0}{(r)} \sin E$$

$$(r) = a_0 (1 - e_0 \cos E)$$

vor, aus denen man sofort:

$$\sin V = \frac{\cos\varphi_0 \sin E}{1 - e_0 \cos E}$$

findet. Differentiirt man diesen Ausdruck vorerst logarithmisch, so wird:

$$\frac{\cos V}{\sin V}\,dV = \frac{\cos E}{\sin E}\,dE - \frac{e_0 \sin E}{1 - e_0 \cos E}\,dE = \frac{r}{(r)}\,\frac{\cos V}{\sin E}\,dE$$

und man hat somit:

$$dV = \frac{\sin V}{\sin E}\,dE = \frac{a_0 \cos\varphi_0}{(r)}\,dE\,.$$

Ferner liefert die Gleichung:

$$M = E - e_0 \sin E$$

durch Differentiation und eine leichte Substitution:

$$dM = \frac{(r)}{a_0}\,dE\,;$$

es ist also:

$$\frac{dV}{dM} = \frac{dV}{dE}\cdot\frac{dE}{dM} = \frac{a_0^2 \cos\varphi_0}{(r)^2} = \frac{k\sqrt{p_0}}{\mu_0 (r)^2}$$

wobei von der bekannten Relation:

$$\mu_0 = \frac{k}{a_0^{\frac{3}{2}}}$$

Gebrauch gemacht wurde. Aus der ersten Gleichung in V* findet sich aber durch Differentiation:

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 + \frac{d\Delta M}{dt}$$

also ist:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dM}\cdot\frac{dM}{dt} = \frac{k\sqrt{p_0}}{\mu_0 (r)^2}\left\{\mu_0 + \frac{d\Delta M}{dt}\right\}\,;$$

multiplicirt man nun beiderseits mit $(1+\nu)^2$ und beachtet die Relationen (5) (pag. 144) und VII) (pag. 145), so findet sich leicht:

$$k\sqrt{p_0} = k\sqrt{p_0}\,(1+\nu)^2 \left\{1 + \frac{1}{\mu_0}\,\frac{d\,\Delta M}{dt}\right\}$$

woraus:

$$\frac{d\,\Delta M}{dt} = \mu_0\,\frac{1-(1+\nu)^2}{(1+\nu)^2}$$

folgt; setzt man also:

$$\sigma = 2\,\frac{1+\frac{1}{2}\nu}{(1+\nu)^2}$$

so wird die letzte noch nöthige Differentialgleichung zur vollständigen Ermittelung der Störungen:

$$\frac{d\,\Delta M}{dt} = -\,\mu_0\,\nu\,\sigma\,, \qquad \text{VIII}$$

wobei σ mit dem Argument ν leicht in eine Tafel gebracht werden kann. Eine solche Tafel, auf 6 Stellen berechnet*), ist diesem Werke als Tafel XIII angehängt; dieselbe gibt den Werth von $\log \sigma$ für $10^7\,\frac{80+40\,\nu}{(1+\nu)^2}$; weshalb gerade diese Form gewählt wurde, wird sofort bei der Zusammenstellung der Formeln für die praktische Rechnung klar werden. Will man übrigens von dieser Tafel, die kaum eine wesentliche Abkürzung der Rechnung bedingt, absehen, so hat man:

$$\sigma = \frac{1}{1+\nu}\left(1 + \frac{1}{1+\nu}\right)$$

zu setzen, welcher Ausdruck sich leicht mit Hilfe der Additionslogarithmen berechnet; es ist dann:

$$\frac{d\,\Delta M}{dt} = -\,(w\,\mu_0)\,\sigma\,\nu$$

wo w die für t geltende Zeiteinheit vorstellt.

Die Lösung des vorliegenden Problems ist demnach in den folgenden 4 Differentialgleichungen enthalten, die ich übersichtlich zusammengestellt aus der vorstehenden Entwickelung hier hervorhebe:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \nu}{dt^2} + h\,\nu = H_0 \\ &\frac{d\,\Delta M}{dt} = -\,\mu_0\,\nu\,\sigma \\ &\frac{d^2 z}{dt^2} + (w)\,z = W_0 \\ &\frac{d\,\Delta\,\omega}{dt} = \frac{1}{r^2}\int \Sigma\, U\,dt \end{aligned}\right\} \qquad \text{IX}$$

Ehe ich daran gehe, den Nachweis zu liefern, dass diese Differentialgleichungen ohne allzugrosse Schwierigkeiten die angesetzte Lösung in aller Strenge erreichen lassen, will ich auf jene Modificationen aufmerksam machen, die bei Bahnen mit starker Excentricität, also bei Kometenbahnen mit mehr parabolischem

*) Die Rechnung der Tafel selbst ist von R. Schram 10stellig durchgeführt worden.

Charakter, mit den obigen Gleichungen vorzunehmen wären. Man wird sofort gewahren, dass man nur die zweite Gleichung in IX zu modificiren hat, indem die übrigen durch diesen Umstand nicht berührt erscheinen.

Um nun diese Gleichung in eine für alle Fälle brauchbare Form umzuändern, soll anstatt der Störung in der mittleren Anomalie die Störung der Zeit ermittelt werden, also jenes Zeitintervall, welches der Himmelskörper bedarf, um den Bogen $V - v_0$ für die gegebene Epoche in der ungestörten Bewegung zu durchlaufen. Nun ist aber:

$$\mu_0 \Delta t = \Delta M$$

somit wird:

$$\frac{d\,\Delta t}{dt} = -\sigma v \qquad \text{X}$$

die Gleichung für die Störung in der Zeit, wodurch die verlangte Transformation erreicht ist.

Da bei Kometenbahnen die Hauptstörungen gewöhnlich die Zeit des Perihels treffen, so möchte ich gerade in der von Hansen getroffenen Wahl der polaren Coordinaten, wo die Störung des zur gestörten Anomalie gehörigen ungestörten Radiusvector ermittelt wird, einen ganz besonderen Vortheil erblicken und glaube, dass die Anwendung dieser Methode für periodische Kometen, falls man Störungen in den Coordinaten bestimmen will, besonders zu empfehlen ist. Will man jedoch die Störungen für eine Kometenbahn nur so weit entwickeln, dass man die Beobachtungen einer Erscheinung von den Störungen befreien will, ein Fall, der bei den meisten Kometen, die keine verhältnissmässig kurze Periode haben, statt hat, so wird in diesen Fällen wohl die Anwendung der Encke'schen Methode als besonders bequem empfohlen werden dürfen.

---

§ 2. Integration der Differentialgleichungen.

Die Integration der Differentialgleichungen wird bei dieser Methode, ähnlich so, wie es bei Encke's Methode geschehen ist, vorgenommen werden können, wobei jedoch der erleichternde Umstand hinzutritt, dass die die Rechnung erschwerenden mit q verbundenen Glieder hier nicht vorkommen. Eigentlich bedürfen nur die erste und dritte Gleichung in IX des vorangehenden Paragraphen einer näheren Betrachtung, da die anderen, als auf einer einfachen Integration beruhend, kein näheres Eingehen erfordern.

Die beiden angezogenen Gleichungen haben die gemeinsame Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = P.$$

Diese Gleichungen kommen in doppelter Weise in Betracht, indem einerseits beim Beginn der Rechnung, wo nichts Anderes über x bekannt ist, als dass dasselbe in Anbetracht der Nähe des Osculationspunktes klein sein muss, ein zweck-

mässiges Verfahren anzugeben ist, um eine indirecte Rechnung zu vermeiden; andererseits werden sich im Verlaufe der Rechnung durch die mechanische Quadratur und durch die Kenntniss der vorangehenden Werthe, für x genügende Annäherungen finden lassen, um auch in diesen Fällen die lästige indirecte Rechnung zu umgehen, besonders wenn man die Methode zu Hilfe nimmt, die Tietjen im Berliner Jahrbuche für 1877 für diesen letzteren Fall publicirt hat. Es soll zunächst der Beginn der Rechnung in's Auge gefasst werden.

Am zweckmässigsten ist es unter allen Umständen, die Rechnung so anzulegen, dass dieselbe der Zeit nach in regelmässigen Intervallen fortschreitet und dass die Osculationsepoche in die Mitte zwischen zwei Werthe fällt; bezeichnet man daher irgend einen zweiten Differentialquotienten des Störungswerthes mit $f(a+iw)$, so wird für den ersten Werth, der um ein halbes Intervall der Osculationsepoche nachfolgt $f(a)$ zu setzen sein, für den vorangehenden Werth $f(a-w)$ etc. Berücksichtigt man daher das Differenz- und Integrationsschema (pag. 4), welches bei der mechanischen Quadratur ausführlich auseinandergesetzt wurde, so kommt die Epoche der Osculation auf die Zeile $(a-\frac{1}{2}w)$.

Man wird für den Anfang der Rechnung 4 Werthe für die Differentialquotienten berechnen und zwar so, dass 2 Werthe der Osculationsepoche vorangehen und 2 Werthe nachfolgen, und hierbei die Störungen bei der Berechnung der Coëfficienten der Differentialgleichungen ganz weglassen; aus dieser Vernachlässigung der zweiten Potenzen der störenden Massen kann bei der Nähe der Osculationsepoche wohl niemals ein merkbarer Fehler entstehen.

Hat man sich in dieser Weise 4 Werthe für die Coëfficienten der Differentialgleichungen verschafft, so wird die Bestimmung der zweiten Differentialquotienten und die Bestimmung der Anfangsconstanten der mechanischen Quadraturen in der folgenden Weise vorgenommen werden können. Die 4 erlangten Werthe seien der Reihe nach:

$$\begin{array}{ll} p_{-2} & P_{-2} \\ p_{-1} & P_{-1} \\ p_{0} & P_{0} \\ p_{+1} & P_{+1} \end{array}$$

wobei der Index auf die gewählte Zeitepoche unzweideutig hinweist. Für x wird man, wenn mit t die Zeit in Einheiten des Intervalles bezeichnet wird, die Form aufstellen können:

$$x = x + x't + \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \delta t^5 + \ldots$$

wobei die Coëfficienten x, x', α, β, γ, δ einer näheren Bestimmung bedürfen. Differentiirt man, so wird:

$$\frac{dx}{dt} = x't + 2\alpha t + 3\beta t^2 + 4\gamma t^3 + 5\delta t^4 + \ldots$$

und weiter:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\alpha + 2\cdot 3\beta t + 3\cdot 4\gamma t^2 + 4\cdot 5\delta t^3 + \ldots$$

Zählt man die Zeit von der Osculationsepoche aus, so müssen für die Zeit $t = 0$, d. i. für die Zeit der Osculation sowohl die Coordinaten als auch die Geschwindigkeiten in der ungestörten und gestörten Bewegung nach der Idee der osculirenden Elemente identisch sein; man hat daher für x und x' sofort die Bestimmung erlangt, dass beide der Null gleich sein müssen. Man darf daher für x die Form aufstellen:

$$x = \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \delta t^5 + \ldots$$

Die Werthe für p und P werden ebenfalls eine Entwickelung nach steigenden Potenzen der Zeit zulassen und man wird setzen dürfen:

$$P = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \ldots$$
$$p = a + bt + ct^2 + dt^3 + \ldots$$

Da die numerischen Werthe für P und p gegeben sind, so wird man leicht aus dem Differenzschema die Coëfficienten dieser Gleichungen ableiten können. Es soll dies an den Werthen von P ausführlich erläutert werden; bildet man demnach das folgende Differenzschema, welches sofort verständlich ist, wenn man hiermit die Auseinandersetzungen auf pag. 4 vergleicht, so erhält man:

$$\begin{array}{llll}
P_{-2} & & & \\
 & f^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{3}{2}\omega) & & \\
P_{-1} & & f^{\mathrm{II}}(a - \omega) & \\
 & f^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}\omega) & & f^{\mathrm{III}}(a - \tfrac{1}{2}\omega) \\
P_{0} & & f^{\mathrm{II}}(a) & \\
 & f^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) & & \\
P_{+1} & & &
\end{array}$$

dann ist, wie dies eine leichte und offenkundige Entwickelung zeigt, die mit der auf pag. 26 ff. identisch ist:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}(P_{-1} + P_0) - \tfrac{1}{16}\{f^{\mathrm{II}}(a - \omega) + f^{\mathrm{II}}(a)\} \\
B &= f^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{24} f^{\mathrm{III}}(a - \tfrac{1}{2}\omega) \\
C &= \tfrac{1}{4}\{f^{\mathrm{II}}(a - \omega) + f^{\mathrm{II}}(a)\} \\
D &= \tfrac{1}{6} f^{\mathrm{III}}(a) \quad .
\end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Eine analoge Entwickelung kann für die Coëfficienten a, b, c und d vorgenommen werden, doch wird die Berechnung auf die beiden ersten, nämlich auf a und b beschränkt werden können, wie dies die sofort folgenden Ausführungen zeigen.

Substituirt man die für x, P und p aufgestellten Ausdrücke in die obige (pag. 149) Differentialgleichung, so findet sich:

$$2\alpha + 6\beta t + (12\gamma - a\alpha)t^2 + (20\delta + \beta a + b\alpha)t^3 = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 ,$$

woraus sich sofort durch die Vergleichung ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{A}{2} , & \gamma &= \tfrac{1}{12}\left(C - \frac{aA}{2}\right) \\
\beta &= \frac{B}{6} , & \delta &= \tfrac{1}{20}\left(D - \frac{aB}{6} - \frac{bA}{2}\right) \quad .
\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Der letzte Coëfficient δ wird in der Regel so klein, dass man denselben wird übergehen können. Setzt man nun der Reihe nach in dem Ausdrucke für x:

$$x = \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \delta t^5 + \ldots \qquad 3)$$

$t = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ und $+\frac{3}{2}$, so erhält man die vier zu den gegebenen Zeitmomenten gehörigen Werthe der Störung und kann dann berechnen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P - px\ . \qquad 4)$$

Scheinbar einfacher gestaltet sich die Sache, wenn man dieselbe Substitution in dem Ausdrucke für $\frac{d^2x}{dt^2}$ ausführt; es ist dann:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A + Bt + \left(C - \frac{aA}{2}\right) t^2 + \left(D - \frac{aB}{6} - \frac{bA}{2}\right) t^3\ ;$$

hierbei wird es jedoch nothig, das letzte Glied mitzunehmen und die Coëfficienten genau zu berechnen, was im ersteren Falle wegen der Kleinheit des Factors p nicht nöthig ist.

Es sollen nun diese Formeln durch ein ausführliches Beispiel erläutert werden, und zwar nach der ersteren Form, der ich unter allen Umständen den Vorzug gebe.

Das für Erato unten ausführlich mitgetheilte Beispiel hat bei Beginn der Rechnung für die Berechnung der zweiten Differentialquotienten von x ergeben:

	$p = h$				$P = H_0$			
1874 Oct. 27	+ 0.009590				+ 169.24			
		− 37				− 55.55		
Dec. 6	9553		− 46		+ 113.69		+ 4.75	
		+ 9		− 2		− 50.80		− 0.16
1875 Jan. 15	9562		− 48		+ 62.89		+ 4.59	
		+ 57				− 46.21		
Febr. 24	9619				+ 16.68			

Daraus erhält man, indem für diese Form der Rechnung die Mitnahme des Coëfficienten ∂ unnöthig ist, die Werthe der Coëfficienten durch (1) (pag. 151):

$$A = +88.29 - 0.58 = +87.71$$
$$B = -50.80 + 0.01 = -50.79$$
$$C = +2.33$$
$$\log a = 7.080\ ;$$

es ist also nach (2) und (3) (pag. 151):

$$x = +43.85\, t^2 - 8.465\, t^3 + 0.101\, t^4\ ,$$

und demgemäss durch successive Substitution der Werthe $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$ für t:

$$x_{-2} = +128.04$$
$$x_{-1} = +12.03$$
$$x_{0} = +9.91$$
$$x_{+1} = +70.92\ .$$

und nach der Formel (4) finden sich demnach die gesuchten zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2 r_{-2}}{dt^2} = + 168.01$$

$$\frac{d^2 r_{-1}}{dt^2} = + 113.58$$

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} = + 62.80$$

$$\frac{d^2 r_{+1}}{dt^5} = + 16.00$$

Die eben entwickelte Methode der Bestimmung der zweiten Differentialquotienten wird bei der Hansen-Tietjen'schen Methode ebenfalls bei der Bestimmung der Störung der auf der Bahnebene senkrechten Coordinate z in Anwendung gezogen werden müssen, doch wird der Umstand, dass diese letztere Störung sehr klein ist, diese Rechnungsoperation ungemein rasch erledigen lassen.

Es wird also sein:

	$p = [w]$		$P = W_0$			
1874 Oct. 27	0.009647		— 25.89			
		— 48		+ 1.84		
Dec. 6	9599		— 24.05		+ 19	
		0		+ 2.03		— 11
1875 Jan. 15	9599		— 22.02		+ 8	
		+ 49		+ 2.11		
Febr. 24	9648		— 19.91			

$$z = - 11.520\, t^2 + 0.339\, t^3 + 0.015\, t^4$$

also:

$$z_{-2} = - 27.00$$

$$z_{-1} = - 2.92$$

$$z_0 = - 2.84$$

$$z_{+1} = - 24.71$$

und

$$\frac{d^2 z_{-2}}{dt^2} = - 25.63$$

$$\frac{d^2 z_{-1}}{dt^2} = - 24.02$$

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} = - 21.99$$

$$\frac{d^2 z_{+1}}{dt^2} = - 19.67$$

Die übrigen in der Hansen-Tietjen'schen Methode auftretenden Integrale sind einfache Quadraturen und bedürfen daher keiner weiteren Entwickelungen.

Den Umstand, dass p stets klein ist, hat Hansen benützt, um für den Beginn der Rechnung ebenfalls ein directes Integrationsverfahren anzuwenden; denn es ist offenbar:

$$x = \iint P\,dt^2 - \iint p\,dt^2 \iint P\,dt^2 + \iint p\,dt^2 \iint p\,dt^2 \iint P\,dt^2 - \dots$$

Ich begnüge mich jedoch mit dieser Andeutung, da dieses Verfahren, wiewohl es den Vortheil einer viel ausgedehnteren Anwendung besitzt, bei weitem

unbehülflicher und mühsamer sich gestaltet, als die oben angegebene Methode. Der Vorwurf der Beschränkung auf die ersten Intervalle ist kein massgebender, da man, sobald die Rechnung im Gange ist, sofort einen anderen Weg einzuschlagen in der Lage ist, der sich sehr bequem erweist und den ich nunmehr auseinandersetzen will. Uebrigens lässt sich ein viel bequemeres analytisches Verfahren angeben, von welchem im letzten Abschnitte der Störungsrechnung die Rede sein wird, doch sind die oben in Vorschlag gebrachten Methoden für die vorliegenden Zwecke bequemer, weshalb ich mich auf diesen Hinweis beschränke.

Sobald man also die vier zweiten Differentialquotienten ermittelt hat, wird man sofort in der bekannten Weise (vergl. pag. 53) die doppelte mechanische Quadratur auf dieselben anwenden, also zunächst die Anfangsconstanten für die erste und zweite summirte Reihe berechnen nach:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) &= -\tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) - \ldots \\
{}^{\mathrm{II}}f(a-w) &= +\tfrac{1}{24}f(a) - \tfrac{17}{5760}\left\{2f^{\mathrm{II}}(a) + f^{\mathrm{II}}(a-w)\right\} + \ldots
\end{aligned}
$$

dann wird man die einfache und doppelte Summation ausführen und auf diese Art, wenn die Rechnung bis zum Werthe $f(a+(i-1)w)$ durchgeführt ist, den genauen Werth von ${}^{\mathrm{II}}f(a+iw)$ ermittelt haben.

Weiter wird man sich zu erinnern haben, dass nach der Theorie der mechanischen Quadraturen:

$$
x_i = {}^{\mathrm{II}}f(a+iw) + \tfrac{1}{12}f(a+iw) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+iw) + \ldots
$$

ist; dieser Ausdruck wird, unter der Voraussetzung, dass die Berechnung der vorhergehenden Intervalle einschliesslich des Intervalles $a+(i-1)w$ durchgeführt ist, eine genügende Näherung für den Werth von x_i ergeben, um hiermit den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2x_i}{dt^2}$ mittelst der Relation:

$$
\frac{d^2x_i}{dt^2} = P - px_i
$$

näherungsweise berechnen zu können; in dem letzteren Ausdrucke bedarf es wegen des kleinen Factors p nur einer genäherten Kenntniss von x_i, so dass es vollkommen genügen wird, zu dem bereits genau bekannten Werthe von ${}^{\mathrm{II}}f(a+iw)$ die Werthe von $\frac{1}{12}f(a+iw)$ und $-\frac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+iw)$ nach dem Gange der Funktion in dem vorangehenden Differenzschema hypothetisch hinzuzufügen; ein Fehler in diesen Annahmen geht nach den eben gemachten Betrachtungen ganz wesentlich verringert ins Resultat über. Jedenfalls also wird dieses Verfahren für

$$
\frac{d^2x_i}{dt^2} = f(a+iw)
$$

einen hinreichend genauen Werth finden lassen, welcher, einer weiteren Rechnung zu Grunde gelegt, bei der nur noch $f^{\mathrm{II}}(a+iw)$ hypothetisch anzunehmen wäre, den völlig strengen Werth wird finden lassen. Eine etwas fehlerhafte hypothetische An-

nahme für $f^{II}(a+iw)$ wird aber niemals, weder in der ersten, noch in der zweiten Annäherung, einen merkbaren Fehler verursachen können, da das Resultat nur um das Product aus der fehlerhaften Annahme in $\frac{p}{240}$ verfälscht wird.

Dieses indirecte Verfahren hat indess manche Unannehmlichkeiten und vergrössert die Arbeit; dabei mag bemerkt werden, dass es, wie die Erfahrung lehrt, nicht immer möglich ist, für $f(a+iw)$ nach dem Gange der Differenzen genügende Annäherungen einzuführen, um stets einer Wiederholung der Rechnung überhoben zu sein. Es lässt sich aber ein Verfahren angeben, welches die indirecte Rechnung völlig beseitigt; dasselbe ist von Tietjen im Berliner Jahrbuch für 1877 zuerst angegeben worden.

Den gemachten Auseinandersetzungen gemäss wird man stets in der Lage sein, den Ausdruck:

$$S_p = {}^{II}f(a+iw) - \frac{1}{240}f^{II}(a+iw) + \frac{1}{12}P \qquad 5)$$

mit völliger Schärfe zu berechnen, da die einzige unbekannte Grösse $f^{II}(a+iw)$ stets mit genügender Annäherung aus dem Gange der Funktion ermittelt werden kann, wenn man dieselbe, was in den meisten Fällen ohne Nachtheil geschehen kann, nicht ganz übergehen will. Es wird deshalb vorausgesetzt werden können, dass S_p ein völlig bekannter Werth ist.

Vergleicht man diesen Werth mit:

$$x_i = {}^{II}f(a+iw) + \frac{1}{12}f(a+iw) - \frac{1}{240}f^{II}(a+iw) + \ldots$$

so sieht man, dass man wegen

$$f(a+iw) = \frac{d^2x_i}{dt^2} = P - px_i$$

setzen darf:

$$px_i = pS_p - \frac{1}{12}p^2x_i\,;$$

schreibt man also:

$$p' = \frac{p}{1+\frac{1}{12}p} \qquad 6)$$

so wird

$$px_i = p'S_p$$

und hiermit:

$$f(a+iw) = \frac{d^2x_i}{dt^2} = P - p'S_p \qquad 7)$$

womit jede indirecte Rechnung vermieden ist, da die drei Grössen P, p' und S_p direct berechnet werden können.

Der hier erläuterten Methode entsprechend wird man daher die Integration der ersten und dritten Gleichung in IX pag. 148) ausführen können. Die übrigen Gleichungen sind direct berechenbar und führen auf einfache Integrationen. Für die einfachen Integrationen wird man den gemachten Voraussetzungen über die Lage der Osculationsepoche nach zur Bestimmung der Anfangsconstante die Formeln:

$$ {}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\frac{1}{24} f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) + \frac{17}{5760} f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) - \dots $$

$$ \int\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(x)\,dx = {}^{I}f(a+iw) - \frac{1}{12} f^{I}(a+iw) + \frac{11}{720} f^{III}(a+iw) - \dots $$

zu benützen haben, wobei zu beachten ist, dass in der letzteren Formel rechts vom Gleichheitszeichen die Funktionswerthe arithmetische Mittel sind.

§ 3. Berechnung der Coordinaten.

Die oben auseinandergesetzte Methode der Berechnung der Störungswerthe in den polaren Coordinaten setzt die Kenntniss der störenden Kräfte voraus, die in der Bahnebene in der Richtung des Radiusvector, senkrecht auf denselben, und senkrecht auf die Bahnebene wirken; diese Kräfte erscheinen in den obigen Formeln nicht unmittelbar, sondern es treten die Grössen:

$$ U = k^2 m_1 K(r) r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) $$

$$ R = k^2 m_1 K \frac{r_1}{(r)} \cos B_1 \cos(L_1 - l) $$

$$ w_1 = k^2 m_1 \frac{1}{\varrho^3} $$

$$ W = k^2 m_1 K r_1 \sin B_1 $$

auf, wobei gesetzt ist:

$$ K = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3} . $$

Die Grössen r und l berechnen sich in bekannter Weise aus den Elementen, r_1 kann aus den Ephemeriden direct entlehnt werden, B_1 und L_1 dagegen müssen aus den Ephemeridenangaben abgeleitet werden. Die Ephemeriden geben nämlich die heliocentrischen Längen λ' und Breiten β'. Vor Allem müssen diese Angaben auf das fixe Aequinoctium reducirt werden, auf welches sich die zu Grunde gelegten Elemente beziehen. Als fixes Aequinoctium wird man wohl am besten das mittlere Aequinoctium des nächsten Jahrzehentanfanges benützen, um für die Angaben des Berliner Jahrbuches die bequemste Anwendung zu erhalten.

L_1 und B_1 sind den Längen und Breiten analoge Grössen, jedoch anstatt auf die Ebene der Ekliptik auf die ungestörte Bahnebene bezogen, ferner liegt der Anfangspunkt der Zählung nicht im Frühjahrspunkte, sondern im aufsteigenden Knoten der ungestörten Bahn in der Ekliptik.

Betrachtet man daher das sphärische Dreieck zwischen dem Pole der Bahn, dem Pole der Ekliptik und dem heliocentrischen Orte des störenden Planeten auf der Himmelskugel, so erhält man leicht die folgenden Relationen, wenn man mit Ω_0 und i_0 den aufsteigenden Knoten und die Neigung bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}\sin B_1 &= \sin\beta_0' \cos i_0 - \cos\beta_0' \sin i_0 \sin(\lambda_0' - \Omega_0)\\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos\beta_0' \cos(\lambda_0' - \Omega_0)\\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin\beta_0' \sin i_0 + \cos\beta_0' \cos i_0 \sin(\lambda_0' - \Omega_0)\,;\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

setzt man also, um die Formeln in eine bequeme Form zu bringen:

$$\left.\begin{aligned}q \sin Q &= \sin\beta_0'\\ q \cos Q &= \cos\beta_0' \sin(\lambda_0' - \Omega_0)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned}\cos B_1 \cos L_1 &= \cos\beta_0' \cos(\lambda_0' - \Omega_0)\\ \cos B_1 \sin L_1 &= q \cos(Q - i_0)\\ \sin B_1 &= q \sin(Q - i_0)\,;\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

der Abstand des gestörten Körpers vom ungestörten ϱ findet sich aus:

$$\left.\begin{aligned}\varrho \cos\vartheta \cos\Theta &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) - r\\ \varrho \cos\vartheta \sin\Theta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l)\\ \varrho \sin\vartheta &= r_1 \sin B_1 - z\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wobei:

$$l = V + \omega_0 + \Delta\omega \qquad \text{(vergl. IVb pag. 144)}$$

ist.

Von diesen Formeln kann man Gebrauch machen, wenn man streng die Rechnung durchführen will auf Grundlage der heliocentrischen Coordinaten der störenden Planeten, die sich in den Ephemeriden finden. Beziehen sich die Coordinaten, wie dies im Berliner Jahrbuch bis 1867 inclusive und den übrigen astronomischen Ephemeriden der Fall ist, auf das jedesmalige wahre Aequinoctium, so wird man die auf pag. 82 angeführten Formeln zur Reduction auf das gewählte fixe Aequinoctium benützen.

Im Berliner Jahrbuch für 1868, 1869 und 1870 finden sich die heliocentrischen Coordinaten nicht unmittelbar, indem die daselbst allein angeführten Längen in der Bahn mit den im Anhange angeführten Bahnlagen zur strengen Berücksichtigung der Breiten der störenden Planeten über dieser Bahnebene nicht ausreichend sind; dagegen werden die mitgetheilten rechtwinkeligen Coordinaten die verlangten Grössen leicht geben, denn es ist:

$$\begin{aligned}r_1 \cos\lambda_0' \cos\beta_0' &= x_1\\ r_1 \sin\lambda_0' \cos\beta_0' &= y_1\\ r_1 \sin\beta_0' &= z_1\,,\end{aligned}$$

wobei man ausser der Prüfung, die sich aus dem regelmässigen Gange der Differenzwerthe ergibt, als theilweise Controle für die Richtigkeit der Rechnung den Umstand benützen kann, dass der so gefundene Werth von r_1 mit dem im Jahrbuche angegebenen übereinstimmen muss.

Vom Jahre 1871 ab geben die mit Rücksicht auf die pag. 83 gemachten Bemerkungen im Berliner Jahrbuche angeführten Angaben die Mittel an die Hand, unmittelbar die verlangten Grössen λ_0', β_0' und r_1 demselben zu entlehnen.

Vom Jahre 1880 ab finden sich aber auf meinen Vorschlag Angaben im Berliner Jahrbuche, welche die Rechnung nach den Formeln (1), (2) und (3) des vorliegenden Paragraphen wesentlich erleichtern.

Es finden sich nämlich in der Columne B_0 die Breiten des Planeten über der am Fusse der Tabelle angegebenen Bahnlage, welche letztere durch eine längere Reihe von Jahren constant angenommen wird. Es soll nun gezeigt werden, wie man diese Angaben für die Rechnung verwerthen kann.

Betrachtet man zwei Ebenen im Raume, von denen man eine als die Fundamentalebene wählt und legt in die Richtung des aufsteigenden Knotens die gemeinsame positive X-Achse, während die Achsen der Y und Z den sonst üblichen Annahmen analog gewählt werden sollen, so erhält man, wenn J die Neigung der beiden Ebenen gegen einander bedeutet, in der bekannten Weise für den Uebergang von den rechtwinkeligen auf die Fundamentalebene bezogenen Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes auf die analogen auf die andere Ebene bezogenen Coordinaten ξ', η', ζ' desselben Punktes (vergl. I pag. 12) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' \\ \eta &= \eta' \cos J - \zeta' \sin J \\ \zeta &= \eta' \sin J + \zeta' \cos J \,. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den sphärischen Abstand (Breite) des Himmelskörpers von dem durch die Fundamentalebene mit der Himmelskugel gebildeten grössten Kreise mit b, in Bezug auf die andere Ebene mit b', und den Winkelabstand des Fusspunktes dieses sphärischen Perpendikels mit der X-Achse, gezählt in der Bewegungsrichtung des Himmelskörpers, beziehungsweise mit u und u', so wird man auch schreiben dürfen, wenn man mit r den im Allgemeinen willkürlich zu wählenden Abstand des Himmelskörpers vom Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} r \cos b \cos u &= r \cos b' \cos u' \\ r \cos b \sin u &= r \cos b' \sin u' \cos J - r \sin b' \sin J \\ r \sin b &= r \cos b' \sin u' \sin J + r \sin b' \cos J \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Wählt man nun als Fundamentalebene die Ebene des gestörten Himmelskörpers zur Zeit der Osculationsepoche und beachtet, dass die polare Coordinate L_1 (vergl. II pag. 141) vom aufsteigenden Knoten ☊ aus gezählt wird, so wird man, wenn man mit Φ den Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahnebene des störenden Planeten, in der Bahnebene des gestörten Himmelskörpers, gezählt in der Bewegungsrichtung, bezeichnet, die Relation:

$$L_1 = u + \Phi$$

haben, und weiter wird die in (5) durch b ausgedrückte Coordinate dann identisch mit der am oben angeführten Orte mit B_1 bezeichneten Grösse.

Bezeichnet man mit L die in den Ephemeriden mitgetheilte, auf das gewählte fixe Aequinoctium bezogene Länge in der Bahn, so wird, da L aus der Addition der Länge des aufsteigenden Knotens und des Argumentes der Breite entsteht, sein.

wenn man analog wie oben durch Φ' den Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahnebene des störenden in der Bahnebene des gestörten Planeten vom aufsteigenden Knoten der Bahn des störenden Körpers (Ω') in der Ekliptik darstellt:

$$u' = L - \Omega' + \Phi' ;$$

ausserdem wird die in 5) durch b' ausgedrückte Grösse offenbar mit B_0 identisch und man wird den Sinus dieses Bogens mit dem Bogen selbst vertauschen, dessen Cosinus aber der Einheit gleich setzen dürfen. Demgemäss hat man zur Berechnung von B_1 und L_1 das Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned} u' &= L - \Omega' + \Phi' \\ \cos B_1 \cos u &= \cos u' \\ \cos B_1 \sin u &= \sin u' \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J \\ \sin B_1 &= \sin u' \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J \\ L_1 &= u + \Phi \, . \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Hiermit sind die Grössen B_1 und L_1 bekannt und die weitere Rechnung nach den Formeln 4) (pag. 157) hat keine Schwierigkeit, da wie oben:

$$l = V + \omega_0 + \Delta\omega$$

anzunehmen ist.

Die aus B_0 in den Formeln (6) resultirenden Correctionen können sehr leicht mit Hilfe der Additions- und Subtractionslogarithmen in Rechnung gebracht werden, doch kann es unter Umständen bequem sein, vorerst u und B_1 ohne Rücksicht auf B_0 zu rechnen, Werthe, die ich beziehungsweise mit u_0 und $B_1{}^0$ bezeichnen will, und nachträglich den Unterschied $u - u_0$ auf differentiellem Wege zu bestimmen; aus der Differentiation der Gleichungen (6) erhält man leicht nach einigen offenkundigen Reductionen:

$$\left.\begin{aligned} u - u_0 &= -\frac{\cos u'}{\cos B_1} \sin J \cdot B_0 \\ B_1 - B_1{}^0 &= \frac{\cos J}{\cos B_1} B_0 \, . \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wiewohl demnach die Berechnung der Grössen L_1 und B_1 nunmehr wenig an Bequemlichkeit zu wünschen übrig lässt, so lässt sich doch noch eine für viele Fälle wesentlich bequemere Form angeben. Ist nämlich die gegenseitige Neigung der in Betracht kommenden Ebenen J eine mässige Grösse, wie dies in der That für die meisten Planeten der Fall ist, so kann man zuerst B_0 ganz ausser Acht lassen, indem man die daraus entstehenden Correctionen einer nachträglichen Berücksichtigung mittelst der Formeln (7) vorbehält und man erhält dann durch Division der beiden ersten Gleichungen (6):

$$\tang u_0 = \tang u' \cos J ;$$

wendet man auf diesen Ausdruck, in welchem der Voraussetzung gemäss $\cos J$ wenig von der Einheit verschieden ist, die im ersten Bande (pag. 28) angeführte Reihenentwickelung an, und beachtet, dass:

$$\frac{\cos J - 1}{\cos J + 1} = -\tang^2 \tfrac{1}{2} J \quad (8)$$

ist, so wird sein, wenn man die erste Gleichung in 7) (pag. 159) sofort heranzieht:

$$u = u' - \frac{\cos u'}{\cos B_1} \sin J \cdot B_0 - \frac{\tang^2 \frac{1}{2} J}{\sin 1''} \sin 2u' + \frac{\tang^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin 1''} \sin 4u' - \ldots \qquad 9)$$

Die Benützung dieser Reihe kann von Fall zu Fall durch Anwendung einer kleinen Hilfstafel wesentlich erleichtert werden.

Für die Durchrechnung der Formeln ist nicht die Kenntniss des Bogens B_1 nöthig, sondern nur die Kenntniss der Werthe von $\sin B_1$ und $\cos B_1$; für die Berechnung des Sinus wird aus 6) (pag. 159) folgen:

$$\sin B_1 = \sin u' \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J\,; \qquad 10)$$

da $\sin B_1$ der Voraussetzung nach nicht gross ist, so wird man auch stets sicher den Uebergang auf den Cosinus machen können, dessen Kenntniss man für die Formel 9) und für die spätere Rechnung bedarf.

Die Anwendung der eben entwickelten Ausdrücke setzt noch die Kenntniss der Grössen Φ, Φ' und J voraus. Aus der Betrachtung des sphärischen Dreieckes, welches die Ekliptik mit den Bahnebenen des gestörten und des störenden Planeten bildet, ergibt sich sofort, wenn man die diesbezüglichen aufsteigenden Knoten und Neigungen beziehungsweise mit Ω, Ω' und i, i' bezeichnet, durch Anwendung der Gauss'schen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} J \sin \tfrac{1}{2} (\Phi + \Phi') &= \sin \tfrac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sin \tfrac{1}{2} (i' + i) \\
\sin \tfrac{1}{2} J \cos \tfrac{1}{2} (\Phi + \Phi') &= \cos \tfrac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sin \tfrac{1}{2} (i' - i) \\
\cos \tfrac{1}{2} J \sin \tfrac{1}{2} (\Phi - \Phi') &= \sin \tfrac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \cos \tfrac{1}{2} (i' + i) \\
\cos \tfrac{1}{2} J \cos \tfrac{1}{2} (\Phi - \Phi') &= \cos \tfrac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \cos \tfrac{1}{2} (i' - i)\,.
\end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

welche Formeln die erforderlichen drei Grössen J, Φ und Φ' unzweideutig bestimmen; dabei wird man zweckmässig die an sich willkürliche Voraussetzung machen dürfen, dass J kleiner als 180^0 angenommen wird, also $\sin \frac{1}{2} J$ und $\cos \frac{1}{2} J$ stets positiv sind, wodurch sich die Quadranten für die Winkel $\frac{1}{2} (\Phi + \Phi')$ und $\frac{1}{2} (\Phi - \Phi')$ ergeben. Die so ermittelten 3 Grössen wird man so lange unverändert beibehalten können, als die Elemente Ω, Ω', i und i' keine Aenderung erfahren; da dies nach der vorliegenden Methode mindestens für ein Jahrzehent ohne Unbequemlichkeit geschehen darf, so wird die Berechnung dieses sphärischen Dreieckes selten genug auszuführen sein und kann demnach den vorbereitenden Rechnungen angeschlossen werden.

Es ist klar, dass bei der vorliegenden Methode der Störungsrechnung, da die Störungscoordinaten auf eine fixe Ebene bezogen sind, eine Aenderung des Aequinoctiums auf dieselbe ohne Einfluss ist; nur muss darauf geachtet werden, dass auf diese Aenderung bei der Berechnung der Coordinaten gehörig Rücksicht genommen wird. Man wird demgemäss in den Elementen die durch die Präcession im Knoten, in der Neigung und im Abstande des Perihels vom Knoten bewirkten Aenderungen in Rechnung ziehen (I pag. 81) und mit den auf dasselbe Aequinoctium bezogenen Coordinaten des störenden Planeten verbinden; da aber voraussichtlich im Berliner Jahrbuch zu jenen Epochen, wo eine Aenderung des Aequinoctiums eintritt,

auch eine Aenderung der Grössen Ω' und i' vorgenommen werden wird, so wird man die Berechnung der Formeln 11) stets auf die Epoche dieser Aenderungen beschränken dürfen.

Schliesslich dürfte es passend sein, an dieser Stelle zu erwähnen, wie man die nach dieser Methode erlangten Störungswerthe zur Berechnung einer strengen Ephemeride verwerthen kann.

Man wird sich zu dem Ende aus den Störungstabellen für die Epochen der Ephemeride die Werthe ΔM, $\Delta\omega$, ν und z ermitteln. Es wird hierbei zweckmässig sein, für einige der Ephemeride nahe liegende Störungsepochen und für die Mitte derselben die Störungswerthe zu bestimmen, und mit Hilfe der so gebildeten kleinen Störungstafeln die Zwischenwerthe zu interpoliren; es wird sich dieses Verfahren, bei welchem man eine Reihe von Werthen braucht, etwas kürzer erweisen, als die directe Rechnung für jeden einzelnen Werth mit Hilfe der P- und Q-Coëfficienten (vergl. Tafel VI—IX).

Man gelangt mit Hilfe der Formeln V und VI (pag. 145) zur Kenntniss der Coordinaten des Planeten in der ungestörten Bahnlage; es ist also zu rechnen:

$$\left.\begin{aligned}
M &= M_0 + \mu_0 t + \Delta M \\
M &= E - e_0'' \sin E \\
(r) \sin V &= a_0 \cos\varphi_0 \sin E \\
(r) \cos V &= a_0 (\cos E - e_0) \\
l &= V + \omega_0 + \Delta\omega \\
(r) &= (r)(1 + \nu)
\end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Um nun z bei der Berechnung der rechtwinkeligen Aequatoreal-Coordinaten zu berücksichtigen, denke man sich zwei rechtwinkelige Coordinatensysteme mit einem gemeinsamen Anfangspunkt und mit gemeinsamer X-Achse, welche letztere mit der Knotenlinie der ungestörten Bahn in der Ekliptik (Ω_0) zusammenfallen soll; die $X\,Y$-Ebene möge die gewählte fixe Ekliptik sein, die $X_1\,Y_1$-Ebene aber soll der ungestörten Bahnlage entsprechen und die diesbezüglichen Z-Coordinaten sollen in der üblichen Weise gezählt werden. Bezeichnet man mit i_0 die Neigung der ungestörten Bahnebene gegen die Ekliptik, so hat man sofort die Relationen:

$$\begin{aligned}
x &= x_1 \\
y &= y_1 \cos i_0 - z_1 \sin i_0 \\
z &= y_1 \sin i_0 + z_1 \cos i_0 \,.
\end{aligned}$$

Setzt man für x_1, y_1 die polaren Coordinaten, so werden die ekliptikalen auf Ω_0 als Ausgangspunkt bezogenen Coordinaten:

$$\begin{aligned}
x &= (r) \cos l \\
y &= (r) \sin l \cos i_0 - z_1 \sin i_0 \\
z &= (r) \sin l \sin i_0 + z_1 \cos i_0 \,.
\end{aligned}$$

Verlegt man nun den Ausgangspunkt der Zählung auf den Frühjahrspunkt, so wird sein:

$$x_\varepsilon = x \cos \Omega_0 - y \sin \Omega_0$$
$$y_\varepsilon = x \sin \Omega_0 + y \cos \Omega_0$$
$$z_\varepsilon = z\,.$$

und die Substitution ergibt:

$$x_\varepsilon = (r) \left\{ \cos l \cos \Omega_0 - \sin l \sin \Omega_0 \cos i_0 \right\} + z_1 \sin \Omega_0 \sin i_0$$
$$y_\varepsilon = (r) \left\{ \cos l \sin \Omega_0 + \sin l \cos \Omega_0 \cos i_0 \right\} - z_1 \cos \Omega_0 \sin i_0$$
$$z_\varepsilon = (r) \sin l \sin i_0 + z_1 \cos i_0\,;$$

verwandelt man diese Ekliptikalcoordinaten mit Hilfe der im ersten Bande (pag. 12) angesetzten Transformationsformeln, so wird man leicht finden:

$$x' = (r) \left\{ \cos l \cos \Omega_0 - \sin l \sin \Omega_0 \cos i_0 \right\} + z_1 \sin \Omega_0 \sin i_0$$
$$y' = (r) \left\{ \cos l \sin \Omega_0 \cos \varepsilon + \sin l \cos \Omega_0 \cos i_0 \cos \varepsilon - \sin l \sin i_0 \sin \varepsilon \right\}$$
$$- z_1 \left\{ \cos \Omega_0 \sin i_0 \cos \varepsilon + \cos i_0 \sin \varepsilon \right\}$$
$$z' = (r) \left\{ \cos l \sin \Omega_0 \sin \varepsilon + \sin l \cos \Omega_0 \cos i_0 \sin \varepsilon + \sin l \sin i_0 \cos \varepsilon \right\}$$
$$+ z_1 \left\{ - \cos \Omega_0 \sin i_0 \sin \varepsilon + \cos i_0 \cos \varepsilon \right\}\,.$$

Die Einführung einiger Hilfsgrössen wird die Berechnung dieser Ausdrücke erleichtern (vergl. I pag. 16); setzt man nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
n \sin N &= \sin i_0 \\
n \cos N &= \cos \Omega_0 \cos i_0 \\
m \sin M &= \cos \Omega_0 \sin i_0 \\
m \cos M &= \cos i_0 \\
\sin a \sin A &= \cos \Omega_0 \\
\sin a \cos A &= - \sin \Omega_0 \cos i_0 \\
\sin b \sin B &= \sin \Omega_0 \cos \varepsilon \\
\sin b \cos B &= n \cos (N + \varepsilon) \\
\sin c \sin C &= \sin \Omega_0 \sin \varepsilon \\
\sin c \cos C &= n \sin (N + \varepsilon) \\
\cos a &= \sin \Omega_0 \sin i_0 \\
\cos b &= - m \sin (M + \varepsilon) \\
\cos c &= m \cos (M + \varepsilon)
\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

so ist, wenn man statt z_1 den Buchstaben z schreibt und darunter die Störung in der auf der Bahnebene senkrechten Coordinate versteht:

$$\left.\begin{aligned}
x' &= (r) \sin a \sin (A + l) + z \cos a \\
y' &= (r) \sin b \sin (B + l) + z \cos b \\
z' &= (r) \sin c \sin (C + l) + z \cos c\,.
\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Als Probe für die Richtigkeit dieser Constanten kann benützt werden (vergl. I pag. 17):

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}\,.$$

§ 4. Uebergang auf osculirende Elemente nach Hansen-Tietjen's Methode.

Das Bedürfniss des Ueberganges auf osculirende Elemente tritt bei dieser Methode aus ähnlichen Ursachen ein, wie bei Encke's Methode; nur werden im Allgemeinen die Störungen weit mehr anwachsen können, als bei der letzteren Methode, bevor es nothwendig wird, diesen Uebergang zu machen.

Um nun diese Uebertragung, falls sie aus irgend einer Ursache wünschenswerth erscheinen sollte, ausführen zu können, bedarf man geeigneter Formeln und ich werde ähnlich, wie früher, zwei Arten des Ueberganges vornehmen, nämlich vorerst jene Methode, nach der man die Unterschiede der gestörten und ungestörten Elemente ermittelt, und welche einer grösseren Genauigkeit fähig ist, ohne allzugrosse logarithmische Tafeln anwenden zu müssen, und dann jene, in der man aus den gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten unmittelbar die Elemente ableitet.

Aus der Störungsrechnung sind für die gewählte Osculationsepoche zu bestimmen: ΔM, $\Delta \omega$, ν, $\frac{d\nu}{dt}$, z, $\frac{dz}{dt}$ und $\int \Sigma U dt$; die erste Aufgabe, die zu lösen ist, besteht dann wieder darin, $\Delta(r)$, $\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$ und $\Delta(\lg p)$ (vergl. über die Bedeutung dieser Symbole pag. 89) zu ermitteln, da dann die Herleitung der Elemente wie bei Encke's Methode möglich ist.

Man hat vorerst:

$$r = (r)(1+\nu) : \cos b = (r)(1+\nu)\left(1 + \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} b}{\cos b}\right) \tag{1}$$

wobei der Winkel b bestimmt ist durch die Relation:

$$\operatorname{tang} b = \frac{z}{(r)} \tag{2}$$

Es soll also zunächst der Unterschied:

$$(r) - r_0$$

ermittelt werden. Es ist:

$$M_0 + \Delta M = E - e_0 \sin E$$

also findet sich der Unterschied der excentrischen Anomalien durch die Gleichung:

$$\Delta M = (E - E_0) - 2 e_0 \sin \tfrac{1}{2} (E - E_0) \cos \tfrac{1}{2} (E + E_0) \,. \tag{3}$$

Da aber durch eine vorausgehende Rechnung sowohl E, als auch E_0 mit einem hohen Grade der Annäherung bekannt ist, so kann eine fast directe Bestimmung von $E - E_0$ leicht genug ausgeführt werden. Setzt man nämlich:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (E - E_0)}{\frac{1}{2} (E - E_0)} = \beta$$

wo β die Bogenverwandlung ist, welche Grösse sich fast ohne Mühe aus den logarithmischen Tafeln ergibt und bei der Kleinheit von $(E - E_0)$ im Allgemeinen wenig von der Einheit verschieden ist, so wird:

$$E - E_0 = \frac{\Delta M}{1 - e_0 \beta \cos \frac{1}{2}(E + E_0)} \qquad 4)$$

Nun bestehen die Gleichungen:

$$(r) \sin V = a_0 \cos \varphi_0 \sin E = r_0 \sin v_0 + 2 a_0 \cos \varphi_0 \sin \tfrac{1}{2}(E - E_0) \cos \tfrac{1}{2}(E + E_0)$$
$$(r) \cos V = a_0 (\cos E - e_0) = r_0 \cos v_0 - 2 a_0 \sin \tfrac{1}{2}(E - E_0) \sin \tfrac{1}{2}(E + E_0)\ ;$$

setzt man also:

$$\cos \varphi_0 \cos \tfrac{1}{2}(E + E_0) = n' \cos N$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(E + E_0) = n' \sin N \qquad 5)$$
$$2 a_0 n' \sin \tfrac{1}{2}(E - E_0) = a_0 \beta n' (E - E_0) \sin 1'' = n$$

so wird:

$$\operatorname{tang}(V - v_0) = \frac{\frac{n}{r_0} \cos(N - v_0)}{1 + \frac{n}{r_0} \sin(N - v_0)} \qquad 6)$$
$$((r)) - r_0 = - \frac{n \sin\{N - \frac{1}{2}(V + v_0)\}}{\cos \frac{1}{2}(V - v_0)}\ .$$

Man kann aber $V - v_0$ und $((r)) - r_0$ auch in anderer Weise ableiten, die mit Vortheil als Controle angewendet werden kann; es ist:

$$((r)) = a_0 (1 - e_0 \cos E)$$
$$r_0 = a_0 (1 - e_0 \cos E_0)$$

also wird:

$$((r)) - r_0 = 2 a_0 e_0 \sin \tfrac{1}{2}(E - E_0) \sin \tfrac{1}{2}(E + E_0) =$$
$$= a_0 e_0 \beta (E - E_0) \sin 1'' \sin \tfrac{1}{2}(E + E_0) \qquad 7a)$$

Um eine andere Form für die Berechnung von $V - v_0$ zu erhalten, erinnere man sich an die bekannten Gleichungen:

$$\sqrt{((r))} \sin \tfrac{1}{2} V = \sqrt{a_0 (1 + e_0)} \sin \tfrac{1}{2} E$$
$$\sqrt{((r))} \cos \tfrac{1}{2} V = \sqrt{a_0 (1 - e_0)} \cos \tfrac{1}{2} E\ ;$$

multiplicirt man die erste Gleichung links mit $\sqrt{r_0} \cos \frac{1}{2} v_0$, rechts mit dem äquivalenten Werthe $\sqrt{a_0 (1 - e_0)} \cos \frac{1}{2} E_0$ und ähnlich die zweite Gleichung beziehungsweise mit $\sqrt{r_0} \sin \frac{1}{2} v_0$ und $\sqrt{a_0 (1 + e_0)} \sin \frac{1}{2} E_0$ und subtrahirt, so folgt sofort:

$$\sin \tfrac{1}{2}(V - v_0) = \frac{a_0 \cos \varphi_0}{\sqrt{r_0 ((r))}} \sin \tfrac{1}{2}(E - E_0)\ . \qquad 7b)$$

Der Uebergang von $((r))$ auf (r) macht sich sehr einfach, da die Relation besteht:

$$(r) = ((r))(1 + r')\ ;$$

es ist also:

$$(r) - ((r)) = ((r)) r'\ ; \qquad 8)$$

schliesslich folgt aus 1) pag. 163 unmittelbar:

$$r - (r) = 2 (r) \frac{\sin^2 \frac{1}{2} b}{\cos b}\ ;$$

setzt man also:

$$\frac{\nu + 2\sin^2\frac{1}{2}b}{\cos b} = \gamma \tag{9}$$

so wird:

$$\Delta(r) = r - r_0 = ((r)) - r_0 + ((r))\gamma \tag{10}$$

wobei $((r)) - r_0$ nach 6) oder 7a zu berechnen sein wird.

Um $\left(\frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}\right)$ zu erhalten, beachte man, dass:

$$r^2 = (r)^2 + z^2$$

ist, woraus durch Differentiation nach der Zeit:

$$r\frac{dr}{dt} = (r)\frac{d(r)}{dt} + z\frac{dz}{dt}$$

folgt, da nun:

$$r\cos b = (r)$$

ist, so kann man schreiben:

$$\frac{dr}{dt}\sec b = \frac{d(r)}{dt} + \operatorname{tang} b\,\frac{dz}{dt} \tag{11}$$

aus der Gleichung 7) (pag. 146) folgt:

$$\frac{d(r)}{dt} = ((r))\frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0 \sin V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}};$$

man hat also die Gleichungen:

$$\frac{dr}{dt}\sec b = ((r))\frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0 \sin V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}} + \operatorname{tang} b\,\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dr_0}{dt}\sec b = \frac{k e_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}}\sec b = \frac{k e_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}} + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}b}{\cos b}\,\frac{k e_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}}.$$

und durch Subtraction folgt hieraus:

$$\left(\frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}\right)\sec b = ((r))\frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0}{\sqrt{p_0}}\left\{\frac{2\sin\frac{1}{2}(V - v_0)\cos\frac{1}{2}(V + v_0)}{1+\nu} - \right.$$

$$\left. - \sin v_0\left(\frac{\nu}{1+\nu} + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}b}{\cos b}\right)\right\} + \operatorname{tang} b\,\frac{dz}{dt};$$

führt man hier nach Gleichung 9) den Werth von γ ein, so resultirt endlich:

$$\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt} = \frac{\cos b}{1+\nu}\left\{(r)\frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0}{\sqrt{p_0}}\left[2\sin\frac{1}{2}(V - v_0)\cos\frac{1}{2}(V + v_0) - \gamma\sin v_0\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{z}{(r)}\frac{dz}{dt}\right\}. \tag{12}$$

Die Bestimmung von $\Delta(\sqrt{p})$ kann leicht mit der Bestimmung des Knotens K_0, und der Neigung J der gestörten Bahn in der ungestörten Bahnebene verbunden werden.

Die Coordinaten und Geschwindigkeiten sind dargestellt durch:

$$x = (r)\cos l$$
$$y = (r)\sin l$$
$$z = z$$

$$\frac{dx}{dt} = -(r)\sin l\frac{dl}{dt} + \cos l\frac{d(r)}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = (r)\cos l\frac{dl}{dt} + \sin l\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} .$$

Man erhält also:

$$\left.\begin{aligned} k\sqrt{p}\cos J &= x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (r)^2\frac{dl}{dt} \\ k\sqrt{p}\sin K_0 \sin J &= y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = (r)\sin l\frac{dz}{dt} - z(r)\cos l\frac{dl}{dt} - z\sin l\frac{d(r)}{dt} \\ k\sqrt{p}\cos K_0 \sin J &= x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = (r)\cos l\frac{dz}{dt} + z(r)\sin l\frac{dl}{dt} - z\cos l\frac{d(r)}{dt} . \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

Zählt man alle Längen vom Punkte l aus und beachtet, dass nach Gleichung 1) pag. 141:

$$(r)^2\frac{dl}{dt} = k\sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt ,$$

ist, so erhält man:

$$k\sqrt{p}\cos J = k\sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt$$
$$k\sqrt{p}\sin(K_0 - l)\sin J = -\frac{z}{(r)}\left\{k\sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt\right\}$$
$$k\sqrt{p}\cos(K_0 - l)\sin J = (r)\frac{dz}{dt} - z\frac{d(r)}{dt} .$$

Beachtet man nun (vergl. Gleichung 7) pag. 146):

$$\frac{d(r)}{dt} = (r)\frac{dr}{dt} + \frac{k e_0 \sin V}{(1+r)\sqrt{p_0}} \quad 14)$$

so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} \sin(l - K_0)\operatorname{tang} J &= \frac{z}{(r)} \\ \cos(l - K_0)\operatorname{tang} J &= \frac{(r)\frac{dz}{dt} - z\frac{d(r)}{dt}}{k\sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt} \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

womit K_0 und J bestimmt erscheinen; dabei wird l erhalten durch die Gleichung:

$$l = V + \omega_0 + \Delta\omega . \quad 16)$$

Aus

$$k\sqrt{p} = \left(k\sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt\right)\sec J$$

folgt weiter:

$$\Delta(\sqrt{p}) = \sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \left\{\frac{1}{k}\int \Sigma U dt + 2\sqrt{p_0}\sin^2\tfrac{1}{2}J\right\}\sec J \quad 17)$$

und

$$\Delta p = p - p_0 = \left\{2\sqrt{p_0} + \Delta\sqrt{p}\right\}\Delta(\sqrt{p}) . \quad 18)$$

Es erscheint angemessen, gleich hier den Uebergang von K_0 und J auf $\Omega - \Omega_0$ und $i - i_0$ aufzuweisen, wobei sich die Bestimmung von $\omega - \omega_0$ unter Einem durchführen lässt.

Nennt man das Argument der Breite des Planeten in der gestörten Bahn in Bezug auf die ungestörte (u), so ist:

$$\operatorname{tang}(u) = \operatorname{tang}(l - K_0) \sec J\,.$$

Erinnert man sich, dass Ausdrücke von der Form:

$$\operatorname{tang}\psi = n \operatorname{tang}\varphi$$

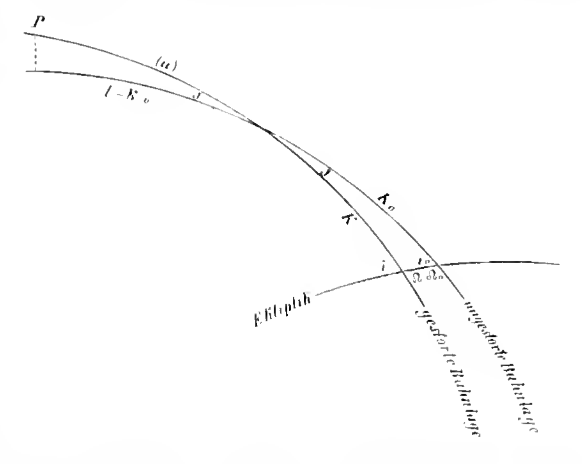
sich in die bekannte Reihe (vergl. I pag. 28):

$$\psi - \varphi = \frac{n-1}{n+1}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4\varphi + \ldots + \frac{1}{m}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^m \sin 2m\varphi + \ldots$$

auflösen lassen, so wird man mit Rücksicht auf die Kleinheit von J zweckmässig erhalten:

$$J(u) = (u) - (l - K_0) = \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} J}{\sin 1''}\sin 2(l - K_0) + \tfrac{1}{2}\frac{(\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} J)^2}{\sin 1''}\sin 4(l - K_0) + \ldots \qquad 19)$$

Um nun die Aenderung des Knotens, der Neigung und des Arguments der Breite in Bezug auf die Ekliptik zu finden, wird die Betrachtung des bezüglichen sphärischen Dreieckes leicht die verlangten Relationen finden lassen. Die Durchschnitte der in Betracht kommenden Ebenen mit der Himmelskugel seien durch Kreise dargestellt, bei P befinde sich der Planet zur Zeit der gewählten neuen Osculationsepoche, die punktirte Linie stelle das sphärische Perpendikel vom Punkte P auf den die ungestörte Bahnlage darstellenden grössten Kreis vor; die Bedeutung der Seiten und Winkel ist unmittelbar in die Figur eingesetzt und bedarf daher keiner näheren Erläuterung.



Setzt man also als Seiten:

$$a = K_0$$
$$b = K$$
$$c = \Omega - \Omega_0$$

als Winkel:

$$A = 180^\circ - i$$
$$B = i_0$$
$$C = J$$

so geben die Neper'schen Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\frac{b+c}{2} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\operatorname{tang}\frac{b-c}{2} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}$$

sofort:

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\tfrac{1}{2}\{K+(\Omega-\Omega_0)\} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(i_0-J)}{\cos\frac{1}{2}(i_0+J)}\,\text{tang}\tfrac{1}{2}K_0\\ \text{tang}\tfrac{1}{2}\{K-(\Omega-\Omega_0)\} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(i_0-J)}{\sin\frac{1}{2}(i_0+J)}\,\text{tang}\tfrac{1}{2}K_0\end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

welche Formeln man zur Bestimmung von K und $(\Omega-\Omega_0)$ benützen kann. Ist aber i_0 nicht gar zu klein (nur wenige Bogenminuten), so wird man mit Vortheil von den folgenden Reihenentwicklungen Gebrauch machen, die man wohl stets bei den in der Regel stattfindenden Verhältnissen wird benützen können. Wendet man die oben in Erinnerung gebrachte Reihenentwickelung auf die Gleichung 20) an, so findet sich leicht:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\{K+(\Omega-\Omega_0)\}-\tfrac{1}{2}K_0 &= \frac{\text{tang}\frac{1}{2}J\,\text{tang}\frac{1}{2}i_0}{\sin 1''}\sin K_0+\tfrac{1}{2}\frac{(\text{tang}\frac{1}{2}J\,\text{tang}\frac{1}{2}i_0)^2}{\sin 1''}\sin 2K_0+\\ &+\tfrac{1}{3}\frac{(\text{tang}\frac{1}{2}J\,\text{tang}\frac{1}{2}i_0)^3}{\sin 1''}\sin 3K_0+\ldots=\text{I}\\ \tfrac{1}{2}\{K-(\Omega-\Omega_0)\}-\tfrac{1}{2}K_0 &= -\frac{\text{tang}\frac{1}{2}J\,\text{cotg}\frac{1}{2}i_0}{\sin 1''}\sin K_0+\tfrac{1}{2}\frac{(\text{tang}\frac{1}{2}J\,\text{cotg}\frac{1}{2}i_0)^2}{\sin 1''}\sin 2K_0-\\ &-\tfrac{1}{3}\frac{(\text{tang}\frac{1}{2}J\,\text{cotg}\frac{1}{2}i_0)^3}{\sin 1''}\sin 3K_0+\ldots=\text{II}\end{aligned}\right\} \qquad 21)$$

und man hat:

$$\left.\begin{aligned}\Delta(K) &= K-K_0 = \text{I}+\text{II}\\ \Delta(\Omega) &= \Omega-\Omega_0 = \text{I}-\text{II}\,.\end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Weiter ist in der ungestörten Bahn:

$$\omega_0 = l_0 - v_0$$

dagegen der Abstand des Perihels vom Knoten in der gestörten Bahn:

$$\omega = (u) + K - v = (l - K_0) + \Delta(u) + K - v\,;$$

die Subtraction der letzteren Gleichungen ergibt:

$$\omega-\omega_0 = \Delta(K) + \Delta(u) + (l-l_0) - (v-v_0)\,;$$

man hat aber zu beachten, dass ist:

$$\begin{aligned}l_0 &= v_0 + \omega_0\\ l &= V + \omega_0 + \Delta\omega\end{aligned}$$

demnach ist:

$$l - l_0 = (V - v_0) + \Delta\omega$$

und man wird daher haben:

$$\left.\begin{aligned}\omega-\omega_0 &= \Delta(K) + \Delta(u) + \Delta\omega + \{(V-v_0)-(v-v_0)\}\\ \pi-\pi_0 &= (\omega-\omega_0) + (\Omega-\Omega_0)\end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

wobei die Bestimmung von $v - v_0$ noch nöthig ist, die weiter unten vorgenommen wird.

Aus der Neper'schen Gleichung:

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,\text{cotg}\tfrac{1}{2}C$$

folgt sofort:

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(i-i_0) = \frac{\cos\{K_0+\frac{1}{2}\Delta(K)\}}{\cos\frac{1}{2}\Delta(K)}\,\text{tang}\tfrac{1}{2}J \qquad 24)$$

womit $i - i_0$ bestimmt erscheint.

Zur Bestimmmung von $(r - r_0)$, $(e - e_0)$, $e^2 - e_0^2$, $(\varphi - \varphi_0)$, $(\mu - \mu_0)$ und $(M - M_0)$ wird man dieselben Formeln verwenden können, welche früher für den Uebergang auf osculirende Elemente bei rechtwinkeligen Coordinaten aufgestellt wurden (pag. 102, 103), so dass hiermit die Entwickelung der Formeln für die erste Form des Uebergangs erledigt ist.

Will man aber unmittelbar die gestörten Elemente erhalten, so lassen sich auch hierfür recht bequeme Formeln angeben, deren Berechnung mit Vortheil dazu benützt werden kann, um die aus den eben entwickelten Formeln erhaltenen Resultate zu controliren.

Zur Berechnung der gestörten Bahnlage gegen die ungestörte Bahn wird man die Formeln (15) (pag. 166) benützen und weiter rechnen:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{p} &= \left(k\sqrt{p_0} + \int \Sigma U\, dt\right) \sec J \\ l &= V + \omega_0 + \Delta\omega \\ \operatorname{tang} (u) &= \operatorname{tang} (l - K_0) \sec J\,. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

hierauf wird man die Formeln (20) und (24) (pag. 168) heranziehen, um daraus Ω, i und K zu erhalten.

Die Excentricität und die wahre Anomalie resultiren aus (vergl. pag. 89):

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi \sin v &= \frac{\sqrt{p}}{k} \frac{dr}{dt} \\ \sin\varphi \cos v &= \frac{p}{r} - 1 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

wobei $\frac{dr}{dt}$ zu berechnen sein wird aus (pag. 165):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\rho}{r} \frac{d\rho}{dt} + \frac{z}{r} \frac{dz}{dt}\,; \qquad (27)$$

die Grösse $\frac{d\rho}{dt}$ fand schon bei Berechnung der Formeln (15) ihre Verwendung und ist nach Formel (14) (pag. 166) leicht zu erhalten; ferner ist nach pag. 168:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= u + K - v \\ \pi &= \omega + \Omega\,. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Weiter ist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \operatorname{cotg} (45 + \tfrac{1}{2}\varphi) \\ M &= E - \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} \sin E \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

und:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{p}{\cos^2\varphi} \\ \mu &= \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Ich werde nun die für die Rechnung nöthigen Formeln hier zusammentragen. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass für die neue Osculationsepoche aus der Störungsrechnung entlehnt sind die Werthe von:

$$\Delta M,\ \Delta\omega,\ r,\ \frac{dr}{dt},\ z,\ \frac{dz}{dt} \text{ und} \int \Sigma U\, dt\,.$$

Man wird hierbei den Umstand zu berücksichtigen haben, dass für t als Einheit der Sonnentag gilt, wenn man für die Constante des Sonnensystems k den im ersten Bande pag. 45 angeführten Werth benützt. Um aber aus den Summationstabellen mit möglichster Bequemlichkeit die Integralwerthe entlehnen zu können, wird es sich empfehlen, als Zeiteinheit das bei der Störungsrechnung benützte Zeitintervall w zu wählen, man wird demnach in den folgenden Formeln überall dort, wo die Grösse k erscheint, sofort (wk) annehmen und kann dann w, soweit es bei den einfachen und doppelten Integralen in Betracht kommt, der Einheit gleich setzen.

Zunächst bestimmt man:

$$M_0 = M_{00} + \mu_0 t \qquad \text{I)}$$

wo M_{00} die mittlere Anomalie der Ausgangselemente ist, t die Zeit (in Einheiten des mittleren Sonnentages) die zwischen der Epoche dieser Elemente und der gewählten neuen Osculationsepoche verflossen ist. Bezeichnet man mit E_{00} die zur mittleren Anomalie M_0, dagegen mit E_0 die zu $M_0 + \Delta M$ gehörende excentrische Anomalie, so hat man zu rechnen:

$$\left.\begin{array}{ll} M_0 = E_{00} - e_0'' \sin E_{00}\,, & M_0 + \Delta M = E_0 - e_0'' \sin E_0 \\ r_0 \sin v_0 = a_0 \cos\varphi_0 \sin E_{00}\,, & ((r)) \sin V = a_0 \cos\varphi_0 \sin E_0 \\ r_0 \cos v_0 = a_0 (\cos E_{00} - e_0)\,, & ((r)) \cos V = a_0 (\cos E_0 - e_0) \\ \multicolumn{2}{c}{(r) = ((r))(1 + \nu)} \\ \multicolumn{2}{c}{r = (r) \sec b\,, \quad \operatorname{tg} b = \frac{z}{(r)}} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{d(r)}{dt} = ((r)) \frac{d\nu}{dt} + \frac{(wk)\, e_0 \sin V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}}} \end{array}\right\} \quad \text{II)}$$

Hierauf berechnet man:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(l - K_0) \operatorname{tg} J = \frac{z}{r} \\ \cos(l - K_0) \operatorname{tg} J = \frac{(r)\frac{dz}{dt} - z\frac{d(r)}{dt}}{(wk)\sqrt{p_0} + \int \Sigma\, U\, dt} \\ l = V + \omega_0 + \Delta\omega \\ \Delta(\sqrt{p}) = \left\{\frac{1}{(wk)} \int \Sigma\, U\, dt + 2\sqrt{p_0} \sin^2 \tfrac{1}{2} J\right\} \sec J \\ \Delta(p) = \{2\sqrt{p_0} + \Delta(\sqrt{p})\}\, \Delta(\sqrt{p}) \\ \Delta u = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J}{\sin 1''} \sin 2(l - K_0) + \frac{1}{2} \frac{(\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J)^2}{\sin 1''} \sin 4(l - K_0) + \ldots \end{array}\right\} \quad \text{III)}$$

Dann ist:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} J \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i_0 = a \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} J \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i_0 = b \\ \text{I} = \frac{a}{\sin 1''} \sin K_0 + \frac{a^2}{2 \sin 1''} \sin 2K_0 + \frac{a^3}{3 \sin 1''} \sin 3K_0 + \ldots \\ \text{II} = -\frac{b}{\sin 1''} \sin K_0 + \frac{b^2}{2 \sin 1''} \sin 2K_0 - \frac{b^3}{3 \sin 1''} \sin 3K_0 + \ldots \end{array}\right\} \quad \text{IV)}$$

$$\Delta(K) = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$
$$\Omega - \Omega_0 = \mathrm{I} - \mathrm{II}$$
$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(i - i_0) = \frac{\cos\{K_0 + \frac{1}{2}\Delta(K)\}}{\cos\frac{1}{2}\Delta(K)}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}J$$

Hierauf schreitet man zur Bestimmung von $\Delta(r)$ und $\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$. Bezeichnet man mit β die zu $\sin\frac{1}{2}(E - E_0)$ gehörige Bogenverwandlung also:

$$\log\beta = S - \log\sin 1''$$

wobei S die bekannte Hilfsgrösse zur Berechnung des Logarithmus des Sinus der kleinen Bogen darstellt, so wird sein:

$$\left.\begin{aligned}
E_0 - E_{00} &= \frac{\Delta M}{1 - e_0\beta\cos\frac{1}{2}(E_0 + E_{00})} \\
n'\cos N &= \cos\varphi_0\cos\tfrac{1}{2}(E_0 + E_{00}) \\
n'\sin N &= \sin\tfrac{1}{2}(E_0 + E_{00}) \\
n &= n' a_0 \beta (E_0 - E_{00}) \sin 1'' \\
\mathrm{tg}(V - v_0) &= \frac{n\cos(N - v_0)}{r_0 - n\sin(N - v_0)} \\
(r) - r_0 &= -\frac{n\sin\{N - \frac{1}{2}(V + v_0)\}}{\cos\frac{1}{2}(V - v_0)}
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{V})$$

Zur Controle rechne man:

$$\left.\begin{aligned}
(r) - r_0 &= a_0 e_0 \beta (E_0 - E_{00}) \sin 1'' \sin\tfrac{1}{2}(E_0 + E_{00}) \\
\sin\tfrac{1}{2}(V - v_0) &= \frac{a_0\cos\varphi_0\beta}{2\sqrt{r_0 (r)}}(E_0 - E_{00})\sin 1''
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{VI})$$

Man findet dann:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\nu + 2\sin^2\frac{1}{2}b}{\cos b} \\
\Delta(r) &= r - r_0 = \{(r) - r_0\} + (r)\gamma \\
\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right) &= \frac{\cos b}{1+\nu}\left[(r)\frac{dr}{dt} + \frac{wk\,e_0}{\sqrt{p_0}}\{2\sin\tfrac{1}{2}(V - v_0)\cos\tfrac{1}{2}(V + v_0) - \gamma\sin v_0\} + \frac{z}{r}\frac{dz}{dt}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{VII})$$

Zur Bestimmung der Excentricität und der wahren Anomalie hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dr_0}{dt} &= \frac{(wk)}{\sqrt{p_0}}\,e_0\sin v_0 \\
g\sin G &= \frac{1}{wk}\left\{\frac{dr_0}{dt}\Delta(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\,\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)\right\} \\
g\cos G &= \frac{1}{r}\left\{\Delta(p) - \frac{p_0}{r_0}\Delta(r)\right\} \\
\mathrm{tg}(v - v_0) &= \frac{g\sin(G - v_0)}{e_0 + g\cos(G - v_0)} \\
\Delta(e) = e - e_0 &= \frac{g\cos\{G - \frac{1}{2}(v + v_0)\}}{\cos\frac{1}{2}(v - v_0)} \\
\sin\varphi &= e_0 + \Delta(e) \\
\Delta(e^2) &= \{2e_0 + \Delta(e)\}\Delta(e) \\
\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_0) &= \frac{\Delta(e)}{2\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)}
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{VIII})$$

Um den Unterschied der mittleren Anomalien anzugeben, hat man:

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma) &= 2\sin\tfrac{1}{2}(v-v_0)\cos\tfrac{1}{2}(v+v_0)\cos\varphi - 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_0)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_0)\sin v_0 \\
(\gamma) &= \Delta(e) - 2\sin\tfrac{1}{2}(v-v_0)\sin\tfrac{1}{2}(v+v_0) \\
(\lambda) &= -\frac{r}{p}\,g\cos G \\
g'\sin G' &= (\lambda)\sin E_{00} + (\sigma)\frac{r}{p} \\
g'\cos G' &= (\lambda)\cos E_{00} + (\gamma)\frac{r}{p} \\
\operatorname{tang}(E-E_{00}) &= \frac{g'\sin(G'-E_{00})}{1+g'\cos(G'-E_{00})} \\
M-M_0 &= (E-E_{00}) - \frac{2e_0}{\sin 1''}\sin\tfrac{1}{2}(E-E_{00})\cos\tfrac{1}{2}(E+E_{00}) - \frac{\Delta(e)}{\sin 1''}\sin E
\end{aligned}\right\}\ \text{IX)}$$

Weiter ist:

$$\left.\begin{aligned}
\omega-\omega_0 &= \Delta(K) + \Delta(u) + \Delta\omega + (V-v_0) - (v-v_0) \\
\pi-\pi_0 &= (\omega-\omega_0) + (\vartheta-\vartheta_0)\,.
\end{aligned}\right\}\ \text{X)}$$

Zur Bestimmung des letzten Elementes μ hat man:

$$\left.\begin{aligned}
q &= \frac{\Delta(p) + a_0\,\Delta(e^2)}{2\{p_0 - a_0\,\Delta(e^2)\}} \\
&q \text{ als Argument für die } f\text{-Tafel (Tafel XI)} \\
\mu-\mu_0 &= -f q\mu_0
\end{aligned}\right\}\ \text{XI)}$$

Zur Controle der Richtigkeit der Rechnung wird man die Elemente durch die directe Rechnung bestimmen und haben, indem man vorerst die Formelsysteme I) und II), pag. 170, wie oben erledigt:

$$\left.\begin{aligned}
\sin(l-K_0)\operatorname{tg}J &= \frac{z}{r_1} \\
\cos(l-K_0)\operatorname{tg}J &= \frac{r\frac{dz}{dt} - z\frac{dr}{dt}}{(wk)\sqrt{p_0} + \int \Sigma\, U\,dt} \\
l &= V + \omega_0 + \Delta\omega \\
(wk)\sqrt{p} &= \left\{(wk)\sqrt{p_0} + \int \Sigma\, U\,dt\right\}\sec J \\
\operatorname{tg}(u) &= \operatorname{tg}(l-K_0)\sec J\,.
\end{aligned}\right\}\ \text{III)}$$

Weiter ist:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\{K+(\vartheta-\vartheta_0)\} &= \frac{\cos\tfrac{1}{2}(i_0-J)}{\cos\tfrac{1}{2}(i_0+J)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}K_0 \\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\{K-(\vartheta-\vartheta_0)\} &= \frac{\sin\tfrac{1}{2}(i_0-J)}{\sin\tfrac{1}{2}(i_0+J)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}K_0 \\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(i-i_0) &= \frac{\cos\tfrac{1}{2}(K_0+K)}{\cos\tfrac{1}{2}(K-K_0)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J\,.
\end{aligned}\right\}\ \text{IV)}$$

Dann ist zu rechnen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{r_1}{r}\frac{dr_1}{dt} + \frac{z}{r}\frac{dz}{dt} \\
\sin\varphi\sin v &= \frac{\sqrt{p}}{(wk)}\frac{dr}{dt} \\
\sin\varphi\cos v &= \frac{p}{r} - 1
\end{aligned}\right\}\ \text{V)}$$

$$\omega = u + K - v$$
$$\pi = \omega + \Omega\,.$$

Schliesslich ist:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v \operatorname{cotg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$M = E - \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\sin E$$
$$a = \frac{p}{\cos^2\varphi} \qquad \text{VI)}$$
$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}\,.$$

§ 5. Rechnungsbeispiel zu Hansen-Tietjen's Methode.

Es sollen, um die voranstehenden Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, die Störungen ermittelt werden, die der Planet (62) Erato durch die Anziehung der Planeten Jupiter und Saturn erleidet, und zwar innerhalb desselben Intervalles und mit Annahme derselben Elemente, die zur Ermittelung der Störungen nach den rechtwinkeligen Coordinaten gedient haben, um Anhaltspunkte zur Vergleichung der Resultate, die nach verschiedenen Methoden erhalten wurden, zu gewinnen. Indem ich betreffs der allgemeinen Bemerkungen, über die Wahl der Intervalle des fixen Aequinoctiums etc. auf den § 5 der Encke'schen Methode pag 105 verweise, setze ich nochmals die der Störungsrechnung zu Grunde gelegten Elemente hier an:

(62) Erato

Epoche und Osculation 1874 Decbr. 26.0 mittlere Berliner Zeit.

mittl. Aeq. 1870.0

$$L_0 = 219^\circ\ 8'\ 0''8$$
$$M_0 = 180\ 40\ 48.0$$
$$\pi_0 = 38\ 27\ 17.9$$
$$\Omega_0 = 125\ 42\ 39.7$$
$$i_0 = 2\ 12\ 23.9$$
$$\varphi_0 = 9\ 59\ 14.9$$
$$\mu_0 = 640''89605$$
$$\log a_0 = 0.4954793\,.$$

Auf den unteren Rand eines Zettels schreibt man vorerst jene constanten Logarithmen hin, die im Verlaufe der Störungsrechnung auftreten; hierbei hat man zu beachten, dass:

$$e_0'' = \frac{\sin\varphi_0}{\sin 1''}$$
$$e_0 = \sin\varphi_0$$
$$p_0 = a_0\cos^2\varphi_0$$

ist. Mit Rücksicht auf die voranstehenden Elemente und Massenannahmen (vergl. Tafel XII) der störenden Planeten hat man:

$$\log e_0'' = 4.553\,556 \qquad \log \tfrac{3}{2}(w^2k^2)\,10^7 = 6.851$$
$$\log e_0 = 9.239\,131 \qquad \log 2k\,10^7 \sqrt{p_0} = 7.379\,778$$
$$\log a_0 \cos\varphi_0 = 0.488\,847 \qquad \log 2k\sqrt{p_0} = 0.379\,778$$
$$\log a_0 = 0.495\,479 \qquad \log (w^2k^2)\,10^7 = 6.675\,283$$
$$\omega = 272^{\circ}\,44'\,38''2 \qquad \log 12 = 1.079\,181$$
$$\log (w^2k^2)\,m_{♃} = 3.654\,972 \quad w = 40^d \qquad \log(-\mu_0) = 2_n 806\,788$$
$$\log (w^2k^2)\,m_{♄} = 3.13102 \qquad \log 10^{-7} : \sin 1'' = 8.314\,425$$

wobei die Zahlen so angesetzt sind, dass die in Einheiten des Radius verstandenen Störungsgrössen in Einheiten der siebenten Decimale, die im Bogenmaass angesetzten in Einheiten der Bogensekunde erscheinen.

Hieran schliesst sich die Rechnung der Grössen:

$$M = M_0 + \mu_0 t + \varDelta M$$
$$M = E - e_0'' \sin E$$
$$(r) \sin V = a_0 \cos\varphi_0 \sin E$$
$$(r) \cos V = a_0 (\cos E - e_0)$$
$$l = V + \omega_0 + \varDelta\omega$$
$$r = (r)(1 + \nu)$$
$$s = 10^7 (w^2k^2) : r^3$$

Bei den zwei der Osculationsepoche vorangehenden und folgenden Intervallen kann man, wenn sonst keine Näherungen bekannt sind, die Grössen $\varDelta M$, $\varDelta\omega$ und ν der Null gleich setzen; man übergeht dadurch nur Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Störungen, die bei der grossen Nähe der Osculationsepoche wohl stets unmerklich sein werden. Hat aber die Rechnung bereits die Anfangsintervalle überschritten, so bildet man, je nachdem die Rechnung der Zeit nach fortschreitet oder nach rückwärts fortgesetzt wird, die Grössen $\varDelta M$ und $\varDelta\omega$ mit Benützung der diesbezüglichen Integraltafeln (vergl. pag. 68 Formel 2) und 3)) durch die Formeln:

bei Rechnung nach Vorwärts:

$$\int^{a+(i+1)w} f(x)\,dx = {}''f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \tfrac{1}{2}\,{}'f(a+iw) + \tfrac{1}{24}\Big[10 f^{\mathrm{I}}(a+(i-\tfrac{1}{2})w) + 9 f^{\mathrm{II}}(a+(i-1)w) + 8 f^{\mathrm{III}}(a+(i-\tfrac{3}{2})w) + \ldots\Big]$$

und bei Durchführung der Rechnung nach rückwärts:

$$\int^{a+(i-1)w} f(x)\,dx = {}''f(a+(i-\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{1}{2}\,{}'f(a+iw) + \tfrac{1}{24}\Big[10 f^{\mathrm{I}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - 9 f^{\mathrm{II}}(a+(i+1)w) + 8 f^{\mathrm{III}}(a+(i+\tfrac{3}{2})w) - \ldots\Big]$$

Für ν und die später erforderliche Grösse z hat man Doppelintegrale nöthig. Man bildet also, je nachdem die Rechnung mit der Zeit vor- oder rückschreitet,

nach vorwärts:

$$f(a+[i+1]w) = f(a+iw) + f^{I}(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) + f^{II}(a+[i-1]w) +$$
$$+ f^{III}(a+[i-\tfrac{3}{2}]w) + \ldots$$

nach rückwärts:

$$f(a+[i-1]w) = f(a+iw) - f^{I}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + f^{II}(a+[i+1]w) -$$
$$- f^{III}(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) + \ldots,$$

und hat damit die folgende für diese Zwecke genügende Annäherung:

$$\iint^{a+iw} f(x)\,dx^2 = {}^{II}f(a+[i\pm 1]w) + \frac{1}{12}f(a+[i\pm 1]w).$$

Nun kann an die Berechnung der störenden Kräfte geschritten werden; da das Berliner Jahrbuch für das hier in Betracht kommende Intervall der Störungsrechnung die auf pag. 158 ff. erwähnten erleichternden Hilfsmittel noch nicht gibt, so wird es am zweckmässigsten sein, unmittelbar aus den heliocentrischen auf das fixe mittlere Aequinoctium bezogenen Längen λ_0' und Breiten β_0' der störenden Planeten (über die Ermittelung dieser Angaben vergl. pag. 82, 83, 150) und deren Radienvectoren, die nöthigen Grössen nach den Formeln (2) und (3) pag. 157 zu berechnen. Man hat dann:

$$\begin{aligned}
q \sin Q &= \sin \beta_0' \\
q \cos Q &= \cos \beta_0' \sin(\lambda_0' - \Omega_0) \\
\cos B_1 \cos L_1 &= \cos \beta_0' \cos(\lambda_0' - \Omega_0) \\
\cos B_1 \sin L_1 &= q \cos(Q - i_0) \\
\sin B_1 &= q \sin(Q - i_0).
\end{aligned}$$

Da aber die in diesem Paragraphen enthaltene Zusammenstellung der Formeln bei der practischen Verwendung als Leitfaden dienen soll, so muss hier auch die zweite Formelgruppe aufgeführt werden, die auf pag. 159 und 160 erläutert ist, und die allenfalls ohne erheblichen Irrthum angewendet werden kann, wenn man genähert richtige Annahmen über die Bahnlage des störenden Planeten macht und B_0 der Null gleich setzt. Man hat so vorerst zu rechnen:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}J \sin\tfrac{1}{2}(\Phi+\Phi') &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Omega)\sin\tfrac{1}{2}(i'+i) \\
\sin\tfrac{1}{2}J \cos\tfrac{1}{2}(\Phi+\Phi') &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Omega)\sin\tfrac{1}{2}(i'-i) \\
\cos\tfrac{1}{2}J \sin\tfrac{1}{2}(\Phi-\Phi') &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Omega)\cos\tfrac{1}{2}(i'+i) \\
\cos\tfrac{1}{2}J \cos\tfrac{1}{2}(\Phi-\Phi') &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Omega)\cos\tfrac{1}{2}(i'-i),
\end{aligned}$$

welche Rechnung zu den Vorbereitungsrechnungen gezählt werden kann.

Ist nun L die Länge in der Bahn bezogen auf das fixe Aequinoctium, B_0 die Breite über der durch Ω' und i' bestimmten Bahnebene, so ist zu rechnen:

$$\begin{aligned}
u' &= L - \Omega' + \Phi' \\
\cos B_1 \cos u &= \cos u' \\
\cos B_1 \sin u &= \sin u' \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J \\
\sin B_1 &= \sin u' \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J \\
L_1 &= u + \Phi,
\end{aligned}$$

wodurch B_1 und L_1 bestimmt erscheinen.

Nun gestaltet sich die Rechnung für beide Methoden gleichmässig in folgender Weise:

$$\xi_1 = r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l)$$
$$\eta_1 = r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l)$$
$$\zeta_1 = r_1 \sin B_1$$
$$\varrho \cos \vartheta \cos \Theta = \xi_1 - (r)$$
$$\varrho \cos \vartheta \sin \Theta = \eta_1$$
$$\varrho \sin \vartheta = \zeta_1 - z$$

$$K = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

$$U = (w^2 k^2)\, m_1\, 10^7\, K \eta_1\, (r)$$
$$R = (w^2 k^2)\, m_1\, 10^7\, K \frac{\xi_1}{(r)}$$
$$W_1 = (w^2 k^2)\, m_1\, 10^7\, K \zeta_1$$
$$w_1 = (w^2 k^2)\, m_1\, 10^7\, \frac{1}{\varrho^3}\,.$$

Die Werthe $(w^2 k^2)\, m_1\, 10^7$ sind in der Tafel XII für die verschiedenen Planeten aufgenommen. Die Rechnung nach den voranstehenden Formeln ist für jeden störenden Planeten gesondert durchzuführen; bei Beginn der Rechnung wird man für die beiden der Osculationsepoche vorangehenden und folgenden Intervalle wieder ohne Nachtheil $z = 0$ setzen dürfen; bei der Rechnung der Grössen U, R, W_1 und w_1 wird man sich auf die zweite Decimale der siebenten Stelle beschränken können und dem entsprechend ist die Rechnung für das folgende Beispiel durchgeführt.

Bezeichnet man die für die verschiedenen störenden Planeten erhaltenen Werthe von U, R, W_1 und w_1 durch die entsprechenden Indices, so bildet man jetzt:

$$\Sigma\, U = U_{♃} + U_{♄} + U_{♂} + U_{♀} + \ldots$$
$$\Sigma\, R = R_{♃} + R_{♄} + R_{♂} + R_{♀} + \ldots$$
$$\Sigma\, W_1 = W_{1♃} + W_{1♄} + W_{1♂} + W_{1♀} + \ldots$$
$$\Sigma\, w_1 = w_{1♃} + w_{1♄} + w_{1♂} + w_{1♀} + \ldots\,.$$

Ist die Störung in z schon beträchtlich angewachsen, was übrigens erst im weiteren Verlaufe der Rechnung eintreten wird, und jedenfalls bei den Werthen in der Nähe der Osculationsepoche nicht in Betracht kommt, so wird man zur Berücksichtigung des Einflusses der hoheren Potenzen von z auf die Störungen noch zu rechnen haben:

$$\Delta \Sigma R = \tfrac{3}{2}\, (w^2 k^2)\, 10^7 \left(\frac{f}{3}\right) \frac{z^2}{r^5}$$
$$\Delta \Sigma W = \tfrac{3}{2}\, (w^2 k^2)\, 10^7 \left(\frac{f}{3}\right) \frac{z^3}{r^5}\,,$$

wobei z näherungsweise für die geforderte Epoche ohne Schwierigkeit aus dem doppelt summirten Werthe erhalten wird; in diesen Ausdrücken wird man unbe-

denklich $\frac{f}{3}$ der Einheit gleich setzen dürfen; sollte diese Annahme, was wohl kaum je eintreten wird, nicht genügend genau sein, so entlehne man mit dem Argumente:

$$q = \frac{z^2}{2\,(r)^2}$$

aus der Encke'schen f Tafel (Tafel XI) den Werth von f.

Sobald der Werth $\Sigma\,U$ bekannt ist, bildet man das Integral $\int \Sigma\,U\,dt$; für die Anfangsconstante und den Integralwerth gelten die folgenden Formeln (vergl. pag. 35):

$$'f\,(a-\tfrac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}\,(a-\tfrac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}\,(a-\tfrac{1}{2}w) - \ldots$$

$$\int\limits_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(x)\,dx = {}'f\,(a+iw) - \frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}\,(a+iw) + \frac{11}{720}f^{\mathrm{III}}\,(a+iw) - \ldots$$

wobei die Funktionswerthe aus der U-Tafel zu entnehmen sind, die in dem unten folgenden Beispiele mitgetheilt ist. Die Bestimmung der Anfangsconstante hat keine Schwierigkeit, da sofort nach der Anlage der Rechnung vier Werthe für $\Sigma\,U$ bekannt sind. Bei der Bildung der Integrale hat man zu beachten, dass die Funktionswerthe arithmetische Mittel sind und dass man die bei der Rechnung fehlenden Differenzwerthe nach dem Gange der Funktion bestimmen muss. Die Annahme für $f^{\mathrm{III}}\,(a+iw)$ kann wegen des verhältnissmässig kleinen Factors $\frac{11}{720}$ leicht genug überschlagsweise gemacht werden, die Berechnung von $f^{\mathrm{I}}\,(a+iw)$ aber muss genauer durchgeführt werden. Man erhält leicht, wenn man auf die Bedeutung von $f^{\mathrm{I}}\,(a+iw)$ zurückgeht und nur auf jene Differenzwerthe Rücksicht nimmt, die in völliger Strenge gegeben sind (vergl. pag. 67) bei der Rechnung:

nach vorwärts:

$$f^{\mathrm{I}}\,(a+iw) = f^{\mathrm{I}}\,(a+[i-\tfrac{1}{2}]\,w) + \frac{1}{2}\Big[f^{\mathrm{II}}\,(a+[i-1]\,w) + f^{\mathrm{III}}\,(a+[i-\tfrac{3}{2}]\,w) + f^{\mathrm{IV}}\,(a+[i-2]\,w) + \ldots\Big]$$

nach rückwärts:

$$f^{\mathrm{I}}\,(a+iw) = f^{\mathrm{I}}\,(a+[i+\tfrac{1}{2}]\,w) + \frac{1}{2}\Big[f^{\mathrm{II}}\,(a+[i+1]\,w) - f^{\mathrm{III}}\,(a+[i+\tfrac{3}{2}]\,w) + f^{\mathrm{IV}}\,(a+[i+2]\,w) - \ldots\Big]$$

In dem für die Summation von U bestimmten Bogen setzt man nun in die entsprechende Columne $\log \int \Sigma\,U\,dt$ und $\log \int U''\,dt$, wobei man sich zu erinnern hat, dass:

$$\int U''\,dt = \left\{1 + \frac{\int \Sigma\,U\,dt}{2\,(wk)\,10^7\,[p_0]}\right\}\int \Sigma\,U\,dt$$

ist. Sind die störenden Kräfte sehr bedeutend, so wird stets eine grosse Unsicherheit in der Berechnung von $\int U'' \, dt$ in den letzten Stellen übrig bleiben, doch hat dieses auf das Resultat keine sehr schädigende Wirkung, weil dieses Integral schliesslich mit dem bei Störungsrechnungen stets kleinen Factor $\frac{2(wk)\sqrt{p_0}}{(r)^4}$ zu multipliciren ist.

Hieran schliesst sich die Berechnung der Formeln:

$$H_1 = \frac{2(wk)\sqrt{p_0}}{(r)^4} \int U'' \, dt$$

$$H_2 = \Sigma R - \Sigma w_1 + \varDelta \Sigma R$$

$$H_0 = H_1 + H_2$$

$$h = s - H_0$$

$$h' = \frac{h \; 10^{-7}}{1 + \frac{1}{12} h \; 10^{-7}} .$$

Nunmehr hat die Berechnung des zweiten Differentialquotienten von ν keine Schwierigkeit; wie derselbe für die ersten Intervalle erlangt wird, ist oben pag. 151 ff. ausführlich auseinandergesetzt worden; ist die Rechnung einmal im Gange, so geben die doppelt summirten Werthe $\frac{d^2 \nu}{dt^2}$, die aus dem ν-Bogen zu entnehmen sind, sofort:

$$S_h = {}^{\text{II}}f\,(a + iw) - \frac{1}{240} f^{\text{II}}\,(a + iw) + \frac{1}{12} H_0$$

$$\frac{d^2 \nu}{dt^2} = H_0 - h' \, S_h \; ,$$

wobei der im Allgemeinen fast unmerkliche Werth von $\frac{1}{240} f^{\text{II}}\,(a + iw)$ in Bezug auf $f^{\text{II}}\,(a + iw)$ nach dem Gange der Funktion zu extrapoliren ist.

Nun rechnet man, da jetzt $f\,(a + iw) = \frac{d^2 \nu}{dt^2}$ bekannt ist genau:

$$\nu = {}^{\text{II}}f\,(a + iw) + \frac{1}{12} f\,(a + iw) - \frac{1}{240} f^{\text{II}}\,(a + iw) + \ldots ,$$

wobei jetzt über den Werth von $f^{\text{II}}\,(a + iw)$ eine wesentlich genauere Annahme möglich ist, da es sich nunmehr bloss um eine Extrapolation um ein Intervall handelt.

Weiter hat man:

$$\frac{d \varDelta M}{dt} = - \mu_0 \, \sigma \, \nu \; .$$

wobei σ mit dem Argumente ν aus der Tafel XIII zu entlehnen ist; in dieser Tafel ist die Constante w gleich 40 Tagen bereits in die Grösse σ mit aufgenommen. Wollte man zur Ermittelung von σ nicht die Tafel benützen, so würde sich die Rechnung mit Hilfe der Additionslogarithmen am einfachsten in der Form gestalten:

$$\frac{d \varDelta M}{dt} = - (w \, \mu_0) \, \frac{\nu}{1 + \nu} \left(1 + \frac{\nu}{1 + \nu} \right) .$$

Die Summation dieser Werthe nebst derjenigen, die sich späterhin für $\frac{d\,\varDelta\omega}{dt}$ ergeben, führe ich auf einem und demselben Bogen aus; zur Bestimmung der Anfangsconstante für diese einfachen Quadraturen wird man wieder haben:

$$'f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}\omega) - \ldots$$

Man hat nun, um zur Kenntniss von $\frac{d^2z}{dt^2}$ zu gelangen, zu rechnen:

$$W_0 = \Sigma\, W_1 + \varDelta\, \Sigma\, W$$
$$[w] = s + \Sigma\, w_1$$
$$[w'] = \frac{[w]\, 10^{-7}}{1 + \frac{1}{12}[w]\, 10^{-7}}\,,$$

aus dem z-Bogen wird man erhalten:

$$S_w = {}''f(a+iw) - \frac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+iw) + \frac{1}{12}W_0\,,$$

wodurch

$$\frac{d^2z}{dt^2} = W_0 - [w']\, S_w$$

wird. Schliesslich ist noch:

$$\frac{d\,\varDelta\omega}{dt} = \frac{1}{(r)^2}\cdot\frac{10^{-7}}{\sin 1''}\int\Sigma\, U\, dt\,,$$

wobei zu beachten ist, dass man in diesem Ausdrucke nicht irrthümlicher Weise den früher benützten Werth von $\int U'\, dt$ verwendet.

Ich habe nun ausführlich die diessbezügliche Rechnung für Erato hier aufgenommen, und es bedarf dieselbe nur einiger erläuternder Worte.

Vorerst ist zu beachten, dass die vier ersten Orte entsprechend den auf pag. 151 ff. gemachten Auseinandersetzungen durchgeführt sind, demnach von dem allgemeinen Rechnungsschema abweichen; sonst ist Alles gleichmässig durchgeführt. Die Rechnung ist so abgetheilt, dass die mit (62) überschriebenen Bogen wesentlich Grössen, die von dem Orte des gestörten Planeten in der Bahn abhängig sind, enthalten, während auf den mit ♃ und ♄ bezeichneten Bogen die Berechnung der störenden Kräfte für jeden einzelnen dieser Planeten aufgenommen ist. Ueberdies sind auf den ♃-Bogen die Summirungen der störenden Kräfte und der von z^2 und z^3 abhängigen Correctionen ausgeführt, welch' letztere Correctionen jedoch für das vorliegende Beispiel innerhalb des behandelten Zeitintervalles unmerklich bleiben, da dieselben niemals den Werth 0.005 der siebenten Decimale erreichen.

Die Berechnung der Annahmen für $\varDelta M$, $\varDelta\omega$, r und z für das jeweilige nächste Intervall, nebst den Zwischenwerthen, die zur Kenntniss von $\int U'\, dt$ führen.

ist stets auf einem Nebenpapiere ausgeführt; ich werde aber, um die in obiger Zusammenstellung enthaltenen Formeln durch ein Beispiel zu erläutern, hier eine solche Bestimmung ausführlich durchnehmen, und, um keinen Zweifel übrig zu lassen, mehr Zahlen hinschreiben, als man sonst mitzunehmen gezwungen ist.

Da die Rechnung nach rückwärts fortschreitet, so sind der obigen Zusammenstellung die diesbezüglichen Formeln zu entlehnen.

Die Rechnung sei etwa bis 1872 März 11 vorgeschritten, und man habe die Störungswerthe für 1872 Januar 31 zu berechnen. Wenn man also nur jene Summations- und Differenzwerthe in Betracht zieht, die in dieser Phase der Rechnung schon bekannt sind, und die Werthe von ΔM und $\Delta\omega$ auf Zehntheile der Bogensekunde, den Werth von ν auf die sechste Decimale und jenen von z auf die siebente Decimale genau zu erhalten wünscht, so wird man haben:

	für ΔM	für $\Delta\omega$
${}^{\mathrm{I}}f\,(a+[i-\frac{1}{2}]w)$	$+\ 52'38''99$	$-\ 7'23''92$
$f\,(a+iw)$	$-\ 3'21.88$	$+\ 13.27$
$f^{\mathrm{I}}\,(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$-\ 17.48$	$-\ 0.10$
$f^{\mathrm{II}}\,(a+[i+1]w)$	$+\ 4.85$	$+\ 0.11$
$f^{\mathrm{III}}\,(a+[i+\frac{3}{2}]w)$	$+\ 0.22$	$+\ 0.04$
$f^{\mathrm{IV}}\,(a+[i+2]w)$	$-\ 0.23$	$-\ 0.01$;

man findet also leicht, wenn man rechnet:

$$\gamma = \frac{1}{24}\Big\{ 10 f^{\mathrm{I}}\,(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - 9 f^{\mathrm{II}}\,(a+[i+1]w) + 8 f^{\mathrm{III}}\,(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) - 7 f^{\mathrm{IV}}\,(a+[i+2]w)\Big\}$$

	ΔM	$\Delta\omega$
${}^{\mathrm{I}}f\,(a+[i-\frac{1}{2}]w)$	$+\ 52'38''99$	$-\ 7'23''92$
$-\frac{1}{2}f\,(a+iw)$	$+\ 1'40.94$	$-\ 6.63$
γ	$-\ 8.96$	$-\ 0.08$
	$\Delta M = +\ 54'11''0$	$\Delta\omega = -\ 7'30''6$.

Für ν und z wird man nach den betreffenden Summationsbogen haben:

${}^{\mathrm{II}}f\,(a+[i-1]w)$	$+\ 35354$	$-\ 447.1$
$f\,(a+iw)$	$-\ 870$	$+\ 20.7$
$f^{\mathrm{I}}\,(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$-\ 89$	$+\ 8.4$
$f^{\mathrm{II}}\,(a+[i+1]w)$	$+\ 45$	$-\ 1.4$;

setzt man wieder:

$$z = \frac{1}{12}\Big[f\,(a+iw) - f^{\mathrm{I}}\,(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + f^{\mathrm{II}}\,(a+[i+1]w) - f^{\mathrm{III}}\,(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) + \ldots\Big]$$

so wird:

	r	z
$^{II}f(a+(i-1)w)$	$+$ 35354	$-$ 447.1
$\varkappa$	$-$ 61	$+$ 0.9
$1+r$	$+$ 1.003529	$z = -$ 0,0000446

womit alle Werthe gegeben sind, deren man zur Berechnung der störenden Kräfte für 1872 Januar 31 bedarf.

Im Verlaufe der Rechnung tritt noch die Nothwendigkeit hervor, den Werth von $\int U' dt$ für dieses Datum zu berechnen. Auf dem U-Bogen sind die diesbezüglichen Zahlen:

$$\begin{aligned}
{}^{I}f\ (a+iw) &= \tfrac{1}{2}(4464.45 + 4365.21) = + 4414.83\\
f^{I}\ (a+[i+\tfrac{1}{2}]w) &= + 57.09\\
f^{II}\ (a+[i+1]w) &= + 11.05\\
f^{III}\ (a+[i+\tfrac{3}{2}]w) &= + 0.83\\
f^{IV}\ (a+[i+2]w) &= - 0.21\ .
\end{aligned}$$

Man findet also aus diesen Zahlen (vergl. pag. 177):

$$f^{I}(a+iw) = + 52.09.$$

Für $f^{III}(a+iw)$ wird man schätzungsweise $+ 0.95$ annehmen können; der genaue Werth hierfür ist, wie sich später zeigt $+ 0.99$. Nunmehr hat man:

$$\begin{array}{lllll}
 & {}^{I}f(a+iw) & -\frac{1}{12}f^{I}(a+iw) & +\frac{11}{720}f^{III}(a+iw) & \\
\int \Sigma\, U\, dt & = + 4414.83 & - 4.34 & + 0.01 & = + 4410.50\ ,
\end{array}$$

womit der für die weitere Rechnung nöthige Integralwerth bekannt ist.

Für die Berechnung von S_h und S_w wird man haben, wenn man für $f^{II}(a+iw)$ dem Gange der Funktion entsprechend beziehungsweise $+ 31$ und $- 0.3$ annimmt (die genauen Werthe dieser zweiten Differenzen sind beziehungsweise $+ 28.64$ und $- 0.22$).

	S_h		S_w
$^{II}f(a+iw)$	$+$ 35353.87		$-$ 447,15
$\frac{1}{12}H_0$	$+$ 17.17	$\frac{1}{12}W_0$	$-$ 0.04
$-\frac{1}{240}f^{II}(a+iw)$	$-$ 0.13		0.00
$S_h =$	$+$ 35370.91	$S_w =$	$-$ 447.19 .

Als Anhang für die voranstehende Rechnung habe ich für die Zeit von 1860, Sept. 1 bis 1877 Dec. 30, mit Ausschluss der bereits im Beispiel enthaltenen Zahlen die einfach summirten Werthe von $\frac{d\,\Delta M}{dt}$ und $\frac{d\,\Delta\omega}{dt}$, dann die doppelt summirten

Werthe von $\frac{d^2 r}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z}{d t^2}$ mitgetheilt, weil diese Werthe bei dem unten folgenden Beispiele der Ableitung der Erato-Elemente nothwendig sind.

Schliesslich will ich noch erwähnen, dass man als Probe für die Richtigkeit der Rechnung den regelmässigen Gang der Differenzen verwerthen kann. Man wird diese Prüfung durch Differenzen auch im Verlaufe der Rechnung mehrfach vornehmen können, um etwa vorhandene Fehler sofort zu erkennen und zu verbessern, ehe dieselben in das Resultat übergehen. Ich prüfe demgemäss stets die Werthe l, $\log r$, $\log \varrho_{♃}$ und $\log \varrho_{♄}$ durch Differenzen; ausserdem wird es sich empfehlen, auch die Differenzwerthe von E zu bilden; man wird daraus leicht einen sehr nahe richtigen Schluss auf die folgende excentrische Anomalie machen können und dadurch die Auflösung der transcendenten Gleichung (vergl. I pag. 49) wesentlich erleichtern.

Ausführliches Beispiel

zu

Hansen-Tietjen's Methode

der

Störungsrechnung.

(62)₁

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20
$\Delta\omega$	vergl	pag. 151	ff.)		— 10″8	— 21″1	— 34″9	— 51″9
ΔM					+ 1″8	+ 5″2	+ 11″9	+ 23″6
$M_0 + \mu_0 t$	191°21′42″7	184°14′26″8	177°7′11″0	169°59′55″1	162°52′39″3	155°45′23″4	148°38′7″6	141°30′51″7
M	191°21′42″7	184°14′26″8	177°7′11″0	169°59′55″1	162°52′41″1	155°45′28″6	148°38′19″5	141°31′15″3
E	189°41′21″8	183°36′51″7	177°32′43″1	171°28′19″9	165°23′7″2	159°16′28″3	153°7′47″8	146°56′29″3
sin E	9_n226102	8_n799621	8.631742	9.171110	9.401947	9.548869	9.655108	9.736791
cos E	9_n993760	9_n999136	9_n999601	9_n995172	9_n985716	9_n970945	9_n950382	9_n923303
Subtrl.	0.070386	0.069586	0.069518	0.070176	0.071600	0.073877	0.077158	0.081683
cos $E - e_0$	0_n064146	0_n068722	0_n069119	0_n065348	0_n057316	0_n044822	0_n027540	0_n004986
(r) sin V	9_n714949	9_n288468	9.120589	9.659957	9.890794	0.037716	0.143955	0.225638
sin V oder cos V	9_n995605	9_n999391	9_n999719	9_n996599	9_n989939	9_n979537	9_n965068	9_n946045
(r) cos V	0_n559625	0_n564201	0_n564598	0_n560827	0_n552795	0_n540301	0_n523019	0_n500465
V	188°8′16″5	183°2′1″6	177°56′23″0	172°50′19″8	167°42′52″2	162°32′57″8	157°19′34″9	152°1′38″6
$\omega_0 + \Delta\omega$	272°44′38″2	272°44′38″2	272°44′38″2	272°44′38″2	272°44′27″4	272°44′17″1	272°44′3″3	272°43′46″3
l	100°52′54″7	95°46′39″8	90°41′1″2	85°34′58″0	80°27′19″6	75°17′14″9	70°3′38″2	64°45′24″9
$1 + \nu$					1.000041	1.000092	1.000171	1.000285
log $(1 + \nu)$	vergl.	pag. 151	ff.)		0.000018	0.000040	0.000074	0.000124
$[r]$					0.562856	0.560764	0.557951	0.554420
(r)	0.564020	0.564810	0.564879	0.564228	0.562874	0.560804	0.558025	0.554544
$(r)^3$	1.692060	1.694430	1.694637	1.692684	1.688622	1.682412	1.674075	1.663632
$2\,wk\sqrt{p_0}\int U'dt$	3_n864411	3_n400659	3.411549	3.896506	4.122474	4.268008	4.370913	4.445106
r^4	2.256080	2.259240	2.259516	2.256912	2.251496	2.243216	2.232100	2.218176
H_1	— 40.58	— 13.85	+ 14.19	+ 43.61	+ 74.30	+ 105.87	+ 137.66	+ 168.63
H_2	+ 57.26	+ 76.74	+ 99.50	+ 125.63	+ 154.88	+ 186.36	+ 218.37	+ 248.26
H_0	+ 16.68	+ 62.89	+ 113.69	+ 169.24	+ 229.18	+ 292.23	+ 356.03	+ 416.89
Σw_1	+ 267.83	+ 306.68	+ 349.89	+ 396.90	+ 446.43	+ 495.92	+ 541.67	+ 578.78
s	+96210.6	+95687.0	+95641.4	+96072.5	+96975.2	+98371.8	+100278.6	+102719.0
h	+96193.9	+95624.1	+95527.7	+95903.3	+96746.0	+98079.6	+99922.6	+102302.1
$10^{-7}h$					7.985633	7.991578	7.999663	8.009885
$1 + \frac{1}{12}10^{-7}h$					0.000350	0.000355	0.000362	0.000370
S_h	vergl.	pag. 151	ff.		+ 412.60	+ 922.51	+ 1715.69	+ 2847.54
log S_h					2.615529	2.964971	3.234438	3.454470
h'					7.985283	7.991223	7.999301	8.009515
$h' S_h = h\nu$					+ 3.99	+ 9.04	+ 17.13	+ 29.11
$d^2\nu : dt^2$	+ 16.00	+ 62.80	+ 113.58	+ 168.01	+ 225.19	+ 283.19	+ 338.90	+ 387.78
ν	+ 70.93	+ 9.91	+ 12.03	+ 128.03	+ 412.29	+ 921.76	+ 1714.24	+ 2845.13
log ν	1.8508..	0.9961..	1.0803..	2.1073..	2.615203	2.964618	3.234071	3.454102
σ	4.9031..	4.9031..	4.9031..	4.9031..	4.903063	4.903030	4.902979	4.902905
log $d\Delta M : dt$	9_n5607..	8_n7060..	8_n7902..	9_n8172..	0_n325054	0_n674436	0_n943836	1_n163795
$d\Delta M : dt$	— 0″364	— 0″051	— 0″062	— 0″656	— 2″114	— 4″725	— 8″787	— 14″581
$[w]$	+96478.4	+95993.7	+95991.3	+96469.4	+97421.6	+98867.7	+100820.3	+103297.8
$10^{-7}[w]$	7.984430	7.982243	7.982232	7.984390	7.988655	7.995054	8.003548	8.014091
$1 + \frac{1}{12}10^{-7}[w]$					0.000352	0.000358	0.000365	0.000374
S_w					— 76.69	— 152.99	— 256.01	— 384.81
log S_w					1_n884739	2_n184663	2_n408257	2_n585246
$[w']$	(vergl.	pag. 151	ff.)		7.988303	7.994696	8.003183	8.013717
$[w'] S_w = z[w]$					— 0.75	— 1.51	— 2.58	— 3.97
W_0					— 27.38	— 28.32	— 28.45	— 27.59
$d^2z : dt^2$	— 19.67	— 21.99	— 24.02	— 25.63	— 26.63	— 26.81	— 25.87	— 23.62
$10^{-7}\int\Sigma U dt \sin 1''$	1_n799113	1_n335325	1.346177	1.831093	2.057021	2.202515	2.305383	2.379542
$(r)^2$	1.128040	1.129620	1.129758	1.128456	1.125748	1.121608	1.116050	1.109088
$d\Delta\omega : dt$	— 4″689	— 1″606	+ 1″646	+ 5″042	+ 8″536	+ 12″048	+ 15″464	+ 18″640

(62)₂

1874			1873						
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
— 1′11″9	— 1′34″2	— 1′58″7	— 2′24″3	— 2′50″2	— 3′15″9	— 3′40″7	— 4′ 4″4	— 4′26″5	— 4′47″1
+ 42″1	+ 1′ 8″6	+ 1′46″7	+ 2′38″6	+ 3′45″2	+ 5′ 9″2	+ 6′52″2	+ 8′55″1	+ 11′18″1	+ 14′ 1″3
134°23′35″9	127°16′20″0	120° 9′ 4″2	113° 1′48″4	105°54′32″5	98°47′16″7	91°40′ 0″8	84°32′45″0	77°25′29″1	70°18′13″3
134°24′18″0	127°17′28″6	120°10′50″9	113° 4′27″0	105°58′17″7	98°52′25″9	91°46′53″0	84°41′40″1	77°36′47″2	70°32′14″6
140°41′56″4	134°23′31″0	128° 0′36″6	121°32′34″5	114°58′44″6	108°18′28″2	101°31′ 5″7	94°35′57″9	87°32′27″3	80°19′59″7
9.801674	9.854045	9.896472	9.930566	9.957349	9.977441	9.991165	9.998599	9.999600	9.993789
$9_{n}888645$	$9_{n}844827$	$9_{n}789441$	$9_{n}718615$	$9_{n}625608$	$9_{n}497099$	$9_{n}300335$	$8_{n}904113$	8.632517	9.225096
0.087825	0.096185	0.107765	0.124349	0.149434	0.190925	0.271505	0.165055	9.876569	8.516469
$9_{n}976470$	$9_{n}941012$	$9_{n}897206$	$9_{n}842964$	$9_{n}775042$	$9_{n}688024$	$9_{n}571840$	$9_{n}404186$	$9_{n}115700$	$7_{n}741565$
0.290521	0.342892	0.385319	0.419413	0.446196	0.466288	0.480012	0.487446	0.488447	0.482636
$9_{n}921778$	$9_{n}891280$	$9_{n}853137$	9.886218	9.920021	9.947771	9.969747	9.985969	9.996212	9.999993
$0_{n}471949$	$0_{n}436491$	$0_{n}392685$	$0_{n}338443$	$0_{n}270521$	$0_{n}183503$	$0_{n}067319$	$9_{n}899665$	$9_{n}611179$	$8_{n}237044$
146°38′ 2″8	141° 7′37″0	135°29′ 9″0	129°41′22″3	123°42′55″6	117°32′23″7	111° 8′18″6	104°29′ 9″4	97°33′23″8	90°19′31″7
272°43′26″3	272°43′ 4″0	272°42′39″5	272°42′13″9	272°41′48″0	272°41′22″3	272°40′57″5	272°40′33″8	272°40′11″7	272°39′51″1
59°21′29″1	53°50′41″0	48°11′48″5	42°23′36″2	36°24′43″6	30°13′46″0	23°49′16″1	17° 9′43″2	10°13′35″5	2°59′22″8
1.000436	1.000630	1.000868	1.001149	1.001471	1.001826	1.002207	1.002603	1.003002	1.003392
0.000189	0.000273	0.000377	0.000499	0.000639	0.000792	0.000957	0.001120	0.001302	0.001471
0.550171	0.545211	0.539548	0.533195	0.526175	0.518517	0.510265	0.501477	0.492235	0.482643
0.550360	0.545484	0.539925	0.533694	0.526814	0.519309	0.511222	0.502606	0.493537	0.484114
1.651080	1.636452	1.619775	1.601082	1.580442	1.557927	1.533666	1.507818	1.480611	1.452342
4.496920	4.529682	4.545478	4.545958	4.532805	4.507855	4.473119	4.430700	4.382730	4.331288
2.201440	2.181936	2.159700	2.134776	2.107256	2.077236	2.044888	2.010424	1.974148	1.936456
+ 197.46	+ 222.71	+ 243.10	+ 257.74	+ 266.41	+ 269.54	+ 268.06	+ 263.19	+ 256.20	+ 248.22
+ 272.53	+ 287.55	+ 290.45	+ 280.14	+ 257.75	+ 226.34	+ 189.79	+ 151.87	+ 115.48	+ 82.47
+ 469.99	+ 510.26	+ 533.55	+ 537.88	+ 524.16	+ 495.88	+ 457.85	+ 415.06	+ 371.68	+ 330.69
+ 601.75	+ 605.86	+ 588.63	+ 551.10	+ 497.63	+ 434.80	+ 369.43	+ 306.99	+ 250.98	+ 202.96
+105731.2	+109353.0	+113633.9	+118631.7	+124406.0	+131025.5	+138553.2	+147050.0	+156556.8	+167086.5
+105261.2	+108842.7	+113100.4	+118093.8	+123881.8	+130529.6	+138095.4	+146634.9	+156185.1	+166755.8
8.022268	8.036800	8.053465	8.072227	8.093007	8.115709	8.140179	8.166237	8.193639	8.222081
0.000381	0.000394	0.000409	0.000427	0.000448	0.000472	0.000499	0.000530	0.000565	0.000603
+ 4366.52	+ 6308.52	+ 8690.71	+11506.72	+14723.30	+18280.60	+22094.63	+26061.34	+30061.37	+33964.40
3.640135	3.799927	3.939055	4.060951	4.168005	4.261990	4.344287	4.415997	4.478009	4.531024
8.021887	8.036406	8.053056	8.071800	8.092559	8.115237	8.139680	8.165707	8.193074	8.221478
+ 45.92	+ 68.60	+ 98.20	+ 135.75	+ 182.21	+ 238.36	+ 304.77	+ 381.68	+ 468.90	+ 565.59
+ 424.07	+ 441.66	+ 435.35	+ 402.13	+ 341.95	+ 257.52	+ 153.08	+ 33.38	— 97.22	— 234.90
+ 4362.71	+ 6302.81	+ 8682.56	+11495.39	+14708.10	+18260.74	+22069.24	+26029.54	+30022.30	+33917.26
3.639756	3.799535	3.938648	4.060524	4.167557	4.261519	4.343788	4.415466	4.477444	4.530420
4.902805	4.902679	4.902525	4.902342	4.902133	4.901902	4.901654	4.901397	4.901138	4.900884
$1_{n}349349$	$1_{n}509002$	$1_{n}647961$	$1_{n}769654$	$1_{n}876478$	$1_{n}970209$	$2_{n}052230$	$2_{n}123651$	$2_{n}185370$	$2_{n}238092$
— 22″354	— 32″285	— 44″459	— 58″837	— 1′15″245	— 1′33″370	— 1′52″779	— 2′12″938	— 2′33″239	— 2′53″018
+106332.9	+109958.9	+114222.5	+119182.8	+124903.6	+131460.3	+138922.6	+147357.0	+156807.8	+167289.5
8.026668	8.041231	8.057751	8.076213	8.096575	8.118795	8.142773	8.168371	8.195368	8.223469
0.000385	0.000398	0.000413	0.000431	0.000452	0.000475	0.000503	0.000533	0.000567	0.000605
— 537.15	— 709.31	— 896.17	— 1091.44	— 1288.12	— 1478.94	— 1656.77	— 1814.96	— 1947.53	— 2049.08
$2_{n}730096$	$2_{n}850836$	$2_{n}952390$	$3_{n}038000$	$3_{n}109957$	$3_{n}169951$	$3_{n}219262$	$3_{n}258867$	$3_{n}289484$	$3_{n}311559$
8.026283	8.040833	8.057338	8.075782	8.096123	8.118320	8.142270	8.167838	8.194801	8.222864
— 5.71	— 7.79	— 10.23	— 13.00	— 16.07	— 19.42	— 22.99	— 26.71	— 30.50	— 34.23
— 25.61	— 22.57	— 18.69	— 14.40	— 10.16	— 6.38	— 3.29	— 1.00	+ 0.55	+ 1.49
— 19.90	— 14.78	— 8.46	— 1.40	+ 5.91	+ 13.04	+ 19.70	+ 25.71	+ 31.05	+ 35.72
2.431330	2.464073	2.479860	2.480340	2.467195	2.442259	2.407542	2.365143	2.317195	2.265773
1.100722	1.090968	1.079850	1.067388	1.053628	1.038618	1.022444	1.005212	0.987074	0.968228
+ 21″410	+ 23″610	+ 25″119	+ 25″879	+ 25″916	+ 25″330	+ 24″272	+ 22″905	+ 21″386	+ 19″840

62)3

Datum	1873 März 6	1873 Jan. 25	1872 Dec. 16	1872 Nov. 6	1872 Sept. 27	1872 Aug. 18	1872 Juli 9	1872 Mai 30
$\Delta\omega$	− 5′ 6″2	− 5′23″8	5′40″3	− 5′55″7	− 6′10″2	− 6′24″2	− 6′37″6	− 6′50″9
ΔM	+ 17′ 3″7	+ 20′23″9	+ 23′59″3	+ 27′47″2	+ 31′43″9	+ 35′45″2	+ 39′46″3	+ 43′42″5
$M_0 + \mu_0 t$	63°10′57″5	56° 3′41″7	48°56′25″8	41°49′10″0	34°41′54″1	27°34′38″3	20°27′22″5	13°20′ 6″6
M	63°28′ 1″2	56°24′ 5″6	49°20′25″1	42°16′57″2	35°13′38″0	28°10′23″5	21° 7′ 8″8	14° 3′49″1
E	72°58′ 5″3	65°26′22″0	57°44′37″2	49°52′53″3	41°51′28″8	33°41′ 3″9	25°22′40″7	16°57′45″9
$\sin E$	9.980522	9.958814	9.927200	9.883499	9.824312	9.743994	9.632040	9.465011
$\cos E$	9.466724	9.618733	9.727304	9.809136	9.872040	9.920179	9.955928	9.980682
Subtrl.	9.838129	0.145083	9.829331	9.863828	9.884876	9.898491	9.907434	9.913113
$\cos E - e_0$	9.077260	9.384214	9.556635	9.672964	9.756916	9.818670	9.863362	9.893795
$r \sin V$	0.469369	0.447661	0.416047	0.372346	0.313159	0.232841	0.120887	9.953858
$\sin V$ oder $\cos V$	9.996533	9.984675	9.962752	9.928334	9.877749	9.886356	9.937379	9.972571
$(r_{II}) \cos V$	9.572739	9.879693	0.052114	0.168443	0.252395	0.314149	0.358841	0.389274
V	82°46′ 9″6	74°52′ 5″6	66°36′27″4	57°58′54″3	48°59′42″9	39°40′ 3″5	30° 2′ 4″8	20° 8′58″6
$\omega_0 + \Delta\omega$	272°39′32″0	272°39′14″4	272°38′57″9	272°38′42″5	272°38′28″0	272°38′14″0	272°38′ 0″6	272°37′47″3
l	355°25′41″6	347°31′20″0	339°15′25″3	330°37′36″8	321°38′10″9	312°18′17″5	302°40′ 5″4	292°46′45″9
$1 + \nu$	1.003758	1.004086	1.004363	1.004574	1.004709	1.004755	1.004705	1.004556
$\log(1 + \nu)$	0.001629	0.001771	0.001891	0.001982	0.002040	0.002060	0.002038	0.001974
r_{II}	0.472836	0.462986	0.453295	0.444012	0.435410	0.427793	0.421462	0.416703
(r_I)	0.474465	0.464757	0.455186	0.445994	0.437450	0.429853	0.423500	0.418677
r_I^3	1.423395	1.394271	1.365558	1.337982	1.312350	1.289559	1.270500	1.256031
$2wk\sqrt{p_0}\int V dt$	4.278455	4.226226	4.176583	4.131399	4.092343	4.060763	4.037499	4.022804
$(r)^4$	1.897860	1.859028	1.820744	1.783976	1.749800	1.719412	1.694000	1.674708
H_1	+ 240.21	+ 232.92	+ 226.90	+ 222.55	+ 220.06	+ 219.46	+ 220.55	+ 222.89
H_2	+ 53.76	+ 29.63	+ 10.01	− 5.37	− 16.91	− 24.88	− 29.68	− 31.63
H_0	+ 293.97	+ 262.55	+ 236.91	+ 217.18	+ 203.15	+ 194.58	+ 190.87	+ 191.26
Σw_1	+ 163.13	+ 130.85	+ 105.08	+ 84.71	+ 68.74	+ 56.22	+ 46.45	+ 38.79
s	+178602.8	+190990.5	+204044.5	+217421.0	+230638.9	+243066.1	+253970.6	+262574.1
h	+178308.8	+190728.0	+203807.6	+217203.8	+230435.8	+242871.5	+253779.7	+262382.8
$10^{-7} h$	8.251173	8.280414	8.309220	8.336868	8.362550	8.385377	8.404456	8.418935
$1 + \frac{1}{2} 10^{-7} h$	0.000645	0.000689	0.000737	0.000785	0.000833	0.000878	0.000918	0.000949
S_h	+37632.87	+40925.73	+43702.27	+45827.04	+47175.89	+47643.33	+47150.97	+45655.76
$\log S_h$	4.575567	4.611991	4.640504	4.661121	4.673720	4.678002	4.673491	4.659496
h'	8.250528	8.279725	8.308483	8.336083	8.361717	8.384499	8.403538	8.417986
$h' S_h = h r$	+ 670.03	+ 779.33	+ 889.17	+ 993.58	+ 1085.02	+ 1154.78	+ 1194.07	+ 1195.31
$d^2 r / dt^2$	− 376.06	− 516.78	− 652.26	− 776.40	− 881.87	− 960.20	− 1003.20	− 1004.05
r	+37577.03	+40860.77	+43628.17	+45744.24	+47085.47	+47547.08	+47051.46	+45556.14
$\log r$	4.574922	4.611306	4.639767	4.660336	4.672887	4.677124	4.672573	4.658547
σ	4.900647	4.900434	4.900255	4.900118	4.900031	4.900001	4.900034	4.900130
$\log d\Delta M : dt$	$2_n282357$	$2_n318528$	$2_n346810$	$2_n367242$	$2_n379706$	$2_n383913$	$2_n379395$	$2_n365465$
$d\Delta M / dt$	− 3′11″583	− 3′28″223	− 3′42″234	− 3′52″939	− 3′59″721	− 4′ 2″054	− 3′59″549	− 3′51″988
$[w]$	+178765.9	+191121.3	+204149.6	+217505.7	+230707.6	+243122.3	+254017.0	+262612.9
$10^{-7} [w]$	8.252285	8.281309	8.309948	8.337470	8.363062	8.385825	8.404863	8.419316
$1 + \frac{1}{2} 10^{-7} [w]$	0.000647	0.000691	0.000739	0.000787	0.000834	0.000879	0.000918	0.000949
Sw	− 2114.95	− 2141.13	− 2124.36	− 2062.30	− 1953.70	− 1798.60	− 1598.72	− 1357.52
$\log S_w$	$3_n325300$	$3_n330643$	$3_n327228$	$3_n314352$	$3_n290858$	$3_n254935$	$3_n203772$	$3_n132746$
$[w']$	8.251638	8.280618	8.309209	8.336683	8.362228	8.384946	8.403945	8.418367
$[w] S_w = z [w]$	− 37.75	− 40.86	− 43.29	− 44.77	− 44.99	− 43.64	− 40.52	− 35.57
W_0	+ 1.97	+ 2.10	+ 2.01	+ 1.79	+ 1.50	+ 1.15	+ 0.80	+ 0.44
$d^2 z / dt^2$	+ 39.72	+ 42.96	+ 45.30	+ 46.56	+ 46.49	+ 44.79	+ 41.32	+ 36.01
$10^{-7} \int \Sigma V dt \sin 1''$	2.212958	2.160746	2.111117	2.065944	2.026896	1.995323	1.972063	1.957371
r_I^2	0.948930	0.929514	0.910372	0.891988	0.874900	0.859706	0.847000	0.837354
$d\Delta\omega / dt$	+ 18″367	+ 17″031	+ 15″876	+ 14″926	+ 14″190	+ 13″665	+ 13″337	+ 13″183

(62) I

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
— 7' 4"0	— 7'17"2	— 7'30"6	— 7'44"0	— 7'57"8	— 8'11"7	— 8'25"9	— 8'40"1	— 8'54"5
+ 47'28"7	+ 50'59"6	+ 54'11"0	+ 56'58"4	+ 59'18"6	+1° 1' 9"0	+1° 2'27"8	+1° 3'14"3	+1° 3'28"4
6°12'50"8	359° 5'34"9	351°58'19"1	344°51' 3"2	337°43'47"4	330°36'31"6	323°29'15"7	316°21'59"9	309°14'44"0
7° 0'19"5	359°56'34"5	352°52'30"1	345°48' 1"6	338°43' 6"0	331°37'40"6	324°31'43"5	317°25'14"2	310°18'12"4
8°28' 7"9	359°55'51"4	351°23'12"6	342°52'27"6	334°25'45"5	326° 4'59"6	317°51'42"6	309°47' 4"1	301°51'50"2
9.168120	$7_n081076$	$9_n175403$	$9_n469039$	$9_n635106$	$9_n746625$	$9_n826671$	$9_n885620$	$9_n929063$
9.995239	0.000000	9.995074	9.980304	9.955232	9.918999	9.870128	9.806113	9.722555
9.916273	9.917278	9.916237	9.913030	9.907269	9.898180	9.884294	9.862709	9.827026
9.911512	9.917278	9.911311	9.893334	9.862501	9.817179	9.754422	9.668822	9.549581
9.656967	$7_n569923$	$9_n664250$	$9_n957886$	$0_n123953$	$0_n235472$	$0_n315518$	$0_n374467$	$0_n417910$
9.993241	0.000000	9.993007	9.972033	9.936388	9.884666	$9_n879825$	$9_n930076$	$9_n964133$
0.406991	0.412757	0.406790	0.388813	0.357980	0.312658	0.249901	0.164301	0.045060
10° 4'58"2	359°55' 3"8	349°44'44"1	339°39'29"1	329°44'25"2	320° 3'53"7	310°41'16"7	301°38'52"8	292°58' 0"2
272°37'34"2	272°37'21"0	272°37' 7"6	272°36'54"2	272°36'40"4	272°36'26"5	272°36'12"3	272°35'58"1	272°35'43"7
282°42'32"4	272°32'24"8	262°21'51"7	252°16'23"3	242°21' 5"6	232°40'20"2	223°17'29"0	214°14'50"9	205°33'43.9
1.004306	1.003961	1.003529	1.003024	1.002459	1.001854	1.001226	1.000590	0.999963
0.001866	0.001717	0.001530	0.001311	0.001066	0.000804	0.000532	0.000256	9.999984
0.413750	0.412757	0.413783	0.416780	0.421592	0.427992	0.435693	0.444391	0.453777
0.415616	0.414474	0.415313	0.418091	0.422658	0.428796	0.436225	0.444647	0.453761
1.246848	1.243422	1.245939	1.254273	1.267974	1.286388	1.308675	1.333941	1.361283
4.016333	4.017238	4.024346	4.036346	4.051958	4.070037	4.089628	4.109959	4.130453
1.662464	1.657896	1.661252	1.672364	1.690632	1.715184	1.744900	1.778588	1.815044
+ 225.88	+ 228.74	+ 230.72	+ 231.20	+ 229.79	+ 226.39	+ 221.17	+ 214.47	+ 206.73
— 31.15	— 28.68	— 24.64	— 19.56	— 13.85	— 7.93	— 2.09	+ 3.49	+ 8.65
+ 194.73	+ 200.06	+ 206.08	+ 211.64	+ 215.94	+ 218.46	+ 219.08	+ 217.96	+ 215.38
+ 32.80	+ 28.12	+ 24.43	+ 21.55	+ 19.28	+ 17.50	+ 16.12	+ 15.05	+ 14.23
+268185.3	+270309.4	+268747.5	+263639.4	+255451.8	+244847.2	+232598.9	+219453.2	+206062.9
+267990.6	+270109.3	+268541.2	+263427.8	+255235.9	+244628.7	+232379.8	+219235.2	+205847.5
8.428120	8.431540	8.429011	8.420661	8.406942	8.388508	8.366199	8.340910	8.313546
0.000969	0.000977	0.000971	0.000952	0.000923	0.000885	0.000840	0.000792	0.000744
+43156.79	+39698.72	+35370.91	+30301.45	+24647.00	+18580.64	+12278.97	+ 5911.38	— 367.72
4.635049	4.598777	4.548646	4.481463	4.391764	4.269061	4.089162	3.771689	$2_n565517$
8.427151	8.430563	8.428040	8.419709	8.406019	8.387623	8.365359	8.340118	8.312802
+ 1153.98	+ 1069.89	+ 947.73	+ 796.47	+ 627.74	+ 453.61	+ 284.79	+ 129.36	— 7.56
— 959.25	— 869.83	— 741.65	— 584.83	— 411.80	— 235.15	— 65.71	+ 88.60	+ 222.94
+43060.63	+39609.56	+35291.94	+30235.07	+24594.69	+18542.84	+12255.21	+ 5900.60	— 367.08
4.634080	4.597800	4.547675	4.480511	4.390841	4.268176	4.088321	3.770896	$2_n564761$
4.900292	4.900515	4.900796	4.901124	4.901490	4.901884	4.902292	4.902705	4.903114
$2_n341160$	$2_n305103$	$2_n255259$	$2_n188423$	$2_n099119$	$1_n976848$	$1_n797401$	$1_n480389$	0.274663
— 3'39"361	— 3'21"885	— 2'59"994	— 2'34"320	— 2' 5"637	— 1'34"809	— 1' 2"719	— 30"227	+ 1"882
+268218.1	+270337.5	+268771.9	+263660.9	+255471.1	+244864.7	+232615.0	+219468.2	+206077.1
8.428488	8.431906	8.429384	8.421046	8.407342	8.388926	8.366637	8.341371	8.314030
0.000970	0.000977	0.000971	0.000953	0.000923	0.000885	0.000841	0.000793	0.000745
— 1080.31	— 774.08	— 447.19	— 108.83	+ 231.60	+ 565.07	+ 883.42	+ 1179.73	+ 1448.46
$3_n033548$	$2_n888786$	$2_n650492$	$2_n036749$	2.364739	2.752102	2.946167	3.071783	3.160906
8.427518	8.430929	8.428413	8.420093	8.406419	8.388041	8.365796	8.340578	8.313285
— 28.91	— 20.88	— 11.99	— 2.86	+ 5.90	+ 13.81	+ 20.51	+ 25.84	+ 29.80
+ 0.11	— 0.22	— 0.52	— 0.80	— 1.06	— 1.30	— 1.54	— 1.75	— 1.95
+ 29.02	+ 20.66	+ 11.47	+ 2.06	— 6.96	— 15.11	— 22.05	— 27.59	— 31.75
1.950902	1.951806	1.958913	1.970911	1.986520	2.004595	2.024182	2.044509	2.064998
0.831232	0.828948	0.830626	0.836182	0.845316	0.857592	0.872450	0.889294	0.907522
+ 13"173	+ 13"270	+ 13"437	+ 13"637	+ 13"842	+ 14"028	+ 14"182	+ 14"296	+ 14"371

$\mathfrak{A}_1$

Datum	1875 Febr. 24	1875 Jan. 15	1874 Dec. 6	1874 Oct. 27	1874 Sept. 17	1874 Aug. 8	1874 Juni 29	1874 Mai 20
β_0'	+ 1°16′24″0	+ 1°17′16″7	+ 1°17′56″4	+ 1°18′23″1	+ 1°18′36″8	+ 1°18′37″5	+ 1°18′25″0	+ 1°17′59″4
λ_0'	202°47′52″5	199°46′32″6	196°45′19″1	193°44′ 9″0	190°42′59″1	187°41′46″3	184°40′27″3	181°38′59″2
$\lambda_0' - l_0$	77° 5′12″8	74° 3′52″9	71° 2′39″4	68° 1′29″3	65° 0′19″4	61°59′ 6″6	58°57′47″6	55°56′19″5
$\sin(\lambda_0' - l_0)$	9.988875	9.982982	9.975786	9.967241	9.957294	9.945875	9.932898	9.918260
$\cos \beta_0'$	9.999893	9.999890	9.999888	9.999887	9.999886	9.999886	9.999887	9.999888
$\cos(\lambda_0' - l_0)$	9.349225	9.438625	9.511666	9.573110	9.625861	9.671821	9.712303	9.748250
$\sin \beta_0'$	8.346784	8.351747	8.355449	8.357921	8.359185	8.359249	8.358097	8.355728
$\sin Q$ oder $\cos Q$	9.999887	9.999881	9.999875	9.999869	9.999862	9.999854	9.999846	9.999837
$\cos \beta_0' \sin(\lambda_0' - l_0)$	9.988768	9.982872	9.975674	9.967128	9.957180	9.945761	9.932785	9.918148
Q	1°18′22″9	1°20′21″9	1°22′24″4	1°24′31″4	1°26′44″0	1°29′ 3″4	1°31′30″8	1°34′ 8″0
$Q - i_0$	−0°54′ 1″0	−0°52′ 2″0	0°49′59″5	−0°47′52″5	0°45′39″9	−0°43′20″5	−0°40′53″1	−0°38′15″9
$\sin(Q - i_0)$	8_n196236	8_n179991	8_n162608	8_n143820	8_n123297	8_n100620	8_n075280	8_n046519
q	9.988881	9.982991	9.975799	9.967259	9.957318	9.945907	9.932939	9.918311
$\cos(Q - i_0)$	9.999946	9.999950	9.999954	9.999958	9.999962	9.999965	9.999969	9.999973
$\cos B_1 \sin L_1$	9.988827	9.982941	9.975753	9.967217	9.957280	9.945872	9.932908	9.918284
$\sin L_1$ oder $\cos L_1$	9.988878	9.982987	9.975794	9.967254	9.957312	9.945899	9.932930	9.918303
$\cos B_1 \cos L_1$	9.349118	9.438515	9.511554	9.572997	9.625747	9.671707	9.712190	9.748138
L_1	77°5′18″9	74°4′1″5	71°2′51″0	68°1′43″8	65°0′37″5	61°59′28″4	58°58′13″4	55°56′49″1
$\cos B_1$	9.999949	9.999954	9.999959	9.999963	9.999968	9.999973	9.999978	9.999981
r_1	0.736575	0.736732	0.736828	0.736862	0.736835	0.736747	0.736597	0.736386
$\sin B_1$	8_n185117	8_n162982	8_n138407	8_n111079	8_n080615	8_n046527	8_n008219	7_n964830
$L_1 - l$	336°12′24″2	338°17′21″7	340°21′49″8	342°26′45″8	344°33′17″9	346°42′13″5	348°34′35″2	351°11′24″2
$\cos(L_1 - l)$	9.961425	9.968046	9.973980	9.979290	9.984026	9.988200	9.991813	9.994846
$r_1 \cos B_1$	0.736524	0.736686	0.736787	0.736825	0.736803	0.736720	0.736575	0.736367
$\sin(L_1 - l)$	9_n605777	9_n568107	9_n526399	9_n479437	9_n425394	9_n361702	9_n284102	9_n185138
ξ_1	0.697949	0.704732	0.710767	0.716115	0.720829	0.724920	0.728388	0.731213
(r)	0.564020	0.564810	0.564879	0.564228	0.562874	0.560804	0.558025	0.554544
Subtract.	9.557774	9.579939	9.601221	9.621890	9.642117	9.662006	9.681553	9.700700
ζ_1	8_n921692	8_n899714	8_n875235	8_n847941	8_n817450	8_n783274	8_n744816	8_n701216
z					4_n89....	5_n185...	5_n4082..	5_n5843..
Subtract.	0	0	0	0	9.999949	9.999891	9.999800	9.999668
$\xi_1 - (r)$	0.121794	0.144749	0.166100	0.186118	0.204991	0.222810	0.239578	0.255244
$\sin \Theta$ oder $\cos \Theta$	9_n932875	9_n915085	9_n892647	9_n864034	9.869829	9.902891	9.932446	9.957705
η_1	0_n342301	0_n304793	0_n263186	0_n216262	0_n162197	0_n098422	0_n020677	9_n921505
$\varrho \cos \vartheta$	0.409426	0.389708	0.370539	0.352228	0.335162	0.319919	0.307132	0.297539
$\cos \vartheta$	9.999770	9.999773	9.999778	9.999787	9.999800	9.999817	9.999837	9.999861
$\varrho \sin \vartheta$	8_n921692	8_n899714	8_n875235	8_n847941	8_n817399	8_n783165	8_n744616	8_n700884
ϱ^{-1}	9.590344	9.610065	9.629239	9.647559	9.664638	9.679898	9.692705	9.702322
ϱ^{-3}	8.771032	8.830195	8.887717	8.942677	8.993914	9.039694	9.078115	9.106966
r_1^{-3}	7.790275	7.789804	7.789516	7.789414	7.789495	7.789759	7.790209	7.790842
Subtract.	9.952051	9.958507	9.963900	9.968359	9.971991	9.974860	9.977021	9.978503
K	8.723083	8.788702	8.851617	8.911036	8.965905	9.014554	9.055136	9.085469
$\xi_1 : r$	0.133929	0.139922	0.145888	0.151887	0.157955	0.164116	0.170363	0.176669
$n k^2 m_1 10^7 K$	2.378055	2.443674	2.506589	2.566008	2.620877	2.669526	2.710108	2.740441
$\eta_1 : r$	0_n906321	0_n869603	0_n828065	0_n780490	0_n725071	0_n659226	0_n578702	0_n476049
U	— 1924.76	2057.20	2160.99	— 2220.74	— 2217.93	— 2131.83	— 1944.51	— 1646.23
R	+ 325.08	+ 383.35	+ 449.24	+ 522.27	+ 600.94	+ 681.78	+ 759.40	+ 826.25
W_1	— 19.94	— 22.05	— 24.09	— 25.94	— 27.43	— 28.37	— 28.51	— 27.65
w_1	+ 266.69	+ 305.61	+ 348.89	+ 395.96	+ 445.54	+ 495.07	+ 540.86	+ 578.01
ΣR	+ 325.09	+ 383.42	+ 449.39	+ 522.53	+ 601.31	+ 682.28	+ 760.04	+ 827.04
Σw_1	+ 267.83	+ 306.68	+ 349.89	+ 396.90	+ 446.43	+ 495.92	+ 541.67	+ 578.78
ΣW_1	— 19.91	— 22.02	— 24.05	— 25.89	— 27.38	— 28.32	— 28.45	— 27.59
z	0	0	0	0	— 77	— 153	— 256	— 384
z^2								
r^5								
z^3								
$z^2 : r^5$								
$\Delta \Sigma R$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Sigma R - \Sigma w_1$	+ 57.26	+ 76.74	+ 99.50	+ 125.63	+ 154.88	+ 186.36	+ 218.37	+ 248.26
$z^3 : r^5$								
$\Delta \Sigma W$	0	0	0	0	0	0	0	0

♃2

1874			1873						
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
+1°17′20″7	+1°16′29″0	+1°15′24″6	+1°14′ 7″0	+1°12′36″6	+1°10′53″6	+1° 8′58″4	+1° 6′50″8	+1° 4′31″2	+1° 2′ 0″0
178°37′19″2	175°35′24″2	172°33′11″4	169°30′37″4	166°27′39″3	163°24′14″2	160°20′19″1	157°15′51″6	154°10′48″3	151° 5′ 7″1
52°54′39″5	49°52′44″5	46°50′31″7	43°47′57″7	40°44′59″6	37°41′34″5	34°37′39″4	31°33′11″9	28°28′ 8″6	25°22′27″4
9.901839	9.883483	9.863008	9.840191	9.814752	9.786346	9.754532	9.718744	9.678231	9.631981
9.999890	9.999892	9.999896	9.999899	9.999903	9.999908	9.999913	9.999918	9.999924	9.999929
9.780357	9.809158	9.835063	9.858398	9.879421	9.898341	9.915327	9.930518	9.944026	9.955942
8.352122	8.347257	8.341121	8.333608	8.324690	8.314301	8.302378	8.288778	8.273395	8.256094
9.999827	9.999816	9.999804	9.999790	9.999773	9.999753	9.999729	9.999700	9.999663	9.999615
9.901729	9.883375	9.862904	9.840090	9.814655	9.786254	9.754445	9.718662	9.678155	9.631910
1°36′57″1	1°40′ 0″5	1°43′21″7	1°47′ 4″0	1°51′12″8	1°55′55″2	2° 1′20″8	2° 7′42″0	2°15′17″8	2°24′36″7
−0°35′26″8	−0°32′23″4	−0°29′ 2″2	−0°25′19″9	−0°21′11″1	−0°16′28″7	−0°11′ 3″1	−0° 4′41″9	0° 2′53″9	0°12′12″8
$8_n013294$	$7_n974131$	$7_n926668$	$7_n867386$	$7_n789752$	$7_n680637$	$7_n507153$	$7_n135670$	6.925875	7.550559
9.901902	9.883559	9.863100	9.840300	9.814882	9.786501	9.754716	9.718962	9.678492	9.632295
9.999777	9.999981	9.999985	9.999988	9.999992	9.999995	9.999998	0.000000	0.000000	9.999997
9.901879	9.883540	9.863085	9.840288	9.814874	9.786496	9.754714	9.718962	9.678492	9.632292
9.901894	9.883552	9.863093	9.858303	9.879327	9.898250	9.915240	9.930436	9.943949	9.955871
9.780247	9.809050	9.834959	9.858297	9.879324	9.898249	9.915240	9.930436	9.943950	9.955871
52°55′13″7	49°53′23″1	46°51′14″5	43°48′44″5	40°45′50″9	37°42′30″0	34°38′39″1	31°34′15″5	28°29′15″7	25°23′37″6
9.999985	9.999988	9.999992	9.999994	9.999997	9.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.736113	0.735780	0.735387	0.734934	0.734427	0.733864	0.733249	0.732574	0.731849	0.731074
$7_n915196$	$7_n857690$	$7_n789768$	$7_n707686$	$7_n604634$	$7_n467138$	$7_n261869$	$6_n854632$	6.604367	7.182854
353°33′44″6	356° 2′42″1	358°39′26″0	1°25′ 8″3	4°21′ 7″3	7°28′44″0	10°49′23″0	14°24′32″3	18°15′40″2	22°24′14″8
9.997253	9.998964	9.999881	9.999867	9.998736	9.996290	9.992205	9.986120	9.977558	9.965916
0.736098	0.735768	0.735379	0.734928	0.734424	0.733863	0.733246	0.732574	0.731849	0.731074
$9_n049688$	$8_n838676$	$8_n369842$	8.393806	8.880151	9.114480	9.273641	9.395923	9.496728	9.581080
0.733351	0.734732	0.735260	0.734795	0.733170	0.730153	0.725451	0.718694	0.709407	0.696990
0.550360	0.545484	0.539925	0.533694	0.526814	0.519309	0.511222	0.502606	0.493537	0.484114
9.719349	9.737303	9.754317	9.770054	9.784089	9.795855	9.804603	9.809362	9.808805	9.801121
$8_n651309$	$8_n593470$	$8_n525155$	$8_n442620$	$8_n339061$	$8_n201002$	$7_n995115$	$7_n587206$	7.336216	7.913928
$5_n7300..$	$5_n8506..$	$5_n9518..$	6_n0374 .	6_n1096 .	$6_n1697..$	$6_n218796$	$6_n258398$	$6_n288920$	$6_n310906$
9.999479	9.999214	9.998839	9.998288	9.997431	9.995940	9.992669	9.979138	0.037299	0.010700
0.269709	0.282787	0.294242	0.303748	0.310903	0.315164	0.315825	0.311968	0.302342	0.285235
9.977792	9.991837	9.999092	9.999033	9.991381	9.976069	9.953104	9.922393	9.883541	9.862528
$9_n785786$	$9_n574444$	$9_n105221$	9.128734	9.614575	9.848343	0.006887	0.128497	0.227877	0.312154
0.291917	0.290950	0.295150	0.304715	0.319522	0.339095	0.362721	0.389575	0.418801	0.449626
9.999887	9.999913	9.999938	9.999959	9.999977	9.999989	9.999996	0.000000	0.000000	9.999998
$8_n650788$	$8_n592684$	$8_n523994$	$8_n440908$	$8_n336492$	$8_n196942$	$7_n987784$	$7_n566344$	7.373515	7.924628
9.707970	9.708963	9.704788	9.695244	9.680455	9.660894	9.637275	9.610425	9.581199	9.550372
9.123910	9.126889	9.114364	9.085732	9.041365	8.982682	8.911825	8.831275	8.743597	8.651116
7.791661	7.792660	7.793839	7.795198	7.796719	7.798408	7.800262	7.802278	7.804453	7.806778
9.979306	9.979402	9.978726	9.977164	9.974543	9.970615	9.965039	9.957348	9.946923	9.932926
9.103216	9.106291	9.093090	9.062896	9.015908	8.953297	8.876864	8.788623	8.690520	8.584042
0.182991	0.189248	0.195335	0.201101	0.206356	0.210844	0.214229	0.216088	0.215870	0.212876
2.758188	2.761263	2.748062	2.717868	2.670880	2.608269	2.531836	2.443595	2.345492	2.239014
$0_n336146$	$0_n119928$	$9_n645145$	9.662428	0.141389	0.367652	0.518109	0.631103	0.721414	0.796268
− 1242.61	− 760.66	− 247.29	+ 240.05	+ 649.04	+ 946.06	+ 1121.88	+ 1187.68	+ 1166.56	+ 1084.63
+ 873.33	+ 892.30	+ 877.80	+ 829.79	+ 753.76	+ 659.35	+ 557.27	+ 456.75	+ 364.22	+ 283.07
− 25.67	− 22.63	− 18.76	− 14.47	− 10.23	− 6.45	− 3.36	− 1.07	+ 0.48	+ 1.42
+ 601.01	+ 605.15	+ 587.94	+ 550.43	+ 496.98	+ 434.16	+ 368.80	+ 306.37	+ 250.36	+ 202.34
+ 874.28	+ 893.41	+ 879.08	+ 831.24	+ 755.38	+ 661.14	+ 559.22	+ 458.86	+ 366.46	+ 285.43
+ 601.75	+ 605.86	+ 588.63	+ 551.10	+ 497.63	+ 434.80	+ 369.43	+ 306.99	+ 250.98	+ 202.96
− 25.61	− 22.57	− 18.69	− 14.40	− 10.16	− 6.38	− 3.29	− 1.00	+ 0.55	+ 1.49
− 537	− 709	− 895	− 1090	− 1287	− 1478	− 1655	− 1813	− 1945	− 2046
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
+ 272.53	+ 287.55	+ 290.45	+ 280.14	+ 257.75	+ 226.34	+ 189.79	+ 151.87	+ 115.48	+ 82.47
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

9|3

Datum	1873		1872					
	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9	Mai 30
β_0'	+0° 59′ 17″4	+0° 56′ 23″4	+0° 53′ 18″8	+0° 50′ 3″6	+0° 46′ 38″4	+0° 43′ 3″8	+0° 39′ 20″1	+0° 35′ 28″0
λ_0'	147° 58′ 45″3	144° 51′ 40″0	141° 43′ 48″6	138° 35′ 8″5	135° 25′ 37″6	132° 15′ 13″8	129° 3′ 54″8	125° 51′ 38″7
$\lambda_0' - \lambda_0$	22° 16′ 5″6	19° 9′ 0″3	16° 1′ 8″9	12° 52′ 28″8	9° 42′ 57″9	6° 32′ 34″1	3° 21′ 15″1	0° 8′ 59″0
$\sin(\lambda_0' - \lambda_0)$	9.578574	9.515932	9.440844	9.347952	9.227285	9.056697	8.767218	7.417163
$\cos \beta_0'$	9.999935	9.999942	9.999948	9.999954	9.999960	9.999966	9.999972	9.999977
$\cos(\lambda_0' - \lambda_0)$	9.966339	9.975277	9.982800	9.988942	9.993726	9.997162	9.999255	9.999999
$\sin \beta_0'$	8.236686	8.214909	8.190545	8.163201	8.132471	8.097822	8.058495	8.013539
$\sin Q$ oder $\cos Q$	9.999551	9.999457	9.999315	9.999075	9.998601	9.997391	9.991849	9.986499
$\cos \beta_0' \sin(\lambda_0' - \lambda_0)$	9.578509	9.515874	9.440792	9.347906	9.227245	9.056663	8.767190	7.417140
Q	2° 36′ 22″2	2° 51′ 46″2	3° 13′ 0″4	3° 44′ 21″8	4° 35′ 47″0	6° 16′ 26″2	11° 3′ 56″7	75° 47′ 13″3
$Q - i_0$	0° 23′ 58″3	0° 39′ 22″3	1° 0′ 36″5	1° 31′ 57″9	2° 23′ 23″1	4° 4′ 2″3	8° 51′ 32″8	73° 34′ 49″4
$\sin(Q - i_0)$	7.843421	8.058900	8.246236	8.427297	8.620104	8.850819	9.187536	9.981917
q	9.578958	9.516417	9.441477	9.348831	9.228644	9.059272	8.775341	8.027040
$\cos(Q - i_0)$	9.999989	9.999972	9.999932	9.999844	9.999622	9.998905	9.994788	9.451279
$\cos B_1 \sin L_1$	9.578947	9.516389	9.441409	9.348675	9.228266	9.058177	8.770129	7.478319
$\sin L_1$ oder $\cos L_1$	9.966276	9.975221	9.982753	9.988904	9.993696	9.997142	9.999245	9.999998
$\cos B_1 \cos L_1$	9.966274	9.975219	9.982748	9.988896	9.993686	9.997128	9.999227	9.999976
L_1	22° 17′ 18″7	19° 10′ 16″2	16° 2′ 26″7	12° 53′ 48″1	9° 44′ 18″6	6° 33′ 55″6	3° 22′ 36″9	0° 10′ 20″5
$\cos B_1$	9.999998	9.999998	9.999995	9.999992	9.999990	9.999986	9.999982	9.999978
r_1	0.730250	0.729380	0.728465	0.727507	0.726509	0.725473	0.724406	0.723308
$\sin B_1$	7.422379	7.575317	7.687713	7.776128	7.848748	7.910091	7.962877	8.008957
$L_1 - l$	26° 51′ 37″1	31° 38′ 56″2	36° 47′ 1″4	42° 16′ 11″3	48° 6′ 7″7	54° 15′ 38″1	60° 42′ 31″5	67° 23′ 34″6
$\cos(L_1 - l)$	9.950419	9.930072	9.903579	9.869224	9.824650	9.766487	9.689530	9.584794
$r_1 \cos B_1$	0.730248	0.729378	0.728460	0.727499	0.726499	0.725459	0.724388	0.723286
$\sin(L_1 - l)$	9.654962	9.719922	9.777279	9.827771	9.871770	9.909386	9.940588	9.965278
ξ_1	0.680667	0.659450	0.632039	0.596723	0.551149	0.491946	0.413918	0.308080
η_1	0.474465	0.464757	0.455186	0.445994	0.437450	0.429853	0.423500	0.418677
Subtract.	9.783682	9.752543	9.701252	9.617955	9.476061	9.186677	8.348455	9.462430
ζ_1	8.152629	8.304697	8.416178	8.503635	8.575257	8.635564	8.687283	8.732265
z	6_n324694	6_n330008	6_n326541	6_n313656	6_n290035	6_n254064	6_n202761	6_n131619
Subtract.	0.006407	0.004579	0.003519	0.002795	0.002246	0.001800	0.001421	0.001088
$\xi_1 - r$	0.258147	0.217300	0.156438	0.063949	9.913511	9.616530	8_n762373	9_n770510
$\sin \Theta$ oder $\cos \Theta$	9.903852	9.935872	9.960378	9.978500	9.990919	9.998013	9.999966	9.996856
η_1	0.385210	0.449300	0.505739	0.555270	0.598269	0.634845	0.664976	0.688564
$\varrho \cos \vartheta$	0.481358	0.513428	0.545361	0.576770	0.607350	0.636832	0.665010	0.691708
$\cos \vartheta$	9.999995	9.999992	9.999988	9.999984	9.999981	9.999978	9.999976	9.999974
$\varrho \sin \vartheta$	8.159036	8.309276	8.419697	8.506430	8.577503	8.637364	8.688704	8.733353
ϱ^{-1}	9.518637	9.486564	9.454627	9.423214	9.392631	9.363146	9.334966	9.308266
ϱ^{-3}	8.555911	8.459692	8.363881	8.269642	8.177893	8.089438	8.004898	7.924798
r_1^{-3}	7.809250	7.811860	7.814605	7.817479	7.820473	7.823581	7.826782	7.830076
Subtract.	9.914237	9.889306	9.855938	9.810870	0.106293	9.926552	9.705015	9.386889
K	8.470148	8.348998	8.219819	8.080512	7.926766	7.750133	7.531797	7.216965
$\xi_1 - r$	0.206202	0.194693	0.176853	0.150729	0.113699	0.062093	9.990418	9.889403
$w k^2 m_1 10^7 K$	2.125120	2.003970	1.874791	1.735484	1.581738	1.405105	1.186769	0.871937
$\eta_1 - r$	0.859675	0.914057	0.960925	1.001264	1.035719	1.064698	1.088476	1.107241
U	+ 965.59	+ 827.99	+ 685.04	+ 545.44	+ 414.44	+ 294.99	+ 188.47	+ 95.32
R	+ 214.45	+ 158.00	+ 112.63	+ 76.95	+ 49.59	+ 29.32	+ 15.04	+ 5.77
W_1	+ 1.90	+ 2.04	+ 1.95	+ 1.73	+ 1.44	+ 1.10	+ 0.75	+ 0.40
w_1	+ 162.51	+ 130.22	+ 104.44	+ 84.06	+ 68.06	+ 55.51	+ 45.70	+ 38.00
ΣR	+ 216.89	+ 160.48	+ 115.09	+ 79.34	+ 51.83	+ 31.34	+ 16.77	+ 7.16
Σw_1	+ 163.13	+ 130.85	+ 105.08	+ 84.71	+ 68.74	+ 56.22	+ 46.45	+ 38.79
ΣW_1	+ 1.97	+ 2.10	+ 2.01	+ 1.79	+ 1.50	+ 1.15	+ 0.80	+ 0.44
z	— 2112	— 2138	— 2121	— 2059	— 1950	— 1795	— 1595	— 1354
z^2								
r^5								
z^3								
$z^2 : r^5$								
$\Delta \Sigma R$	+ [illegible]	0	0	0	0	0	0	0
$\Sigma R - \Sigma w_1$	+ 53.76	+ 29.63	+ 10.01	— 5.37	— 16.91	— 24.88	— 29.68	— 31.63
$z^3 : r^5$								
$\Delta \Sigma W_1$	0	0	0	0	0	0	0	0

♃

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
+0°31′27″8	+0°27′20″5	+0°23′ 6″7	+0°18′46″7	+0°14′21″8	+0° 9′52″5	+0° 5′19″6	+0° 0′44″1	−0° 3′53″1
122°38′23″2	119°24′ 6″7	116° 8′48″0	112°52′25″3	109°34′57″4	106°16′23″0	102°56′41″4	99°35′51″5	96°13′53″4
356°55′43″5	353°41′27″0	350°26′ 8″3	347° 9′45″6	343°52′17″7	340°33′43″3	337°14′ 1″7	333°53′11″8	330°31′13″7
8_n728984	9_n040971	9_n220514	9_n346712	9_n443719	9_n522165	9_n587679	9_n643599	9_n692064
9.999982	9.999986	9.999990	9.999993	9.999996	9.999998	9.999999	0.000000	0.000000
9.999376	9.997361	9.993920	9.989007	9.982562	9.974513	9.964774	9.953240	9.939784
7.961525	7.900546	7.827554	7.737381	7.620980	7.458263	7.190181	6.330014	7_n053117
9_n993753	9_n998866	9_n999645	9_n999869	9_n999951	9_n999984	9_n999996	0_n000000	9_n999999
8_n728966	9_n040957	9_n220504	9_n346705	9_n443715	9_n522163	9_n587678	9_n643599	9_n692064
170°18′21″1	175°51′37″6	177°40′58″6	178°35′29″9	179° 8′17″9	179°30′19″6	179°46′14″1	179°58′19″8	180° 7′53″7
168° 5′57″2	173°39′13″7	175°28′34″7	176°23′ 6″0	176°55′54″0	177°17′55″7	177°33′50″2	177°45′55″9	177°55′29″8
9.314325	9.043502	8.896919	8.799697	8.728572	8.673273	8.628434	8.590942	8.558813
8.735213	9.042091	9.220859	9.346836	9.443764	9.522179	9.587682	9.643599	9.692065
9_n990564	9_n997331	9_n998645	9_n999135	9_n999377	9_n999518	9_n999607	9_n999670	9_n999715
8_n725777	9_n039422	9_n219504	9_n345971	9_n443141	9_n521697	9_n587289	9_n643269	9_n691780
9.999384	9.997380	9.993948	9.989043	9.982605	9.974564	9.964832	9.953304	9.939854
9.999358	9.997347	9.993910	9.989000	9.982558	9.974511	9.964773	9.953240	9.939784
356°57′4″3	353°42′46″5	350°27′26″0	347°11′1″1	343°53′30″4	340°34′52″8	337°15′7″6	333°54′13″9	330°32′11″4
9.999974	9.999967	9.999962	9.999957	9.999953	9.999947	9.999941	9.999936	9.999930
0.722180	0.721028	0.719851	0.718657	0.717448	0.716231	0.715006	0.713777	0.712551
8.049538	8.085593	8.117778	8.146533	8.172336	8.195452	8.216116	8.234541	8.250878
74°14′31″9	81°10′21″7	88° 5′34″3	94°54′37″8	101°32′24″8	107°54′32″6	113°57′38″6	119°39′23″0	124°58′27″5
9.433884	9.185986	8.522179	8_n932471	9_n301151	9_n487855	9_n608644	9_n694427	9_n758313
0.722154	0.720995	0.719813	0.718614	0.717401	0.716178	0.714947	0.713713	0.712481
9.983364	9.994826	9.999759	9.998403	9.991131	9.978429	9.960862	9.939024	9.913501
0.156038	9.906981	9.241992	9_n651085	0_n018552	0_n204033	0_n323591	0_n408140	0_n470794
0.415616	0.414474	0.415313	0.418091	0.422658	0.428796	0.436225	0.444647	0.453761
9.912718	9.838334	9.969838	0.068556	0.144375	0.203030	0.248354	0.283160	0.292597
8.771718	8.806621	8.837629	8.865190	8.889784	8.911683	8.931122	8.948318	8.963429
6_n032619	5_n887617	5_n649335	5_n037426	5.363612	5.751279	5.945469	6.070776	6.162168
0.000791	0.000523	0.000281	0.000064	9.999871	9.999699	9.999551	9.999424	9.999316
0_n068756	0_n252808	0_n385151	0_n486647	0_n567033	0_n631826	0_n684579	0_n727807	0_n763391
9.988731	9.975668	9.957825	9.935454	9.908907	9.878615	9_n853826	9_n883792	9_n907497
0.705518	0.715821	0.719572	0.717017	0.708532	0.694607	0.675809	0.652737	0.625982
0.716787	0.740153	0.761747	0.781563	0.799625	0.815992	0.830753	0.844015	0.855894
9.999972	9.999970	9.999969	9.999968	9.999967	9.999966	9.999965	9.999965	9.999964
8.772509	8.807144	8.837910	8.865254	8.889655	8.911382	8.930673	8.947742	8.962745
9.283185	9.259817	9.238222	9.218405	9.200342	9.183974	9.169212	9.155950	9.144070
7.849555	7.779451	7.714666	7.655215	7.601026	7.551922	7.507636	7.467850	7.432210
7.833460	7.836916	7.840447	7.844029	7.847656	7.851307	7.854982	7.858669	7.862347
8.576973	9.150667	9.526238	9.736071	9.883398	9.996704	0.088165	0.164158	9.798362
6.410433	6_n930118	7_n240904	7_n391286	7_n484424	7_n548626	7_n595801	7_n632008	7_n660709
9.740422	9.492507	8.826679	9_n232994	9_n595894	9_n775237	9_n887366	9_n963493	0_n017033
0.065405	0_n585090	0_n895876	1_n046258	1_n139396	1_n203598	1_n250773	1_n286980	1_n315681
1.121134	1.130295	1.134885	1.135108	1.131190	1.123403	1.112034	1.097384	1.079743
+ 15.37	− 51.93	− 107.34	− 151.83	− 186.46	− 212.32	− 230.57	− 242.31	− 248.56
+ 0.64	− 1.20	− 0.53	+ 1.90	+ 5.44	+ 9.52	+ 13.74	+ 17.80	+ 21.51
+ 0.07	− 0.25	− 0.54	− 0.82	− 1.07	− 1.30	− 1.52	− 1.72	− 1.90
+ 31.95	+ 27.19	+ 23.42	+ 20.43	+ 18.03	+ 16.10	+ 14.54	+ 13.27	+ 12.22
+ 1.65	− 0.56	− 0.21	+ 1.99	+ 5.43	+ 9.57	+ 14.03	+ 18.54	+ 22.88
+ 32.80	+ 28.12	+ 24.43	+ 21.55	+ 19.28	+ 17.50	+ 16.12	+ 15.05	+ 14.23
+ 0.11	− 0.22	− 0.52	− 0.80	− 1.06	− 1.30	− 1.54	− 1.75	− 1.95
− 1078	− 772	− 446	− 109	+ 231	+ 564	+ 882	+ 1177	+ 1446
− 31°.15	− 28°.68	− 24°.64	− 19°.56	13°.85	7°.93	− 2°.09	+ 3°.49	+ 8°.65
0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\mathfrak{b}_1$

Datum	1875 Febr. 24	Jan. 15	1874 Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20
β_0'	1°2′23″	0°59′26″	−0°56′27″	−0°53′27″	0°50′25″	−0°47′23″	−0°44′19″	−0°41′19″
λ_0'	317°15′3″	316°0′27″	314°45′59″	313°31′39″	312°17′26″	311°3′21″	309°49′23″	308°35′32″
$\lambda_0' - \lambda_0$	191°32′23″	190°17′47″	189°3′19″	187°48′59″	186°34′46″	185°20′41″	184°6′43″	182°52′52″
$\sin(\lambda_0' - \lambda_0)$	9$_n$30113	9$_n$25222	9$_n$19697	9$_n$13354	9$_n$05911	8$_n$96917	8$_n$85555	8$_n$70125
$\cos \beta_0'$	9.99993	9.99993	9.99994	9.99995	9.99995	9.99996	9.99996	9.99997
$\cos(\lambda_0' - \lambda_0)$	9$_n$99113	9$_n$99295	9$_n$99455	9$_n$99595	9$_n$99713	9$_n$99811	9$_n$99888	9$_n$99945
$\sin \beta_0'$	8$_n$25877	8$_n$23773	8$_n$21537	8$_n$19166	8$_n$16628	8$_n$13934	8$_n$11028	8$_n$07984
$\sin Q$ oder $\cos Q$	9$_n$99822	9$_n$99798	9$_n$99765	9$_n$99718	9$_n$99647	9$_n$99530	9$_n$99309	9$_n$98793
$\cos \beta_0' \sin(\lambda_0' - \lambda_0)$	9$_n$30106	9$_n$25215	9$_n$19691	9$_n$13349	9$_n$05906	8$_n$96913	8$_n$85551	8$_n$70122
Q	185°11′2″	185°31′31″	185°57′24″	186°31′21″	187°17′40″	188°25′4″	190°11′32″	193°26′53″
$Q - i_0$	182°58′38″	183°19′7″	183°45′0″	184°18′57″	185°5′16″	186°12′40″	187°59′8″	191°14′29″
$\sin(Q - i_0)$	8$_n$71549	8$_n$76259	8$_n$81560	8$_n$87653	8$_n$94783	9$_n$03420	9$_n$14278	9$_n$28991
q	9.30284	9.25417	9.19926	9.13631	9.06259	8.97383	8.86242	8.71329
$\cos(Q - i_0)$	9$_n$99941	9$_n$99927	9$_n$99907	9$_n$99877	9$_n$99828	9$_n$99744	9$_n$99577	9$_n$99159
$\cos B_1 \sin L_1$	9$_n$30225	9$_n$25344	9$_n$19833	9$_n$13508	9$_n$06087	8$_n$97127	8$_n$85819	8$_n$70488
$\sin L_1$ oder $\cos L_1$	9$_n$99109	9$_n$99291	9$_n$99452	9$_n$99592	9$_n$99711	9$_n$99809	9$_n$99887	9$_n$99944
$\cos B_1 \cos L_1$	9$_n$99106	9$_n$99288	9$_n$99449	9$_n$99590	9$_n$99708	9$_n$99807	9$_n$99884	9$_n$99942
L_1	191°34′14″	190°19′35″	189°5′4″	187°50′41″	186°36′24″	185°22′15″	184°8′14″	182°54′19″
$\cos B_1$	9.99997	9.99997	9.99997	9.99998	9.99997	9.99998	9.99997	9.99998
r_1	0.99500	0.99537	0.99573	0.99608	0.99642	0.99676	0.99708	0.99740
$\sin B_1$	8$_n$01833	8$_n$01676	8$_n$01486	8$_n$01284	8$_n$01042	8$_n$00803	8$_n$00520	8$_n$00320
$L_1 - l$	90°41′19″	94°32′55″	98°24′3″	102°15′43″	106°9′4″	110°5′0″	114°4′36″	118°8′54″
$\cos(L_1 - l)$	8$_n$07984	8$_n$89930	9$_n$16464	9$_n$32712	9$_n$44431	9$_n$53578	9$_n$61062	9$_n$67372
$r_1 \cos B_1$	0.99497	0.99534	0.99570	0.99606	0.99639	0.99674	0.99705	0.99738
$\sin(L_1 - l)$	9.99997	9.99863	9.99532	9.98998	9.98251	9.97276	9.96047	9.94534
ξ_1	9$_n$07481	9$_n$89464	0$_n$16034	0$_n$32318	0$_n$44070	0$_n$53252	0$_n$60767	0$_n$67110
r	0.56402	0.56481	0.56488	0.56423	0.56287	0.56080	0.55802	0.55454
Subtract.	0.01386	0.08412	0.14425	0.19702	0.24423	0.28712	0.27691	0.24665
ζ_1	9$_n$01333	9$_n$01213	9$_n$01059	9$_n$00892	9$_n$00684	9$_n$00479	9$_n$00228	9$_n$00060
z					4$_n$89...	5$_n$185..	5$_n$4082.	5$_n$5843.
Subtract.	0	0	0	0	9.99997	9.99993	9.99989	9.99983
$\xi_1 - r$	0$_n$57788	0$_n$64893	0$_n$70913	0$_n$76125	0$_n$80710	0$_n$84792	0$_n$88458	0$_n$91775
$\sin \Theta$ oder $\cos \Theta$	9.97031	9.95966	9.94758	9.93401	9.91882	9.90188	9.88291	9.86161
ϱ_1	0.99494	0.99397	0.99102	0.98604	0.97890	0.96950	0.95752	0.94272
$\varrho \cos \vartheta$	1.02463	1.03431	1.04344	1.05203	1.06008	1.06762	1.07461	1.08111
$\cos \vartheta$	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999
$\varrho \sin \vartheta$	9$_n$01333	9$_n$01213	9$_n$01059	9$_n$00892	9$_n$00681	9$_n$00472	9$_n$00217	9$_n$00043
ϱ^{-1}	8.97535	8.96567	8.95654	8.94795	8.93990	8.93236	8.92537	8.91888
ϱ^{-3}	6.92605	6.89701	6.86962	6.84385	6.81970	6.79708	6.77611	6.75664
r_1^{-3}	7.01500	7.01389	7.01281	7.01176	7.01074	7.00972	7.00876	7.00780
Subtract.	9.35659	9.48970	9.59169	9.67395	9.74236	9.80051	9.85042	9.89378
K	6$_n$28264	6$_n$38671	6$_n$46131	6$_n$51780	6$_n$56206	6$_n$59759	6$_n$62653	6$_n$65042
$\xi_1 - r$	8$_n$51079	9$_n$32983	9$_n$59546	9$_n$75895	9$_n$87783	9$_n$97172	0$_n$04965	0$_n$11656
$wk^2 m_1 10^7 K$	9$_n$41366	9$_n$51773	9$_n$59233	9$_n$64882	9$_n$69308	9$_n$72861	9$_n$75755	9$_n$78144
$\varrho_1 r$	1.55896	1.55878	1.55590	1.55027	1.54177	1.53030	1.51554	1.49726
U	− 9.39	− 11.93	− 14.07	− 15.82	− 17.17	− 18.15	− 18.75	− 19.00
R	+ 0.01	+ 0.07	+ 0.15	+ 0.26	+ 0.37	+ 0.50	+ 0.64	+ 0.79
W_1	+ 0.03	+ 0.03	+ 0.04	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.06	+ 0.06
w_1	+ 1.14	+ 1.07	+ 1.00	+ 0.94	+ 0.89	+ 0.85	+ 0.81	+ 0.77

♄2

1874			1873						
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
— 0°38′ 9″	— 0°35′ 3″	— 0°31′56″	— 0°28′48″	— 0°25′40″	— 0°22′31″	— 0°19′22″	— 0°16′13″	— 0°13′ 3″	— 0° 9′54″
307°21′48″	306° 8′10″	304°54′38″	303°41′12″	302°27′53″	301°14′39″	300° 1′30″	298°48′27″	297°35′29″	296°22′36″
181°39′ 8″	180°25′30″	179°11′58″	177°58′32″	176°45′13″	175°31′59″	174°18′50″	173° 5′47″	171°52′49″	170°39′56″
8_n45988	7_n87026	8.14525	8.54809	8.75305	8.89145	8.99598	9.07990	9.14997	9.21004
9.99997	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999	9.99999	9.99999	0.00000	0.00000	0.00000
9_n99982	9_n99999	9_n99996	9_n99973	9_n99930	9_n99868	9_n99786	9_n99684	9_n99562	9_n99421
8_n04521	8_n00841	7_n96796	7_n92311	7_n87309	7_n81623	7_n75078	7_n67369	7_n57934	7_n45936
9_n97000	9_n90776	9.92051	9.98812	9.99626	9.99847	9.99930	9.99967	9.99984	9.99993
8_n45985	7_n87024	8.14523	8.54807	8.75304	8.89144	8.99597	9.07990	9.14997	9.21004
201° 3′ 8″	233°57′52″	326°22′54″	346°39′30″	352°29′22″	355°11′34″	356°44′44″	357°45′ 0″	358°27′38″	358°58′58″
198°50′44″	231°45′28″	324°10′30″	344°27′ 6″	350°16′58″	352°59′10″	354°32′20″	355°32′45″	356°15′14″	356°46′34″
9_n50922	9_n89509	9_n76739	9_n42822	9_n22733	9_n08675	8_n97850	8_n89021	8_n81515	8_n75003
8.48985	8.10065	8.22472	8.55995	8.75678	8.89297	8.99667	9.08023	9.15013	9.21011
9_n97607	9_n79168	9.90892	9.98381	9.99372	9.99674	9.99802	9.99869	9.99907	9.99931
8_n46592	7_n89233	8.13364	8.54376	8.75050	8.88971	8.99469	9.07892	9.14920	9.20942
9_n99981	9_n99999	9_n99996	9_n99973	9_n99931	9_n99869	9_n99787	9_n99685	9_n99564	9_n99423
9_n99979	9_n99997	9_n99994	9_n99971	9_n99929	9_n99867	9_n99785	9_n99684	9_n99562	9_n99421
181°40′32″	180°26′50″	179°13′14″	177°59′44″	176°46′21″	175°33′ 3″	174°19′50″	173° 6′43″	171°53′39″	170°40′43″
9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999	9.99998	9.99998
0.99770	0.99800	0.99829	0.99857	0.99884	0.99909	0.99934	0.99958	0.99981	1.00003
7_n99907	7_n99574	7_n99211	7_n98817	7_n98411	7_n97972	7_n97517	7_n97044	7_n96528	7_n96014
122°19′ 3″	126°36′ 9″	131° 1′26″	135°36′ 8″	140°21′37″	145°19′17″	150°30′34″	155°57′ 0″	161°40′ 4″	167°41′20″
9_n72804	9_n77544	9_n81715	9_n85401	9_n88653	9_n91506	9_n93973	9_n96056	9_n97738	9_n98990
0.99768	0.99798	0.99827	0.99855	0.99882	0.99907	0.99932	0.99957	0.99979	1.00001
9.92691	9.90460	9.87762	9.84487	9.80479	9.75509	9.69221	9.61016	9.49766	9.32883
0_n72572	0_n77342	0_n81542	0_n85256	0_n88535	0_n91413	0_n93905	0_n96013	0_n97717	0_n98991
0.55036	0.54548	0.53992	0.53369	0.52681	0.51931	0.51122	0.50261	0.49354	0.48411
0.22214	0.20185	0.18477	0.17023	0.15775	0.14702	0.13780	0.12992	0.12332	0.11794
8_n99677	8_n99374	8_n99040	8_n98674	8_n98295	8_n97881	8_n97451	8_n97002	8_n96509	8_n96017
$5_n7300.$	$5_n8506.$	$5_n9518.$	$6_n0374.$	$6_n1096.$	$6_n1697.$	6_n21880	6_n25840	6_n28892	6_n31091
9.99977	9.99969	9.99960	9.99951	9.99942	9.99933	9.99924	9.99916	9.99908	9.99902
0_n94786	0_n97527	1_n00019	1_n02279	1_n04310	1_n06115	1_n07685	1_n09005	1_n10049	1_n10785
9_n86081	9_n88280	9_n90286	9_n92115	9_n93776	9_n95272	9_n96599	9_n97744	9_n98689	9_n99407
0.92459	0.90258	0.87589	0.84342	0.80361	0.75416	0.69153	0.60973	0.49745	0.32884
1.08705	1.09247	1.09733	1.10164	1.10534	1.10843	1.11086	1.11261	1.11360	1.11378
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
8_n99654	8_n99343	8_n99000	8_n98625	8_n98237	8_n97814	8_n97375	8_n96918	8_n96417	8_n95919
8.91294	8.90752	8.90266	8.89835	8.89465	8.89156	8.88913	8.88738	8.88639	8.88621
6.73882	6.72256	6.70798	6.69505	6.68395	6.67468	6.66739	6.66214	6.65917	6.65863
7.00690	7.00600	7.00513	7.00429	7.00348	7.00273	7.00198	7.00126	7.00057	6.99991
9.93139	9.96408	9.99220	0.01627	0.03624	0.05246	0.06471	0.07311	0.07730	0.07708
6_n67021	6_n68664	6_n70018	6_n71132	6_n72019	6_n72714	6_n73210	6_n73525	6_n73647	6_n73571
0_n17536	0_n22794	0_n27550	0_n31887	0_n35854	0_n39482	0_n42783	0_n45752	0_n48363	0_n50580
9_n80123	9_n81766	9_n83120	9_n84234	9_n85121	9_n85816	9_n86312	9_n86627	9_n86749	9_n86673
1.47495	1.44806	1.41581	1.37711	1.33042	1.27347	1.20275	1.11234	0.99099	0.81295
— 18.89	— 18.44	— 17.66	— 16.57	— 15.19	— 13.54	— 11.64	— 9.52	— 7.22	— 4.78
+ 0.95	+ 1.11	+ 1.28	+ 1.45	+ 1.62	+ 1.79	+ 1.95	+ 2.11	+ 2.24	+ 2.36
+ 0.06	+ 0.06	+ 0.07	+ 0.07	+ 0.07	+ 0.07	+ 0.07	+ 0.07	+ 0.07	+ 0.07
+ 0.74	+ 0.71	+ 0.69	+ 0.67	+ 0.65	+ 0.64	+ 0.63	+ 0.62	+ 0.62	+ 0.62

b₃

Datum	1873 März 6	1873 Jan. 25	1872 Dec. 16	1872 Nov. 6	1872 Sept. 27	1872 Aug. 18	1872 Juli 9	1872 Mai 30
β_0'	0° 6′44″	0° 3′34″	− 0° 0′25″	+ 0° 2′45″	+ 0° 5′54″	+ 0° 9′ 3″	+ 0°12′11″	+ 0°15′19″
λ_0'	295° 9′47″	293°57′ 2″	292°44′21″	291°31′45″	290°19′12″	289° 6′43″	287°54′17″	286°41′54″
$\lambda_0'-\Omega_0$	169°27′ 7″	168°14′22″	167° 1′41″	165°49′ 5″	164°36′32″	163°24′ 3″	162°11′37″	160°59′14″
$\sin(\lambda_0'-\Omega_0)$	9.26259	9.30925	9.35117	9.38917	9.42391	9.45587	9.48544	9.51293
$\cos\beta_0'$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\cos(\lambda_0'-\Omega_0)$	9_n99260	9_n99079	9_n98877	9_n98656	9_n98414	9_n98151	9_n97868	9_n97563
$\sin\beta_0'$	7_n29196	7_n01599	6_n08351	6.90306	7.23458	7.42037	7.54949	7.64889
$\sin Q$ oder $\cos Q$	9.99998	9.99999	0.00000	0.00000	9.99999	9.99998	9.99997	9.99996
$\cos\beta_0'\sin(\lambda_0'-\Omega_0)$	9.26259	9.30925	9.35117	9.38917	9.42391	9.45587	9.48544	9.51293
Q	359°23′13″	359°42′30″	359°58′ 9″	0°11′13″	0°22′14″	0°31′41″	0°39′50″	0°47′ 1″
$Q-i_0$	357°10′49″	357°30′ 6″	357°45′45″	357°58′49″	358° 9′50″	358°19′17″	358°27′26″	358°34′37″
$\sin(Q-i_0)$	8_n69191	8_n63939	8_n59153	8_n54708	8_n50570	8_n46676	8_n43013	8_n39505
q	9.26261	9.30926	9.35117	9.38917	9.42392	9.45589	9.48547	9.51297
$\cos(Q-i_0)$	9.99947	9.99959	9.99967	9.99973	9.99978	9.99981	9.99984	9.99987
$\cos B_1 \sin L_1$	9.26208	9.30885	9.35084	9.38890	9.42370	9.45570	9.48531	9.51284
$\sin L_1$ oder $\cos L_1$	9_n99262	9_n99080	9_n98879	9_n98658	9_n98415	9_n98152	9_n97869	9_n97565
$\cos B_1 \cos L_1$	9_n99260	9_n99079	9_n98877	9_n98656	9_n98414	9_n98151	9_n97868	9_n97563
L_1	169°27′51″	168°15′ 0″	167° 2′14″	165°49′36″	164°36′57″	163°24′25″	162°11′55″	160°59′26″
$\cos B_1$	9.99998	9.99999	9.99998	9.99998	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998
r_1	1.00024	1.00044	1.00063	1.00081	1.00098	1.00114	1.00128	1.00142
$\sin B_1$	7_n95452	7_n94865	7_n94270	7_n93625	7_n92962	7_n92265	7_n91560	7_n90802
L_1-l	174° 2′ 9″	180°43′40″	187°46′49″	195°11′59″	202°58′46″	211° 6′ 8″	219°31′50″	228°12′40″
$\cos(L_1-l)$	9_n99764	9_n99996	9_n99598	9_n98453	9_n96409	9_n93260	9_n88722	9_n82373
$r_1\cos B_1$	1.00022	1.00043	1.00061	1.00079	1.00097	1.00113	1.00127	1.00140
$\sin(L_1-l)$	9.01664	8_n10386	9_n13154	9_n41860	9_n59151	9_n71312	9_n80379	9_n87251
ξ_1	0_n99786	1_n00039	0_n99659	0_n98532	0_n96506	0_n93373	0_n88849	0_n82513
x'	0.47446	0.46476	0.45519	0.44599	0.43745	0.42985	0.42350	0.41868
Subtract.	0.11382	0.11103	0.10974	0.11020	0.11286	0.11840	0.12800	0.14371
ζ_1	8_n95476	8_n94909	8_n94333	8_n93706	8_n93060	8_n92379	8_n91688	8_n90944
z'	6_n32469	6_n33001	6_n32654	6_n31366	6_n29003	6_n25406	6_n20276	6_n13162
Subtract.	9.99898	9.99896	9.99895	9.99897	9.99901	9.99907	9.99916	9.99927
(ξ_1-x')	1_n11168	1_n11142	1_n10633	1_n09552	1_n07792	1_n05213	1_n01649	0_n96884
$\sin\Theta$ oder $\cos\Theta$	9_n99860	9_n99998	9_n99757	9_n99056	9_n97794	9_n95844	9_n93042	9_n89180
ζ_1	0.01686	9_n10429	0_n13215	0_n41939	0_n59248	0_n71425	0_n80506	0_n87391
$\rho\cos\vartheta$	1.11308	1.11144	1.10876	1.10496	1.09998	1.09369	1.08607	1.07704
$\cos\vartheta$	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
$\rho\sin\vartheta$	8_n95374	8_n94805	8_n94228	8_n93603	8_n92961	8_n92286	8_n91604	8_n90871
ρ^{-1}	8.88691	8.88855	8.89123	8.89503	8.90001	8.90630	8.91392	8.92295
ρ^{-3}	6.66073	6.66565	6.67369	6.68509	6.70003	6.71890	6.74176	6.76885
r_1^{-3}	6.99928	6.99868	6.99811	6.99757	6.99706	6.99658	6.99616	6.99574
Subtract.	0.07205	0.06180	0.04558	0.02261	9.99196	9.95197	9.90112	9.83640
K	6_n73278	6_n72745	6_n71927	6_n70770	6_n69199	6_n67087	6_n64288	6_n60525
(ξ_1-x')	0_n52340	0_n53563	0_n54140	0_n53937	0_n52761	0_n50388	0_n46499	0_n40645
$\mu k^2 m_1 10^7 K$	9_n86380	9_n85847	9_n85029	9_n83872	9_n82301	9_n80189	9_n77390	9_n73627
(ζ_1-z')	0.49132	9_n56905	0_n58734	0_n86538	1_n02993	1_n14410	1_n22856	1_n29259
U	− 2.27	+ 0.27	+ 2.74	+ 5.06	+ 7.13	+ 8.83	+ 10.06	+ 10.69
R	+ 2.44	+ 2.48	+ 2.46	+ 2.39	+ 2.24	+ 2.02	+ 1.73	+ 1.39
W_1	+ 0.07	+ 0.06	+ 0.06	+ 0.06	+ 0.06	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.04
w_1	+ 0.62	+ 0.63	+ 0.64	+ 0.65	+ 0.68	+ 0.71	+ 0.75	+ 0.79

♄4

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
+ 0°18′27″	+ 0°21′34″	+ 0°24′40″	+ 0°27′46″	+ 0°30′50″	+ 0°33′54″	+ 0°36′57″	+ 0°39′59″	+ 0°43′ 0″
285°29′34″	284°17′16″	283° 5′ 0″	281°52′47″	280°40′35″	279°28′25″	278°16′17″	277° 4′10″	275°52′ 3″
159°46′54″	158°34′36″	157°22′20″	156°10′ 7″	154°57′55″	153°45′45″	152°33′37″	151°21′30″	150° 9′23″
9.53857	9.56260	9.58517	9.60643	9.62651	9.64551	9.66352	9.68063	9.69691
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998	9.99998	9.99997	9.99997	9.99997
9_n97238	9_n96891	9_n96521	9_n96130	9_n95715	9_n95278	9_n94817	9_n94331	9_n93821
7.72972	7.79751	7.85583	7.90724	7.95274	7.99392	8.03133	8.06559	8.09718
9.99995	9.99994	9.99992	9.99991	9.99990	9.99989	9.99988	9.99987	9.99986
9.53856	9.56259	9.58516	9.60642	9.62649	9.64549	9.66349	9.68060	9.69688
0°53′23″	0°59′ 2″	1° 4′ 6″	1° 8′43″	1°12′51″	1°16′40″	1°20′10″	1°23′24″	1°26′24″
358°40′59″	358°46′38″	358°51′42″	358°56′19″	359° 0′27″	359° 4′16″	359° 7′46″	359°11′ 0″	359°14′ 0″
8_n36141	8_n32919	8_n29812	8_n26773	8_n23859	8_n20982	8_n18166	8_n15391	8_n12647
9.53861	9.56265	9.58524	9.60651	9.62659	9.64560	9.66361	9.68073	9.69702
9.99989	9.99990	9.99991	9.99993	9.99993	9.99994	9.99995	9.99996	9.99996
9.53850	9.56255	9.58515	9.60644	9.62652	9.64554	9.66356	9.68069	9.69698
9_n97238	9_n96891	9_n96521	9_n96130	9_n95715	9_n95277	9_n94816	9_n94329	9_n93819
9_n97237	9_n96890	9_n96520	9_n96129	9_n95713	9_n95276	9_n94814	9_n94328	9_n93818
159°47′ 3″	158°34′43″	157°22′22″	156°10′ 4″	154°57′50″	153°45′37″	152°33′26″	151°21′12″	150° 9′ 2″
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998	9.99999	9.99998	9.99999	9.99999
1.00155	1.00166	1.00177	1.00186	1.00195	1.00202	1.00208	1.00214	1.00218
7_n90002	7_n89184	7_n88336	7_n87424	7_n86518	7_n85552	7_n84527	7_n83464	7_n82349
237° 4′31″	246° 2′18″	255° 0′30″	263°53′41″	272°36′44″	281° 5′17″	289°15′57″	297° 6′21″	304°35′18″
9_n73523	9_n60866	9_n41276	9_n02676	8.65874	9.28402	9.51845	9.65861	9.75410
1.00154	1.00165	1.00176	1.00185	1.00193	1.00201	1.00206	1.00213	1.00217
9_n92396	9_n96086	9_n98496	9_n99753	9_n99955	9_n99182	9_n97497	9_n94947	9_n91553
0_n73677	0_n61031	0_n41452	0_n02861	9.66067	0.28603	0.52051	0.66074	0.75627
0.41562	0.41447	0.41531	0.41809	0.42266	0.42880	0.43622	0.44465	0.45376
0.16949	0.21406	0.30063	0.14856	9.91751	9.59019	9.33082	9.80937	0.00295
8_n90157	8_n89350	8_n88513	8_n87610	8_n86713	8_n85754	8_n84735	8_n83678	8_n82567
6_n03262	5_n88762	5_n64933	5_n03743	5.36361	5.75128	5.94547	6.07078	6.16017
9.99941	9.99957	9.99975	9.99994	0.00014	0.00034	0.00054	0.00074	0.00094
0_n90626	0_n82437	0_n71594	0_n56665	0_n34017	9_n87622	9.76704	0.25402	0.45671
9_n85890	9_n90775	9_n94515	9_n97225	9_n98991	9_n99874	9_n99918	9_n99143	9_n97545
0_n92550	0_n96251	0_n98672	0_n99938	1_n00148	0_n99383	0_n97703	0_n95160	0_n91770
1.06660	1.05476	1.04157	1.02713	1.01157	0.99509	0.97785	0.96017	0.94225
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
8_n90098	8_n89307	8_n88488	8_n87604	8_n86727	8_n85788	8_n84789	8_n83752	8_n82661
8.93339	8.94523	8.95842	8.97286	8.98842	9.00490	9.02214	9.03982	9.05774
6.80017	6.83569	6.87526	6.91858	6.96526	7.01470	7.06642	7.11946	7.17322
6.99535	6.99502	6.99469	6.99442	6.99415	6.99394	6.99376	6.99358	6.99346
9.75389	9.64661	9.50041	9.28059	8.83749	8.68987	9.26035	9.52663	9.70989
6_n55406	6_n48230	6_n37567	6_n19917	5_n80275	5.68381	6.25411	6.52021	6.70335
0_n32115	0_n19584	9_n99921	9_n61052	9.23801	9.85723	0.08429	0.21609	0.30251
9_n68508	9_n61332	9_n50669	9_n33019	8_n93377	8.81483	9.38513	9.65123	9.83437
1_n34112	1_n37698	1_n40203	1_n41747	1_n42414	1_n42263	1_n41325	1_n39625	1_n37146
+ 10.62	+ 9.78	+ 8.10	+ 5.59	+ 2.28	− 1.73	− 6.29	− 11.16	− 16.06
+ 1.01	+ 0.64	+ 0.32	+ 0.09	− 0.01	+ 0.05	+ 0.29	+ 0.74	+ 1.37
+ 0.04	+ 0.03	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.01	0.00	− 0.02	− 0.03	− 0.05
+ 0.85	+ 0.93	+ 1.01	+ 1.12	+ 1.25	+ 1.40	+ 1.58	+ 1.78	+ 2.01

U

Datum	$f^{\rm IV}$	$f^{\rm III}$	$f^{\rm II}$	$f^{\rm I}$	ΣU	$'f$	$\int \Sigma U dt$	$\log \int \Sigma U dt$	$\log \int U' dt$
1871 Juni 5					− 264.62		+ 5630.84	3.750573	3.750675
				+ 11.15		+ 5499.25		+ 102	
Juli 15			+ 5.46		− 253.47		+ 5371.36	3.730084	3.730181
		+ 0.74		+ 16.61		+ 5245.78		+ 97	
Aug. 24	+ 0.12		+ 6.20		− 236.86		+ 5125.75	3.709757	3.709850
		+ 0.86		+ 22.81		+ 5008.92		+ 93	
Oct. 3	+ 0.15		+ 7.06		− 214.05		+ 4899.71	3.690170	3.690259
		+ 1.01		+ 29.87		+ 4794.87		+ 89	
Nov. 12	− 0.02		+ 8.07		− 184.18		+ 4699.97	3.672095	3.672180
		+ 0.99		+ 37.94		+ 4610.69		+ 85	
Dec. 22	+ 0.04		+ 9.06		− 146.24		+ 4534.05	3.656486	3.656568
		+ 1.03		+ 47.00		+ 4464.45		+ 82	
1872 Jan. 31	− 0.07		+ 10.09		− 99.24		+ 4410.50	3.644488	3.644568
		+ 0.96		+ 57.09		+ 4365.21		+ 80	
März 11	− 0.13		+ 11.05		− 42.15		+ 4338.91	3.637381	3.637460
		+ 0.83		+ 68.14		+ 4323.06		+ 79	
April 20	− 0.21		+ 11.88		+ 25.99		+ 4329.89	3.636477	3.636555
		+ 0.62		+ 80.02		+ 4349.05		+ 78	
Mai 30	0.35		+ 12.50		+ 106.01		+ 4394.87	3.642946	3.643026
		+ 0.27		+ 92.52		+ 4455.06		+ 80	
Juli 9	− 0.58		+ 12.77		+ 198.53		+ 4546.09	3.657638	3.657721
		− 0.31		+ 105.29		+ 4653.59		+ 83	
Aug. 18	− 0.97		+ 12.46		+ 303.82		+ 4796.21	3.680898	3.680985
		− 1.28		+ 117.75		+ 4957.41		+ 87	
Sept. 27	− 1.55		+ 11.18		+ 421.57		+ 5157.88	3.712471	3.712565
		− 2.83		+ 128.93		+ 5378.98		+ 94	
Nov. 6	− 2.32		+ 8.35		+ 550.50		+ 5643.11	3.751519	3.751621
		− 5.15		+ 137.28		+ 5929.48		+ 102	
Dec. 16	3.47		+ 3.20		+ 687.78		+ 6261.70	3.796692	3.796805
		− 8.62		+ 140.48		+ 6617.26		+ 113	
1873 Jan. 25	− 4.49		− 5.42		+ 828.26		+ 7019.73	3.846321	3.846448
		13.11		+ 135.06		+ 7445.52		+ 127	
März 6	5.40		− 18.53		+ 963.32		+ 7916.50	3.898533	3.898677
		− 18.51		+ 116.53		+ 8408.84		+ 144	
April 15	5.12		− 37.04		+ 1079.85		+ 8940.23	3.951348	3.951510
		23.63		+ 79.49		+ 9488.69		+ 162	
Mai 25	− 2.44		− 60.67		+ 1159.34		+ 10063.98	4.002770	4.002952
		− 26.07		+ 18.82		+ 10648.03		+ 182	
Juli 4	+ 3.01		− 86.74		+ 1178.16		+ 11238.75	4.050718	4.050922
		− 23.06		− 67.92		+ 11826.19		+ 204	
Aug. 13	+ 11.91		− 109.80		+ 1110.24		+ 12391.32	4.093117	4.093341
		− 11.15		− 177.72		+ 12936.43		+ 224	
Sept. 22	+ 20.40		− 120.95		+ 932.52		+ 13422.51	4.127834	4.128077
		+ 9.25		− 298.67		+ 13868.95		+ 243	
Nov. 1	+ 24.39		− 111.70		+ 633.85		+ 14215.76	4.152770	4.153027
		+ 33.64		410.37		+ 14502.80		+ 257	
Dec. 11	+ 18.70		− 78.06		+ 223.48		+ 14652.59	4.165915	4.166180
		+ 52.34		− 488.43		+ 14726.28		+ 265	
1874 Jan. 20	+ 5.13		− 25.72		− 264.95		+ 14636.44	4.165435	4.165700
		+ 57.47		− 514.15		+ 14461.33		+ 265	
März 1	− 10.55		+ 31.75		− 779.10		+ 14113.93	4.149648	4.149904
		+ 46.92		482.40		+ 13682.23		+ 256	
April 10	19.89		+ 78.67		− 1261.50		+ 13088.96	4.116905	4.117142
		+ 27.03		403.73		+ 12420.73		+ 237	
Mai 20	21.42		+ 105.70		− 1665.23		+ 11617.61	4.065117	4.065328
		+ 5.61		− 298.03		+ 10755.50		+ 211	
Juni 29	15.32		+ 111.31		− 1963.26		+ 9793.95	3.990958	3.991135
		− 9.71		− 186.72		+ 8792.24		+ 177	
Aug. 8	− 8.23		+ 101.60		− 2149.98		+ 7728.40	3.888090	3.888230
		− 17.94		− 85.12		+ 6642.26		+ 140	
Sept. 17	2.76		+ 83.66		2235.10		+ 5528.36	3.742596	3.742696
		− 20.70		− 1.46		+ 4407.16		+ 100	
Oct. 27	+ 2.17		+ 62.96		− 2236.56		+ 3286.00	3.516668	3.516728
		− 18.53		+ 61.50		+ 2170.60		+ 60	
Dec. 6	+ 3.15		+ 44.43		− 2175.06		+ 1075.85	3.031752	3.031771
		15.38		+ 105.93		− 4.40		+ 19	
1875 Jan. 15			+ 29.05		− 2069.13		− 1049.30	$3_n020900$	$3_n020881$
				+ 134.98		2073.59		− 19	
Febr 24					− 1934.15		− 3052.73	$3_n484688$	$3_n484633$
								− 55	

r

Datum	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$\frac{d^2 r}{dt^2}$	${}^{I}f$	${}^{II}f$
1871 Juni 5					+ 222.94		— 385.75
				— 134.34		+ 6278.89	
Juli 15			— 19.97		+ 88.60		+ 5893.14
		+ 4.84		— 154.31		+ 6367.49	
Aug. 24	+ 3.08		— 15.13		— 65.71		+ 12260 63
		+ 7.92		— 169.44		+ 6301.78	
Oct. 3	+ 2.91		— 7.21		— 235.15		+ 18562.41
		+ 10.83		— 176.65		+ 6066.63	
Nov. 12	+ 1.76		+ 3.62		— 411.80		+ 24629.04
		+ 12.59		— 173.03		+ 5654.83	
Dec. 22	— 0.16		+ 16.21		— 584.83		+ 30283.87
		+ 12.43		— 156.82		+ 5070.00	
1872 Jan. 31	— 2.31		+ 28.64		— 741.65		+ 35353.87
		+ 10.12		— 128.18		+ 4328.35	
Marz 11	— 4.26		+ 38 76		— 869.83		+ 39682.22
		+ 5.86		— 89.42		+ 3458.52	
April 20	— 4.83		+ 44.62		— 959.25		+ 43140.74
		+ 1.03		— 44.80		+ 2499.27	
Mai 30	— 4.53		+ 45.65		— 1004.05		+ 45640.01
		— 3.50		+ 0.85		+ 1495.22	
Juli 9	— 3.32		+ 42.15		— 1003.20		+ 47135.23
		— 6.82		+ 43.00		+ 492.02	
Aug. 18	— 1.37		+ 35.33		— 960.20		+ 47627.25
		— 8.19		+ 78.33		— 468.18	
Sept. 27	— 0.28		+ 27.14		— 881.87		+ 47159.07
		— 8.47		+ 105.47		1350.05	
Nov. 6	+ 1.14		+ 18.67		— 776 40		+ 45809.02
		— 7.33		+ 124.14		— 2126.45	
Dec. 16	+ 1.23		+ 11.34		— 652.26		+ 43682.57
		— 6.10		+ 135.48		— 2778.71	
1873 Jan. 25	+ 1.30		+ 5.24		— 516.78		+ 40903.86
		— 4.80		+ 140.72		3295.49	
Marz 6	+ 0.88		+ 0.44		— 376.06		+ 37608 37
		— 3.92		+ 141.16		— 3671.55	
April 15	+ 0.32		— 3.48		— 234.90		+ 33936.82
		— 3.60		+ 137.68		— 3906.45	
Mai 25	— 0.22		— 7.08		— 97.22		+ 30030.37
		— 3.82		+ 130.60		— 4003.67	
Juli 4	— 0.54		— 10.90		+ 33.38		+ 26026.70
		— 4.36		+ 119.70		— 3970.29	
Aug. 13	— 0.39		— 15.26		+ 153.08		+ 22056.41
		— 4.75		+ 104.44		— 3817.21	
Sept. 22	+ 0.51		— 20.01		+ 257.52		+ 18239.20
		— 4.24		+ 84.43		— 3559.69	
Nov. 1	+ 1.53		— 24.25		+ 341.95		+ 14679.51
		— 2.71		+ 60.18		— 3217.74	
Dec. 11	+ 2.76		— 26.96		+ 402.13		+ 11461.77
		+ 0.05		+ 33.22		— 2815.61	
1874 Jan. 20	+ 2.96		— 26.91		+ 435.35		+ 8646.16
		+ 3.01		+ 6.31		— 2380.26	
Marz 1	+ 2.19		— 23.90		+ 441.66		+ 6265.90
		+ 5.20		— 17.59		— 1938.60	
April 10	+ 0.91		— 18.70		+ 424.07		+ 4327.30
		+ 6.11		— 36.29		— 1514.53	
Mai 20	— 0.35		— 12.59		+ 387.78		+ 2812.77
		+ 5 76		— 48.88		— 1126.75	
Juni 29	— 1.22		— 6.83		+ 338.90		+ 1686.02
		+ 4.54		— 55.71		— 787.85	
Aug. 8	— 1.43		— 2.29		+ 283.19		+ 898.17
		+ 3 11		— 58.00		— 504.66	
Sept. 17	— 1.18		+ 0.82		+ 225.19		+ 393.51
		+ 1.93		— 57.18		— 279.47	
Oct. 27	— 1.03		+ 2.75		+ 168.01		+ 114.04
		+ 0.90		— 54.43		— 111.46	
Dec. 6	— 0.57		+ 3.65		+ 113.58		+ 2.58
		+ 0.33		— 50.78		+ 2.12	
1875 Jan. 15			+ 3.98		+ 62.80		+ 4.70
				— 46.80		+ 64.92	
Feb. 24					+ 16.00		+ 69.62
						+ 80.92	
							+ 150.54

z

Datum	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$\frac{d^2z}{dt^2}$	$'f$	$''f$
1871 Juni 5					− 31.75		+ 1448.63
				+ 4.16		− 268.74	
Juli 15			+ 1.38		− 27.59		+ 1179.89
		+ 0.02		+ 5.54		− 296.33	
Aug. 24	0.21		+ 1.40		− 22.05		+ 883.56
		− 0.19		+ 6.94		− 318.38	
Oct. 3	0.15		+ 1.21		− 15.11		+ 565.18
		− 0.34		+ 8.15		− 333.49	
Nov. 12	− 0.14		+ 0.87		− 6.96		+ 231.69
		− 0.48		+ 9.02		− 340.45	
Dec. 22	− 0.13		+ 0.39		+ 2.06		− 108.76
		− 0.61		+ 9.41		− 338.39	
1872 Jan. 31	0		− 0.22		+ 11.47		− 447.15
		− 0.61		+ 9.19		− 326.92	
Marz 11	+ 0.07		− 0.83		+ 20.66		− 774.07
		− 0.54		+ 8.36		− 306.26	
April 20	+ 0.23		− 1.37		+ 29.02		− 1080.33
		− 0.31		+ 6.99		− 277.24	
Mai 30	+ 0.15		− 1.68		+ 36.01		− 1357.57
		− 0.16		+ 5.31		− 241.23	
Juli 9	+ 0.23		− 1.84		+ 41.32		− 1598.80
		+ 0.07		+ 3.47		− 199.91	
Aug. 18	+ 0.07		− 1.77		+ 44.79		− 1798.71
		+ 0.14		+ 1.70		− 155.12	
Sept. 27	+ 0.16		− 1.63		+ 46.49		− 1953.83
		+ 0.30		+ 0.07		− 108.63	
Nov. 6	− 0.05		− 1.33		+ 46.56		− 2062.46
		+ 0.25		− 1.26		− 62.07	
Dec. 16	− 0.07		− 1.08		+ 45.30		− 2124.53
		+ 0.18		− 2.34		− 16.77	
1873 Jan. 25	− 0.04		− 0.90		+ 42.96		− 2141.30
		+ 0.14		− 3.24		+ 26.19	
Marz 6	− 0.05		0.76		+ 39.72		− 2115.11
		+ 0.09		− 4.00		+ 65.91	
April 15	− 0.09		− 0.67		+ 35.72		− 2049.20
		0		− 4.67		+ 101.63	
Mai 25	0		− 0.67		+ 31.05		− 1947.57
		0		− 5.34		+ 132.68	
Juli 4	+ 0.02		− 0.67		+ 25.71		− 1814.89
		+ 0.02		− 6.01		+ 158.39	
Aug. 13	+ 0.16		0.65		+ 19.70		− 1656.50
		+ 0.18		− 6.66		+ 178.09	
Sept. 22	+ 0.11		− 0.47		+ 13.04		− 1478.41
		+ 0.29		− 7.13		+ 191.13	
Nov. 1	+ 0.14		− 0.18		+ 5.91		− 1287.28
		+ 0.43		− 7.31		+ 197.04	
Dec. 11	+ 0.06		+ 0.25		− 1.40		− 1090.24
		+ 0.49		− 7.06		+ 195.64	
1874 Jan. 20	− 0.03		+ 0.74		− 8.46		− 894.60
		+ 0.46		− 6.32		+ 187.18	
März 1	0.26		+ 1.20		− 14.78		− 707.42
		+ 0.20		− 5.12		+ 172.40	
April 10	− 0.13		+ 1.40		− 19.90		− 535.02
		+ 0.07		− 3.72		+ 152.50	
Mai 20	− 0.23		+ 1.47		− 23.62		− 382.52
		− 0.16		− 2.25		+ 128.88	
Juni 29	− 0.03		+ 1.31		− 25.87		− 253.64
		− 0.19		− 0.94		+ 103.01	
Aug. 8	− 0.11		+ 1.12		− 26.81		− 150.63
		− 0.30		+ 0.18		+ 76.20	
Sept. 17	+ 0.09		+ 0.82		− 26.63		− 74.43
		− 0.21		+ 1.00		+ 49.57	
Oct 27	+ 0.02		+ 0.61		− 25.63		− 24.86
		− 0.19		+ 1.61		+ 23.94	
Dec. 6	+ 0.06		+ 0.42		− 24.02		− 0.92
		− 0.13		+ 2.03		− 0.08	
1875 Jan. 15			+ 0.29		− 21.99		− 1.00
				+ 2.32		− 22.07	
Febr. 24					− 19.67		− 23.07
						− 41.74	
							− 64.81

ΔM

Datum	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$\frac{d\Delta M}{dt}$	'f
						+ 1° 3'24"810
1871 Juni 5					+ 1"882	
				− 32"109		+ 1° 3'26"692
Juli 15			− 0"383		− 30"227	
		+ 0"785		− 32.492		+ 1° 2'56"465
Aug 24	+ 0"075		+ 0.402		− 1' 2"719	
		+ 0.860		− 32.090		+ 1° 1'53"746
Oct. 3	+ 0.023		+ 1.262		− 1'34"809	
		+ 0.883		− 30.828		+ 1° 0'18"937
Nov. 12	− 0.019		+ 2.145		− 2' 5"637	
		+ 0.864		− 28.683		+ 58'13"300
Dec. 22	− 0.090		+ 3.009		− 2'34"320	
		+ 0.774		− 25.674		+ 55'38"980
1872 Jan. 31	− 0.142		+ 3.783		− 2'59"994	
		+ 0.632		− 21.891		+ 52'38"986
März 11	− 0.198		+ 4.415		− 3'21"885	
		+ 0.434		− 17.476		+ 49'17"101
April 20	− 0.217		+ 4.849		− 3'39"361	
		+ 0.217		− 12.627		+ 45'37"740
Mai 30	− 0.227		+ 5.066		− 3'51"988	
		− 0.010		− 7.561		+ 41'45"752
Juli 9	− 0.208		+ 5.056		− 3'59"549	
		− 0.218		− 2.505		+ 37'46"203
Aug. 18	− 0.171		+ 4.838		− 4' 2"054	
		− 0.389		+ 2.333		+ 33'44"149
Sept. 27	− 0.137		+ 4.449		− 3'59"721	
		− 0.526		+ 6.782		+ 29'44"428
Nov. 6	− 0.091		+ 3.923		− 3'52"939	
		− 0.617		+ 10.705		+ 25'51"489
Dec 16	− 0.060		+ 3.306		− 3'42"234	
		− 0.677		+ 14.011		+ 22' 9"255
1873 Jan 25	− 0.027		+ 2.629		− 3'28"223	
		− 0.704		+ 16.640		+ 18'41"032
März 6	− 0.007		+ 1.925		− 3'11"583	
		− 0.711		+ 18.565		+ 15'29"449
April 15	+ 0.019		+ 1.214		− 2'53"018	
		− 0.692		+ 19.779		+ 12'36"431
Mai 25	+ 0.028		+ 0.522		− 2'33"239	
		− 0.664		+ 20.301		+ 10' 3"192
Juli 4	+ 0.056		− 0.142		− 2'12"938	
		− 0.608		+ 20.159		+ 7'50"254
Aug. 13	+ 0.074		− 0.750		− 1'52"779	
		− 0.534		+ 19.409		+ 5'57"475
Sept. 22	+ 0.101		− 1.284		− 1'33"370	
		− 0.433		+ 18.125		+ 4'24"105
Nov. 1	+ 0.120		− 1.717		− 1'15"245	
		− 0.313		+ 16.408		+ 3' 8"860
Dec. 11	+ 0.139		− 2.030		− 58"837	
		− 0.174		+ 14.378		+ 2'10"023
1874 Jan. 20	+ 0.135		− 2.204		− 44"459	
		− 0.039		+ 12.174		+ 1'25"564
März 1	+ 0.124		− 2.243		− 32"285	
		+ 0.085		+ 9.931		+ 0'53"279
April 10	+ 0.094		− 2.158		− 22"354	
		+ 0.179		+ 7.773		+ 30"925
Mai 20	+ 0.068		− 1.979		− 14"581	
		+ 0.247		+ 5.794		+ 16"344
Juni 29	+ 0.034		− 1.732		− 8"787	
		+ 0.281		+ 4.062		+ 7"557
Aug. 8	+ 0.017		− 1.451		− 4"725	
		+ 0.298		+ 2.611		+ 2"832
Sept. 17	− 0.009		− 1.153		− 2"114	
		+ 0.289		+ 1.458		+ 0"718
Oct. 27	− 0.008		− 0.864		− 0"656	
		+ 0.281		+ 0.594		+ 0"062
Dec. 6	− 0.022		− 0.583		− 0"062	
		+ 0.259		+ 0.011		0"000
1875 Jan. 15			− 0.324		− 0"051	
				− 0.313		− 0"051
Febr. 24					− 0"364	
						− 0"415

$\Delta\omega$

Datum	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$\frac{d\Delta\omega}{dt}$	^{I}f
						— 9′ 1″718
1871 Juni 5					+ 14″371	
				— 0″075		— 8′47″347
Juli 15			— 0″039		+ 14.296	
		— 0″001		— 0.114		— 8′33″051
Aug. 24	+ 0″009		— 0.040		+ 14.182	
		+ 0.008		— 0.154		— 8′18″869
Oct. 3	+ 0.005		— 0.032		+ 14.028	
		+ 0.013		— 0.186		— 8′ 4″841
Nov. 12	+ 0.011		— 0.019		+ 13.842	
		+ 0.024		— 0.205		— 7′50″999
Dec. 22	+ 0.004		+ 0.005		+ 13.637	
		+ 0.028		— 0.200		— 7′37″362
1872 Jan. 31	+ 0.009		+ 0.033		+ 13.437	
		+ 0.037		— 0.167		— 7′23″925
März 11	0		+ 0.070		+ 13.270	
		+ 0.037		— 0.097		— 7′10″655
April 20	0		+ 0.107		+ 13.173	
		+ 0.037		+ 0.010		— 6′57″482
Mai 30	— 0.007		+ 0.144		+ 13.183	
		+ 0.030		+ 0.154		— 6′44″299
Juli 9	— 0.007		+ 0.174		+ 13.337	
		+ 0.023		+ 0.328		— 6′30″962
Aug. 18	— 0.009		+ 0.197		+ 13.665	
		+ 0.014		+ 0.525		— 6′17″297
Sept. 27	— 0.011		+ 0.211		+ 14.190	
		+ 0.003		+ 0.736		— 6′ 3″107
Nov. 6	— 0.012		+ 0.214		+ 14.926	
		— 0.009		+ 0.950		— 5′48″181
Dec. 16	— 0.015		+ 0.205		+ 15.876	
		— 0.024		+ 1.155		— 5′32″305
1873 Jan. 25	— 0.020		+ 0.181		+ 17.031	
		— 0.044		+ 1.336		— 5′15″274
März 6	— 0.020		+ 0.137		+ 18.367	
		— 0.064		+ 1.473		— 4′56″907
April 15	— 0.036		+ 0.073		+ 19.840	
		— 0.100		+ 1.546		— 4′37″067
Mai 25	— 0.025		— 0.027		+ 21.386	
		— 0.125		+ 1.519		— 4′15″681
Juli 4	— 0.032		— 0.152		+ 22.905	
		— 0.157		+ 1.367		— 3′52″776
Aug. 13	— 0.006		— 0.309		+ 24.272	
		— 0.163		+ 1.058		— 3′28″504
Sept. 22	+ 0.012		— 0.472		+ 25.330	
		— 0.151		+ 0.586		— 3′ 3″174
Nov. 1	+ 0.051		— 0.623		+ 25.916	
		— 0.100		— 0.037		— 2′37″258
Dec. 11	+ 0.074		— 0.723		+ 25.879	
		— 0.026		— 0.760		— 2′11″379
1874 Jan. 20	+ 0.084		— 0.749		+ 25.119	
		+ 0.058		— 1.509		— 1′46″260
März 1	+ 0.063		— 0.691		+ 23.610	
		+ 0.121		— 2.200		— 1′22″650
April 10	+ 0.043		— 0.570		+ 21.410	
		+ 0.164		— 2.770		— 1′ 1″240
Mai 20	+ 0.002		— 0.406		+ 18.640	
		+ 0.166		— 3.176		— 42″600
Juni 29	— 0.022		— 0.240		+ 15.464	
		+ 0.144		— 3.416		— 27″136
Aug. 8	— 0.030		— 0.096		+ 12.048	
		+ 0.114		— 3.512		— 15″088
Sept. 17	— 0.034		+ 0.018		+ 8.536	
		+ 0.080		— 3.494		— 6″552
Oct. 27	— 0.034		+ 0.098		+ 5.042	
		+ 0.046		— 3.396		— 1″510
Dec. 6	0.021		+ 0.144		+ 1.646	
		+ 0.025		— 3.252		+ 0″136
1875 Jan. 15			+ 0.169		1.606	
				— 3.083		— 1″470
Febr. 24					— 4.689	
						— 6″159

Datum			$\Sigma \frac{d\,\Delta M}{dt}$	$\Sigma \frac{d\,\Delta\omega}{dt}$	$\Sigma\Sigma \frac{d^2 r}{dt^2}$	$\Sigma\Sigma \frac{d^2 z}{dt^2}$
1860	Juni	22			— 59172.01	+ 8844.62
			+ 3° 7′16″749	— 39′25″450		
	Aug.	1			— 44051.97	+ 7708.41
			+ 3°11′ 3″545	— 39′11″278		
	Sept.	10			— 27625.01	+ 6384.95
			+ 3°13′25″366	— 38′57″288		
	Oct.	20			— 10257.87	+ 4899.22
			+ 3°14′17″824	— 38′43″615		
	Nov.	29			+ 7614.36	+ 3284.52
			+ 3°13′38″818	— 38′30″383		
1861	Jan.	8			+ 25509.36	+ 1581.28
			+ 3°11′28″729	— 38′17″694		
	Febr.	17			+ 42927.36	— 165.17
			+ 3° 7′50″448	— 38′ 5″611		
	März	29			+ 59385.22	— 1907.51
			+ 3° 2′49″247	— 37′54″152		
	Mai	8			+ 74449.26	— 3599.63
			+ 2°56′32″489	— 37′43″283		
	Juni	17			+ 87761.20	— 5199.52
			+ 2°49′ 9″219	— 37′32″923		
	Juli	27			+ 99053.77	— 6671.46
			+ 2°40′49″711	— 37′22″948		
	Sept.	5			+ 108155.12	— 7987.28
			+ 2°31′44″991	— 37′13″201		
	Oct.	15			+ 114983.78	— 9126.67
			+ 2°22′ 6″405	— 37′ 3″499		
	Nov.	24			+ 119537.17	— 10076.78
			+ 2°12′ 5″249	— 36′53″645		
1862	Jan.	3			+ 121877.04	— 10831.36
			+ 2° 1′52″473	— 36′43″431		
	Febr.	12			+ 122114.33	— 11389.70
			+ 1°51′38″463	— 36′32″644		
	März	24			+ 120395.52	— 11755.50
			+ 1°41′32″883	— 36′21″066		
	Mai	3			+ 116890.99	— 11935.88
			+ 1°31′44″569	— 36′ 8″478		
	Juni	12			+ 111785.97	— 11940.54
			+ 1°22′21″474	— 35′54″658		
	Juli	22			+ 105273.76	— 11781.08
			+ 1°13′30″624	— 35′39″383		
	Aug.	31			+ 97551.02	— 11470.55
			+ 1° 5′18″107	— 35′22″430		
	Oct.	10			+ 88814.59	— 11023.08
			+ 0°57′49″075	— 35′ 3″576		
	Nov.	19			+ 79259.63	— 10453.71
			+ 0°51′ 7″739	— 34′42″606		
	Dec.	29			+ 69078.57	— 9778.27
			+ 0°45′17″381	— 34′19″317		
1863	Febr.	7			+ 58460.57	— 9013.36
			+ 0°40′20″357	— 33′53″533		
	März	19			+ 47591.30	— 8176.34
			+ 0°36′18″108	— 33′25″121		
	April	28			+ 36652.51	— 7285.32
			+ 0°33′11″167	— 32′54″013		
	Juni	7			+ 25821.25	— 6359.08
			+ 0°30′59″170	— 32′20″234		
	Juli	17			+ 15268.28	— 5416.83
			+ 0°29′40″878	— 31′43″933		
	Aug.	26			+ 5155.57	— 4477.77
			+ 0°29′14″213	— 31′ 5″403		
	Oct.	5			— 4367.28	— 3560.43
			+ 0°29′36″310	— 30′25″095		
	Nov.	14			— 13167.29	— 2681.78
			+ 0°30′43″596	— 29′43″603		
	Dec.	24			— 21132.32	— 1856.31
			+ 0°32′31″892	— 29′ 1″628		

Datum			$\Sigma \frac{d\,\Delta M}{dt}$	$\Sigma \frac{d\,\Delta \omega}{dt}$	$\Sigma\Sigma \frac{d^2 v}{dt^2}$	$\Sigma\Sigma \frac{d^2 z}{dt^2}$
1864	Febr.	2			− 28174.28	− 1095.25
			+ 0°34'56"534	− 28'19"911		
	März	13			− 34230.37	− 406.10
			+ 0°37'52"502	− 27'39"166		
	April	22			− 39261.96	+ 207.30
			+ 0°41'14"546	− 27' 0"008		
	Juni	1			− 43251.31	+ 744.28
			+ 0°44'57"298	− 26'22"912		
	Juli	11			− 46197.12	+ 1206.49
			+ 0°48'55"363	− 25'48"193		
	Aug.	20			− 48109.97	+ 1597.03
			+ 0°53' 3"383	− 25'16"013		
	Sept.	29			− 49008.37	+ 1919.65
			+ 0°57'16"087	− 24'46"402		
	Nov.	8			− 48916.09	+ 2178.15
			+ 1° 1'28"322	− 24'19"286		
	Dec.	18			− 47860.61	+ 2375.96
			+ 1° 5'35"080	− 23'54"517		
1865	Jan.	27			− 45872.82	+ 2515.97
			+ 1° 9'31"518	− 23'31"897		
	März	8			− 42987.54	+ 2600.48
			+ 1°13'12"980	− 23'11"197		
	April	17			− 39244.94	+ 2631.26
			+ 1°16'35"036	− 22'52"169		
	Mai	27			− 34692.46	+ 2609.68
			+ 1°19'33"515	− 22'34"558		
	Juli	6			− 29387.26	+ 2536.89
			+ 1°22' 4"561	− 22'18"106		
	Aug.	15			− 23398.97	+ 2414.07
			+ 1°24' 4"696	− 22' 2"558		
	Sept.	24			− 16812.52	+ 2242.66
			+ 1°25'30"902	− 21'47"663		
	Nov.	3			− 9730.85	+ 2024.66
			+ 1°26'20"707	− 21'33"178		
	Dec.	13			− 2277.02	+ 1762.93
			+ 1°26'32"288	− 21'18"874		
1866	Jan.	22			+ 5404.88	+ 1461.46
			+ 1°26' 4"571	− 21' 4"538		
	März	3			+ 13150.62	+ 1125.61
			+ 1°24'57"328	− 20'49"983		
	April	12			+ 20779.32	+ 762.25
			+ 1°23'11"251	− 20'35"057		
	Mai	22			+ 28099.94	+ 379.72
			+ 1°20'47"995	− 20'19"650		
	Juli	1			+ 34920.71	− 12.36
			+ 1°17'50"172	− 20' 3"701		
	Aug.	10			+ 41060.70	− 403.54
			+ 1°14'21"291	− 19'47"202		
	Sept.	19			+ 46361.97	− 783.12
			+ 1°10'25"635	− 19'30"194		
	Oct.	29			+ 50700.16	− 1140.84
			+ 1° 6' 8"092	− 19'12"760		
	Dec.	8			+ 53991.71	− 1467.57
			+ 1° 1'33"951	− 18'55"011		
1867	Jan	17			+ 56196.56	− 1755.79
			+ 0°56'48"689	− 18'37"073		
	Febr.	26			+ 57316.18	− 1999.93
			+ 0°51'57"768	− 18'19"071		
	April	7			+ 57388.03	− 2196.43
			+ 0°47' 6"456	− 18' 1"123		
	Mai	17			+ 56477.94	− 2343.62
			+ 0°42'19"695	− 17'43"327		
	Juni	26			+ 54671.82	− 2441.49
			+ 0°37'42"001	− 17'25"763		
	Aug.	5			+ 52067.96	− 2491.34
			+ 0°33'17"402	− 17' 8"488		

Datum			$\Sigma \frac{d\Delta M}{dt}$	$\Sigma \frac{d\Delta\omega}{dt}$	$\Sigma\Sigma \frac{d^2 r}{dt^2}$	$\Sigma\Sigma \frac{d^2 z}{dt^2}$
1867	Sept.	14			+ 48770.61	— 2495.50
			+ 0°29′ 9″412	— 16′51″541		
	Oct.	24			+ 44885.04	— 2457.00
			+ 0°25′21″024	— 16′34″944		
	Dec.	3			+ 40514.04	— 2379.34
			+ 0°21′54″720	— 16′18″706		
1868	Jan.	12			+ 35755.66	— 2266.27
			+ 0°18′52″498	— 16′ 2″823		
	Febr.	21			+ 30701.94	— 2121.68
			+ 0°16′15″894	— 15′47″285		
	April	1			+ 25438.35	— 1949.46
			+ 0°14′ 6″019	— 15′32″075		
	Mai	11			+ 20043.66	— 1753.44
			+ 0°12′23″585	— 15′17″170		
	Juni	20			+ 14590.21	— 1537.34
			+ 0°11′ 8″938	— 15′ 2″546		
	Juli	30			+ 9144.32	— 1304.75
			+ 0°10′22″089	— 14′48″175		
	Sept.	8			+ 3766.80	— 1059.14
			+ 0°10′ 2″734	— 14′34″028		
	Oct.	18			— 1486.47	— 803.80
			+ 0°10′10″282	— 14′20″076		
	Nov.	27			— 6564.03	— 541.89
			+ 0°10′43″874	— 14′ 6″289		
1869	Jan.	6			— 11418.30	— 276.45
			+ 0°11′42″403	— 13′52″637		
	Febr.	15			— 16005.12	— 10.39
			+ 0°13′ 4″529	— 13′39″091		
	März	27			— 20283.32	+ 253.50
			+ 0°14′48″693	— 13′25″622		
	Mai	6			— 24214.35	+ 512.53
			+ 0°16′53″132	— 13′12″202		
	Juni	15			— 27762.01	+ 764.08
			+ 0°19′15″887	— 12′58″804		
	Juli	25			— 30892.18	+ 1005.60
			+ 0°21′54″820	— 12′45″404		
	Sept.	3			— 33572.71	+ 1234 62
			+ 0°24′47″616	— 12′31″979		
	Oct.	13			— 35773.36	+ 1448.73
			+ 0°27′51″802	— 12′18″509		
	Nov.	22			— 37465.81	+ 1645.56
			+ 0°31′ 4″749	— 12′ 4″977		
1870	Jan.	1			— 38623.81	+ 1822.78
			+ 0°34′23″692	— 11′51″370		
	Febr.	10			— 39223.40	+ 1978.11
			+ 0°37′45″736	— 11′37″677		
	März	22			— 39243.30	+ 2109.31
			+ 0°41′ 7″876	— 11′23″892		
	Mai	1			— 38665.44	+ 2214.21
			+ 0°44′27″011	— 11′10″012		
	Juni	10			— 37475.65	+ 2290.71
			+ 0°47′39″972	— 10′56″038		
	Juli	20			— 35664.53	+ 2336.81
			+ 0°50′43″543	— 10′41″972		
	Aug.	29			— 33228.57	+ 2350.64
			+ 0°53′34″496	— 10′27″820		
	Oct.	8			— 30171.54	+ 2330.52
			+ 0°56′ 9″631	— 10′13″590		
	Nov.	17			— 26506.10	+ 2275.03
			+ 0°58′25″823	— 9′59″291		
	Dec.	27			— 22255.75	+ 2183.09
			+ 1° 0′20″078	— 9′44″936		
1871	Febr.	5			— 17457.10	+ 2054.09
			+ 1° 1′49″605	— 9′30″541		
	März	17			— 12162.34	+ 1888.01
			+ 1° 2′51″894	— 9′16″126		

Datum			$\Sigma \frac{d\Delta M}{dt}$	$\Sigma \frac{d\Delta\omega}{dt}$	$\Sigma\Sigma \frac{d^2 r}{dt^2}$	$\Sigma\Sigma \frac{d^2 z}{dt^2}$
1874	April	26			− 6441.70	+ 1685.62
			+ 1° 3'24"810	− 9' 1"718		
	Juni	5			− 385.75	+ 1448.63
			+ 1° 3'26"692	− 8'47"347		
	Juli	15			+ 5893.14	+ 1179.89
			+ 1° 2'56"465	− 8'33"051		
	Aug.	24			+ 12260.63	+ 883.56
			+ 1° 1'53"746	− 8'18"869		
1875	Jan.	15			+ 4.70	− 1.00
			− 0"051	− 1"470		
	Febr.	24			+ 69.62	− 23.07
			− 0"415	− 6"159		
	April	5			+ 150.54	− 64.81
			− 1"175	− 13"756		
	Mai	15			+ 204.58	− 123.74
			− 2"196	− 24"093		
	Juni	24			+ 192.53	− 197.26
			− 3"139	− 37"012		
	Aug.	3			+ 78.56	− 282.71
			− 3"484	− 52"375		
	Sept.	12			− 170.05	− 377.39
			− 2"542	− 1'10"060		
	Oct.	22			− 583.14	− 478.57
			+ 0"530	− 1'29"966		
	Dec.	1			− 1187.79	− 583.49
			+ 6"713	− 1'52"011		
1876	Jan.	10			− 2008.31	− 689.36
			+ 17"115	− 2'16"131		
	Febr.	19			− 3066.08	− 793.36
			+ 32.952	− 2'42"277		
	März	30			− 4379.25	− 892.64
			+ 55"535	− 3'10"414		
	Mai	9			− 5962.23	− 984.33
			+ 1'26"252	− 3'40"519		
	Juni	18			− 7824.98	− 1065.52
			+ 2' 6"541	− 4'12"575		
	Juli	28			− 9972.04	− 1133.32
			+ 2'57"867	− 4'46"570		
	Sept.	6			− 12401.39	− 1184.86
			+ 4' 1"686	− 5'22"488		
	Oct.	16			− 15103.00	− 1217.36
			+ 5'19"406	− 6' 0"302		
	Nov.	25			− 18057.28	− 1228.23
			+ 6'52"336	− 6'39"966		
1877	Jan.	4			− 21233.47	− 1215.17
			+ 8'41"628	− 7'21"399		
	Febr.	13			− 24588.09	− 1176.35
			+ 10'48"215	− 8' 4"472		
	März	25			− 28063.85	− 1110.57
			+ 13'12"733	− 8'48"993		
	Mai	4			− 31589.29	− 1017.47
			+ 15'55"453	− 9'34"697		
	Juni	13			− 35079.71	− 897.73
			+ 18'56"208	− 10'21"238		
	Juli	23			− 38439.78	− 753.17
			+ 22'14"338	− 11' 8"203		
	Sept.	1			− 41568.16	− 586.81
			+ 25'48"658	− 11'55"132		
	Oct.	11			− 44363.85	− 402.74
			+ 29'37"457	− 12'41"550		
	Nov	20			− 46733.46	− 205.92
			+ 33'38"539	− 13'27"011		
	Dec.	30			− 48598.29	− 1.79
			+ 37'49"294	− 14'11"129		
					− 49899.82	+ 204.11

Als Beispiel zu den Formeln zum Uebergang auf osculirende Elemente leite ich die osculirenden Elemente für 1871 Sept. 13 ab. Es tritt zwar, wie die im obigen Beispiele ausgeführte Störungsrechnung erweist, durchaus nicht die Nothwendigkeit auf, die Störungen auf die Elemente zu übertragen, da der Gang der Störungen noch hinreichend regelmässig ist und selbst bei der Fortführung der Rechnung bis zum Jahre 1860 zurück, vom Anfang 1875 ausgehend, niemals allzu unregelmässig wird. Der Uebergang wird also hier nur als Beispiel aufzufassen sein, welches vergleichende Anhaltspunkte für die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Methoden der Störungsrechnung abgeben soll; denn für dieselbe Epoche wurden bereits osculirende Elemente abgeleitet bei dem Beispiele der Störungsrechnung nach den rechtwinkeligen Coordinaten, wobei jedoch für diese letztere Methode der Uebergang auf osculirende Elemente dringend nothwendig war. Die Elemente, welche der Störungsrechnung zu Grunde liegen, sind wie oben (pag. 173):

(62) Erato

Epoche, Osculation 1874 Dec. 26,0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Aeq. 1870.0

$$\begin{aligned}
L_0 &= 219^\circ\ \ 8'\ \ 6''8\\
M_0 &= 180\ \ 40\ \ 48.9\\
\pi_0 &= 38\ \ 27\ \ 17.9\\
\Omega_0 &= 125\ \ 42\ \ 39.7\\
i_0 &= 2\ \ 12\ \ 23.9\\
\varphi_0 &= 9\ \ 59\ \ 14.9\\
\mu_0 &= 640''89605\\
\log a_0 &= 0.495\,4793\,.
\end{aligned}$$

Wählt man wieder als Zeiteinheit das Intervall der Störungsrechnung (40 Tage, also für k überall $40k$, für w aber die Einheit einzusetzen), so finden sich die der Rechnung zu Grunde zu legenden einfachen und Doppelintegrale, weil die neue Osculationsepoche in die Mitte eines Störungsintervalles fällt, nach den Formeln (vergl. pag. 35, 53):

$$\int^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x)\,dx = {}^{\mathrm{I}}f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \frac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \\ + \frac{367}{967680}f^{\mathrm{V}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \ldots$$

$$\iint^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x)\,dx^2 = {}^{\mathrm{II}}f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \frac{1}{24}f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \frac{17}{1920}f^{\mathrm{II}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) - \\ - \frac{367}{193536}f^{\mathrm{IV}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \ldots$$

und man findet demnach unter Zugrundelegung der beim obigen Beispiele erhaltenen Integraltafeln, zunächst für die einfachen Integrale leicht:

	ΔM	$\Delta\omega$	$d\nu : dt$	$dz : dt$	$\int \Sigma U dt$
$'f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+1^{0}1'53''746$	$-8'18''869$	$+6301.78$	-318.38	$+5008.92$
$+\frac{1}{24} f^{\mathrm{I}}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$-1''337$	-0.006	-7.06	$+0.29$	$+0.95$
$-\frac{17}{5760} f^{\mathrm{III}}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-0.003	0	-0.02	0	0
$\int^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x)\, dx$	$+1^{0}1'52''406$	$-8'18''875$	$+6294.70$	-318.09	$+5009.87$

und für die Doppelintegrale:

	ν	z
$''f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+15411.52$	$+724.37$
$-\frac{1}{24} f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+6.27$	$+0.77$
$+\frac{17}{2920} f^{\mathrm{II}}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-0.10	$+0.01$
$-\frac{367}{193536} f^{\mathrm{IV}}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-0.01	0.00
$\iint^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x)\, dx^2$	$+15417.68$	$+725.15$

Die Rechnung nach dem Formelsystem II (pag. 170) führe ich 7stellig durch. weil man die aus derselben resultirenden Zahlen später bei der Controlrechnung mit grösserer Genauigkeit braucht. als dies die 6stellige Rechnung gewähren kann:

M_0	$327^{0}2'53''64$	M	$328^{0}4'46''05$
E_{00}	$320^{0}45'45''99$	E_0	$321^{0}57'20''09$
$\sin E_{00}$	$9_n801\ 0829$	$\sin E_0$	$9_n789\ 7726$
$\cos E_{00}$	$9.889\ 0403$	$\cos E_0$	$9.896\ 2688$
Subtr.	$0.110\ 0930$	Subtr.	$0.108\ 0295$
$\cos E_{00}-e_0$	$9.778\ 9473$	$\cos E_0-e_0$	$9.788\ 2393$
$r_0 \sin v_0$	$0_n289\ 9304$	$((r)) \sin V$	$0_n278\ 6201$
	$9_n857\ 0986$		$9_n852\ 0193$
$r_0 \cos v_0$	$0.274\ 4266$	$((r)) \cos V$	$0.283\ 7186$
v_0	$313^{0}58'39''07$	V	$315^{0}20'10''71$
r_0	$0.432\ 8318$	$((r))$	$0.431\ 6993$
		$\log(1+\nu)$	$0.000\ 6691$
z	$5.860\ 4279$	(r)	$0.432\ 3684$
$\operatorname{tang} b$	$5.428\ 0595$	r	$0.432\ 3684$
$\cos b$	$0.000\ 0000$		
$(wk):\sqrt{p_0}$	$9.596\ 5336$	$d\nu:dt$	$6.798\ 9750$
$(wk)\ e_0:\sqrt{p_0}$	$8.835\ 6650$	$d(r)_1$	$7.230\ 6743$
$\sin V$	$9_n846\ 9208$	Add.	$0.015\ 6437$
$(1+\nu)^{-1}$	$9.999\ 3309$	$d(r):dt$	$8_n666\ 2730$.
$d(r)_2$	$8_n681\ 9167$		

Von hier ab kann die Rechnung 6stellig geführt werden; man erhält so nach III) (pag. 170):

$dz:dt$	$5_n502\ 550$	$\sin(l-K_0)\ \mathrm{tang}\ J$	$5.428\ 059$
$(r)\ dz:dt$	$5_n934\ 918$		$9_n969\ 477$
$z\ dr:dt$	$4_n526\ 701$	$\cos(l-K_0)\ \mathrm{tang}\ J$	$5_n838\ 682$
Subtr.	$9.982\ 694$	$l-K_0$	$158°46'10''2$
$(wk)\sqrt{p_0}$	$0.078\ 749$	$l = V+\omega_0+\Delta\omega$	$227°56'30''0$
$\int\Sigma\ U\,dt$	$6.699\ 826$	K_0	$69°10'19''8$
Add.	$0.000\ 181$		
Nenner	$0.078\ 930$	$\mathrm{tang}\ J$	$5.869\ 205$
Zähler	$5_n917\ 612$	$\mathrm{tang}\ \frac{1}{2}J$	$5.568\ 175$
		$\sin^2\frac{1}{2}J$	$1.136\ \ldots$
$\left(\frac{1}{wk}\right)\int\Sigma\ U\,dt$	$6.862\ 185$	$2\sqrt{p_0}$	$0.542\ 138$
$2\sqrt{p_0}\sin^2\frac{1}{2}J$	$1.078\ \ldots$	log. Add.	$0.000\ 091$
Add.	$0.000\ 003$	$2\sqrt{p_0}+\Delta(\sqrt{p})$	$0.542\ 229$
sec J	$0.000\ 000$	$\log\Delta(p)$	$7.404\ 417$
$\log\Delta(\sqrt{p})$	$6.862\ 188$	$\Delta(u)$	$0''000$

weiter lässt IV) (pag. 170, 171) finden:

$\frac{1}{2}\ i_0$	$1°6'11''95$	$2\ K_0$	$138°20'39''6$
$\mathrm{tang}\ \frac{1}{2}\ i_0$	$8.284\ 632$	$\sin K_0$	$9.970\ 651$
a	$3.852\ 807$	$\sin 2\ K_0$	$9.822\ 595$
b	$7.283\ 543$	$\sin K_0 : \sin 1''$	$5.285\ 07$
b^2	$4.567\ 086$	$\sin 2\ K_0 : \sin 2''$	$4.835\ 990$
$(\mathrm{II})_1$	$-\ 6'10''356$	$\Delta(K)$	$-\ 6'9''966$
$(\mathrm{II})_2$	$+\ 0''253$	$\Omega-\Omega_0$	$+\ 6'10''240$
II	$-\ 6'10''103$		
I	$+\ 0.137$	$\frac{1}{2}\Delta(K)$	$-\ 3'\ 5''0$
$K_0+\frac{1}{2}\Delta(K)$	$69°\ 7'14''8$	$\mathrm{tang}\ \frac{1}{2}(i-i_0)$	$5.120\ 112$
$\cos\{K_0+\frac{1}{2}\Delta(K)\}$	$9.551\ 937$	T	$4.685\ 575$
$\mathrm{tang}\ \frac{1}{2}\ J$	$5.568\ 175$	$\frac{1}{2}(i-i_0)$	$+\ 2''720$
$\sec\frac{1}{2}\Delta(K)$	$0.000\ 000$	$i-i_0$	$+\ 5''440$

Nun kann an die Berechnung der Formeln V) (pag. 171) geschritten werden.

$\frac{1}{2}(E_0+E_{00})$	$321°21'33''0$	$\cos\varphi_0$	$9.993\ 368$
β	$9.999\ 992$	$n'\cos N$	$9.886\ 061$
$\cos\frac{1}{2}(E_0+E_{00})$	$9.892\ 693$		$9.890\ 083$
$\sin\varphi_0$	$9.239\ 131$	$n'\sin N$	$9_n795\ 488$
$e_0\ \beta\cos\frac{1}{2}(E_0+E_{00})$	$9.131\ 816$	N	$320°55'54''2$

Nenner	9.936 784	n'	9.995 978
$\Delta M''$	3.569 656	$a_0\,\beta$	0.495 471
$E_0 - E_{00}$	$+1^\circ 11' 34'' 10$	$E_0 - E_{00}$	3.632 872
		$\sin 1''$	4.685 575
$N - v_0$	$6^\circ 57' 15'' 1$		
$\cos(N - v_0)$	9.996 793	$\frac{1}{2}(V - v_0)$	$0^\circ 40' 45'' 8$
n	8.809 896	$\frac{1}{2}(V + v_0)$	$314^\circ 39' 24'' 9$
$\sin(N - v_0)$	9.083 057	$N - \frac{1}{2}(V + v_0)$	$6^\circ 16' 29.3$
$n \sin(N - v_0)$	7.892 953	$\sin\{N - \frac{1}{2}(V + v_0)\}$	9.038 610
r_0	0.432 832	$-n$	$8_n 809$ 896
Subtr.	9.998 746	$\sec \frac{1}{2}(V - v_0)$	0.000 031
Nenner	0.431 578	$\log[((r)) - r_0]$	$7_n 848$ 537
$n \cos(N - v_0)$	8.806 689		
$\operatorname{tang}(V - v_0)$	8.375 111		
T	4.685 656		
$V - v_0$	$+1^\circ 21' 31'' 64$		

Zur Controle der eben erhaltenen Werthe findet man aus VI) (pag. 171):

$a_0 \beta (E_0 - E_{00}) \sin 1''$	8.813 918	$\frac{1}{2} a_0 \cos \varphi_0$	0.187 817
$e_0 \sin \frac{1}{2}(E_0 + E_{00})$	$9_n 034$ 619	compl. $\sqrt{r_0 ((r))}$	9.567 734
$\log[((r)) - r_0]$	$7_n 848$ 537	$\beta \sin 1'' (E_0 - E_{00})$	8.318 439
		$\sin \frac{1}{2}(V - v_0)$	8.073 990
		S	4.685 565
		$\frac{1}{2}(V - v_0)$	$+ 40' 45'' 82$
		$V - v_0$	$+1^\circ 21' 31'' 64$

Die Controlwerthe stimmen somit vollkommen; aus VII) (pag. 171) ergibt sich nun:

$\sin \frac{1}{2} b$	5.127 029	$((r))\gamma$	7.619 718
$2 \sin^2 \frac{1}{2} b$	0.555 088	Add.	9.841 129
ν	7.188 019	$\Delta(r)$	$7_n 460$ 847
Add.	0.000 000		
$\nu + 2 \sin^2 \frac{1}{2} b$	7.188 019		
γ	7.188 019	$\sin v_0$	$9_n 857$ 099
$2 \sin \frac{1}{2}(V - v_0)$	8.375 020	$d\nu : dt$	6.798 975
$\cos \frac{1}{2}(V + v_0)$	9.846 869	$(r)\, d\nu : dt$	7.231 343
$2 \sin \frac{1}{2}(V - v_0) \cos \frac{1}{2}(V + v_0)$	8.221 889	$(wk)\, e_0 \{\ldots\} : \sqrt{p_0}$	7.085 540
$\gamma \sin v_0$	$7_n 045$ 118	Add.	0.234 219
Subtr.	0.027 986	$dz : dt$	$5_n 502$ 550
$\{\ldots\ldots\}$	8.249 875	$\{z : (r)\}\{dz : dt\}$	$0_n 930$ 609
$(wk)\, e_0 : \sqrt{p_0}$	8.835 665	$(1) + (2)$	7.465 562
		Add.	0

$\sqrt{p}$	0.241 289	$\cos b : (1+r)$	9.999 331
p	0.482 578	$\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$	7.464 893

Nun kann an die Bestimmung der Excentricität und der wahren Anomalie geschritten werden; die Formel VIII (pag. 171) liefern hierfür:

$dr_0 : dt$	8_n692 764	$g \sin G$	7.865 465
I	5_n554 952		9.982 361
II	7.706 182	$g \cos G$	7.329 201
Add.	9.996 924	G	73°46′50″0
Compl. (wk)	0.162 359	$G - v_0$	119°48′10″9
		$\sin(G - v_0)$	9.938 389
$p_0 : r_0$	0.049 384	g	7.883 104
II	7_n510 231	$\cos(G - v_0)$	9_n696 373
I	7.404 417	$g \cos(G - v_0)$	7_n579 477
Subtr.	0.251 338	e_0	9.239 131
Compl. r	9.567 632	Add.	9.990 385
		Nenner	9.229 516
$G - \frac{1}{2}(v + v_0)$	118°41′ 2″1	$g \sin(G - v_0)$	7.821 493
$\cos\{G - \frac{1}{2}(v + v_0)\}$	9_n681 222	$\tan(v - v_0)$	8.591 977
$g \cos\{G - \frac{1}{2}(v + v_0)\}$	7_n564 326	T	4.085 796
$\sec \frac{1}{2}(v - v_0)$	0.000 083	$v - v_0$	2°14′17″14
$\Delta(e)$	7_n564 409	$\frac{1}{2}(v - v_0)$	1° 7′ 8″57
e_0	9.239 131	$\frac{1}{2}(v + v_0)$	315° 5′47″0
Add.	9.990 717		
$\sin \varphi$	9.229 848	$2 e_0$	9.540 161
φ	9°46′27″0	Add.	9.995 383
$\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$	9°52′50.9	$2 e_0 + \Delta e$	9.535 544
$\cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$	9.993 510	Δe^2	7_n099 053
$\frac{1}{2}\Delta(e)$	7_n203 379		
$\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$	7_n269 869		
S	4.685 575		
$\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$	− 6′23″967		
$\varphi - \varphi_0$	−12′47″934		

Aus IX (pag. 172) findet sich weiter:

log 2	0.301 030	$2 \sin \frac{1}{2}(v - v_0)$	8.591 729
$\sin \frac{1}{2}(v - v_0)$	8.290 699	$\sin \frac{1}{2}(v + v_0)$	9_n848 752
$\cos \frac{1}{2}(v + v_0)$	9.850 216	$(\sigma)_2$	8_n440 481
$\cos \varphi$	9.993 650	Subtr.	9.938 007
$(\sigma)_1$	8.435 595	(σ)	8.378 488
$2 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$	7_n570 899		
$\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$	9.234 515	$(r : p)$	9.949 790

$\sin v_0$ $9_n857\ 099$
σ_2 $6.662\ 513$
Subtr. $9.992\ 614$
σ $8.428\ 209$

$\sigma (r:p)$ $8.377\ 999$
$\lambda \sin E_{00}$ $7.080\ 074$
Add. $0.021\ 338$
$\gamma (r:p)$ $8.328\ 278$
$\lambda \cos E_{00}$ $7_n168\ 031$
Add. $9.968\ 883$
$g' \sin G'$ $8.399\ 337$
$9.894\ 618$
$g' \cos G'$ $8.297\ 161$
G' $51^\circ 40' 43''0$
$G' - E_{00}$ $90^\circ 54' 57''0$
$\sin (G' - E_{00})$ $9.999\ 944$
g' $8.504\ 719$
$\cos (G' - E_{00})$ $8_n203\ 675$

E $322^\circ 35' 40''2$
$-\sin E$ $9.783\ 512$
$\Delta e : \sin 1''$ $2_n878\ 834$
$\log \Delta M_3$ $2_n662\ 346$

$-g \cos G$ $7_n329\ 201$
λ $7_n278\ 991$
$\sin E_{00}$ $9_n801\ 083$
$\cos E_{00}$ $9.889\ 040$

$g' \cos (G' - E_{00})$ $6_n708\ 394$
Nenner $9.999\ 778$
$g' \sin (G' - E_{00})$ $8.504\ 663$
$\tan (E - E_{00})$ $8.504\ 885$
T $4.685\ 723$
$E - E_{00}$ $1^\circ 49' 54''20$
$\frac{1}{2} (E - E_{00})$ $0^\circ 54' 57''10$
$\frac{1}{2} (E + E_{00})$ $321^\circ 40' 43''1$
$\cos \frac{1}{2} (E + E_{00})$ $9.894\ 618$
$\sin \frac{1}{2} (E - E_{00})$ $8.203\ 688$
$-2 \sin \varphi_0 : \sin 1''$ $4_n854\ 586$
$\log \Delta M_2$ $2_n952\ 892$
ΔM_2 $-\ 14' 57''206$
ΔM_3 $-\ 7' 39''564$
$M - M_0$ $+\ 1^\circ 27' 17''43$

Nach X pag. 172 erhält man:

ΔK $-\ 6'\ 9''966$
$\Delta \mu$ 0.000
$\Delta \omega$ $-\ 8' 18''875$
$V - v_0$ $+\ 1^\circ 21' 31''64$
$v - v_0$ $-\ 2^\circ 14' 17''14$

$\omega - \omega_0$ $-\ 1^\circ\ 7' 14''34$
$\Omega - \Omega_0$ $-\ 1^\circ\ 1'\ 4''10$
$L - L_0$ $+\ 0^\circ 26' 13''33$
$\mu_0 t$ $-\ 213^\circ 37' 55''26$

Aus XI pag. 172 leitet man schliesslich ab mit Benützung der Tafel XI:

Δp $7.404\ 417$
$a_0 \Delta (e^2)$ $7_n595\ 432$
p_0 $0.482\ 210$
Subtr. $0.000\ 563$
Add. $9.742\ 286$
$p_0 - a_0 \Delta e^2$ $0.482\ 779$
Nenner $0.783\ 806$

$\Delta p + a_0 \Delta (e^2)$ $7_n146\ 703$
$\log q$ $6_n362\ 894$
q $-0.000\ 2306$
f $0.477\ 371$
$-\mu_0$ $2_n806\ 787$
$\log (\mu - \mu_0)$ $9.647\ 052$
$\mu - \mu_0$ $+\ 0''44366$

Die neuen Elemente sind also, wenn man die Epoche auf den Osculationspunkt legt:

(62) Erato

Epoche und Osculation 1871 Sept. 13.0 mittl. Berl. Zeit.

mittl. Aeq. 1870.0.

$$
\begin{aligned}
L &= 5^{\circ}56'24''87 \\
M &= 328\ 30\ 11.07 \\
\pi &= 37\ 26\ 13.80 \\
\Omega &= 125\ 48\ 49.94 \\
i &= 2\ 12\ 20.34 \\
\varphi &= 9\ 46\ 26.07 \\
\mu &= 641''33971
\end{aligned}
$$

Vergleicht man diese Elemente mit jenen, die auf pag. 136 mitgetheilt sind und in ganz anderer Weise durch eine völlig verschiedene Methode der Störungsrechnung erhalten wurden, so findet man die befriedigendste Uebereinstimmung; doch ist den hier erhaltenen Elementen das grössere Vertrauen zu schenken, weil die Störungsrechnung nach Encke's Methode, in Folge des Anwachsens der Störungen, nicht mehr die hinreichende Sicherheit bot und eigentlich länger fortgesetzt wurde, als es gestattet erscheint; man kann aber aus dem hohen Grade der Uebereinstimmung den Schluss ziehen, dass selbst in diesen extremen Fällen die mechanischen Quadraturen alles geleistet haben, was von denselben verlangt werden kann. Die unten durchgeführte Störungsrechnung nach der Variation der Constanten bestätigt die eben hier gemachten Schlüsse.

Zur Controle kann man die Formeln III — VI (pag. 172, 173) benützen; man erhält aus III), wenn man die Rechnung 7stellig durchführt:

$dz : dt$	$5_n502\ 5500$	$\sin(l - K_0)\tang J$	$5.428\ 0505$
$(r)\ dz : dt$	$5_n934\ 9184$		$9_n966\ 4760$
$z\,dr : dt$	$4_n526\ 7000$	$\cos(l - K_0)\tang J$	$5_n838\ 6820$
Subtr.	0.017 3058	$l - K_0$	$158^{\circ}46'10''03$
Zähler	$5_n917\ 6120$	$V + \omega_0 + \Delta\omega = l$	$227^{\circ}56'30''04$
$(wk)\sqrt{p_0}$	0.078 7492	K_0	$69^{\circ}10'20''01$
$\int\Sigma\, U\,dt$	6.699 8265		
Add.	0.000 1814	$\tang J$	5.869 2051
Nenner	0.078 9306	T	4.685 5749
$(wk)\sqrt{p}$	0.078 9306	J	15.263

$$u = 158^{\circ}46'10''03$$

Aus IV) pag. 172 findet sich nun:

$\frac{1}{2}\,i_0$	$1^{\circ}\ 6'11''05$	$\cos\frac{1}{2}(i_0 - J)$	9.999 9198
$\frac{1}{2}\,J$	$0^{\circ}\ 0'7''631$	$\sec\frac{1}{2}(i_0 + J)$	0.000 0809

$\frac{1}{2}(i_0+J)$	$1^\circ\ 6'10''581$	$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\{K+(\Omega-\Omega_0)\}$	9.838 5325
$\frac{1}{2}(i_0-J)$	$1^\circ\ 6'\ 4''319$	$\frac{1}{2}\{K+(\Omega-\Omega_0)\}$	$34^\circ35'10''16$
$\frac{1}{2}K_0$	$34^\circ35'10''00$	K	$69^\circ\ 4'10''07$
$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}K_0$	9.838 5318	$\frac{1}{2}(K+K_0)$	$69^\circ\ 7'15''04$
$\sin\frac{1}{2}(i_0-J)$	8.283 7167	$\cos\frac{1}{2}(K+K_0)$	9.551 0354
$\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}(i_0+J)$	1.714 6147	$\sec\frac{1}{2}(K-K_0)$	0.000 0002
$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\{K-(\Omega-\Omega_0)\}$	9.836 8632	$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}J$	5.568 1751
$\frac{1}{2}\{K-(\Omega-\Omega_0)\}$	$34^\circ28'50''91$	$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(i-i_0)$	5.120 1107
$\Omega-\Omega_0$	$+\ \ 6'10''25$	$T-\log 2$	4.384 5449
Ω	$125^\circ48'40''95$	$i-i_0$	$+\ 5''440$

Aus V (pag. 172. 173) erhält man nun:

$\frac{dr}{dt}$	$8_n666\ 2730$	$\sin\varphi\sin v$	$9_n069\ 9208$
$(r):r$	0.000 0000		9.858 5055
$\frac{z}{r}\left(\frac{dz}{dt}\right)$	$9_n930\ 6095$	$\sin\varphi\cos v$	9.088 3528
Add.	0.000 0000	v	$316^\circ12'55''76$
$dr:dt$	$8_n666\ 2730$	$\sin\varphi$	9.229 8473
$l(p:wk)$	0.403 6478	φ	$9^\circ46'26''89$
p	0.482 5784	$K-v$	$112^\circ51'14''31$
$p:r$	0.050 2100	ω	$271^\circ37'24''34$
		π	$37^\circ26'14''29$

Schliesslich findet sich nach VI (pag. 173):

$(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi)$	$49^\circ53'13''44$	$\sin E$	$9_n783\ 5134$
$\frac{1}{2}v$	$158^\circ\ 6'27.88$	$\sin\varphi:\sin 1''$	4.544 2724
$\mathrm{cotg}\,(45+\frac{1}{2}\varphi)$	9.925 5514	ΔM	$-\ 5^\circ54'30''90$
$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v$	$9_n604\ 0536$	M	$328^\circ30'10''62$
$\frac{1}{2}E$	$161^\circ17'49''86$		
E	$322^\circ35'39''72$	$\cos\varphi$	9.993 6408.5
$\cos\varphi^2$	9.987 2997	$\log a^{\frac{3}{2}}$	0.742 9180
$\log a$	0.495 2787	k''	3.550 0066
$\frac{1}{2}\log a$	0.247 6393	μ	$641''3404$

Die Uebereinstimmung ist eine im Ganzen genügende, zeigt aber ganz deutlich den überwiegenden Vortheil, den die Bestimmung der neuen osculirenden Elemente durch die Differenzen gewährt.

C. Variation der Constanten.

§ 1. Aufstellung der Differentialgleichungen.

In den vorausgehenden Paragraphen wurden die Methoden der Störungsrechnung zum Vortrage gebracht, die den Einfluss der Störungen auf die Coordinaten finden lassen. Man kann aber auch die Störungen dadurch bestimmen, dass man durch Variation der sechs willkürlichen Constanten des Problemes für jeden gegebenen Augenblick den Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Himmelskörpers darstellt; diese Methode bewährt auch in der Anwendung die hohen Vorzüge, welche dieselbe in der Analyse in Anspruch nimmt und ich stehe nicht an, zu erklären, dass mir dieselbe in den meisten Fällen als das geeignetste Mittel erscheint, die Störungen mit der grössten Schärfe zu bestimmen.

Eine verhältnissmässig kurze Ableitung der diesbezüglichen Formeln lässt sich auf die bereits vorhandenen Entwickelungen gründen, und ich werde hierzu die Formeln heranziehen, die oben beim Uebergange auf die osculirenden Elemente entwickelt wurden; man kann dieselben nämlich sofort für das vorliegende Problem verwerthen, wenn man die Störungen in den Coordinaten selbst der Null gleich setzt, die Geschwindigkeiten aber den störenden Kräften entsprechend abändert, und nur die ersten Potenzen der Störungen mitnimmt, da man es thatsächlich nur mit differentiellen Aenderungen zu thun hat.

Als störende Kräfte sollen eingeführt werden: die Störung im Radiusvector R_0, positiv gezählt, wenn der Radius vector vergrössert wird; die Störung senkrecht auf denselben in der Bahnebene S_0, positiv in der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers und endlich die auf der Bahnebene senkrechte Störungscomponente W_0. Die positive Richtung der Zählung für die letzte Coordinate ist dadurch bestimmt, dass, vom Pol der positiven Z-Achse gesehen, sich der Himmelskörper im umgekehrten Sinne wie der Zeiger einer Uhr bewegt. Es soll vorerst vorausgesetzt werden, dass die Kraftcomponenten berechnet vorliegen; wie dieselben bestimmt werden, wird im folgenden Paragraphen erläutert werden.

Um zunächst den Einfluss der Störungen auf die Lage der Bahnebene zu bestimmen, nehmen wir die Gleichungen 15 (pag. 166) vor; mit Rücksicht darauf, dass die Störungen in den Coordinaten selbst der Null gleich gesetzt, die Geschwindigkeiten aber um den Betrag der angreifenden Kräfte vermehrt, und dass die Glieder zweiter Ordnung weggelassen werden müssen, nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \sin(l - K_0)\tan J &= 0 \\ \cos(l - K_0)\tan J &= \frac{r\dfrac{dz}{dt}}{k\sqrt{p}} = \frac{r W_0}{k\sqrt{p}}\,; \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

es ist l in diesem Falle mit dem Argumente der Breite u identisch, denn es berechnet sich l aus:

$$l = V + \omega_0 + \Delta\omega\ ;$$

da aber die Elemente osculiren, so ist V identisch mit v und $\Delta\omega$ ist der Null gleich, wodurch:

$$l = u$$

wird; hieraus erschliesst man sofort mit Rücksicht auf die erste Relation in 1). (pag. 213), dass auch

$$K_0 = u$$

ist, welche Relation übrigens sofort aus der geometrischen Anschauung klar wird. Mit Rücksicht auf diesen Umstand ist also, wenn man wieder den Bogen mit der Tangente vertauscht:

$$J = \frac{r W_0}{k \sqrt{p}}\ . \qquad 2)$$

Man erhält daher statt der Formeln 21) (pag. 168) sofort:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\delta K + \tfrac{1}{2}\delta\Omega &= \tfrac{1}{2} J \operatorname{tang}\tfrac{1}{2} i \sin u \\ \tfrac{1}{2}\delta K - \tfrac{1}{2}\delta\Omega &= -\tfrac{1}{2} J \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2} i \sin u\ , \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

wobei ich von nun an die Variationen der Elemente durch die Störungen, soweit dieselben von der Ordnung differentieller Grössen sind, durch ein vorgesetztes δ von den Differentiationen unterscheide; es wird also aus 3) erhalten:

$$\delta\Omega = \frac{J \sin u}{\sin i} = \left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right)\frac{r \sin u}{\sin i} \qquad 4)$$

$$\delta K = -J \operatorname{cotg} i \sin u = -\left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right) r \operatorname{cotg} i \sin u\ . \qquad 5)$$

und aus der Gleichung 24) (pag. 168) folgt sofort:

$$\delta i = J \cos u = \left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right) r \cos u\ . \qquad 6)$$

Die erste Gleichung in 13) (pag. 166) gibt, da $\cos J$ der Einheit gleich gesetzt werden kann:

$$k\sqrt{p} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\ ;$$

legt man die X-Achse, wie es von nun ab vorausgesetzt werden soll, in den Radiusvector, so wird:

$$x = r\ , \quad y = 0$$

und nothwendig:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + S_0\ ,$$

wenn durch $\frac{dy_0}{dt}$ die ungestörte Geschwindigkeit in der Y-Coordinate dargestellt wird; nun ist aber wegen:

$$\frac{dy_0}{r_0} = dv$$

auch:

$$r_0 \frac{d\varphi_0}{dt} = k \sqrt{p_0}$$

und man hat also, da r_0 mit r identificirt werden muss:

$$k\, \delta \sqrt{p} = r S_0$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \delta \sqrt{p} &= \frac{r S_0}{k} \\ \delta p &= \frac{2\, r\, S_0}{k} \sqrt{p}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Beim Uebergange auf osculirende Elemente wurden auf pag. 89 die Gleichungen gefunden:

$$e \sin v = e_0 \sin v_0 + \frac{1}{k} \left\{ \frac{dr_0}{dt} \Delta \sqrt{p} + \sqrt{p}\, \Delta \left(\frac{dr}{dt}\right) \right\}$$

$$e \cos v = e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} \left\{ \Delta\, p - \frac{p_0}{r_0} \Delta\, r) \right\}.$$

Setzt man nun in diesen Gleichungen für die Aenderungen des Parameters die Variationen aus 7) ein und beachtet die Relationen:

$$\frac{dr}{dt} = e \sin v \frac{k}{\sqrt{p}}$$

$$\Delta \left(\frac{dr}{dt}\right) = R_0$$

$$\Delta\, (r) = 0$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} \delta\, (e \sin v) &= \sin v\, \delta e + e \cos v\, \delta v = \frac{1}{k} \left\{ \frac{e \sin v}{\sqrt{p}}\, r\, S_0 + \sqrt{p}\, R_0 \right\} \\ \delta\, (e \cos v) &= \cos v\, \delta e - e \sin v\, \delta v = \frac{2\, S_0}{k} \sqrt{p}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Bei diesen Gleichungen hat man, um späteren Missverständnissen vorzubeugen, zu beachten, dass unter δv die Variation zu verstehen ist, welche die wahre Anomalie durch die momentanen Störungen allein erleidet; es ist also δv wohl zu trennen von dem Ausdrucke $\left(\frac{dv}{dt}\right) dt$; dieser Umstand wird später nochmals ausführlich besprochen werden.

Um δe und δv aus den Gleichungen 8) zu bestimmen, hat man zunächst, wenn man statt e den Excentricitätswinkel φ einführt,

$$\delta e = \cos \varphi\, \delta \varphi$$

$$\cos \varphi\, \delta \varphi = \{e\, r \sin v^2 + 2\, p \cos v\} \left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}}\right) + p \sin v \left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}}\right);$$

ersetzt man nun r durch den Werth $\frac{p}{1 + e \cos v}$, so findet sich leicht:

$$e\, r \sin v^2 + 2\, p \cos v = p \left\{ \frac{e \sin v^2}{1 + e \cos v} + 2 \cos v \right\} = p \left\{ \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} + \frac{\cos v + e \cos v^2}{1 + e \cos v} \right\} =$$

$$= p \{\cos v + \cos E\},$$

und man hat, wenn man p durch $a\cos\varphi^2$ ersetzt, sofort:

$$\delta\varphi = a\cos\varphi\,\{\cos v + \cos E\}\left(\frac{S_0}{k\sqrt{p}}\right) + a\cos\varphi\,\sin v\left(\frac{R_0}{k\sqrt{p}}\right). \qquad 9)$$

Weiter folgt aus 8) (pag. 215):

$$e\,\delta v = \sin v\,\{e\,r\cos v - 2p\}\left(\frac{S_0}{k\sqrt{p}}\right) + p\cos v\left(\frac{R_0}{k\sqrt{p}}\right);$$

nun ist aber:

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1$$

wodurch erhalten wird:

$$\delta v = -\frac{\sin v}{\sin\varphi}\,\{p + r\}\left(\frac{S_0}{k\sqrt{p}}\right) + \frac{p\cos v}{\sin\varphi}\left(\frac{R_0}{k\sqrt{p}}\right). \qquad 10)$$

Die Formel 23) pag. 168 gibt weiter die Relation:

$$\varDelta\lambda = \varDelta(K) + \varDelta(u) + \varDelta\omega + \{(V - v_0) - (v - v_0)\} + (\Omega - \Omega_0);$$

hierbei ist den gemachten Voraussetzungen und Entwickelungen nach zu setzen:

$$\begin{aligned}
\varDelta(K) &= -\,r\sin u\,\operatorname{cotg} i\left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right)\\
\varDelta(u) &= 0\\
\varDelta(\omega) &= 0\\
V - v_0 &= 0\\
v - v_0 &= \delta v\\
\Omega - \Omega_0 &= \delta\Omega = \frac{r\sin u}{\sin i}\left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right);
\end{aligned}$$

demnach wird man haben:

$$\delta\lambda = \frac{\sin v}{\sin\varphi}\,\{p + r\}\left(\frac{S_0}{k\sqrt{p}}\right) - \frac{p\cos v}{\sin\varphi}\left(\frac{R_0}{k\sqrt{p}}\right) + r\sin u\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i\left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right)\ldots \qquad 11)$$

Um die Variation der täglichen mittleren siderischen Bewegung μ zu finden, soll zuerst der in dem Ausdrucke

$$\delta\mu = -f\,q\,\mu$$

(vergl. pag. 92) auftretende Factor fq näher erörtert werden.

Wenn man beachtet, dass q von der Ordnung der Störungen ist, und dass der Factor f sich von dem numerischen Werthe 3 nur um Grössen von der Ordnung der Störungen unterscheidet, so wird man auf die hier gestellten Bedingungen sich stützend schreiben dürfen:

$$\delta\mu = -\,3\,q\,\mu, \qquad 12)$$

und es stellt sich demnach die Aufgabe, den Factor q durch die störenden Kräfte auszudrücken, wobei man q nach pag. 92 annimmt, sofort aber die Glieder zweiter Ordnung fortlässt und statt

$$\varDelta(e^2) = 2\,e\,\delta e$$

schreibt; man hat so zunächst:

$$q = \frac{\delta p + 2ae\delta e}{2p} = \frac{\delta p}{2p} + \operatorname{tang} \varphi\, \delta \varphi\,;$$

die Substitution der Variationen aus (7) und (9) gibt, wenn man beachtet, dass

$$r + a \sin \varphi \{ \cos v + \cos E \} = a (1 + \sin \varphi \cos v) = \frac{ap}{r}$$

ist, sofort:

$$q = \frac{ap}{r}\left(\frac{S_0}{k\sqrt{p}}\right) + a \sin \varphi \sin v \left(\frac{R_0}{k\sqrt{p}}\right);$$

führt man diesen Werth in (12) ein und ersetzt μ durch $\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$, so findet sich:

$$\delta \mu = -\frac{3k}{\sqrt{a}} \cdot \frac{p}{r}\left(\frac{S_0}{k\sqrt{p}}\right) - \frac{3k}{\sqrt{a}} \sin \varphi \sin v \left(\frac{R_0}{k\sqrt{p}}\right) . \qquad (13)$$

Wir haben nun noch die Störung des letzten Elementes, nämlich der mittleren Anomalie zu betrachten. Diese bedarf einer besonderen Erwägung.

Will man die ungestörte mittlere Anomalie M zur Zeit T finden, so hat man, wenn man mit M_0 die mittlere Anomalie zur Zeit T_0 darstellt:

$$(M) = M_0 + \int_{T_0}^{T} \left(\frac{dM_0}{dt}\right) dt . \qquad (14)$$

Da aber in der ungestörten Bewegung

$$\frac{dM_0}{dt} = \mu_0$$

ist, so kann die Gleichung (14) in der gewöhnlichen Form

$$(M) = M_0 + (T - T_0)\, \mu_0$$

geschrieben werden, doch bietet die erstere Schreibweise für die vorliegenden Betrachtungen wesentliche Vortheile.

Die gestörte mittlere Anomalie zur Zeit T, die mit M bezeichnet werden soll, erscheint von der Zeit in zweifacher Weise abhängig, indem dieselbe vorerst eine explicite Funktion der Zeit ist und andererseits durch die Störungen Aenderungen erfährt. Wir haben hier also Differentiationen und Variationen getrennt von einander zu halten.

Ich bezeichne daher die Zeit mit t, wenn eine gewöhnliche Differentiation nach der Zeit verstanden werden soll, und mit τ, wenn es sich um eine Variation durch die Störungen handelt; ausserdem unterscheide ich die erstere Operation von der letzteren durch die beziehungsweise vorgesetzten Operationszeichen d und δ.

Will man nun die gestörte mittlere Anomalie zur Zeit T kennen und durch die Gleichung (14) darstellen, indem man derselben durch die Variation der Constanten Genüge leistet, so wird offenbar sein:

$$M = M_0 + \Delta M_0 + \int_{T_0}^{T} \left(\frac{dM_0}{dt} + \Delta \frac{dM_0}{dt}\right) dt . \qquad (15)$$

wobei ΔM_0 die unmittelbare Variation von M_0 durch die Störungen vorstellt, $\Delta \frac{d M_0}{dt}$ jedoch der Idee des Integrales entsprechend, die Variation für die unbestimmt gelassene Zeit t bezeichnet; es ist aber leicht einzusehen, dass

$$\Delta M_0 = \int_{T_0}^{T} \left(\frac{\delta M}{d\tau}\right) d\tau$$

$$\Delta \frac{d M_0}{dt} = \int_{T_0}^{T} \left(\frac{\delta \mu}{d\tau}\right) d\tau$$

ist, man hat also statt 15) (pag. 217) zu schreiben:

$$M = M_0 + \mu_0 (T - T_0) + \int_{T_0}^{T} \left(\frac{\delta M}{d\tau}\right) d\tau + \int_{T_0}^{T} dt \int_{T_0}^{T} \left(\frac{\delta \mu}{d\tau}\right) d\tau \qquad 16)$$

Die Störung der mittleren Anomalie ΔM zerfällt also in zwei wesentlich verschiedene Theile: der erste Theil entsteht aus einer einfachen Integration der Variation des Elementes M_0, der zweite Theil beruht auf der integrirten Variation von μ nach der Zeit. Da aber in dem vorliegenden Falle die Variation und Integration nach derselben Grösse stattfinden, indem $dt = d\tau$ ist, so kann man, wenn auch in nicht ganz correcter Weise dafür das Doppelintegral (eigentlich iterirtes Integral)

$$\iint_{T_0}^{T} \left(\frac{d\mu}{dt}\right) dt^2$$

schreiben, und erhält so die allgemein übliche Schreibweise für dasselbe.

Bildet man nach 16) die Variation von $\delta \Delta M$ nach t, so erhält man sogleich:

$$\delta \Delta M = (\delta M)_T + \int_{T_0}^{T} \left(\frac{\delta \mu}{d\tau}\right) d\tau, \qquad 17)$$

wobei der dem ersten Gliede angehängte Index anzeigt, dass für δM die für den Zeitpunkt T geltende Variation einzusetzen ist, ebenso ist im zweiten Gliede die obere Grenze dem entsprechend eingeführt. Beide Bestimmungen erklären sich einfach aus der Bedeutung des Differentiales eines bestimmten Integrales. Es stellt sich nun die Aufgabe, die Variation von ΔM durch die störenden Kräfte auszudrücken, und hierbei kann man sich auf das Glied $(\delta M)_T$ allein beschränken, da die Variationen von μ durch die störenden Kräfte bereits oben entwickelt sind und daher auf die bekannte Anwendung der mechanischen Quadraturen reducirt erscheinen. Man wird übrigens diesen zweiten Theil bei der Anwendung zweckmässig nicht mit dem ersten Gliede von $\delta \Delta M$ vereinigen, sondern, um zur Kenntniss von ΔM zu gelangen, die Integration der Variation von ΔM durch eine einfache Quadratur für sich allein ausführen und nach der Integration das Doppelintegral, welches aus $\frac{\delta \mu}{d\tau}$ entsteht, nachträglich hinzufügen.

Um zur Kenntniss der Variation δM zu gelangen, bieten die vorangehenden

Entwickelungen hinreichende Anhaltspunkte, doch wird die hierfür nöthige Reduction ziemlich weitläufig.

Die Formeln 8) (pag. 91) geben mit Weglassung der Glieder zweiter Ordnung und unter Berücksichtigung der Formel 7) (pag. 215):

$$(\sigma) = \cos\varphi \cos v \,\delta v - \sin\varphi \sin v \,\delta\varphi$$
$$(\gamma) = \cos\varphi \,\delta\varphi - \sin v \,\delta v$$
$$(\lambda) = -\frac{2 r S_0}{k\sqrt{p}}$$

und es findet sich demnach:

$$\sin E = \sin E_0 - \frac{2 r S_0}{k\sqrt{p}} \sin E_0 + \frac{r}{p}\left\{\cos\varphi \cos v \,\delta v - \sin\varphi \sin v \,\delta\varphi\right\}$$
$$\cos E = \cos E_0 - \frac{2 r S_0}{k\sqrt{p}} \cos E_0 + \frac{r}{p}\left\{\cos\varphi \,\delta\varphi - \sin v \,\delta v\right\}$$

woraus sofort folgt:

$$\delta E = \frac{r}{p}\left\{(\cos\varphi \cos v \cos E + \sin v \sin E)\,\delta v - (\sin\varphi \sin v \cos E + \cos\varphi \sin E)\,\delta\varphi\right\}; \quad 18)$$

ausserdem hat man:

$$M = E - e \sin E,$$

es ist also:

$$\delta M = \frac{r}{a}\,\delta E - \sin E \cos\varphi \,\delta\varphi;$$

die Vereinigung dieses Ausdruckes mit 18) gibt:

$$\delta M = \frac{r^2}{a p}\left\{\cos\varphi \cos v \cos E + \sin v \sin E\right\}\delta v - \left\{\frac{r^2}{a p}(\sin\varphi \sin v \cos E + \cos\varphi \sin E) + \cos\varphi \sin E\right\}\delta\varphi. \quad 19)$$

Dieser Ausdruck ist einer wesentlichen Reduction fähig; vorerst soll in dieser Richtung der Coëfficient von δv vorgenommen werden.

Setzt man die bekannten Relationen

$$\cos v = \frac{a \cos E - e}{r}$$
$$\sin v = \frac{a \sin E \cos\varphi}{r}$$

ein, so wird

$$\frac{\delta M}{\delta v} = \frac{r}{p}\cos\varphi\,(1 - e\cos E) = \frac{r^2}{a^2\cos\varphi}. \quad 20)$$

Die Reduction des Ausdruckes $\frac{\delta M}{\delta\varphi}$ ergibt, wenn man $\sin v$ wie oben durch die excentrische Anomalie ersetzt, vorerst

$$\frac{\delta M}{\delta\varphi} = -\left\{\cos\varphi \sin E\left(1 + \frac{r}{p} e\cos E\right) + \frac{r^2}{a p}\cos\varphi \sin E\right\}$$
$$= -\left\{\frac{p}{r} + \frac{r}{a} + e\cos E\right\}\frac{r^2 \sin v}{p a};$$

nun ist aber bekanntlich:

$$e\cos E = 1 - \frac{r}{a}.$$

so dass schliesslich

$$\frac{\delta M}{\delta \varphi} = -\left(\frac{p+r}{r}\right)\frac{r^2 \sin v}{a^2 \cos \varphi^2} \qquad 21)$$

wird.

Es findet sich demnach die Variation von M als Funktion der Variationen δv und $\delta \varphi$ nach den obigen Formeln:

$$\delta M = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi}\,\delta v - (p+r)\,\frac{r \sin v}{a^2 \cos \varphi^2}\,\delta \varphi \qquad 22)$$

Da aber die Variationen von v und φ durch die störenden Kräfte mittelst der Formeln 9) und 10) (pag. 216) gegeben sind, so enthält die Gleichung 22) bereits die Lösung des Problemes.

Ehe ich jedoch diese Substitution ausführe, soll noch statt der Variation von M die Variation der mittleren Länge δL eingeführt werden, da bei der häufigen Anwendung dieser Methode auf die Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten diese Transformation zweckmässig erscheint. Denn bei der meist nicht allzugrossen Excentricität der Bahnen der kleinen Planeten werden, da δv nahezu gleich $-\delta\pi$ ist, die Variationen von π und M nahe gleich, erhalten aber das entgegengesetzte Vorzeichen und sind überdies meist gross, da dieselben im Nenner den Factor $\sin \varphi$ enthalten; es ist aber

$$L = M + \pi\,,$$

also:

$$\delta L = \delta M + \delta \pi\,, \qquad 23)$$

und das Element L erscheint demnach von den eben angeführten Nachtheilen befreit. Nach Gleichung 11) (pag. 216) ist:

$$\delta \pi = -\delta v + r \sin u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i \left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right);$$

es ist also auch:

$$\delta L = \left(\frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} - 1\right)\delta v - (p+r)\,\frac{r \sin v}{a^2 \cos \varphi^2}\,\delta \varphi + r \sin u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i \left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right). \qquad 24)$$

Der Coëfficient von δv lässt sich aber schreiben, wenn man für r die excentrische Anomalie einführt:

$$\frac{\delta L}{\delta v} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\varphi^2 + e^2 \cos E^2 - 2 e \cos E}{\cos \varphi}\,;$$

nun ist aber:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi = \frac{e}{\cos \frac{1}{2} \varphi}\,. \quad \cos E\,(2 - e \cos E) = \cos E\left(1 + \frac{r}{a}\right);$$

man kann daher statt 24) setzen:

$$\delta L = \frac{a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi - (a + r) \cos E}{a \cos \varphi}\, e\, \delta v - \frac{p+r}{a^2 \cos \varphi^2}\, r \sin v\, \delta \varphi + r \sin u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i \left(\frac{W_0}{k\sqrt{p}}\right). \qquad 25)$$

Substituirt man nun für δv und $\delta \varphi$ die Werthe aus den Gleichungen 9) und 10) (pag. 216), so erhält man, wenn man diejenigen Glieder zusammenzieht, die mit dem Factor $\left(\frac{R_0}{k\sqrt{p}}\right)$ multiplicirt erscheinen, den Coëfficienten von $\left(\frac{R_0}{k\sqrt{p}}\right)$

$$\frac{p \cos v}{a \cos \varphi} \left\{ a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varphi - (a+r) \cos E \right\} - \frac{r\,(p+r) \sin v^2}{a \cos \varphi} . \qquad 26)$$

Setzt man also für $a \cos E$ den Werth $(r \cos v + a\, e)$ und beachtet, dass

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi} = - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varphi \qquad 27)$$

ist, so verwandelt sich 26) in

$$- \frac{r}{a \cos \varphi} \left\{ (p+r) \sin v^2 + p \cos v (\cos v + \cos E) \right\} - p \cos v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varphi ,$$

oder:

$$- \frac{r \cos \varphi}{p} \left\{ p + r \sin v^2 + p \cos v \cos E \right\} - p \cos v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varphi .$$

Nun ist aber:

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} ;$$

es wird also der Coëfficient von $\left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}}\right)$ schliesslich:

$$- (2\, r \cos \varphi + p \cos v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varphi) . \qquad 28)$$

Der Coëfficient von $\left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}}\right)$ findet sich zunächst:

$$- \frac{(\cos v + \cos E)}{a \cos \varphi} (p + r)\, r \sin v - \frac{a \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi - (a + r) \cos E}{a \cos \varphi} (p + r) \sin v$$

oder:

$$- \frac{(p + r) \sin v}{a \cos \varphi} \left\{ r \cos v - a \cos E + a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varphi \right\} ;$$

da nun

$$r \cos v = a\, (\cos E - e)$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf 27) sofort den Coefficienten von $\left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}}\right)$ in der schliesslichen Form:

$$(p + r) \sin v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varphi . \qquad 29)$$

Für die Variation von L wird man also durch Vereinigung der Resultate der Gleichungen 25), 28), 29) anzunehmen haben:

$$\delta L = - (2\, r \cos \varphi + p \cos v \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi) \left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}}\right) + (p + r) \sin v \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi \left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}}\right) + \\ + r \sin u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \left(\frac{W_0}{k \sqrt{p}}\right) . \qquad 30)$$

und hiermit ist die gesammte für die Variation der Constanten nöthige Entwickelung beendet.

Trägt man alle Formeln übersichtlich zusammen und wählt als Zeiteinheit das bei der Störungsrechnung zu Grunde gelegte Zeitintervall w, so erhält man das

folgende Formelsystem, in welchem entsprechend der gewählten Zeiteinheit w, abkürzend

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{S_0}{(wk)\sqrt{p}} \\ R &= \frac{R_0}{(wk)\sqrt{p}} \\ W &= \frac{W_0}{(wk)\sqrt{p}} \end{aligned}\right\} \quad 31)$$

gesetzt, und ausserdem, um das Resultat der doppelten Integration für $\varDelta L$ unverändert beibehalten zu können, der Zeiteinheit w gemäss, $w\,\delta\mu$ statt $\delta\mu$ eingeführt ist:

$$\left.\begin{aligned} \delta i &= r\cos u\, W \\ \delta\Omega &= \frac{r\sin u}{\sin i}\, W \\ w\,\delta\mu &= -\frac{3(wk)}{\sqrt{a}}\sin\varphi\,\sin v\, R - \frac{3(wk)}{\sqrt{a}}\frac{p}{r}\, S \\ \delta L &= -(2r\cos\varphi + p\cos v\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\, R + (r+p)\sin v\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, S + r\sin u\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}i\, W \\ \delta\pi &= -\frac{p\cos v}{\sin\varphi}\, R + (r+p)\frac{\sin v}{\sin\varphi}\, S + r\sin u\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}i\, W \\ \delta\varphi &= a\cos\varphi\,\sin v\, R + a\cos\varphi\,(\cos v + \cos E)\, S \\ \varDelta L &= \int\frac{\delta L}{d\tau}\, d\tau + \int\!dt\!\int\frac{\delta\mu}{d\tau}\, d\tau\,. \end{aligned}\right\} \quad 32)$$

Die Ermittelung der gestörten Elemente hat daher keine Schwierigkeiten, indem die Variationen der Elemente durch einfache numerische Quadraturen erhalten werden, und die hierfür geltenden Formeln im ersten Abschnitte des vorliegenden Bandes entwickelt sind. Man wird natürlich die Anfangsconstanten der einfachen Integrale und des doppelten Integrales so zu bestimmen haben, dass die Integrale für die Zeit der Osculationsepoche verschwinden.

Die Anwendung des oben stehenden Formelsystems 32) erscheint unter Umständen unzulässig oder sehr unbequem. Nähert sich nämlich die Bahn einem Kreise, so werden die Störungen in π wegen des Nenners $\sin\varphi$ sehr gross und unendlich für eine Kreisbahn; ähnliche Verhältnisse treten auf, wenn die Neigung gegen die Ekliptik verschwindend klein wird, wegen des Nenners $\sin i$ in $\delta\Omega$; endlich werden wegen der Wahl der Elemente, deren Variationen hier bestimmt erscheinen, die obigen Formeln für die Anwendung auf Kometen, wenn deren Bahn nahezu parabolisch ist, unbrauchbar.

Wir wollen vorerst den Ausnahmefall der kleinen Neigungen vornehmen. Das erste und naheliegendste Hilfsmittel wäre darin zu suchen, dass man die Elemente i und Ω auf eine andere Fundamentalebene beziehen würde, etwa auf den Aequator; diese Transformation würde jedoch besonders bei der Ermittelung der störenden Kräfte manche Unbequemlichkeit mit sich bringen. Zweckmässiger wird es sein, in diesen Fällen anstatt i und Ω als Elemente einzuführen:

$$\Xi = \frac{\sin i \sin \Omega}{\sin 1''}$$
$$\Omega = \frac{\sin i \cos \Omega}{\sin 1''}$$

und die Variationen dieser Elemente zu bestimmen. Die Variation nach der Zeit ergibt:

$$\delta \Xi = \cos i \sin \Omega \, \delta i + \sin i \cos \Omega \, \delta \Omega$$
$$\delta \Omega = \cos i \cos \Omega \, \delta i - \sin i \sin \Omega \, \delta \Omega \, ;$$

führt man nun die Ausdrücke aus (32) ein, so findet sich:

$$\delta \Xi = r \{\sin \Omega \cos u \cos i + \cos \Omega \sin u\} \, W$$
$$\delta \Omega = r \{\cos \Omega \cos u \cos i - \sin \Omega \sin u\} \, W \, .$$

In den Fällen nun, in denen diese Formeln in Anwendung kommen, wird i stets sehr klein sein; man erhält daher die folgende für die Rechnung bequeme Form, wenn man beachtet, dass $u = v + \pi - \Omega$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \delta \Xi &= r \sin (v + \pi) \, W - 2 r \sin \tfrac{1}{2} i^2 \sin \Omega \cos u \, W \\ \delta \Omega &= r \cos (v + \pi) \, W - 2 r \sin \tfrac{1}{2} i^2 \cos \Omega \cos u \, W \, . \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

wobei man wohl das zweite Glied meist wird weglassen, oder sich auf dessen Berücksichtigung nur bei bedeutenden Störungen wird beschränken können.

Ebenso wird man sich im Falle sehr nahe kreisförmiger Bahnen zu behelfen in der Lage sein. Setzt man:

$$\Phi = \frac{\sin \varphi \sin \pi}{\sin 1''}$$
$$\Psi = \frac{\sin \varphi \cos \pi}{\sin 1''} \, ,$$

so erhält man wieder durch die Variation nach der Zeit leicht:

$$\delta \Phi = \sin \varphi \cos \pi \, \delta \pi + \sin \pi \cos \varphi \, \delta \varphi$$
$$\delta \Psi = - \sin \varphi \sin \pi \, \delta \pi + \cos \pi \cos \varphi \, \delta \varphi \, .$$

Die Substitution aus (32) lässt daher finden:

$$\begin{aligned} \delta \Phi = &- p \cos (v + \pi) \, R + \{(r + p) \sin v \cos \pi + p (\cos v + \cos E) \sin \pi\} \, S \\ &+ \sin \varphi \cos \pi \, r \sin u \tang \tfrac{1}{2} i \, W \\ \delta \Psi = &\;\; p \sin (v + \pi) \, R + \{- (r + p) \sin v \sin \pi + p (\cos v + \cos E) \cos \pi\} \, S \\ &- \sin \varphi \sin \pi \, r \sin u \tang \tfrac{1}{2} i \, W \, . \end{aligned}$$

oder wenn man beachtet, dass

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} = (\cos v + e) \frac{r}{p}$$

ist, auch:

$$\left.\begin{aligned} \delta \Phi = &- p \cos (v + \pi) \, R + \{(p + r) \sin (v + \pi) + r \Phi \sin 1''\} \, S + \\ &+ r \sin u \, (\tang \tfrac{1}{2} i \, \Psi \sin 1'') \, W \\ \delta \Psi = &\;\; p \sin (v + \pi) \, R + \{(p + r) \cos (v + \pi) + r \Psi \sin 1''\} \, S - \\ &- r \sin u \, (\tang \tfrac{1}{2} i \, \Phi \sin 1'') \, W \, . \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Die durch die Formeln 33) und 34) eingeführten Variationen der Elemente können in der That praktische Bedeutung erlangen, wiewohl die unten angegebene Methode der Anwendung der Formeln 32) derartig beschaffen ist, dass wohl kaum je die Nothwendigkeit eintreten wird, von diesen Abänderungen Gebrauch zu machen.

So einfach die Sache vorstehend sich gestaltet hat, um für sehr nahe kreisförmige Bahnen und für sehr geringe Neigungen die obigen Formeln in geeignete Ausdrücke umzugestalten, um so schwieriger wird das Problem, wenn es sich um nahezu parabolische Bahnen handelt, und man wird sich hierbei leicht überzeugen können, dass die Variation der Constanten in Folge der Discontinuität des Elementes a für parabolische Bahnen überhaupt nicht mit Vortheil angewendet werden kann und gerade hier die früher zum Vortrag gebrachten Methoden, die die Variation der Coordinaten ermitteln, den Vorzug verdienen. Ich will aber doch hier zeigen, wie man den Nachtheil, so weit als thunlich, beheben kann.

Führt man statt der Störung der mittleren Länge die Störung der Perihelzeit T, und statt der Störung der mittleren täglichen siderischen Bewegung die Störung der Periheldistanz q ein, so erhält man die Störungen in den Elementen ausgedrückt, die sonst bei nahezu parabolischen Bahnen angewendet werden.

Bildet man zuerst die Variation von M, so ist zunächst:

$$M = L - \pi$$
$$\delta M = \delta L - \delta \pi$$

und die Verbindung der entsprechenden Ausdrücke in 32) (pag. 222) ergibt:

$$\delta M = \{-2r \cos \varphi + p \cos v \operatorname{cotg} \varphi\} R - (r+p) \sin v \operatorname{cotg} \varphi S \qquad 35)$$

da

$$\operatorname{cosec} \varphi - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varphi = \operatorname{cotg} \varphi$$

ist. Der hier für δM gefundene Ausdruck enthält die vollständige Variation von M nach τ; denn variirt man den Ausdruck 16) (pag. 218) nach der Zeit τ, so sieht man sofort, dass das von der Zeit t abhängige Doppelintegral verschwindet; nun ist aber:

$$M = (t - T) \mu$$

oder:

$$T = t - \frac{M}{\mu}$$

also, wenn man nach τ variirt:

$$\delta T = -\frac{\delta M}{\mu} + \frac{M}{\mu^2} \delta \mu = -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} \delta M + \frac{t-T}{\mu} \delta \mu \,.$$

Substituirt man nun die Variationen von M und μ nach den Gleichungen 35) und 32), so erhält man nach einigen leichten Reductionen und Einführung der Grösse e statt $\sin \varphi$:

$$\left.\begin{aligned} \delta T = {} & \frac{a\sqrt{p}}{k} \left\{ 2r - \frac{p \cos v}{e} - \frac{3k(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right\} R \\ & + \frac{a\sqrt{p}}{k} \left\{ \frac{(r+p)}{e} \sin v - \frac{3k(t-T)}{r} \sqrt{p} \right\} S \,. \end{aligned}\right\} \qquad 36)$$

Zur Ermittelung der Variation von q hat man, ausgehend von den Gleichungen:

$$q = \frac{p}{1+e} = a\,(1-e)\;. \qquad \mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\delta q = (1-e)\,\delta a - a\,\delta e = -\tfrac{2}{3}\,(1-e)\,\frac{a^{\frac{5}{2}}}{k}\,\delta\mu - a\cos\varphi\,\delta\varphi\;.$$

In diesem Ausdrucke nun hat man die Variationen von μ und φ aus 32) (pag. 222) einzuführen, durch deren Substitution man zunächst findet:

$$\delta q = \{2\sin\varphi\,(1-\sin\varphi) - \cos\varphi^2\}\,a^2\sin v\,R + \Big\{2\,(1-e)\,\frac{p}{r} -$$
$$- \cos\varphi^2\,(\cos v + \cos E)\Big\}\,a^2 S\;;$$

berücksichtigt man die Relationen:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v$$

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v}\;.$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\delta q = -\,q^2\sin v\,R + \frac{q^2}{1+e\cos v}\,\Big\{2\,(1-\cos v) + e\sin v^2\Big\}\,S$$

oder schliesslich:

$$\delta q = -\,q^2\sin v\,R + \frac{4\,q\,r\sin\frac{1}{2}v^2}{1+e}\,\Big\{1 + e\cos\tfrac{1}{2}v^2\Big\}\,S\;. \qquad 37)$$

Die Berechnung des Ausdruckes 37) bietet keine Schwierigkeit, anders jedoch verhält es sich mit dem Ausdrucke 36); der Factor a zeigt sofort an, dass der Klammerausdruck nothwendig nahe gleich Null sein muss für nicht allzuweit vom Perihel gelegene Epochen; für die Parabel wird derselbe in der That, wie dieses eine einfache Substitution zeigt, die unbestimmte Form $0\cdot\infty$ annehmen. Dieser Nachtheil lässt sich aber leicht umgehen mit Hilfsmitteln, die später bei der Entwickelung der Differentialquotienten für nahezu parabolische Bahnen abgeleitet werden; ich weise in den folgenden Zeilen nur kurz auf dieselben hin, da, wie schon oben erwähnt, nach meiner Ansicht, die Methode der Variation der Constanten für die Ermittelung der Störungen in nahezu parabolischen Bahnen nicht sehr geeignet ist und die Methoden der Coordinatenstörungen den Vorzug verdienen. Es werden an dem angeführten Orte die Differentialquotienten von $\frac{dv}{de}$ und $\frac{dr}{de}$ in strenge und für die Rechnung bequeme Ausdrücke übergeführt. Setzt man nämlich:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v^2$$

und entlehnt mit diesem Argumente aus der Tafel XVI die Coëfficienten E_2^v, E_4^v, E_0^r und E_4^r, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{de} &= \frac{\sin v\cos\frac{1}{2}v^2}{2\,(1+e)}\,\{1 + E_2^v\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v^2 + E_4^v\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v^4\} \\ \frac{dr}{de} &= \frac{r\sin v^2}{4\,(1+e)}\,\{E_0^r + \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v^2 + E_4^r\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v^4\} \end{aligned}\right\} \qquad 38)$$

andererseits ist die ursprüngliche Form dieser Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{de} &= \left\{\left(1+\frac{p}{r}\right)\sin v - \frac{3}{2}\,\frac{k\,(t-T)}{r^2}\,(1+e)\,\sqrt{p}\right\}\frac{1}{1-e^2} \\ \frac{dr}{de} &= \left\{r - q\cos v - \frac{3}{2}\,\frac{k\,(t-T)}{\sqrt{p}}\,e\sin v\right\}\frac{1}{1-e}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

Beachtet man die Relationen:

$$a = \frac{q}{1-e}\,,\quad p = q\,(1+e)\,,\quad \frac{1+e}{2e} = 1 + \frac{1-e}{2e}$$

so wird man leicht den Ausdruck 36) (pag. 224) auf die Form bringen können:

$$\delta T = \frac{2\,q^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{1+e}}{k}\left\{\frac{dr}{de} - \frac{q\cos v}{2e}\right\}R + \frac{2\,q^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{1+e}}{k}\left\{r\,\frac{dv}{de} + \frac{(r+p)\sin v}{2e\,(1+e)}\right\}S \qquad 40)$$

welche ohne Schwierigkeit das vorgesteckte Ziel erreichen lässt, wenn man beachtet, dass die Berechnung der auftretenden Differentialquotienten nach 38) (pag. 225) leicht ausgeführt werden kann.

§ 2. Berechnung der Coordinaten und der störenden Kräfte.

Die Berechnung der störenden Kräfte kann hier ganz kurz vorgenommen werden, indem auf den § 3 bei Hansen-Tietjen's Methode (pag. 156) hingewiesen werden kann, und hier nur die geringen Abänderungen berührt werden, die durch die etwas abweichenden Vorschriften geboten sind.

Man bedarf der Kenntniss der störenden Kräfte in der Richtung des Radiusvectors, senkrecht auf diesen in der Bahnebene im Sinne der Bewegung und endlich in der auf der Bahnebene senkrechten Richtung. Legt man demnach ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Sonnenmittelpunkte liegt, so, dass die positive X-Achse mit dem Radiusvector und die XY-Ebene mit der Bahnebene zusammenfällt, und zählt die Y- und Z-Coordinaten in der bereits festgestellten Weise (vergl. pag. 213), so transformiren sich die Summen der angreifenden Kräfte nach pag. 213 in:

$$\Sigma k^2 m_1 \left\{\frac{\xi_1 - r}{\varrho^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3}\right\} = R_0$$

$$\Sigma k^2 m_1 \left\{\frac{\eta_1}{\varrho^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3}\right\} = S_0$$

$$\Sigma k^2 m_1 \left\{\frac{\zeta_1}{\varrho^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3}\right\} = W_0$$

oder wenn man:

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3} = K$$

setzt, die Relation 31) (pag. 222) berücksichtigt und w als Zeiteinheit annimmt, so erhält man:

$$R = \Sigma\,\frac{w\,k_1}{\sqrt{p}}\,m_1\left\{\xi_1 K - \frac{r}{\varrho^3}\right\} \qquad 1)$$

$$S = \Sigma \frac{(w k)}{\sqrt{p}} m_1 \eta_1 K$$
$$W = \Sigma \frac{(w k)}{\sqrt{p}} m_1 \zeta_1 K . \qquad 1)$$

Hierbei wird man k in Bogensekunden ansetzen, um die Störungen der Elemente in Bogensekunden zu erhalten. Die Werthe für $(w k'') m_1$ finden sich unter der Annahme $w = 40$ für die einzelnen Planeten in der Tafel XII aufgenommen.

Die Bestimmung der Coordinaten ξ_1, η_1 und ζ_1 unterliegt keinen Schwierigkeiten. Sind nämlich die heliocentrischen Längen λ_0' und Breiten β_0' (vergl. pag. 82) des störenden Himmelskörpers bezogen auf das gewählte fixe Aequinoctium gegeben, so hat man, wenn man die Formeln 2), 3) und 4) pag. 157 vergleicht, zu rechnen:

$$\begin{aligned}
q \sin Q &= \sin \beta_0' \\
q \cos Q &= \cos \beta_0' \sin (\lambda_0' - \Omega) \\
\cos B_1 \cos L_1 &= \cos \beta_0' \cos (\lambda_0' - \Omega) \\
\cos B_1 \sin L_1 &= q \cos (Q - i_0) \\
\sin B_1 &= q \sin (Q - i_0) \quad . \\
\xi_1 - r = \varrho \cos \vartheta \cos \Theta &= r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) - r \\
\eta_1 = \varrho \cos \vartheta \sin \Theta &= r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\
\zeta_1 = \varrho \sin \vartheta \qquad &= r_1 \sin B_1 ,
\end{aligned}$$

wobei offenbar:

$$l = v + \omega$$

sein wird (vergl. IVb pag. 144).

Mit Hilfe dieser Formeln ist es leicht mit strenger Berücksichtigung des Ortes des störenden Planeten die störenden Kräfte zu ermitteln. Die zweite früher angegebene Form (pag. 158 ff. mit Hilfe der Grösse B_0 die Coordinaten des störenden Planeten zu berechnen, bietet in dem vorliegenden Falle keinen Vortheil, weil wegen der Veränderlichkeit der Grössen i und Ω die Berechnung der Grössen Φ, Ψ und J von Fall zu Fall vorgenommen werden müsste.

Indem die Zusammenstellung der Formeln auf den nächstfolgenden Paragraphen verwiesen wird, in welchem dieselben an der Hand eines Beispieles erläutert werden sollen, mögen hier noch einige Bemerkungen eingeschaltet werden.

Man wird die Rechnung nach den obigen Formeln für jeden der störenden Planeten durchzuführen haben; dann kann man entweder die Summen der Kräfte für dieselben Coordinaten bilden und mit diesen Summen nach den Formeln 32) (pag. 222) die Variationen der Elemente bilden, oder, man bildet für jeden einzelnen Planeten, ohne die Summirung auszuführen, die Variationen der Elemente, und summirt erst die letzteren nachträglich. Das letztere Verfahren erfordert zwar eine gewisse Mehrarbeit, scheint aber Vortheile zu bieten, wenn man die berechneten Störungswerthe allenfalls wegen Correctionen der Planetenmassen verbessern will. Ich gebe daher dem zweiten Verfahren stets den Vorzug. In diesem Umstande, ohne erhebliche Mühe die Wirkungen der einzelnen Planeten gesondert

berechnen zu können, liegt ein grosser Vortheil der Methode der Variation der Constanten, gegenüber der Methode, die Störungen der Coordinaten zu ermitteln.

Die Störungen in den Elementen Ω, i, π und L sind von der Lage der gewählten Fundamentalebene abhängig und werden gewissen Veränderungen unterworfen sein, sobald man dieselbe ändert, also wenn das fixe Aequinoctium auf eine andere Epoche übertragen wird, welche Uebertragung nach einem Zeitraume von 10 Jahren nöthig ist, wenn man die Angaben des Berliner Jahrbuches mit der möglichsten Bequemlichkeit in Anwendung ziehen will.

An sich werden die ungestörten Elemente (Ω_0, i_0, π_0 und L_0) durch diese Aequinoctialänderung beeinflusst; diese Aenderung kann aber leicht nach den bei der Präcession entwickelten Formeln (I, 81) in Rechnung gezogen werden; dem Umstande aber, dass im Momente der Uebertragung die Elemente die Werthe Ω, i, π und L haben, welche Werthe dadurch erhalten werden, dass man zu den ungestörten Werthen die durch die Störungsrechnung ermittelten Incremente hinzufügt, würde dadurch Rechnung getragen werden können, dass man zur Berechnung des Einflusses der Präcession auf die Elemente die durch die Störungen veränderten Elemente verwendet. Ausserdem müssten bei völliger Strenge die Integrationsconstanten eine geringe Abänderung erfahren, weil die Differenzwerthe an der Uebertragungsstelle selbst Funktionen der Lage des Aequinoctiums und der Grösse der Störungen sind; doch ist der Einfluss dieser Correction, wie dieses eine einfache Ueberlegung zeigt, so gering, dass sie selbst für die schärfsten Rechnungen ohne Bedenken übergangen werden darf; ich werde daher auf diesen Umstand weiter keine Rücksicht nehmen.

Dieses eben angedeutete Verfahren ist aber nicht ganz bequem, indem man zur Bestimmung sehr kleiner Correctionen die Differenzen verhältnissmässig grosser Zahlen verwerthen muss. Ueberdies wird gewöhnlich der Einfluss der Präcession auf die ungestörten Elemente ein für allemal durch eine einmalige scharfe Rechnung nach Potenzen der Zeit entwickelt sein; es wird daher zweckmässig erscheinen, nur jene Correctionen zu berechnen, welche durch den Einfluss der Störungen in diesen Werthen entstehen und dieselben an der Stelle der Aequinoctialänderung mit den betreffenden Differentialquotienten zu vereinigen. Differentiirt man daher die I pag. 81 gegebenen Ausdrücke nach den Elementen Ω und i, indem man nur die Glieder erster Ordnung mitnimmt und bezeichnet die Störungen zur Zeit der Aequinoctialänderung mit $\Delta\Omega$ und Δi, so erhält man sofort, wenn man $\Delta\Omega$ und Δi in Bogensekunden angesetzt nimmt:

$$\delta\Delta\Omega = \quad \operatorname{cotg} i_0 \cos(\Omega_0 - \Pi)\, \pi\, \Delta\Omega \sin 1'' - \frac{\sin(\Omega_0 - \Pi)}{\sin i_0^2}\, \pi\, \Delta i \sin 1''$$

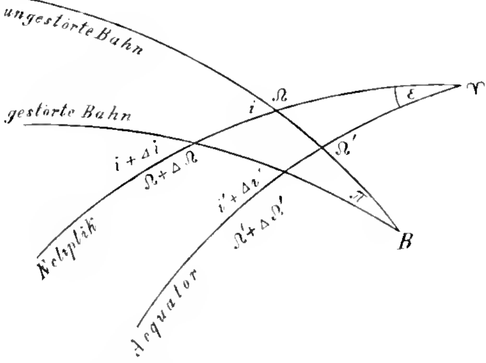
$$\delta\Delta L = \delta\Delta\pi = -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i_0 \cos(\Omega_0 - \Pi)\, \pi\, \Delta\Omega \sin 1'' - \frac{\sin(\Omega_0 - \Pi)}{2 \cos \frac{1}{2} i_0^2}\, \pi\, \Delta i \sin 1''$$

$$\delta\Delta i = \quad \sin(\Omega_0 - \Pi)\, \pi\, \Delta\Omega \sin 1'',$$

wobei die Werthe für Π und π für die entsprechende Epoche und das Intervall nach I pag. 81 anzunehmen sind.

Hierbei wäre nur noch zu bemerken, dass, wenn im Verlaufe der Rechnung

eine solche Uebertragung bereits stattgefunden hat, man von dem Resultate der zweiten Uebertragung das der ersten in Abzug bringen muss, oder man ermittelt die vorstehenden Correctionen dadurch, dass man für $\Delta☊$ und Δi die Incremente der Störungen innerhalb des Zeitintervalles zwischen der ersten und zweiten Uebertragung allein in Rechnung zieht; ähnlich wird man bei allen folgenden Uebertragungen vorzugehen haben.



Die Störungen beziehen sich der gemachten Voraussetzung nach auf die Ekliptik; es kann aber unter Umständen erwünscht sein, dieselben auf den Aequator zu übertragen. Die strenge Lösung gestaltet sich, wie folgt: Nennt man die Länge des aufsteigenden Knotens der gestörten Bahn in der ungestörten Π, die Neigung π, so wird das sphärische Dreieck $☊ B (☊ + \Delta ☊)$ haben:

die Seiten	die Winkel
$\Delta☊$	π
$180 - \Psi$	$180 - i$
$180 - \Pi$	$i + \Delta i$

wobei Ψ die Länge des absteigenden Knotens der ungestörten Bahn in der gestörten bezeichnet. Die hier auftretenden Grössen π und Π sind nicht mit den obigen gleich bezeichneten Präcessionsgrössen zu verwechseln.

Aus diesem Dreiecke ergeben sich nun die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\pi \sin\tfrac{1}{2}(\Psi + \Pi) &= \sin\tfrac{1}{2}\Delta☊ \sin(i + \tfrac{1}{2}\Delta i) \\
\sin\tfrac{1}{2}\pi \cos\tfrac{1}{2}(\Psi + \Pi) &= \cos\tfrac{1}{2}\Delta☊ \sin\tfrac{1}{2}\Delta i \\
\cos\tfrac{1}{2}\pi \sin\tfrac{1}{2}(\Pi - \Psi) &= \sin\tfrac{1}{2}\Delta☊ \cos(i + \tfrac{1}{2}\Delta i) \\
\cos\tfrac{1}{2}\pi \cos\tfrac{1}{2}(\Pi - \Psi) &= \cos\tfrac{1}{2}\Delta☊ \cos\tfrac{1}{2}\Delta i\,.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Von diesen Grössen werden in der weiteren Entwickelung die Werthe von π, Π und $\Pi - \Psi$ gebraucht; die Werthe von π und $\Pi - \Psi$ werden selbst bei Anwendung kleiner logarithmischer Tafeln mit grosser Genauigkeit erhalten werden, da beide Winkel nur von der Ordnung der Störungen sind.

Betrachtet man das sphärische Dreieck $B ☊' (☊' + \Delta ☊')$, so sind in demselben bekannt die Winkel $180 - i'$ und π, ferner die Seiten $B ☊' = 180 - \Pi - \sigma$, wobei σ den Bogen $☊☊'$ vorstellt, welcher Bogen aus der einmaligen strengen Uebertragung der ekliptikalen Elemente in die äquatorealen (I pag. 9) bekannt ist; zu ermitteln sind $\Delta☊'$, $\Delta i'$ und $\Delta\omega'$.

Letztere Grösse setzt sich aus mehren Correctionen zusammen; ist ϱ der Bogen $(☊ + \Delta☊)(☊' + \Delta☊')$, so ist, wenn der Index 0 für die ungestörte, der Index 1 für die gestörte Bahn angenommen wird:

$$\omega_0' = \omega_0 + \sigma$$
$$\omega_1' = \omega_1 + \varrho\;;$$

daraus folgt:

$$\Delta\omega' = \Delta\omega + \varrho - \sigma$$

und:

$$\varrho - \sigma = (\Psi + \varrho) - (\Pi + \sigma) + (\Pi - \Psi)$$

in welcher Relation $\Psi + \varrho$ vorerst unbekannt ist. Das oben erwähnte sphärische Dreieck ergibt aber:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\Psi + \varrho - \Delta\Omega') = \frac{\sin \frac{1}{2} (i' - \pi)}{\sin \frac{1}{2} (i' + \pi)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\Pi + \sigma)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\Psi + \varrho + \Delta\Omega') = \frac{\cos \frac{1}{2} (i' - \pi)}{\cos \frac{1}{2} (i' + \pi)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\Pi + \sigma) \; .$$

Die Berechnung dieser Ausdrücke würde bei der fast nothwendigen Kleinheit von π sehr beschwerlich sein. Ist aber π klein, so wird man mit Vortheil die folgende Reihe anwenden dürfen (vergl. I pag. 27 und 28). Hat man nämlich Ausdrücke von der Form:

$$\operatorname{tang} \varphi' = n \operatorname{tang} \varphi \; ,$$

so ist:

$$\varphi' - \varphi = \frac{n-1}{n+1} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4\varphi + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \sin 6\varphi + \ldots$$

Ersetzt man nun die beiden obigen Gleichungen durch diese Reihe und schreibt vorerst:

$$\left.\begin{aligned} -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i' &= a \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i' &= b \end{aligned}\right\} \quad \text{II)}$$

so wird man berechnen:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{a}{\sin 1''} \sin (\Pi + \sigma) + \frac{a^2}{2 \sin 1''} \sin 2 (\Pi + \sigma) + \frac{a^3}{3 \sin 1''} \sin 3 (\Pi + \sigma) + \ldots \\ B &= \frac{b}{\sin 1''} \sin (\Pi + \sigma) + \frac{b^2}{2 \sin 1''} \sin 2 (\Pi + \sigma) + \frac{b^3}{3 \sin 1''} \sin 3 (\Pi + \sigma) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{III)}$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\omega' &= \Delta\omega + (A + B) + (\Pi - \Psi) \\ \Delta\Omega' &= (B - A) \; . \end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

Das eben betrachtete sphärische Dreieck gibt aber auch:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Delta i' = \frac{\cos \{ \Pi + \sigma + \frac{1}{2} (A + B) \}}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \pi \; . \qquad \text{V)}$$

Die Gleichungen I), II), III), IV) und V) enthalten die strenge Auflösung des Problemes; will man aber nur die ersten Potenzen der Aenderungen mitnehmen, was meistens ausreicht, weil die bei den Planeten meist kleinen Störungen der Bahnlage nur in Betracht kommen, so werden die Ausdrücke weit einfacher und man erhält leicht aus den voranstehenden Formeln durch diese Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} \pi \sin \Pi &= \Delta\Omega \sin i \\ \pi \cos \Pi &= \Delta i \\ \Pi - \Psi &= \Delta\Omega \cos i \end{aligned}\right| \quad \text{Ia)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta\omega' &= \varDelta\omega - \frac{\pi \sin(\Pi+\sigma)}{\operatorname{tang} i'} + (\Pi - \Psi) \\
\varDelta\Omega' &= \frac{\pi \sin(\Pi+\sigma)}{\sin i'} \\
\varDelta i' &= \pi \cos(\Pi+\sigma)\ .
\end{aligned}\right\} \qquad \text{Ia)}$$

Will man den Ort eines Himmelskörpers mit den Elementen unter Berücksichtigung der Störungen vergleichen, so wird man sich erst aus den Integraltafeln die Störungen der Elemente ableiten und mit diesen gestörten Elementen den Ort des Himmelskörpers berechnen. Hierbei können die Formeln Ia), wenn die Coordinaten des Planeten sich auf den Aequator beziehen, und die Vergleichung mehrmals mit veränderten Elementen aber unveränderten Störungen vorgenommen werden muss, zur Abkürzung der Rechnung nützlich sein.

Hat man aber eine Ephemeride zu rechnen, und hat dieselbe keine allzugrosse Ausdehnung, so kann man mit den beiläufig für die Mitte der Zeit osculirenden Elementen dieselbe ableiten, ohne weiter auf Störungen Rücksicht zu nehmen; hat die Ephemeride aber eine grössere Ausdehnung und will man dieselbe strenge den Beobachtungen anschliessen, so kann man ganz zweckmässig sich für die Ermittelung dieser Störungen der Encke'schen Methode bedienen, indem man von der gewählten Osculationsepoche, die der Mitte der Zeit nahe entsprechen soll, ausgeht; es führt diese Methode in diesem Falle auf eine sehr kurze Rechnung, da man selbst für Ephemeriden, die sich auf ein halbes Jahr erstrecken, mit der Doppelintegration der directen Glieder ausreichend genaue Resultate erhält und die indirecten Glieder ganz unberücksichtigt lassen kann.

§ 3. Rechnungsbeispiel zur Variation der Constanten.

Ich werde wieder, um die voranstehenden Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, die Störungen ermitteln, welche der Planet (62) Erato durch die Anziehung der Planeten Jupiter und Saturn erleidet, und zwar innerhalb desselben Intervalles und mit Annahme derselben Elemente, die zur Ermittelung der Störungen nach den rechtwinkeligen und polaren Coordinaten gedient haben; es werden damit neue Gesichtspunkte zur Beurtheilung der verschiedenen Methoden gewonnen. Indem ich wieder betreffs der Wahl des Intervalles, des fixen Aequinoctiums etc. auf die bei der Encke'schen Methode gemachten allgemeinen Bemerkungen verweise, führe ich nochmals die der Störungsrechnung zu Grunde gelegten Elemente hier an.

(62) Erato

Epoche und Osculation 1874 Decbr. 26.0 mittlere Berliner Zeit.

mittl. Aeq. 1870,0

$L = 219^\circ\ 8'\ 6''8$

$M = 180\ 40\ 48.9$

$$\pi = 38^\circ 27' 17''9$$
$$\Omega = 125\ 42\ 39.7$$
$$i = 2\ 12\ 23.9$$
$$\varphi = 9\ 59\ 14.9$$
$$\mu = 640''89605$$
$$\log a = 0.4954793\ .$$

Das Zeitintervall w für die Störungsrechnung mit 40 Tagen annehmend, wird im Beginn der Rechnung für zwei der Osculationsepoche vorangehende und nachfolgende Orte die Variation der Elemente unter Annahme der obigen constanten Elemente auf einem Nebenblatte berechnet. Die in Betracht kommenden Zeitepochen der Rechnung sind also für diese 4 Orte:

1874 Oct. 27, Dec. 6, 1875 Jan. 15 und Febr. 24.

Die Rechnung wird ganz nach den weiter unten folgenden Vorschriften ausgeführt, nur werden jene vorbereitenden Rechnungen, die die Elemente, den Störungen entsprechend, variiren, fortgelassen; es entstehen auf diese Art Fehler zweiter Ordnung in Bezug auf die störenden Massen, welche übrigens bei der Nähe der Osculationsepoche als völlig verschwindend betrachtet werden können, umsomehr, da diese so gewonnenen Werthe erst der definitiven Rechnung zu Grunde gelegt werden, also Fehler dritter Ordnung veranlassen.

Mit diesen provisorischen Werthen der Elementenänderungen:

$$w\left(\frac{di}{dt}\right),\quad w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right),\quad w\left(\frac{dL}{dt}\right),\quad w\left(\frac{d\pi}{dt}\right),\quad w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\quad w^2\left(\frac{d\mu}{dt}\right)$$

für die obigen vier Orte bildet man für die sechs Elemente einzeln die einfach summirten Reihen und bestimmt die Anfangsconstanten so, dass die einfachen Integrale für die Osculationsepoche verschwinden; man hat hierfür (vergleiche pag. 35):

$$^{\mathrm{I}}f(a - \tfrac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a - \tfrac{1}{2}w) - \ldots$$

Für das letzte Element wird man eine Doppelintegration auszuführen haben und man wird als Anfangsconstante für die Bildung der zweiten summirten Reihe den Werth

$$^{\mathrm{II}}f(a) = \frac{1}{24}f(a-w) - \frac{17}{5760}\left\{2f^{\mathrm{II}}(a-w) + f^{\mathrm{II}}(a)\right\} + \ldots$$

annehmen (vergl. pag. 53).

Nunmehr ergeben sich die einfachen und Doppel-Integrale für die vier oben genannten Zeitepochen mit genügender Genauigkeit durch die Formeln:

$$\int^{a+iw} f(x)\,dx = {}^{\mathrm{I}}f(a+iw) - \frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a+iw)$$

$$\iint^{a+iw} f(x)\,dx^2 = {}^{\mathrm{II}}f(a+iw) + \frac{1}{12}f(a+iw)\ .$$

Indem man diese so gewonnenen Incremente zu den constanten Elementen hinzufügt, wobei zu beachten ist, dass man für die Störung der täglichen mittleren siderischen Bewegung den w-fachen Betrag (hier den 40-fachen Betrag) erhält und überdiess setzt:

$$L = L_0 + \mu_0 t + \int \left(\frac{dL}{dt}\right) dt + \iint \left(\frac{d\mu}{dt}\right) dt^2$$

erhält man die für die obigen Zeitepochen osculirenden Elemente, die nun der definitiven Rechnung zu Grunde gelegt werden, wobei eventuell schliesslich eine Neubestimmung der Anfangsconstanten der Integrale vorgenommen werden kann.

Ist die Rechnung einmal im Gange, so werden, je nachdem dieselbe nach vorwärts oder nach rückwärts fortschreitet, aus den bekannten Differenz- und Summenwerthen leicht die für das nächste Intervall geltenden Störungsgrössen ermittelt werden nach den Formeln (vergl. pag. 68):

für die Rechnung nach vorwärts:

$$\int^{a+[i+1]w} f(x)\,dx = {}'f(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + \tfrac{1}{2} f(a+iw) + \tfrac{1}{24}\Big[10 f^{\mathrm{I}}(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) +$$
$$+ 9 f^{\mathrm{II}}(a+[i-1]w) + 8 f^{\mathrm{III}}(a+[i-\tfrac{3}{2}]w) + 7 f^{\mathrm{IV}}(a+[i-2]w) + \dots\Big]$$

für die Rechnung nach rückwärts:

$$\int^{a+[i-1]w} f(x)\,dx = {}'f(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) - \tfrac{1}{2} f(a+iw) + \tfrac{1}{24}\Big[10 f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) -$$
$$- 9 f^{\mathrm{II}}(a+[i+1]w) + 8 f^{\mathrm{III}}(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) - 7 f^{\mathrm{IV}}(a+[i+2]w) + \dots\Big]$$

Die Bestimmung des Incrementes von μ entspricht hier natürlich wieder dem w-fachen Betrage.

Für das Doppelintegral hat man zunächst zu ermitteln:

für die Rechnung nach vorwärts:

$$f(a+[i+1]w) = f(a+iw) + f^{\mathrm{I}}(a+[i-\tfrac{1}{2}]w) + f^{\mathrm{II}}(a+[i-1]w) +$$
$$+ f^{\mathrm{III}}(a+[i-\tfrac{3}{2}]w) + \dots$$

für die Rechnung nach rückwärts:

$$f(a+[i-1]w) = f(a+iw) - f^{\mathrm{I}}(a+[i+\tfrac{1}{2}]w) + f^{\mathrm{II}}(a+[i+1]w) -$$
$$- f^{\mathrm{III}}(a+[i+\tfrac{3}{2}]w) + \dots$$

und hat dann mit genügender Annäherung:

$$\iint^{a+(i\pm 1)w} f(x)\,dx^2 = {}''f(a+[i\pm 1]w) + \tfrac{1}{12} f(a+[i\pm 1]w).$$

Dann ist:

$$L = L_0 + \mu_0 t + \int \left(\frac{dL}{dt}\right) dt + \iint \left(\frac{d\mu}{dt}\right) dt^2,$$

wobei man, da $L_0 + \mu_0 t$ von den Störungen unabhängig ist, die Rechnung dieser Grösse gleich im Beginne der Störungsrechnung für den ganzen Verlauf derselben erledigen kann.

Ich entlehne zur Erläuterung dieser Formeln aus dem unten folgenden ausführlichen Beispiele die Bestimmung der Störungen der Elemente für 1871 Dec. 16, wobei vorausgesetzt ist, dass die Rechnung nach rückwärts geführt werde und bis 1872 Januar 25 fortgesetzt sei. Die in Betracht kommenden völlig bekannten Summen- und Differenzwerthe, die ich der Deutlichkeit halber hier aus dem später folgenden Rechnungsschema herausschreibe und, was vollkommen genügt, auf zwei Decimalstellen abkürze, sind also:

	μ	L	π	φ	Ω	i
${}^{\text{II}}f\,(a+[i-1]\,w)$	$+\,9'52''45$	—	—	—	—	—
${}^{\text{I}}f\,(a+[i-\frac{1}{2}]\,w)$	$+\quad 5''72$	$+\,21'12''37$	$-\,51'0''45$	$-\,12'21''20$	$+\,6'8''76$	$+\,5''80$
$f\,(a+i\,w)$	$-\quad 0.23$	$-\quad 6.22$	$+\,159.20$	$+\quad 14.23$	$-\quad 0.60$	$+\,0.10$
$f^{\text{I}}\,(a+[i+\frac{1}{2}]\,w)$	$-\quad 0.92$	$-\quad 7.21$	$+\quad 30.68$	$+\quad 0.93$	$+\quad 0.39$	0.00
$f^{\text{II}}\,(a+[i+1]\,w)$	$+\quad 0.13$	$-\quad 2.14$	$-\quad 1.25$	$-\quad 0.20$	$-\quad 0.06$	$-\,0.02$
$f^{\text{III}}\,(a+[i+\frac{3}{2}]\,w)$	$+\quad 0.10$	$-\quad 0.15$	$-\quad 2.70$	$+\quad 0.24$	$-\quad 0.22$	$-\,0.01$
$f^{\text{IV}}\,(a+[i+2]\,w)$	$+\quad 0.02$	$+\quad 0.25$	$-\quad 0.42$	$+\quad 0.12$	$-\quad 0.08$	
$f^{\text{V}}\,(a+[i+\frac{5}{2}]\,w)$	$-\quad 0.02$	$+\quad 0.15$	$+\quad 0.42$			

Nach der oben angesetzten Formel findet sich für ${}_{\text{I}}f\,(a+[i-1]\,w)$ der Werth $-\,5''24$ und hiermit für 1871 Dec. 16

$$(\Delta L)_2 = \iint \left(\frac{d\mu}{dt}\right) dt^2 = +\,9'52''0\,.$$

Für die einfache Integration findet sich der Reihe nach, wenn man den Klammerausdruck

$$10\,f^{\text{I}}\,(a+[i+\tfrac{1}{2}]\,w) - 9\,f^{\text{II}}\,(a+[i+1]\,w) + 8\,f^{\text{III}}\,(a+[i+\tfrac{3}{2}]\,w) - \ldots$$

mit γ bezeichnet:

	$40\,\Delta\mu$	$(\Delta L)_1$	$\Delta\pi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\Omega$	Δi
${}_{\text{I}}f\,(a+[i-\frac{1}{2}]\,w)$	$+\,5''72$	$+\,21'12''37$	$-\,51'\,0''45$	$-\,12'21''20$	$+\,6'8''76$	$+\,5''80$
$-\frac{1}{2}f\,(a+i\,w)$	$+\,3.11$	$+\quad 3.11$	$-\,119.60$	$-\quad 7.11$	$+\quad 0.30$	$-\,0.05$
$+\frac{1}{24}\,\gamma$	$-\,0.41$	$-\quad 2.29$	$+\quad 12.58$	$+\quad 0.51$	$+\quad 0.13$	
	$+\,8''42$	$+\,21'13''2$	$-\,52'\,7''5$	$-\,12'27''8$	$+\,6'9''2$	$+\,5''8$

Hieraus folgt für $\Delta\mu$ der Werth $+\,0''210$ und ausserdem für

$$L = \left|\begin{array}{l} L_0 + \mu_0\,t = 87^0 23' 43''7 \\ +\,(\Delta L)_1 = +\,21'13''2 \\ +\,(\Delta L)_2 = +\quad 9'52''0\,; \end{array}\right.$$

demnach sind die Elemente, die man zur Berechnung der Störungen für 1871 Dec. 16 anzuwenden hat:

L	$87^0 54' 48''9$
π	$37\;35\;10.4$
φ	$9\;46\;47.1$
Ω	$125\;48\;48.9$
i	$2\;12\;20.7$
μ	$641''106$

Dieses hier auseinandergesetzte Verfahren weicht von dem sonst hierbei üblichen ab; man liess die Elemente gewöhnlich durch mehre Intervalle unverändert. Man wird sich aber, wenn man einmal an den hier vorgeschlagenen Rechnungsmechanismus gewöhnt ist, bald überzeugen, dass keine wesentliche Mehrarbeit aus dieser Modification entsteht, insbesonders, wenn man beachtet, dass man bei der älteren Methode, um sich vor constanten Fehlern zu schützen, häufig genug den Anschlussort doppelt rechnen muss. Zudem erreicht man mit der hier vorgeschlagenen Methode den Vortheil, dass man frei wird von Sprüngen im Gange der Funktionen, die sonst unvermeidlich sind und das Resultat keineswegs so wenig schädigen, als man es bisher anzunehmen gewohnt war.

Sind die bezüglichen osculirenden Elemente ermittelt, die ich auf dem Bogen, der mit (62) überschrieben ist, in die ersten sechs Zeilen aufnehme, dann kann an die Rechnung der Zerlegungscoëfficienten geschritten werden, die sich auf diesem Bogen erledigt. Die zur Ausführung dieser Rechnung nöthigen Formeln sind mit Rücksicht auf 32) (pag. 222):

$$a^{\frac{3}{2}} = \frac{k''}{\mu} \qquad \log k'' = 3.550\,007$$

$$e'' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} \qquad \log \frac{1}{\sin 1''} = 5.314\,425$$

$$M = L - \pi$$

$$E - e'' \sin E = M$$

$$r \sin v = a \cos\varphi \sin E$$

$$r \cos v = a \ (\cos E - \sin\varphi$$

$$\omega = \pi - \Omega$$

$$u = v + \omega$$

$$p = a \cos\varphi^2$$

$$\{i : W\} = r \cos u$$

$$\{\Omega : W\} = \frac{r \sin u}{\sin i}$$

$$\{\mu : R\} = -\frac{3kw}{\sqrt{a}} \sin\varphi \sin v$$

$$\{\mu : S\} = -\frac{3kw}{\sqrt{a}} \cdot \frac{p}{r}$$

w das Intervall in Tagen; unter der Annahme $w = 40$ wird: $3kw = 0.314763$

$$\{L : R\} = -p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \cos v - 2 r \cos\varphi$$

$$\{L : S\} = (p + r) \sin v \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\{L : W\} = r \sin u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i$$

$$\{\pi : R\} = -\frac{p}{\sin\varphi} \cos v$$

$$\{\pi : S\} = p + r \ \frac{\sin v}{\sin\varphi}$$

$$\{\varphi : R\} = a \cos\varphi \sin v$$

$$\{\varphi : S\} = a \cos\varphi \ (\cos v + \cos E$$

Nun beginnt die Rechnung der störenden Kräfte, und es ist jedem der in Rücksicht gezogenen störenden Planeten ein Bogen gewidmet, der als Ueberschrift das Zeichen des betreffenden Planeten trägt.

Bezeichnet

β_0' die heliocentrische Breite des störenden Planeten } bezogen auf das fixe Aequi-
λ_0' » » Länge » » » } noctium der Elemente
r_1 » » Entfernung des störenden Planeten

und ist m_1 die Masse des störenden Planeten in Einheiten der Sonnenmasse, so hat man für jeden Planeten gesondert zu rechnen:

$$q \sin Q = \sin \beta_0'$$
$$q \cos Q = \cos \beta_0' \sin (\lambda_0' - \Omega)$$
$$\cos B_1 \cos L_1 = \cos \beta_0' \cos (\lambda_0' - \Omega)$$
$$\cos B_1 \sin L_1 = q \cos (Q - i)$$
$$\sin B_1 = q \sin (Q - i)$$
$$\xi_1 = r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - u)$$
$$\eta_1 = r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - u)$$
$$\zeta_1 = r_1 \sin B_1$$

$$\varrho \cos \vartheta \cos \Theta = \xi_1 - r$$
$$\varrho \cos \vartheta \sin \Theta = \eta_1$$
$$\varrho \sin \vartheta = \zeta_1$$

$$K = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

$$R_0 = K\xi_1 - \frac{r}{\varrho^3}, \qquad R = \left(\frac{w k'' m_1}{\sqrt{p}}\right) R_0$$
$$S_0 = K\eta_1, \qquad S = \left(\frac{w k'' m_1}{\sqrt{p}}\right) S_0$$
$$W_0 = K\zeta_1, \qquad W = \left(\frac{w k'' m_1}{\sqrt{p}}\right) W_0.$$

Die Logarithmen der Werthe $w k'' m_1$ finden sich unter der Annahme $w = 40$ in der Tafel XII. Weiter ist nun:

$$\Delta i = \{ i : W \} W$$
$$\Delta \Omega = \{ \Omega : W \} W$$
$$w \Delta \mu = \{ \mu : R \} R + \{ \mu : S \} S$$
$$\Delta L_1 = \{ L : R \} R + \{ L : S \} S + \{ L : W \} W$$
$$\Delta \pi = \{ \pi : R \} R + \{ \pi : S \} S + \{ L : W \} W$$
$$\Delta \varphi = \{ \varphi : R \} R + \{ \varphi : S \} S.$$

Sind die Werthe der Differentialquotienten der Störungen für die einzelnen Planeten bekannt, so werden dieselben summirt, und die Resultate in die Inte-

grationsbogen eingetragen, welche wohl keiner näheren Erklärung bedürfen. Der Ausdruck

$$L_0 + \mu_0 t$$

wurde vor Beginn der Störungsrechnung für alle vorgelegten Intervalle an der betreffenden Stelle eingesetzt.

Schliesslich muss ich noch erwähnen, dass für die vier ersten Orte des hier ausführlich aufgenommenen Rechnungsbeispieles die Störungswerthe einer früheren auf anderen weniger genauen Elementen beruhenden Rechnung entlehnt wurden, welcher Umstand keine wesentlichen Fehler hervorbringen kann; in der That unterscheiden sich die gemachten Annahmen nicht merklich von den definitiven Störungswerthen.

Es wurden angenommen für:

	1875 Febr. 24	1875 Jan. 15	1874 Dec. 6	1874 Oct. 27
$(\Delta L)_1 + \Delta L_2$	− 30″2	− 16″7	+ 21″6	+ 1′21″4
$\Delta\mu$	+ 0″347	+ 0″110	− 0″121	− 0″308
$\Delta\pi$	+ 2′39″6	+ 51″1	− 48″9	− 2′20″1
$\Delta\varphi$	+ 1′27″3	+ 30″0	− 30″7	− 1′36″5
$\Delta\Omega$	− 52″4	− 18″4	+ 17″3	+ 1′ 0″2
Δi	+ 0″2	+ 0″1	0″0	+ 0″1

Ermittelt man mit den Ergebnissen des unten folgenden Beispieles für die Epoche 1871 Sept. 13, d. i. für jenen Zeitpunkt, für welchen bei den früher behandelten Methoden der Störungsrechnung von Encke und von Hansen-Tietjen der Uebergang auf osculirende Elemente gemacht wurde, die Werthe der Störungen, wie sie jetzt durch die Methode der Variation der Constanten erhalten werden und setzt die aus den drei verschiedenen Methoden erhaltenen Störungswerthe zur Vergleichung neben einander, so hat man:

	Encke	Hansen-Tietjen	Variation d. Const.
$L_0 - L_{00}$	+ 0°26′13″36	+ 0°26″13″33	+ 0°26′13″36
$\pi - \pi_0$	− 1° 1′ 4″12	− 1° 1′ 4″10	1° 1′ 4″08
$\Omega - \Omega_0$	+ 6′10″30	+ 6′10″24	+ 6′10″27
$i - i_0$	+ 5″41	+ 5″44	+ 5″44
$\varphi - \varphi_0$	− 12′47″91	− 12′47″93	− 12′47″94
$\mu - \mu_0$	+ 0″44353	+ 0″44366	+ 0″44367

Die Uebereinstimmung ist eine sehr befriedigende; dennoch aber zeigt sich die überwiegende Genauigkeit der Hansen-Tietjen'schen Methode gegen die Encke'sche, wenn die Störungen stark anwachsen, denn das für die künftige Uebereinstimmung wichtigste Element $\mu - \mu_0$ ist nach der letzteren Methode fast identisch

mit dem nach der Variation der Constanten sich ergebenden Werthe gefunden worden, während der aus Encke's Methode resultirende Werth schon eine kleine Abweichung zeigt. Uebrigens ist dieser Fehler nur dem Umstande zuzuschreiben, dass die Rechnung nach Encke's Methode länger fortgesetzt wurde, als es die Grösse der Störungen rathsam erscheinen lässt und man hätte früher auf osculirende Elemente übergehen müssen. Auch hierin zeigt sich ein eminenter Vortheil der Hansen-Tietjen'schen Methode, denn die Störungsrechnung liess sich nach dieser Methode für mehr als 10 Jahre, innerhalb welcher Zeit sich noch einmal die Jupiternähe ereignete, fortführen, ohne dass die Rechnung sehr beschwerlich und unsicher wurde, so dass im Allgemeinen für diese Methode wohl nur erst nach sehr langer Zeit ein Uebergang auf osculirende Elemente nöthig wird.

Ausführliches Beispiel

zur

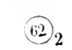
Methode der Variation

der

Constanten.

$(62)_1$

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20
μ	641"243	641"015	640"775	640"528	640"280	640"042	639"825	639"641
L	229°48'24"4	222°41'28"0	215°34'50"8	208°28'34"4	201°22'40"8	194°17'10"0	187°12' 1"8	180° 7'13"9
π	38°29'57"5	38°28' 9"0	38°26'29"0	38°24'57"8	38°23'33"3	38°22'13"7	38°20'53"6	38°19'25"1
φ	10° 0'41"2	9°59'44"9	9°58'44"2	9°57'38"4	9°56'29"8	9°55'20"0	9°54'10"6	9°53' 3"9
Ω	125°41'47"3	125°42'21"3	125°42'57"0	125°43'39"9	125°44'23"2	125°45' 7"6	125°45'51"5	125°46'33"0
i	2°12'24"1	2°12'24"0	2°12'23"9	2°12'24"0	2°12'24"1	2°12'24"5	2°12'25"0	2°12'25"7
$\frac{1}{2}i$	1° 6'12"0	1° 6'12"0	1° 6'11"9	1° 6'12"0	1° 6'12"0	1° 6'12"2	1° 6'12"5	1° 6'12"8
$\frac{1}{2}\varphi$	5° 0'20"6	4°59'52"4	4°59'22"1	4°58'49"2	4°58'14"9	4°57'40"0	4°57' 5"3	4°56'31"9
μ	2.807023	2.806868	2.806705	2.806538	2.806370	2.806208	2.806061	2.805937
$a^{\frac{3}{2}}$	0.742984	0.743139	0.743302	0.743469	0.743637	0.743799	0.743946	0.744070
$a^{\frac{1}{2}}$	0.247661	0.247713	0.247767	0.247823	0.247879	0.247933	0.247982	0.248023
a	0.495323	0.495426	0.495535	0.495646	0.495758	0.495866	0.495964	0.496047
$\cos\varphi$	9.993337	9.993357	9.993379	9.993404	9.993429	9.993455	9.993481	9.993505
$\sin\varphi$	9.240162	9.239490	9.238764	9.237976	9.237153	9.236313	9.235477	9.234672
$\log e''$	4.554587	4.553915	4.553189	4.552401	4.551578	4.550738	4.549902	4.549097
M	191°18'26"9	184°13'19"0	177° 8'21"8	170° 3'36"6	162°59' 7"5	155°54'56"3	148°51' 8"2	141°47'48"8
E	189°38'22"5	183°35'52"3	177°33'42"4	171°31'17"0	165°28' 3"2	159°23'26"7	153°16'56"8	147° 8' 3"5
$\sin E$	$9_n223885$	$8_n797636$	8.628819	9.168616	9.399549	9.546533	9.652819	9.734537
$a\cos\varphi$	0.488660	0.488783	0.488914	0.489050	0.489187	0.489321	0.489445	0.489552
$\cos E$	$9_n993824$	$9_n999143$	$9_n999606$	$9_n995227$	$9_n985878$	$9_n971277$	$9_n950965$	$9_n924251$
Subtract	0.070531	0.069638	0.069462	0.069995	0.071274	0.073386	0.076472	0.080761
$\cos E - e$	$0_n064355$	$0_n068781$	$0_n069068$	$0_n065222$	$0_n057152$	$0_n044663$	$0_n027437$	$0_n005012$
$r\sin v$	$9_n712545$	$9_n286419$	9.117733	9.657666	9.888736	0.035854	0.142264	0.224089
	$9_n995654$	$9_n999397$	$9_n999723$	$9_n996635$	$9_n990036$	$9_n979725$	$9_n965375$	$9_n946515$
$r\cos v$	$0_n559678$	$0_n564207$	$0_n564603$	$0_n560868$	$0_n552910$	$0_n540529$	$0_n523401$	$0_n501059$
v	188° 5'33"4	183° 1'10"1	177°57'11"6	172°52'36"5	167°46'26"2	162°37'41"2	157°25'24"5	152° 8'39"8
ω	272°48'10"2	272°45'47"7	272°43'32"0	272°41'17"9	272°39'10"1	272°37' 6"1	272°35' 2"1	272°32'52"1
u	100°53'43"6	95°46'57"8	90°40'43"6	85°33'54"4	80°25'36"3	75°14'47"3	70° 0'26"6	64°41'31"9
r	0.564024	0.564810	0.564880	0.564233	0.562874	0.560804	0.558026	0.554544
p	0.481997	0.482140	0.482293	0.482454	0.482616	0.482776	0.482926	0.483057
Add.	0.343977	0.344326	0.344284	0.343841	0.343010	0.341794	0.340201	0.338243
$r + p$	0.825974	0.826469	0.826577	0.826295	0.825626	0.824570	0.823127	0.821300
$\sin v$	$9_n148521$	$8_n721609$	8.552853	9.093433	9.325862	9.475050	9.584238	9.669545
$\cos v$	$9_n995654$	$9_n999397$	$9_n999723$	$9_n996635$	$9_n990036$	$9_n979725$	$9_n965375$	$9_n946515$
Add.	0.300116	0.300903	0.300971	0.300327	0.298956	0.296826	0.293885	0.290041
$\cos v + \cos E$	$0_n295770$	$0_n300300$	$0_n300694$	$0_n296962$	$0_n288992$	$0_n276551$	$0_n259260$	$0_n236556$
$\sin u$	9.992100	9.997784	9.999970	9.998698	9.993910	9.985440	9.973006	9.956180
$\cos u$	$9_n276502$	$9_n003272$	$8_n073595$	8.888326	9.220914	9.405964	9.533898	9.630917
$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}i$	8.284638	8.284638	8.284627	8.284638	8.284638	8.284660	8.284692	8.284725
$r\sin u$	0.556124	0.562594	0.564850	0.562931	0.556784	0.546244	0.531032	0.510724
$\sin i$	8.585512	8.585506	8.585501	8.585506	8.585512	8.585534	8.585561	8.585599
$-(p : \sin\varphi)$	$1_n241835$	$1_n242650$	$1_n243529$	$1_n244478$	$1_n245463$	$1_n246463$	$1_n247449$	$1_n248385$
$(p + r)\sin v$	$9_n974495$	$9_n548078$	9.379430	9.919728	0.151488	0.299620	0.407365	0.490845
$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$	8.942582	8.941767	8.941032	8.940231	8.939396	8.938544	8.937694	8.936876
$\sin\varphi\,\sin v$	$8_n388683$	$7_n961099$	7.791617	8.331409	8.563015	8.711363	8.819715	8.904217
$3kw\ \sqrt{a}$	$0_n067102$	$0_n067050$	$0_n066996$	$0_n066940$	$0_n066884$	$0_n066830$	$0_n066781$	$0_n066740$
$p : r$	9.917973	9.917330	9.917413	9.918221	9.919742	9.921972	9.924900	9.928513
$-p\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$	$9_n424579$	$9_n423907$	$9_n423325$	$9_n422685$	$9_n422012$	$9_n421320$	$9_n420620$	$9_n419933$
$-2\cos\varphi$	$0_n294367$	$0_n294387$	$0_n294409$	$0_n294434$	$0_n294459$	$0_n294485$	$0_n294511$	$0_n294535$
$-2\cos\varphi : r$	$0_n858391$	$0_n859197$	$0_n859289$	$0_n858667$	$0_n857333$	$0_n855289$	$0_n852537$	$0_n849079$
$-p\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi\cos v$	9.420233	9.423304	9.423048	9.419320	9.412048	9.401045	9.385995	9.366448
Add.	9.983869	9.983783	9.983796	9.983914	9.984137	9.984466	9.984907	9.985465
$(r : W)$	$9_n840526$	$9_n568082$	$8_n638475$	9.452559	9.783788	9.966768	0.091924	0.185461
$(\Omega : W)$	1.970612	1.977088	1.979349	1.977425	1.971272	1.960710	1.945471	1.925125
$(u : R)$	8.455785	8.028149	$7_n858613$	$8_n398349$	$8_n629899$	$8_n778193$	$8_n886496$	$8_n970957$
$(u : S)$	$9_n985075$	$9_n984380$	$9_n984409$	$9_n985161$	$9_n986626$	$9_n988802$	$9_n991681$	$9_n995253$
$(L : R)$	$0_n842260$	$0_n842980$	$0_n843085$	$0_n842581$	$0_n841470$	$0_n839755$	$0_n837444$	$0_n834544$
$(L : S)$	$8_n917077$	$8_n489845$	8.320462	8.859959	9.090884	9.238164	9.345059	9.427721
$(L : W)$	8.840762	8.847232	8.849477	8.847569	8.841422	8.830904	8.815724	8.795449
$(i : R)$	1.237489	1.242047	1.243252	1.241113	1.235499	1.226188	1.212824	1.194900
$(i : S)$	$0_n734333$	$0_n308588$	0.140666	0.681752	0.914335	1.063307	1.171888	1.256173
$(\varphi : R)$	$9_n637181$	$9_n210392$	9.041767	9.582483	9.815049	9.964371	0.073683	0.159097
$(\varphi : S)$	$0_n784430$	$0_n789083$	$0_n789608$	$0_n786012$	$0_n778179$	$0_n765872$	$0_n748705$	$0_n726108$
$\sqrt{p}$	0.240998	0.241070	0.241146	0.241227	0.241308	0.241388	0.241463	0.241528



1874			1873					
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25
639"506	639"430	639"422	639"482	639"603	639"771	639"970	640"185	640"401
173° 2'42"1	165°58'20"4	158°54' 0"5	151°49'34"9	144°44'55"0	137°39'55"3	130°34'32"4	123°28'45"1	116°22'34"5
38°17'39"0	38°15'25"8	38°12'38"6	38° 9'15"1	38° 5'19"2	38° 0'59"7	37°56'29"2	37°52' 0"8	37°47'46"2
9°52' 2"1	9°51' 7"3	9°50'20"4	9°49'41"6	9°49'10"2	9°48'44"6	9°48'23"2	9°48' 4"5	9°47'47"3
125°47'10"5	125°47'42"1	125°48' 7"2	125°48'25"2	125°48'37"1	125°48'43"6	125°48'46"8	125°48'47"8	125°48'47"8
2°12'26"5	2°12'27"3	2°12'28"0	2°12'28"7	2°12'29"3	2°12'29"7	2°12'29"9	2°12'30"0	2°12'30"0
1° 6'13"2	1° 6'13"6	1° 6'14"0	1° 6'14"3	1° 6'14"6	1° 6'14"8	1° 6'14"9	1° 6'15"0	1° 6'15"0
4°56' 1"0	4°55'33"6	4°55'10"2	4°54'50"8	4°54'35"1	4°54'22"3	4°54'11"6	4°54' 2"2	4°53'53"6
2.805845	2.805793	2.805787	2.805828	2.805910	2.806025	2.806160	2.806305	2.806452
0.744162	0.744214	0.744220	0.744179	0.744097	0.743982	0.743847	0.743702	0.743555
0.248054	0.248071	0.248073	0.248060	0.248032	0.247994	0.247949	0.247901	0.247852
0.496108	0.496143	0.496147	0.496119	0.496065	0.495988	0.495898	0.495801	0.495703
9.993527	9.993548	9.993565	9.993579	9.993591	9.993600	9.993608	9.993614	9.993621
9.233924	9.233260	9.232692	9.232221	9.231838	9.231527	9.231267	9.231039	9.230829
4.548349	4.547685	4.547117	4.546646	4.546263	4.545952	4.545692	4.545464	4.545254
134°45' 3"1	127°42'54"6	120°41'21"9	113°40'19"8	106°39'35"8	99°38'55"6	92°38' 3"2	85°36'44"3	78°34'48"3
140°56'17"1	134°41' 7"0	128°21'57"4	121°58' 8"3	115°28'51"4	108°53'15"0	102°10'24"4	95°19'25"5	88°19'29"0
9.799451	9.851857	9.894350	9.928567	9.955557	9.975962	9.990123	9.998123	9.999814
0.489635	0.489691	0.489712	0.489698	0.489656	0.489588	0.489506	0.489415	0.489324
9_n890122	9_n847086	9_n792869	9_n723833	9_n633681	9_n510157	9_n324018	8_n967470	8.465902
0.086609	0.094582	0.105616	0.121361	0.145017	0.183687	0.257126	0.188941	9.918125
9_n976731	9_n941668	9_n898485	9_n845194	9_n778698	9_n693844	9_n581144	9_n419980	9_n148954
0.289086	0.341548	0.384062	0.418265	0.445213	0.465550	0.479629	0.487538	0.489138
9_n922478	9_n892325	9_n854706	9.884570	9.918398	9.946241	9.968406	9.984931	9.995601
0_n472839	0_n437811	0_n394632	0_n341313	0_n274763	0_n189832	0_n077042	9_n915781	9_n644657
146°46'29"6	141°17'54"8	135°41'49"8	129°57' 0"9	124° 2' 3"9	117°55'26"1	111°35'26"9	105° 0'22"6	98° 8'29"4
272°30'28"5	272°27'43"7	272°24'31"4	272°20'49"9	272°16'42"1	272°12'16"1	272° 7'42"4	272° 3'13"0	271°58'58"4
59°16'58"1	53°45'38"5	48° 6'21"2	42°17'50"8	36°18'46"0	30° 7'42"2	23°43' 9"3	17° 3'35"6	10° 7'27"8
0.550361	0.545486	0.539926	0.533695	0.526815	0.519309	0.511223	0.502607	0.493537
0.483162	0.483239	0.483277	0.483277	0.483247	0.483188	0.483114	0.483029	0.482945
0.335927	0.333268	0.330277	0.326971	0.323360	0.319466	0.315312	0.310930	0.306358
0.819089	0.816507	0.813554	0.810248	0.806607	0.802654	0.798426	0.793959	0.789303
9.738725	9.796062	9.844136	9.884570	9.918398	9.946241	9.968406	9.984931	9.995601
9_n922478	9_n892325	9_n854706	9_n807618	9_n747948	9_n670523	9_n565819	9_n413174	9_n151120
0.285153	0.278999	0.271211	0.261155	0.247644	0.228207	0.196745	0.133009	9.899583
0_n207631	0_n171324	0_n125917	0_n068773	9_n995592	9_n898730	9_n762564	9_n546183	9_n050703
9.934347	9.906634	9.871795	9.828002	9.772463	9.700651	9.604502	9.467418	9.244984
9.708252	9.771704	9.824618	9.869032	9.906225	9.936967	9.961672	9.980457	9.993184
8.284769	8.284812	8.284856	8.284889	8.284922	8.284944	8.284955	8.284966	8.284966
0.484708	0.452120	0.411721	0.361697	0.299278	0.219960	0.115725	9.970025	9.738521
8.585643	8.585687	8.585725	8.585763	8.585796	8.585818	8.585829	8.585834	8.585834
1_n249238	1_n249979	1_n250585	1_n251056	1_n251409	1_n251661	1_n251847	1_n251990	1_n252116
0.557814	0.612569	0.657690	0.694818	0.725005	0.748895	0.766832	0.778890	0.784904
8.936118	8.935444	8.934867	8.934389	8.934001	8.933685	8.933421	8.933189	8.932976
8.972649	9.029322	9.076828	9.116791	9.150236	9.177768	9.199673	9.215970	9.226430
0_n066709	0_n066692	0_n066690	0_n066703	0_n066731	0_n066769	0_n066814	0_n066862	0_n066911
9.932801	9.937753	9.943351	9.949582	9.956432	9.963879	9.971891	9.980422	9.989408
9_n419280	9_n418683	9_n418144	9_n417666	9_n417248	9_n416873	9_n416535	9_n416218	9_n415921
0_n294557	0_n294578	0_n294595	0_n294609	0_n294621	0_n294630	0_n294638	0_n294644	0_n294651
0_n844918	0_n840064	0_n834521	0_n828304	0_n821436	0_n813939	0_n805861	0_n797251	0_n788188
9.341758	9.311008	9.272850	9.225284	9.165196	9.087396	8.982354	8.829392	8.567041
9.986147	9.986962	9.987918	9.989029	9.990309	9.991771	9.993430	9.995298	9.997382
0.258613	0.317190	0.364544	0.402727	0.433040	0.456276	0.472895	0.483064	0.486721
1.899065	1.866433	1.825996	1.775934	1.713482	1.634142	1.529896	1.384191	1.152687
9_n039358	9_n096014	9_n143518	9_n183494	9_n216967	9_n244537	9_n266487	9_n282832	9_n293341
9_n999510	0_n004445	0_n010041	0_n016285	0_n023163	0_n030648	0_n038705	0_n047284	0_n056319
0_n831065	0_n827026	0_n822439	0_n817333	0_n811745	0_n805710	0_n799291	0_n792549	0_n785570
9.493932	9.548013	9.592557	9.629207	9.659006	9.682580	9.700253	9.712079	9.717880
8.769477	8.736932	8.696577	8.646586	8.584200	8.504904	8.400680	8.254991	8.023487
1.171716	1.142304	1.105291	1.058674	0.999357	0.922184	0.817666	0.665164	0.403236
1.323890	1.379309	1.424998	1.462597	1.493167	1.517368	1.535565	1.547851	1.554075
0.228360	0.285753	0.333848	0.374268	0.408054	0.435829	0.457912	0.474346	0.484925
0_n697266	0_n661015	0_n615629	0_n558471	0_n485248	0_n388318	0_n252070	0_n035598	9_n540027
0.241581	0.241619	0.241638	0.241638	0.241623	0.241594	0.241557	0.241514	0.241472

(62) 3

Datum	1873 April 15	1873 März 6	1873 Jan. 25	1872 Dec. 16	1872 Nov. 6	1872 Sept. 27	1872 Aug. 18	1872 Juli 9
μ	640"607	640"796	640"963	641"106	641"225	641"320	641"391	641"441
L	109°16' 2"7	102° 9'12"6	95° 2' 7"0	87°54'48"9	80°47'21"1	73°39'45"8	66°32' 5"3	59°24'21"2
π	37°43'53"8	37°40'29"1	37°37'34"5	37°35'10"4	37°33'15"0	37°31'45"3	37°30'37"6	37°29'47"3
φ	9°47'31"0	9°47'15"5	9°47' 0"8	9°46'47"1	9°46'34"9	9°46'24"5	9°46'16"2	9°46'10"2
Ω	125°48'47"6	125°48'47"7	125°48'48"1	125°48'48"9	125°48'49"9	125°48'51"1	125°48'52"2	125°48'53"2
i	2°12'30"0	2°12'29"9	2°12'29"7	2°12'29"7	2°12'29"6	2°12'29"5	2°12'29"5	2°12'29"4
$\frac{1}{2}i$	1° 6'15"0	1° 6'14"9	1° 6'14"8	1° 6'14"8	1° 6'14"8	1° 6'14"7	1° 6'14"7	1° 6'14"7
$\frac{1}{2}\varphi$	4°53'45"5	4°53'37"7	4°53'30"4	4°53'23"5	4°53'17"4	4°53'12"2	4°53' 8"1	4°53' 5"1
μ	2.806592	2.806720	2.806833	2.806930	2.807010	2.807075	2.807123	2.807157
$a^{\frac{3}{2}}$	0.743415	0.743287	0.743174	0.743077	0.742997	0.742932	0.742884	0.742850
$a^{\frac{1}{2}}$	0.247805	0.247762	0.247725	0.247692	0.247666	0.247644	0.247628	0.247617
a	0.495610	0.495525	0.495449	0.495385	0.495331	0.495288	0.495256	0.495233
$\cos\varphi$	9.993627	9.993632	9.993638	9.993642	9.993647	9.993651	9.993654	9.993656
$\sin\varphi$	9.230630	9.230441	9.230262	9.230094	9.229945	9.229818	9.229717	9.229643
$\log e''$	4.545055	4.544866	4.544687	4.544519	4.544370	4.544243	4.544142	4.544068
M	71°32' 8"9	64°28'43"5	57°24'32"5	50°19'38"5	43°14' 6"1	36° 8' 0"5	29° 1'27"7	21°54'33"9
E	81° 9'52"3	73°50' 1"3	66°19'32"8	58°38'15"8	50°46'17"0	42°44' 0"8	34°32'14"0	26°12' 7"8
$\sin E$	9.994816	9.982478	9.961822	9.931404	9.889094	9.831608	9.753538	9.644970
$a\cos\varphi$	0.489237	0.489157	0.489087	0.489027	0.488978	0.488939	0.488910	0.488889
$\cos E$	9.186385	9.444711	9.603725	9.716377	9.801003	9.866002	9.915799	9.952909
Subtract.	9.030390	9.804708	0.134495	9.828418	9.864215	9.885865	9.899807	9.908957
$\cos E - e$	$8_n216775$	9.035149	9.364757	9.544795	9.665218	9.751867	9.815606	9.861866
$r\sin v$	0.484053	0.471635	0.450909	0.420431	0.378072	0.320547	0.242448	0.133859
	9.999938	9.997169	9.986151	9.965244	9.932077	9.883095	9.881009	9.933598
$r\cos v$	$8_n712385$	9.530674	9.860206	0.040180	0.160549	0.247155	0.310862	0.357099
v	90°58' 9"1	83°27'52"5	75°36'25"6	67°22'55"2	58°47' 1"9	49°49' 6"0	40°30'20"5	30°52'58"3
ω	271°55' 6"2	271°51'41"4	271°48'46"4	271°46'21"5	271°44'25"1	271°42'54"2	271°41'45"4	271°40'54"1
u	2°53'15"3	355°19'33"9	347°25'12"0	339° 9'16"7	330°31'27"0	321°32' 0"2	312°12' 5"9	302°33'52"4
r	0.484115	0.474466	0.464758	0.455187	0.445995	0.437452	0.429853	0.423501
p	0.482864	0.482789	0.482725	0.482669	0.482625	0.482590	0.482564	0.482545
Add.	0.301655	0.296888	0.292139	0.287507	0.283101	0.279047	0.275474	0.272511
$r+p$	0.784519	0.779677	0.774864	0.770176	0.765726	0.761637	0.758038	0.755056
$\sin v$	9.999938	9.997169	9.986151	9.965244	9.932077	9.883095	9.812595	9.710358
$\cos v$	$8_n228270$	9.056208	9.395448	9.584993	9.714554	9.809703	9.881009	9.933598
Add.	9.949329	0.148845	0.209259	0.240288	0.259953	0.273792	0.283983	0.291482
$\cos v + \cos E$	9.135714	9.593556	9.812984	9.956665	0.060956	0.139794	0.199782	0.244391
$\sin u$	8.702228	$8_n911077$	$9_n338063$	$9_n551263$	$9_n692015$	$9_n793831$	$9_n869693$	$9_n925717$
$\cos u$	9.999448	9.998553	9.989447	9.970600	9.939800	9.893745	9.827205	9.730984
$\mathrm{tg}\frac{1}{2}i$	8.284966	8.284955	8.284944	8.284944	8.284944	8.284933	8.284933	8.284933
$r\sin u$	9.186343	$9_n385543$	$9_n802821$	$0_n006450$	$0_n138010$	$0_n231283$	$0_n299546$	$0_n349218$
$\sin i$	8.585834	8.585829	8.585818	8.585818	8.585812	8.585807	8.585807	8.585802
$-(p:\sin\varphi)$	$1_n252234$	$1_n252348$	$1_n252463$	$1_n252575$	$1_n252680$	$1_n252772$	$1_n252847$	$1_n252902$
$(p+r)\sin v$	0.784457	0.776846	0.761015	0.735420	0.697803	0.644732	0.570633	0.465414
$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$	8.932775	8.932582	8.932401	8.932230	8.932079	8.931950	8.931848	8.931773
$\sin\varphi\ \sin v$	9.230568	9.227610	9.216413	9.195338	9.162022	9.112913	9.042312	8.940001
$-3kw:\sqrt{a}$	$0_n066958$	$0_n067001$	$0_n067038$	$0_n067071$	$0_n067097$	$0_n067119$	$0_n067135$	$0_n067146$
$p:r$	9.998749	0.008323	0.017967	0.027482	0.036630	0.045138	0.052711	0.059044
$-p\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$	$9_n415639$	$9_n415371$	$9_n415126$	$9_n414899$	$9_n414704$	$9_n414540$	$9_n414412$	$9_n414318$
$-2\cos\varphi$	$0_n294657$	$0_n294662$	$0_n294668$	$0_n294672$	$0_n294677$	$0_n294681$	$0_n294684$	$0_n294686$
$-2\cos\varphi\,.\,r$	$0_n778772$	$0_n769128$	$0_n759420$	$0_n749859$	$0_n740672$	$0_n732133$	$0_n724537$	$0_n718187$
$-p\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\cos v$	7.643909	$8_n471579$	$8_n810574$	$8_n999892$	$9_n129258$	$9_n224243$	$9_n295421$	$9_n347916$
Add.	9.999681	0.002183	0.004859	0.007656	0.010498	0.013281	0.015875	0.018131
$\{i.W\}$	0.483563	0.473019	0.454205	0.425787	0.385795	0.331197	0.257058	0.154485
$\{\Omega:W\}$	0.600509	$0_n799714$	$1_n217003$	$1_n420632$	$1_n552198$	$1_n645476$	$1_n713739$	$1_n763416$
$\{\mu\cdot R\}$	$9_n297526$	$9_n294611$	$9_n283451$	$9_n262409$	$9_n229119$	$9_n180032$	$9_n109447$	$9_n007147$
$\{\mu\cdot S\}$	$0_n065707$	$0_n075324$	$0_n085005$	$0_n094553$	$0_n103727$	$0_n112257$	$0_n119846$	$0_n126190$
$\{L\cdot R\}$	$0_n778453$	$0_n771311$	$0_n764285$	$0_n757515$	$0_n751170$	$0_n745414$	$0_n740412$	$0_n736318$
$\{L\cdot S\}$	9.717232	9.709428	9.693416	9.667650	9.629882	9.576682	9.502481	9.397187
$\{L\cdot W\}$	7.471309	$7_n670498$	$8_n087765$	$8_n291394$	$8_n422954$	$8_n516216$	$8_n584479$	$8_n634151$
$\{\pi\cdot R\}$	9.480504	$0_n308556$	$0_n647911$	$0_n837568$	$0_n967234$	$1_n062475$	$1_n133856$	$1_n186500$
$\{\pi:S\}$	1.553827	1.546405	1.530753	1.505326	1.467858	1.414914	1.340916	1.235771
$\{\varphi\cdot R\}$	0.489175	0.486326	0.475238	0.454271	0.421055	0.372034	0.301505	0.199247
$\{\varphi\cdot S\}$	9.624951	0.082713	0.302071	0.445692	0.549934	0.628733	0.688692	0.733280
$\mathrm{l}\,p$	0.241432	0.241394	0.241362	0.241334	0.241312	0.241295	0.241282	0.241272

1872				1871			
Mai 30	April 20	Marz 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24
641″471	641″484	641″481	641″465	641″439	641″404	641″362	641″316
52°16′35″1	45° 8′48″2	38° 1′ 1″6	30°53′16″3	23°45′32″6	16°37′51″4	9°30′13″0	2°22′37″6
37°29′10″1	37°28′41″6	37°28′17″6	37°27′54″9	37°27′30″8	37°27′ 3″4	37°26′31″6	37°25′54″9
9°46′ 6″6	9°46′ 5″2	9°46′ 6″0	9°46′ 8″7	9°46′12″8	9°46′18″0	9°46′23″9	9°46′30″1
125°48′53″7	125°48′54″0	125°48′54″0	125°48′53″6	125°48′52″8	125°48′51″8	125°48′50″6	125°48′49″3
2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″3
1° 6′14″7	1° 6′14″7	1° 6′14″7	1° 6′14″7	1° 6′14″7	1° 6′14″7	1° 6′14″7	1° 6′14″6
4°53′ 3″3	4°53′ 2″6	4°53′ 3″0	4°53′ 4″3	4°53′ 6″4	4°53′ 9″0	4°53′11″9	4°53′15″0
2.807177	2.807186	2.807184	2.807173	2.807155	2.807132	2.807103	2.807072
0.742830	0.742821	0.742823	0.742834	0.742852	0.742875	0.742904	0.742935
0.247610	0.247607	0.247608	0.247611	0.247617	0.247625	0.247635	0.247645
0.495220	0.495214	0.495215	0.495223	0.495235	0.495250	0.495269	0.495290
9.993657	9.993658	9.993658	9.993657	9.993655	9.993653	9.993651	9.993649
9.229599	9.229582	9.229592	9.229625	9.229675	9.229739	9.229811	9.229886
4.544024	4.544007	4.544017	4.544050	4.544100	4.544164	4.544236	4.544311
14°47′25″0	7°40′ 6″6	0°32′44″0	353°25′21″4	346°18′ 1″8	339°10′48″0	332° 3′41″4	324°56′42″7
17°45′16″9	9°13′38″1	0°39′25″3	352° 5′ 1″2	343°32′47″9	335° 4′59″1	326°43′31″1	318°29′57″8
9.484218	9.205070	8.059451	9_n139019	9_n452147	9_n624595	9_n739298	9_n821270
0.488877	0.488872	0.488873	0.488880	0.488890	0.488903	0.488920	0.488939
9.978806	9.994344	9.999971	9.995841	9.981842	9.957569	9.922232	9.874452
9.914791	9.918091	9.919248	9.918392	9.915430	9.910015	9.901437	9.888353
9.893597	9.912435	9.919219	9.914233	9.897272	9.867584	9.823669	9.762805
9.973095	9.693942	8.548324	9_n627899	9_n941037	0_n113498	0_n228218	0_n310209
9.970139	9.992032	9.999960	9.994142	9.974416	9.940175	9.890141	9_n873982
0.388817	0.407649	0.414434	0.409456	0.392507	0.362834	0.318938	0.258095
21° 0′16″0	10°56′30″6	0°46′47″3	350°36′36″9	340°31′32″4	330°36′42″2	320°56′28″4	311°34′14″0
271°40′16″4	271°39′47″6	271°39′23″6	271°39′ 1″3	271°38′38″0	271°38′11″6	271°37′41″0	271°37′ 5″6
292°40′32″4	282°36′18″2	272°26′10″9	262°15′38″2	252°10′10″4	242°14′53″8	232°34′ 9″4	223°11′19″6
0.418678	0.415617	0.414474	0.415314	0.418091	0.422659	0.428797	0.436227
0.482534	0.482530	0.482531	0.482537	0.482545	0.482556	0.482571	0.482588
0.270275	0.268861	0.268333	0.268717	0.269997	0.272113	0.274975	0.278468
0.752809	0.751391	0.750864	0.751254	0.752542	0.754669	0.757546	0.761056
9.554417	9.278325	8.133850	9_n212585	9_n522946	9_n690839	9_n799421	9_n873982
9.970139	9.992032	9.999960	9.994142	9.974416	9.940175	9.890141	9.821868
0.296718	0.299876	0.301024	0.300181	0.297333	0.292420	0.285281	0.275534
0.275524	0.294220	0.300995	0.296022	0.279175	0.249989	0.207513	0.149986
9_n965062	9_n989404	9_n999607	9_n996025	9_n978622	9_n946930	9_n899869	9_n835313
9.586040	9.338913	8.628489	9_n129263	9_n486006	9_n668052	9_n783762	9_n862789
8.284933	8.284933	8.284933	8.284933	8.284933	8.284933	8.284933	8.284922
0_n383740	0_n405021	0_n414081	0_n411339	0_n396713	0_n369589	0_n328666	0_n271540
8.585802	8.585802	8.585802	8.585802	8.585802	8.585802	8.585802	8.585796
1_n252935	1_n252948	1_n252939	1_n252912	1_n252870	1_n252817	1_n252760	1_n252702
0.307226	0.029716	8.884714	9_n963839	0_n275488	0_n445508	0_n556967	0_n635038
8.931729	8.931712	8.931722	8.931753	8.931806	8.931870	8.931942	8.932019
8.784016	8.507907	7.363442	8_n442210	8_n752621	8_n920578	9_n029232	9_n103868
0_n067153	0_n067156	0_n067155	0_n067152	0_n067146	0_n067138	0_n067128	0_n067118
0.063856	0.066913	0.068057	0.067223	0.064454	0.059897	0.053774	0.046361
9_n414263	9_n414242	9_n414253	9_n414290	9_n414351	9_n414426	9_n414513	9_n414607
0_n294687	0_n294688	0_n294688	0_n294687	0_n294685	0_n294683	0_n294681	0_n294679
0_n713365	0_n710305	0_n709162	0_n710001	0_n712776	0_n717342	0_n723478	0_n730906
9_n384402	9_n406274	9_n414213	9_n408432	9_n388767	9_n354601	9_n304654	9_n236475
0.019899	0.021047	0.021481	0.021164	0.020123	0.018441	0.016249	0.013693
0.004718	9.754530	9.042963	9_n544577	9_n904097	0_n090711	0_n212559	0_n299016
1_n797938	1_n819219	1_n828279	1_n825537	1_n810911	1_n783787	1_n742864	1_n685744
8_n851169	8_n575063	7_n430597	8.509362	8.819767	8.987716	9.096360	9.170986
0_n131009	0_n134069	0_n135212	0_n134375	0_n131600	0_n127035	0_n120902	0_n113479
0_n733264	0_n731352	0_n730643	0_n731165	0_n732899	0_n735783	0_n739727	0_n744599
9.238955	8.961428	7.816436	8_n895592	9_n207294	9_n377378	9_n488909	9_n567057
8_n668673	8_n689954	8_n699014	8_n696272	8_n681646	8_n654522	8_n613599	8_n556462
1_n223074	1_n244980	1_n252899	1_n247054	1_n227286	1_n192992	1_n142901	1_n074570
1.077627	0.800134	9.655122	0_n734214	1_n045813	1_n215769	1_n327156	1_n405152
0.043294	9.767197	8.622723	9_n701465	0_n011836	0_n179742	0_n288341	0_n362921
0.764401	0.783092	0.789868	0.784902	0.768065	0.738892	0.696433	0.638925
0.241267	0.241265	0.241265	0.241268	0.241272	0.241278	0.241285	0.241294

$\mathfrak{A}_1$

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20
β_0'	+1°16′24″0	+1°17′16″7	+1°17′56″4	+1°18′23″1	+1°18′36″8	+1°18′37″5	+1°18′25″0	+1°17′59″4
λ_0'	202°47′52″5	199°46′32″6	196°45′19″1	193°44′ 9″0	190°42′59″1	187°41′46″3	184°40′27″3	181°38′59″2
☊	125°41′47″3	125°42′21″3	125°42′57″0	125°43′39″9	125°44′23″2	125°45′ 7″6	125°45′51″5	125°46′33″0
λ_0' — ☊	77° 6′ 5″2	74° 4′11″3	71° 2′22″1	68° 0′29″1	64°58′35″9	61°56′38″7	58°54′35″8	55°52′26″2
sin (λ_0' — ☊)	9.988901	9.982993	9.975773	9.967190	9.957193	9.945710	9.932655	9.917928
cos β_0'	9.999893	9.999890	9.999888	9.999887	9.999886	9.999886	9.999887	9.999888
cos (λ'_0 — ☊)	9.348744	9.438488	9.511772	9.573424	9.626327	9.672405	9.712974	9.748975
sin β_0'	8.346784	8.351747	8.355449	8.357921	8.359185	8.359249	8.358097	8.355728
	9.999887	9.999881	9.999875	9.999869	9.999861	9.999854	9.999846	9.999837
cos β_0' sin(λ_0' — ☊)	9.988794	9.982883	9.975661	9.967077	9.957079	9.945596	9.932542	9.917816
Q	1°18′22″6	1°20′21″8	1°22′24″6	1°24′32″0	1°26′45″2	1°29′ 5″4	1°31′33″9	1°34′12″3
i	2°12′24″1	2°12′24″0	2°12′23″9	2°12′24″0	2°12′24″1	2°12′24″5	2°12′25″0	2°12′25″7
$Q-i$	—0°54′ 1″5	—0°52′ 2″2	—0°49′59″3	—0°47′52″0	—0°45′38″9	—0°43′19″1	—0°40′51″1	—0°38′13″4
sin ($Q-i$)	$8_n196303$	$8_n180019$	$8_n162579$	$8_n143745$	$8_n123138$	$8_n100387$	$8_n074926$	$8_n046046$
q	9.988907	9.983002	9.975786	9.967208	9.957218	9.945742	9.932696	9.917979
cos ($Q-i$)	9.999946	9.999950	9.999954	9.999958	9.999962	9.999965	9.999969	9.999973
cos B_1 sin L_1	9.988853	9.982952	9.975740	9.967166	9.957180	9.945707	9.932665	9.917952
	9.988904	9.982998	9.975782	9.967203	9.957211	9.945734	9.932687	9.917971
cos B_1 cos L_1	9.348637	9.438378	9.511660	9.573311	9.626213	9.672291	9.712861	9.748863
L_1	77° 6′11″3	74° 4′20″0	71° 2′33″6	68° 0′43″6	64°58′54″4	61°57′ 0″8	58°55′ 1″5	55°52′56″1
cos B_1	9.999949	9.999954	9.999958	9.999963	9.999969	9.999973	9.999978	9.999981
r_1	0.736575	0.736732	0.736828	0.736862	0.736835	0.736747	0.736597	0.736386
sin B_1	$8_n185210$	$8_n163021$	$8_n138365$	$8_n110953$	$8_n080356$	$8_n046129$	$8_n007622$	$7_n964025$
L_1-u	336°12′27″7	338°17′22″2	340°21′50″0	342°26′49″2	344°33′18″1	346°42′13″5	348°54′34″9	351°11′24″2
cos (L_1-u)	9.961428	9.968046	9.973980	9.979293	9.984026	9.988200	9.991813	9.994846
r_1 cos B_1	0.736524	0.736686	0.736786	0.736825	0.736804	0.736720	0.736575	0.736367
sin (L_1-u)	$9_n605760$	$9_n568104$	$9_n526398$	$9_n479414$	$9_n425392$	$9_n361702$	$9_n284106$	$9_n185138$
ξ_1	0.697952	0.704732	0.710766	0.716118	0.720830	0.724920	0.728388	0.731213
r	0.564024	0.564810	0.564880	0.564233	0.562874	0.560804	0.558026	0.554544
Subtract.	9.557770	9.579939	9.601214	9.621883	9.642120	9.662006	9.681550	9.700700
ξ_1-r	0.121794	0.144749	0.166094	0.186116	0.204994	0.222810	0.239576	0.255244
	$9_n932870$	$9_n915084$	$9_n892648$	$9_n864024$	9.869831	9.902891	9.932445	9.957705
η_1	$0_n342284$	$0_n304790$	$0_n263184$	$0_n216239$	$0_n162196$	$0_n098422$	$0_n020681$	$9_n921505$
ϱ cos ϑ	0.409414	0.389706	0.370536	0.352215	0.335163	0.319919	0.307131	0.297539
	9.999770	9.999773	9.999778	9.999788	9.999800	9.999817	9.999838	9.999861
ζ_1	$8_n921785$	$8_n899753$	$8_n875193$	$8_n847815$	$8_n817191$	$8_n782876$	$8_n744219$	$8_n700411$
ϱ^{-1}	9.590356	9.610067	9.629242	9.647573	9.664637	9.679898	9.692707	9.702322
ϱ^{-3}	8.771068	8.830201	8.887726	8.942719	8.993911	9.039694	9.078121	9.106966
r_1^{-3}	7.790275	7.789804	7.789516	7.789414	7.789495	7.789759	7.790209	7.790842
Subtract.	9.952055	9.958508	9.963901	9.968362	9.971991	9.974860	9.977022	9.978503
K	8.723123	8.788709	8.851627	8.911081	8.965902	9.014554	9.055143	9.085469
$\xi_1 K$	9.421075	9.493441	9.562393	9.627199	9.686732	9.739474	9.783531	9.816682
$r \cdot \varrho^3$	9.335092	9.395011	9.452606	9.506952	9.556785	9.600498	9.636147	9.661510
Subtract.	9.340328	9.405486	9.458817	9.503800	9.542573	9.576496	9.606441	9.632923
R_0	8.675420	8.800497	8.911423	9.010752	9.099358	9.176994	9.242588	9.294433
S_0	$9_n065407$	$9_n093499$	$9_n114811$	$9_n127320$	$9_n128098$	$9_n112976$	$9_n075824$	$9_n006974$
W_0	$7_n644908$	$7_n688462$	$7_n726820$	$7_n758896$	$7_n783093$	$7_n797430$	$7_n799362$	$7_n785880$
$w k'' m_1 \cdot \Delta p$	1.890757	1.890685	1.890609	1.890528	1.890447	1.890367	1.890292	1.890227
R	0.566177	0.691182	0.802032	0.901280	0.989805	1.067361	1.132880	1.184660
S	$0_n956164$	$0_n984184$	$1_n005420$	$1_n017848$	$1_n018545$	$1_n003343$	$0_n966116$	$0_n897201$
W	$9_n535665$	$9_n579147$	$9_n617429$	$9_n649424$	$9_n673540$	$9_n687797$	$9_n689654$	$9_n676107$
Δi	+ 0″238	+ 0″140	+ 0″018	— 0″126	— 0″287	0″451	— 0″605	— 0″727
Δ☊	— 32″083	— 35″994	— 39″516	— 42″350	— 44″138	— 44″515	— 43″164	— 39″924
$\Delta \mu_1$	+ 0″1052	+ 0″0524	— 0″0458	— 0″1994	— 0″4166	— 0″7007	— 1″0456	— 1″4309
$\Delta \mu_2$	+ 8″7345	+ 9″3017	+ 9″7685	+ 10″0695	+ 10″1198	+ 9″8208	+ 9″0740	+ 7″8065
$\Delta \mu$	+ 8″8397	+ 9″3541	+ 9″7227	+ 9″8701	+ 9″7032	+ 9″1201	+ 8″0284	+ 6″3756
ΔL_1	— 25″612	— 34″211	— 44″169	— 55″445	— 1′ 7″807	— 1′20″745	— 1′33″395	— 1′44″521
ΔL_2	+ 0″747	+ 0″298	— 0″212	— 0″755	— 1″287	— 1″744	— 2″047	— 2″113
ΔL_3	— 0″024	— 0″027	— 0″029	— 0″031	— 0″033	— 0″033	— 0″032	— 0″030
ΔL	— 24″889	— 33″940	— 44″410	— 56″231	— 1′ 9″127	— 1′22″522	— 1′35″474	— 1′46″664
$\Delta \pi_1$	+ 1′ 3″631	+ 1′25″749	+ 1′50″990	+ 2′18″801	+ 2′47″998	+ 3′16″585	+ 3′41″668	+ 3′59″641
$\Delta \pi_2$	+ 49″034	+ 19″623	— 13″999	— 50″073	— 1′25″680	— 1′56″587	— 2′17″405	— 2′22″355
$\Delta \pi$	+ 1′52″641	+ 1′45″345	+ 1′36″962	+ 1′28″697	+ 1′22″285	+ 1′19″965	+ 1′24″231	+ 1′37″256
$\Delta \varphi_1$	— 1″597	— 0″797	+ 0″698	+ 3″046	+ 6″380	+ 10″758	+ 16″090	+ 22″068
$\Delta \varphi_2$	+ 55″029	+ 59″329	+ 1′ 2″378	+ 1′ 3″659	+ 1′ 2″622	+ 58″778	+ 51″859	+ 42″006
$\Delta \varphi$	+ 53″432	+ 58″532	+ 1′ 3″076	+ 1′ 6″705	+ 1′ 9″002	+ 1′ 9″536	+ 1′ 7″949	+ 1′ 4″074

24.2

1874			1873					
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25
+1°17′20″7	+1°16′29″0	+1°15′24″6	+1°14′ 7″0	+1°12′36″6	+1°10′53″6	+1° 8′58″4	+1° 6′50″8	+1° 4′31″2
178°37′19″2	175°35′24″2	172°33′11″4	169°30′37″4	166°27′39″3	163°24′14″2	160°20′19″1	157°15′51″6	154°10′48″3
125°47′10″5	125°47′42″1	125°48′ 7″2	125°48′25″2	125°48′37″1	125°48′43″6	125°48′46″8	125°48′47″8	125°48′47″8
52°50′ 8″7	49°47′42″1	46°45′ 4″2	43°42′12″2	40°39′ 2″2	37°35′30″6	34°31′32″3	31°27′ 3″8	28°22′ 0″5
9.901408	9.882946	9.862361	9.839431	9.813877	9.785353	9.753411	9.717479	9.676798
9.999890	9.999892	9.999896	9.999899	9.999903	9.999908	9.999913	9.999918	9.999924
9.781111	9.809913	9.835797	9.859094	9.880068	9.898932	9.915860	9.930993	9.944445
8.352122	8.347257	8.341121	8.333608	8.324690	8.314301	8.302378	8.288778	8.273395
9.999827	9.999816	9.999803	9.999788	9.999772	9.999752	9.999728	9.999699	9.999662
9.901298	9.882838	9.862257	9.839330	9.813780	9.785261	9.753324	9.717397	9.676722
1°37′ 2″8	1°40′ 7″9	1°43′30″9	1°47′15″2	1°51′26″3	1°56′11″1	2° 1′39″6	2° 8′ 4″3	2°15′44″6
2°12′26″5	2°12′27″3	2°12′28″0	2°12′28″7	2°12′29″3	2°12′29″7	2°12′29″9	2°12′30″0	2°12′30″0
−0°35′23″7	−0°32′19″4	−0°28′57″1	−0°25′13″5	−0°21′ 3″0	−0°16′18″6	−0°10′50″3	−0° 4′25″7	+0° 3′14″6
8$_n$012660	7$_n$973236	7$_n$925395	7$_n$865553	7$_n$786976	7$_n$676178	7$_n$498688	7$_n$109967	6.974718
9.901471	9.883022	9.862454	9.839542	9.814008	9.785509	9.753596	9.717698	9.677060
9.999977	9.999981	9.999985	9.999988	9.999992	9.999995	9.999998	0.000000	0.000000
9.901448	9.883003	9.862439	9.839530	9.814000	9.785504	9.753594	9.717698	9.677060
9.901463	9.883014	9.862447	9.858998	9.879974	9.898841	9.915773	9.930911	9.944369
9.781001	9.809805	9.835693	9.858993	9.879971	9.898840	9.915773	9.930911	9.944369
52°50′43″0	49°48′20″7	46°45′47″4	43°42′59″8	40°39′53″7	37°36′26″4	34°32′32″2	31°28′ 7″4	28°23′ 7″6
9.999985	9.999989	9.999992	9.999995	9.999997	9.999999	0.000000	0.000000	0.000000
0.736113	0.735780	0.735387	0.734934	0.734427	0.733864	0.733246	0.732574	0.731849
7$_n$914131	7$_n$856258	7$_n$787849	7$_n$705095	7$_n$600984	7$_n$461687	7$_n$252284	6$_n$827665	6.651778
353°33′44″9	356° 2′42″2	358°39′26″2	1°25′ 9″0	4°21′ 7″7	7°28′44″2	10°49′22″9	14°24′31″8	18°15′39″8
9.997253	9.998964	9.999881	9.999867	9.998746	9.996290	9.992205	9.986120	9.977558
0.736098	0.735769	0.735379	0.734929	0.734424	0.733863	0.733246	0.732574	0.731849
9$_n$049682	8$_n$838673	8$_n$369824	8.393866	8.880163	9.114484	9.273640	9.395919	9.496026
0.733351	0.734733	0.735260	0.734796	0.733170	0.730153	0.725451	0.718694	0.709407
0.550361	0.545486	0.539926	0.533695	0.526815	0.519309	0.511223	0.502607	0.493537
9.719346	9.737300	9.754314	9.770054	9.784086	9.795855	9.804600	9.809359	9.808805
0.269707	0.282786	0.294240	0.303749	0.310901	0.315164	0.315823	0.311966	0.302342
9.977792	9.991837	9.999092	9.999032	9.991380	9.976068	9.953104	9.922394	9.883542
9$_n$785780	9$_n$574442	9$_n$105203	9.128795	9.614587	9.848347	0.006886	0.128493	0.227875
0.291915	0.290949	0.295148	0.304717	0.319521	0.339096	0.362719	0.389572	0.418800
9.999887	9.999913	9.999938	9.999959	9.999977	9.999989	9.999996	0.000000	0.000000
8$_n$650244	8$_n$592038	8$_n$523236	8$_n$440029	8$_n$335411	8$_n$195551	7$_n$985530	7$_n$560239	7.383627
9.707972	9.708964	9.704790	9.695242	9.680456	9.660893	9.637277	9.610428	9.581200
9.123916	9.126892	9.114370	9.085726	9.041368	8.982679	8.911831	8.831284	8.743600
7.791661	7.792660	7.793839	7.795198	7.796719	7.798408	7.800262	7.802278	7.804453
9.979306	9.979402	9.978726	9.977164	9.974543	9.970615	9.965040	9.957349	9.946923
9.103222	9.106294	9.093096	9.062890	9.015911	8.953294	8.876871	8.788633	8.690523
9.836573	9.841027	9.828356	9.797686	9.749081	9.683447	9.602322	9.507327	9.399930
9.674277	9.672378	9.654296	9.619421	9.568183	9.501988	9.423054	9.333891	9.237137
9.656197	9.676250	9.692848	9.705459	9.713232	9.714879	9.708432	9.690955	9.657787
9.330474	9.348628	9.347144	9.324880	9.281415	9.216867	9.131486	9.024846	8.894924
8$_n$889002	8$_n$680736	8$_n$198299	8.191685	8.630498	8.801641	8.883757	8.917126	8.918398
7$_n$753466	7$_n$698332	7$_n$616332	7$_n$502919	7$_n$351322	7$_n$148845	6$_n$862401	6$_n$348872	6.074150
1.890174	1.890136	1.890117	1.890117	1.890132	1.890161	1.890198	1.890241	1.890283
1.220648	1.238764	1.237261	1.214997	1.171547	1.107028	1.021684	0.915087	0.785207
0$_n$779176	0$_n$570872	0$_n$088416	0.081802	0.520630	0.691802	0.773955	0.807367	0.808681
9$_n$643640	9$_n$588468	9$_n$506449	9$_n$393036	9$_n$241454	9$_n$039006	8$_n$752599	8$_n$239113	7.964433
− 0″798	− 0″805	− 0″743	− 0″625	− 0″473	− 0″313	− 0″168	− 0″053	+ 0″028
− 34″890	− 28″504	− 21″500	− 14″756	− 9″014	− 4″711	− 1″916	− 0″420	+ 0″131
− 1″8197	− 2″1616	− 2″4031	− 2″5032	− 2″4463	− 2″2468	− 1″9416	− 1″5773	− 1″1983
+ 6″0074	+ 3″7611	+ 1″2545	− 1″2534	− 3″4978	− 5″2778	− 6″4962	− 7″1557	− 7″3282
+ 4″1877	+ 1″5995	− 1″1486	− 3″7566	− 5″9441	− 7″5246	− 8″4378	− 8″7330	− 8″5265
− 1′52″645	− 1′56″356	− 1′54″736	− 1′47″728	− 1′36″226	− 1′21″797	− 1′ 6″218	− 51″008	− 37″220
− 1″875	− 1″315	− 0″480	+ 0″514	+ 1″512	+ 2″368	+ 2″980	+ 3″307	+ 3″362
− 0″026	− 0″021	− 0″016	− 0″011	− 0″007	− 0″003	− 0″001	0″000	0″000
− 1′54″546	− 1′57″692	− 1′55″232	− 1′47″225	− 1′34″721	− 1′19″432	− 1′ 3″239	− 47″701	− 33″858
+ 4′ 6″811	+ 4′ 0″474	+ 3′40″065	+ 3′ 7″790	+ 2′28″219	+ 1′46″958	+ 1′ 9″080	+ 38″041	+ 15″433
− 2′ 6″784	− 1′29″162	− 32″615	+ 35″027	+ 1′43″228	+ 2′41″871	+ 3′23″948	+ 3′46″578	+ 3′50″545
+ 2′ 0″001	+ 2′31″291	+ 3′ 7″434	+ 3′42″806	+ 4′11″440	+ 4′28″826	+ 4′33″027	+ 4′24″619	+ 4′ 5″977
+ 28″120	+ 33″459	+ 37″248	+ 38″839	+ 37″984	+ 34″903	+ 30″171	+ 24″515	+ 18″627
+ 29″953	+ 17″056	+ 5″059	− 4″368	− 10″136	− 12″026	− 10″618	− 6″966	− 2″232
+ 58″073	+ 50″515	+ 42″307	+ 34″471	+ 27″848	+ 22″877	+ 19″553	+ 17″549	+ 16″395

$\mathfrak{A}_3$

Datum	1873			1872				
	April 15	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9
β_0'	+1° 2′ 0″0	+0° 59′ 17″4	+0° 56′ 23″4	+0° 53′ 18″8	+0° 50′ 3″6	+0° 46′ 38″4	+0° 43′ 3″8	+0° 39′ 20″1
λ'_0	151° 5′ 7″1	147° 58′ 45″3	144° 51′ 40″0	141° 43′ 48″6	138° 35′ 8″5	135° 25′ 37″6	132° 15′ 13″8	129° 3′ 54″8
Ω	125° 48′ 47″6	125° 48′ 47″7	125° 48′ 48″1	125° 48′ 48″9	125° 48′ 49″9	125° 48′ 51″1	125° 48′ 52″2	125° 48′ 53″2
$\sin(\lambda_0'-\Omega)$	25° 16′ 19″5	22° 9′ 57″6	19° 2′ 51″9	15° 54′ 59″7	12° 46′ 18″6	9° 36′ 46″5	6° 26′ 21″6	3° 15′ 1″6
$\cos\beta_0'$	9.630344	9.576677	9.513692	9.438127	9.344528	9.222693	9.049804	8.753587
$\cos(\lambda_0'-\Omega)$	9.999929	9.999935	9.999942	9.999948	9.999954	9.999960	9.999966	9.999972
$\cos(\lambda_0'-\Omega)$	9.956308	9.966655	9.975545	9.983022	9.989120	9.993858	9.997252	9.999301
$\sin\beta_0'$	8.256094	8.236686	8.214909	8.190545	8.163201	8.132471	8.097822	8.058495
	9.999613	9.999547	9.999452	9.999307	9.999059	9.998572	9.997308	9.991331
$\cos\beta_0'\sin(\lambda_0'-\Omega)$	9.630273	9.576612	9.513634	9.438075	9.344482	9.222653	9.049770	8.753559
Q	2° 25′ 9″4	2° 37′ 3″2	2° 52′ 39″4	3° 14′ 12″9	3° 46′ 8″0	4° 38′ 42″1	6° 22′ 24″6	11° 24′ 34″0
i	2° 12′ 30″0	2° 12′ 29″9	2° 12′ 29″7	2° 12′ 29″7	2° 12′ 29″6	2° 12′ 29″5	2° 12′ 29″5	2° 12′ 29″4
$Q-i$	0° 12′ 39″4	0° 24′ 33″3	0° 40′ 9″7	1° 1′ 43″2	1° 33′ 38″4	2° 26′ 12″6	4° 9′ 55″1	9° 12′ 4″6
$\sin(Q-i)$	7.566044	7.853862	8.067528	8.254129	8.435134	8.628572	8.861142	9.203857
q	9.630660	9.577065	9.514182	9.438768	9.345423	9.224081	9.052462	8.762228
$\cos(Q-i)$	9.999997	9.999989	9.999970	9.999930	9.999839	9.999607	9.998851	9.994376
$\cos B_1\sin L_1$	9.630657	9.577054	9.514152	9.438698	9.345262	9.223668	9.051313	8.756604
	9.956238	9.966592	9.975490	9.982975	9.989082	9.993830	9.997232	9.999291
$\cos B_1\cos L_1$	9.956237	9.966590	9.975487	9.982970	9.989074	9.993818	9.997218	9.999273
L_1	25° 17′ 30″0	22° 11′ 11″0	19° 4′ 7″9	15° 56′ 17″9	12° 47′ 38″5	9° 38′ 7″6	6° 27′ 43″4	3° 16′ 23″7
$\cos B_1$	9.999999	9.999998	9.999997	9.999995	9.999992	9.999988	9.999986	9.999982
r_1	0.731074	0.730250	0.729380	0.728465	0.727507	0.726509	0.725473	0.724406
$\sin B_1$	7.196704	7.430927	7.581710	7.692897	7.780557	7.852653	7.913604	7.966085
L_1-u	22° 24′ 14″7	26° 51′ 37″1	31° 38′ 55″9	36° 47′ 1″2	42° 16′ 11″5	48° 6′ 7″4	54° 15′ 37″5	60° 42′ 31″3
$\cos(L_1-u)$	9.965916	9.950419	9.930072	9.903579	9.869223	9.824650	9.766488	9.689531
$r_1\cos B_1$	0.731073	0.730248	0.729377	0.728460	0.727499	0.726497	0.725459	0.724388
$\sin(L_1-u)$	9.581080	9.654962	9.719921	9.777278	9.827772	9.871769	9.909385	9.940588
ξ_1	0.696989	0.680667	0.659449	0.632039	0.596722	0.551147	0.491947	0.413919
r	0.484115	0.474466	0.464758	0.455187	0.445995	0.437452	0.429853	0.423501
Subtract.	9.801115	9.783679	9.752538	9.701248	9.617948	9.476043	9.186685	8.348455
ξ_1-r	0.285230	0.258145	0.217296	0.156435	0.063943	9.913495	9.616538	$8_n762374$
	9.862530	9.903853	9.935872	9.960379	9.978500	9.990920	9.998013	9.999966
η_1	0.312153	0.385210	0.449298	0.505738	0.555271	0.598266	0.634844	0.664976
$\varrho\cos\vartheta$	0.449623	0.481357	0.513426	0.545359	0.576771	0.607346	0.636831	0.665010
	9.999998	9.999995	9.999992	9.999988	9.999984	9.999981	9.999978	9.999976
ζ_1	7.927778	8.161177	8.311090	8.421362	8.508064	8.579162	8.639077	8.690491
ϱ^{-1}	9.550375	9.518638	9.486566	9.454629	9.423213	9.392635	9.363147	9.334966
ϱ^{-3}	8.651125	8.555914	8.459698	8.363887	8.269639	8.177905	8.089441	8.004898
r_1^{-3}	7.806778	7.809250	7.811860	7.814605	7.817479	7.820473	7.823581	7.826782
Subtract	9.932928	9.914238	9.889308	9.855940	9.810868	0.106314	9.926559	9.705015
K	8.584053	8.470152	8.349006	8.219827	8.080507	7.926787	7.750140	7.531797
$\xi_1 K$	9.281042	9.150819	9.008455	8.851866	8.677229	8.477934	8.242087	7.945716
$r:\varrho^3$	9.135240	9.030380	8.924456	8.819074	8.715634	8.615357	8.519294	8.428399
Subtract	9.600918	9.504592	9.329167	8.894486	8.965950	9.570796	9.950990	9.826663
R_0	8.736158	8.534972	8.253623	7.713560	$7_n643179$	$8_n048730$	$8_n193077$	$8_n255062$
S_0	8.896206	8.855362	8.798304	8.725565	8.635778	8.525053	8.384984	8.196773
W_0	6.511831	6.631329	6.660096	6.641189	6.588571	6.505949	6.389217	6.222288
$w k'' m_1 : \sqrt{p}$	1.890323	1.890361	1.890393	1.890421	1.890443	1.890460	1.890473	1.890483
R	0.626481	0.425333	0.144016	9.603981	$9_n533622$	$9_n939190$	$0_n083550$	$0_n145545$
S	0.786529	0.745723	0.688697	0.615986	0.526221	0.415513	0.275457	0.087256
W	8.402154	8.521690	8.550489	8.531610	8.479014	8.396409	8.279690	8.112771
Δi	+ 0″077	+ 0″099	+ 0″101	+ 0″091	+ 0″073	+ 0″053	+ 0″034	+ 0″019
$\Delta\Omega$	+ 0″101	− 0″210	− 0″585	− 0″896	− 1″075	− 1″101	− 0″985	− 0″752
Δu_1	− 0″8395	− 0″5247	− 0″2676	− 0″0735	+ 0″0579	+ 0″1316	+ 0″1560	+ 0″1421
Δu_2	− 7″1160	− 6″6229	− 5″9388	− 5″1350	− 4″2653	− 3″3711	− 2″4849	− 1″6347
Δu	− 7″9555	− 7″1476	− 6″2064	− 5″2085	− 4″2074	− 3″2395	− 2″3289	− 1″4926
ΔL_1	− 25″406	− 15″727	− 8″097	− 2″299	+ 1″927	+ 4″837	+ 6″667	+ 7″618
ΔL_2	+ 3″190	+ 2″852	+ 2″411	+ 1″921	+ 1″433	+ 0″982	+ 0″600	+ 0″305
ΔL_3	0″000	0″000	0″000	− 0″001	− 0″001	− 0″001	− 0″001	− 0″001
ΔL	− 22″216	− 12″875	− 5″686	− 0″379	+ 3″359	+ 5″818	+ 7″266	+ 7″922
$\Delta\pi_1$	+ 1″279	− 5″419	− 6″193	− 2″764	+ 3″169	+ 10″038	+ 16″497	+ 21″481
$\Delta\pi_2$	+ 3′ 38″955	+ 3′ 15″942	+ 2′ 45″749	+ 2′ 12″225	+ 1′ 38″646	+ 1′ 7″675	+ 41″340	+ 21″039
$\Delta\pi$	+ 3′ 40″234	+ 3′ 10″523	+ 2′ 39″556	+ 2′ 9″460	+ 1′ 41″814	+ 1′ 17″712	+ 57″836	+ 42″519
$\Delta\varphi_1$	+ 13″051	+ 8″159	+ 4″162	+ 1″144	− 0″901	− 2″047	− 2″427	− 2″212
$\Delta\varphi_2$	+ 2″579	+ 6″737	+ 9″790	+ 11″526	+ 11″917	+ 11″073	+ 9″208	+ 6″615
$\Delta\varphi$	+ 15″630	+ 14″896	+ 13″952	+ 12″670	+ 11″016	+ 9″026	+ 6″781	+ 4″403

24

1872				1871			
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24
+0°35′28″0	+0°31′27″8	+0°27′20″5	+0°23′ 6″7	+0°18′46″7	+0°14′21″8	+0° 9′52″5	+0° 5′19″6
125°51′38″7	122°38′23″2	119°24′ 6″7	116° 8′48″0	112°52′25″3	109°34′57″4	106°16′23″0	102°56′41″4
125°48′53″7	125°48′54″0	125°48′54″0	125°48′53″6	125°48′52″8	125°48′51″8	125°48′50″6	125°48′49″3
0° 2′45″0	356°49′29″2	353°35′12″7	350°19′54″4	347° 3′32″5	343°46′ 5″6	340°27′32″4	337° 7′52″1
6.903059	8_n743429	9_n048041	9_n225161	9_n350145	9_n446419	9_n524372	9_n589529
9.999977	9.999982	9.999986	9.999990	9.999993	9.999996	9.999998	9.999999
0.000000	9.999333	9.997274	9.993787	9.988827	9.982334	9.974237	9.964447
8.013539	7.961525	7.900546	7.827554	7.737381	7.620980	7.458263	7.190181
9.998699	9_n994151	9_n998902	9_n999653	9_n999871	9_n999952	9_n999984	9_n999997
6.903036	8_n743411	9_n048027	9_n225151	9_n350138	9_n446415	9_n524370	9_n589528
85°33′59″2	170°37′ 2″1	175°55′37″4	177°42′27″3	178°36′ 9″8	179° 8′37″1	179°30′28″6	179°46′17″6
2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″4	2°12′29″3
83°21′29″8	168°24′32″7	173°43′ 8″0	175°29′57″9	176°23′40″4	176°56′ 7″7	177°17′59″2	177°33′48″3
9.997076	9.303033	9.039043	8.894700	8.798549	8.728034	8.673116	8.628528
8.014840	8.749260	9.049125	9.225498	9.350267	9.446463	9.524386	9.589531
9.063185	9_n991052	9_n997385	9_n998659	9_n999140	9_n999379	9_n999518	9_n999607
7.078025	8_n740312	9_n046510	9_n224157	9_n349407	9_n445842	9_n523904	9_n589138
0.000000	9.999342	9.997293	9.993815	9.988863	9.982379	9.974289	9.964506
9.999977	9.999315	9.997260	9.993777	9.988820	9.982330	9.974235	9.964446
0° 4′ 6″9	356°50′50″3	353°36′32″5	350°21′12″4	347° 4′48″2	343°47′18″6	340°28′42″2	337° 8′58″5
9.999977	9.999973	9.999967	9.999962	9.999957	9.999951	9.999946	9.999940
0.723308	0.722180	0.721028	0.719851	0.718657	0.717448	0.716231	0.715006
8.011916	8.052293	8.088168	8.120198	8.148816	8.174497	8.197502	8.218059
67°23′34″5	74°14′32″1	81°10′21″6	88° 5′34″2	94°54′37″8	101°32′24″8	107°54′32″8	113°57′38″9
9.584794	9.433882	9.185987	8.522185	8_n932471	9_n301151	9_n487856	9_n608646
0.723285	0.722153	0.720995	0.719813	0.718614	0.717399	0.716177	0.714946
9.965278	9.983364	9.994826	9.999759	9.998403	9.991131	9.978429	9.960862
0.308079	0.156035	9.906982	9.241998	9_n651085	0_n018550	0_n204033	0_n323592
0.418678	0.415617	0.414474	0.415314	0.418091	0.422659	0.428797	0.436227
9.462439	9.912727	9.838333	9.969838	0.068556	0.144374	0.203029	0.248354
9_n770518	0_n068762	0_n252807	0_n385152	0_n486647	0_n567033	0_n631826	0_n684581
9.996856	9.988730	9.975668	9.957825	9.935454	9.908906	9.878614	9_n853827
0.688563	0.705517	0.715821	0.719572	0.717017	0.708530	0.694606	0.675808
0.691707	0.716787	0.740153	0.761747	0.781563	0.799624	0.815992	0.830754
9.999973	9.999972	9.999970	9 999969	9.999968	9.999967	9.999966	9.999965
8.735224	8.774473	8.809196	8.840049	8.867473	8.891945	8.913733	8.933065
9.308266	9.283185	9.259817	9.238222	9.218405	9.200343	9.183974	9.169211
7.924798	7.849555	7.779451	7.714666	7.655215	7.601029	7.551922	7.507633
7.830076	7.833460	7.836916	7.840447	7.844029	7.847656	7.851307	7.854982
9.386889	8.576973	9.150667	9.526238	9.736071	9.883391	9.996704	0.088171
7.216965	6.410433	6_n930118	7_n240904	7_n391286	7_n484420	7_n548626	7_n595804
7.525044	6.566468	6_n837100	6_n482902	7.042371	7.502970	7.752659	7.919396
8.343476	8.265172	8.193925	8.129980	8.073306	8.023688	7.980719	7.943860
9.928445	9.991221	0.018689	0.009679	9.957547	9.844169	9.839273	8.763033
8_n271921	8_n256393	8_n212614	8_n139659	8_n030853	7_n867857	7_n591932	6_n682429
7.905528	7.115950	7_n645939	7_n960476	8_n108303	8_n192950	8_n243232	8_n271612
5.952189	5.184906	5_n739314	6_n080953	6_n258759	6_n376365	6_n462359	6_n528869
1.890488	1.890490	1.890490	1.890487	1.890483	1.890477	1.890470	1.890461
0_n162409	0_n146883	0_n103104	0_n030146	9_n921336	9_n758334	9_n482402	8_n572890
9.796016	9.006440	9_n536429	9_n850963	9_n998786	0_n083427	0_n133702	0_n162073
7.842677	7.075396	7_n629804	7_n971440	8_n149242	8_n266842	8_n352829	8_n419330
+ 0″007	+ 0″001	0″000	+ 0″003	+ 0″011	+ 0″023	+ 0″037	+ 0″052
− 0″437	− 0″078	+ 0″287	+ 0″627	+ 0″912	+ 1″124	+ 1″247	+ 1″274
+ 0″1032	+ 0″0527	+ 0″0034	− 0″0346	− 0″0551	− 0″0557	− 0″0379	− 0″0055
− 0″8453	− 0″1382	+ 0″4695	+ 0″9668	+ 1″3502	+ 1″6235	+ 1″7972	+ 1″8860
− 0″7421	− 0″0855	+ 0″4729	+ 0″9322	+ 1″2951	+ 1″5678	+ 1″7593	+ 1″8805
+ 7″865	+ 7″555	+ 6″819	+ 5″772	+ 4″511	+ 3″120	+ 1″668	+ 0″208
+ 0″108	+ 0″009	− 0″002	+ 0″056	+ 0″161	+ 0″289	+ 0″419	+ 0″536
0″000	0″000	0″000	0″000	+ 0″001	+ 0″001	+ 0″001	+ 0″001
+ 7″973	+ 7″564	+ 6″817	+ 5″828	+ 4″673	+ 3″410	+ 2″088	+ 0″745
+ 24″293	+ 24″653	+ 22″699	+ 18″932	+ 14″081	+ 8″940	+ 4″220	+ 0″444
+ 7″476	+ 0″641	− 0″155	+ 3″847	+ 11″082	+ 19″916	+ 28″897	+ 36″917
+ 31″769	+ 25″294	+ 22″544	+ 22″779	+ 25″164	+ 28″857	+ 33″118	+ 37″362
− 1″606	− 0″821	− 0″053	+ 0″539	+ 0″857	+ 0″867	+ 0″590	+ 0″086
+ 3″634	+ 0″616	− 2″120	− 4″324	− 5″846	− 6″642	− 6″763	− 6″324
+ 2″028	− 0″205	− 2″173	− 3″785	− 4″989	− 5″775	− 6″173	− 6″238

♄ 1

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20
β_0'	— 1° 2′23″	— 0° 59′26″	— 0° 56′27″	— 0° 53′27″	— 0° 50′25″	— 0° 47′23″	— 0° 44′19″	— 0° 41′19″
λ_0'	317° 15′ 3″	316° 0′27″	314° 45′59″	313° 31′39″	312° 17′26″	311° 3′21″	309° 49′23″	308° 35′32″
Ω	125° 41′47″	125° 42′21″	125° 42′57″	125° 43′40″	125° 44′23″	125° 45′ 8″	125° 45′51″	125° 46′33″
$\lambda_0'-\Omega$	191° 33′16″	190° 18′ 6″	189° 3′ 2″	187° 47′59″	186° 33′ 3″	185° 18′13″	184° 3′32″	182° 48′59″
$\sin(\lambda_0'-\Omega)$	9_n30168	9_n25244	9_n19675	9_n13261	9_n05723	8_n96583	8_n84992	8_n69140
$\cos\beta_0'$	9.99993	9.99993	9.99994	9.99995	9.99995	9.99996	9.99996	9.99997
$\cos(\lambda_0'-\Omega)$	9_n99111	9_n99294	9_n99456	9_n99596	9_n99716	9_n99814	9_n99891	9_n99948
$\sin\beta_0'$	8_n25877	8_n23773	8_n21537	8_n19166	8_n16628	8_n13934	8_n11028	8_n07984
	9_n99822	9_n99798	9_n99765	9_n99717	9_n99644	9_n99523	9_n99291	9_n98738
$\cos\beta_0'\sin(\lambda_0'-\Omega)$	9_n30161	9_n25237	9_n19669	9_n13256	9_n05718	8_n96579	8_n84988	8_n69137
Q	185° 10′38″	185° 31′21″	185° 57′35″	186° 32′11″	187° 19′32″	188° 28′54″	190° 19′21″	193° 44′42″
i	2° 12′24″	2° 12′24″	2° 12′24″	2° 12′24″	2° 12′24″	2° 12′24″	2° 12′25″	2° 12′26″
$Q-i$	182° 58′14″	183° 18′57″	183° 45′11″	184° 19′47″	185° 7′ 8″	186° 16′30″	188° 6′56″	191° 32′16″
$\sin(Q-i)$	8_n71452	8_n76223	8_n81595	8_n87792	8_n95047	9_n03862	9_n14974	9_n30106
q	9.30339	9.25439	9.19904	9.13539	9.06074	8.97056	8.85697	8.70399
$\cos(Q-i)$	9_n99942	9_n99927	9_n99907	9_n99876	9_n99826	9.99739	9.99563	9_n99113
$\cos B_1\sin L_1$	9_n30281	9_n25366	9_n19811	9_n13415	9_n05900	8_n96795	8_n85260	8_n69512
	9_n99106	9_n99290	9_n99452	9_n99593	9_n99713	9_n99812	9_n99890	9_n99947
$\cos B_1\cos L_1$	9_n99104	9_n99287	9_n99450	9_n99591	9_n99711	9_n99810	9_n99887	9_n99945
L_1	191° 35′ 8″	190° 19′54″	189° 4′47″	187° 49′41″	186° 34′41″	185° 19′47″	184° 5′ 3″	182° 50′27″
$\cos B_1$	9.99998	9.99997	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99997	9.99998
r_1	0.99500	0.99537	0.99573	0.99608	0.99642	0.99676	0.99708	0.99740
$\sin B_1$	8_n01791	8_n01662	8_n01499	8_n01331	8_n01121	8_n00918	8_n00671	8_n00505
L_1-u	90° 41′24″	94° 32′56″	98° 24′ 3″	102° 15′47″	106° 9′ 5″	110° 5′ 0″	114° 4′36″	118° 8′55″
$\cos(L_1-u)$	8_n08072	8_n89933	9_n16464	9_n32715	9_n44432	9_n53578	9_n61062	9_n67372
$r_1\cos B_1$	0.99498	0.99534	0.99571	0.99607	0.99640	0.99674	0.99705	0.99738
$\sin(L_1-u)$	9.99997	9.99863	9.99532	9.98997	9.98251	9.97276	9.96047	9.94533
ξ_1	9_n07570	9_n89467	0_n16035	0_n32321	0_n44072	0_n53252	0_n60767	0_n67110
r	0.56402	0.56481	0.56488	0.56423	0.56287	0.56080	0.55803	0.55454
Subtract.	0.01388	0.08412	0.14426	0.19703	0.24424	0.28712	0.27692	0.24665
ξ_1-r	0_n57790	0_n64893	0_n70914	0_n76126	0_n80711	0_n84792	0_n88459	0_n91775
	9.97031	9.95966	9.94758	9.93400	9.91882	9.90188	9.88291	9.86161
η_1	0.99495	0.99397	0.99103	0.98603	0.97891	0.96950	0.95752	0.94271
$\varrho\cos\vartheta$	1.02464	1.03431	1.04345	1.05203	1.06009	1.06762	1.07461	1.08110
	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998
ζ_1	9_n01291	9_n01199	9_n01072	9_n00939	9_n00763	9_n00594	9_n00379	9_n00245
ϱ^{-1}	8.97534	8.96567	8.95653	8.94795	8.93989	8.93236	8.92537	8.91888
ϱ^{-3}	6.92602	6.89701	6.86959	6.84385	6.81967	6.79708	6.77611	6.75664
r_1^{-3}	7.01500	7.01389	7.01281	7.01176	7.01074	7.00972	7.00876	7.00780
Subtract.	9.35676	9.48970	9.59180	9.67395	9.74244	9.80051	9.85042	9.89378
K	6_n28278	6_n38671	6_n46139	6_n51780	6_n56211	6_n59759	6_n62653	6_n65042
$\xi_1 K$	5.35848	6.28138	6.62174	6.84101	7.00283	7.13011	7.23420	7.32152
$r:\varrho^3$	7.49004	7.46182	7.43447	7.40808	7.38254	7.35788	7.33414	7.31118
Subtract.	9.99678	9.97035	9.92742	9.86274	0.14527	9.83856	9.41288	8.38192
R_0	7_n48682	7_n43217	7_n36189	7_n27082	7_n14810	6_n96867	6_n64708	5.69310
S_0	7_n27773	7_n38068	7_n45242	7_n50383	7_n54102	7_n56709	7_n58405	7_n59313
W_0	5.29569	5.39870	5.47211	5.52719	5.56974	5.60353	5.63032	5.65287
$w k'' m_1 : \sqrt{p}$	1.36680	1.36673	1.36665	1.36657	1.36649	1.36641	1.36634	1.36627
R	8_n85362	8_n79890	8_n72854	8_n63739	8_n51459	8_n33508	8_n01342	7.05937
S	8_n64453	8_n74741	8_n81907	8_n87040	8_n90751	8_n93350	8_n95039	8_n95940
W	6.66248	6.76543	6.83876	6.89376	6.93623	6.96994	6.99666	7.01914
Δi	0″000	0″000	0″000	0″000	+ 0″001	+ 0″001	+ 0″001	+ 0″002
$\Delta\Omega$	+ 0″043	+ 0″055	+ 0″066	+ 0″074	+ 0″081	+ 0″085	+ 0″088	+ 0″088
Δu_1	— 0″0020	— 0″0007	+ 0″0004	+ 0″0011	+ 0″0014	+ 0″0013	+ 0″0008	— 0″0001
Δu_2	+ 0″0426	+ 0″0539	+ 0″0636	+ 0″0717	+ 0″0784	+ 0″0836	+ 0″0875	+ 0″0901
Δu	+ 0″0406	+ 0″0532	+ 0″0640	+ 0″0728	+ 0″0798	+ 0″0849	+ 0″0883	+ 0″0900
ΔL_1	+ 0″496	+ 0″438	+ 0″373	+ 0″302	+ 0″227	+ 0″150	+ 0″071	— 0″008
ΔL_2	+ 0″004	+ 0″002	— 0″001	— 0″005	— 0″010	— 0″015	— 0″020	— 0″024
ΔL_3	0	0	0	0	0	0	0	0
ΔL	+ 0″500	+ 0″440	+ 0″372	+ 0″297	+ 0″217	+ 0″135	+ 0″051	— 0″032
$\Delta\pi_1$	— 1″233	— 1″099	— 0″937	— 0″756	— 0″562	— 0″364	— 0″168	+ 0″018
$\Delta\pi_2$	+ 0″239	+ 0″114	— 0″091	— 0″357	— 0″664	— 0″993	— 1″325	— 1″643
$\Delta\pi$	— 0″994	— 0″985	— 1″028	— 1″113	— 1″226	— 1″357	— 1″493	— 1″625
Δq_1	+ 0″031	+ 0″010	— 0″006	— 0″017	— 0″021	— 0″020	— 0″012	+ 0″002
Δq_2	+ 0″268	+ 0″344	+ 0″406	+ 0″453	+ 0″485	+ 0″500	+ 0″500	+ 0″485
Δq	+ 0″299	+ 0″354	+ 0″400	+ 0″436	+ 0″464	+ 0″480	+ 0″488	+ 0″487

♄2

1874			1873					
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25
— 0°38′ 9″	— 0°35′ 3″	— 0°31′56″	— 0°28′48″	— 0°25′40″	— 0°22′31″	— 0°19′22″	— 0°16′13″	— 0°13′ 3″
307°21′48″	306° 8′10″	304°54′38″	303°41′12″	302°27′53″	301°14′39″	300° 1′30″	298°48′27″	297°35′29″
125°47′10″	125°47′42″	125°48′ 7″	125°48′25″	125°48′37″	125°48′44″	125°48′47″	125°48′48″	125°48′48″
181°34′38″	180°20′28″	179° 6′31″	177°52′47″	176°39′16″	175°25′55″	174°12′43″	172°59′39″	171°46′41″
8$_n$43972	7$_n$77477	8.19193	8.56817	8.76610	8.90115	9.00367	9.08626	9.15536
9.99997	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999	9.99999	9.99999	0.00000	0.00000
9$_n$99984	9$_n$99999	9$_n$99995	9$_n$99970	9$_n$99926	9$_n$99862	9$_n$99778	9$_n$99675	9$_n$99551
8$_n$04521	8$_n$00841	7$_n$96796	7$_n$92311	7$_n$87309	7$_n$81623	7$_n$75078	7$_n$67369	7$_n$57934
9$_n$96729	9$_n$93630	9.93378	9.98914	9.99647	9.99854	9.99932	9.99968	9.99985
8$_n$43969	7$_n$77475	8.19191	8.56815	8.76609	8.90114	9.00366	9.08626	9.15536
201°57′33″	239°43′10″	329° 9′30″	347°14′27″	352°42′34″	355°17′55″	356°48′ 9″	357°47′ 7″	358°28′46″
2°12′26″	2°12′27″	2°12′28″	2°12′29″	2°12′29″	2°12′30″	2°12′30″	2°12′30″	2°12′30″
199°45′ 7″	237°30′43″	326°57′ 2″	345° 1′58″	350°30′ 5″	353° 5′25″	354°35′39″	355°34′37″	356°16′16″
9$_n$52885	9$_n$92609	9$_n$73668	9$_n$41207	9$_n$21754	9$_n$08028	8$_n$97409	8$_n$88717	8$_n$81315
8.47240	8.07211	8.25813	8.57901	8.76962	8.90260	9.00434	9.08658	9.15551
9$_n$97366	9$_n$73007	9.92335	9.98501	9.99400	9.99683	9.99806	9.99871	9.99908
8$_n$44606	7$_n$80218	8.18148	8.56402	8.76362	8.89943	9.00240	9.08529	9.15459
9$_n$99983	9$_n$99999	9$_n$99995	9$_n$99971	9$_n$99927	9$_n$99863	9$_n$99779	9$_n$99676	9$_n$99553
9$_n$99981	9$_n$99997	9$_n$99993	9$_n$99968	9$_n$99925	9$_n$99861	9$_n$99777	9$_n$99675	9$_n$99551
181°36′ 2″	180°21′48″	179° 7′47″	177°53′59″	176°40′24″	175°26′59″	174°13′43″	173° 0′35″	171°47′33″
9.99998	9.99998	9.99998	9.99997	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999	9.99998
0.99770	0.99800	0.99829	0.99857	0.99884	0.99909	0.99934	0.99958	0.99981
8$_n$00125	7$_n$99820	7$_n$99481	7$_n$99108	7$_n$98716	7$_n$98288	7$_n$97843	7$_n$97375	7$_n$96866
122°19′ 4″	126°36′ 9″	131° 1′26″	135°36′ 8″	140°21′38″	145°19′17″	150°30′34″	155°56′59″	161°40′ 5″
9$_n$72804	9$_n$77544	9$_n$81715	9$_n$85401	9$_n$88654	9$_n$91506	9$_n$93973	9$_n$96056	9$_n$97738
0.99768	0.99798	0.99827	0.99854	0.99882	0.99907	0.99932	0.99957	0.99979
9.92691	9.90460	9.87762	9.84487	9.80479	9.75509	9.69221	9.61017	9.49765
0$_n$72572	0$_n$77342	0$_n$81542	0$_n$85255	0$_n$88536	0$_n$91413	0$_n$93905	0$_n$96013	0$_n$97717
0.55036	0.54549	0.53993	0.53369	0.52681	0.51931	0.51122	0.50261	0.49354
0.22214	0.20185	0.18477	0.17023	0.15775	0.14702	0.13780	0.12992	0.12332
0$_n$94786	0$_n$97527	1$_n$00019	1$_n$02278	1$_n$04311	1$_n$06115	1$_n$07685	1$_n$09005	1$_n$10049
9$_n$86081	9$_n$88280	9$_n$90286	9$_n$92115	9$_n$93776	9$_n$95272	9$_n$96599	9$_n$97744	9$_n$98689
0.92459	0.90258	0.87589	0.84341	0.80361	0.75416	0.69153	0.60974	0.49744
1.08705	1.09247	1.09733	1.10163	1.10535	1.10843	1.11086	1.11261	1.11360
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
8$_n$99895	8$_n$99620	8$_n$99310	8$_n$98965	8$_n$98600	8$_n$98197	8$_n$97777	8$_n$97333	8$_n$96847
8.91294	8.90752	8.90266	8.89836	8.89464	8.89156	8.88913	8.88738	8.88639
6.73882	6.72256	6.70798	6.69508	6.68392	6.67468	6.66739	6.66214	6.65917
7.00690	7.00600	7.00513	7.00429	7.00348	7.00273	7.00198	7.00126	7.00057
9.93139	9.96408	9.99220	0.01621	0.03630	0.05246	0.06471	0.07311	0.07730
6$_n$67021	6$_n$68664	6$_n$70018	6$_n$71129	6$_n$72022	6$_n$72714	6$_n$73210	6$_n$73525	6$_n$73647
7.39593	7.46006	7.51560	7.56384	7.60558	7.64127	7.67115	7.69538	7.91364
7.28918	7.26805	7.24791	7.22877	7.21073	7.19399	7.17861	7.16475	7.15271
9.44505	9.74507	9.93055	0.06561	0.17093	9.80818	9.83142	9.84838	9.86044
6.73423	7.01312	7.17846	7.29438	7.38166	7.44945	7.50257	7.54376	7.57408
7$_n$59480	7$_n$58922	7$_n$57607	7$_n$55470	7$_n$52383	7$_n$48130	7$_n$42363	7$_n$34499	7$_n$23391
5.66916	5.68284	5.69328	5.70094	5.70622	5.70911	5.70987	5.70858	5.70494
1.36622	1.36618	1.36616	1.36616	1.36618	1.36621	1.36624	1.36629	1.36633
8.10045	8.37930	8.54462	8.66054	8.74784	8.81566	8.86881	8.91005	8.94041
8$_n$96102	8$_n$95540	8$_n$94223	8$_n$92086	8$_n$89001	8$_n$84751	8$_n$78987	8$_n$71128	8$_n$60024
7.03538	7.04902	7.05944	7.06710	7.07240	7.07532	7.07611	7.07487	7.07127
+ 0″002	+ 0″002	+ 0″003	+ 0″003	+ 0″003	+ 0″003	+ 0″004	+ 0″004	+ 0″004
+ 0″086	+ 0″082	+ 0″077	+ 0″070	+ 0″061	+ 0″051	+ 0″040	+ 0″029	+ 0″017
— 0″0014	— 0″0030	— 0″0049	— 0″0070	— 0″0092	— 0″0115	— 0″0137	— 0″0156	— 0″0171
+ 0″0913	+ 0″0912	+ 0″0896	+ 0″0865	+ 0″0819	+ 0″0755	+ 0″0674	+ 0″0574	+ 0″0453
+ 0″0899	+ 0″0882	+ 0″0847	+ 0″0795	+ 0″0727	+ 0″0640	+ 0″0537	+ 0″0418	+ 0″0282
— 0″085	— 0″161	— 0″233	— 0″301	— 0″363	— 0″418	— 0″466	— 0″504	— 0″532
— 0″029	— 0″032	— 0″034	— 0″035	— 0″035	— 0″034	— 0″031	— 0″027	— 0″021
0	0	0	0	0	0	0	0	0
— 0″114	— 0″193	— 0″267	— 0″336	— 0″398	— 0″452	— 0″497	— 0″531	— 0″553
+ 0″187	+ 0″332	+ 0″447	+ 0″524	+ 0″559	+ 0″547	+ 0″486	+ 0″376	+ 0″221
— 1″927	— 2″161	— 2″329	— 2″418	— 2″416	— 2″317	— 2″116	— 1″816	— 1″427
— 1″740	— 1″828	— 1″882	— 1″894	— 1″857	— 1″770	— 1″630	— 1″440	— 1″206
+ 0″021	+ 0″046	+ 0″076	+ 0″108	+ 0″143	+ 0″178	+ 0″212	+ 0″242	+ 0″266
+ 0″455	+ 0″413	+ 0″361	+ 0″302	+ 0″237	+ 0″172	+ 0″110	+ 0″056	+ 0″014
+ 0″476	+ 0″459	+ 0″437	+ 0″410	+ 0″380	+ 0″350	+ 0″312	+ 0″298	+ 0″280

b₃

Datum	1873 April 15	1873 März 6	1873 Jan 25	1872 Dec 16	1872 Nov 6	1872 Sept 27	1872 Aug. 18	1872 Juli 9
β_0'	− 0° 9′54″	− 0° 6′44″	− 0° 3′34″	0° 0′23″	+ 0° 2′45″	+ 0° 5′54″	+ 0° 9′ 3″	+ 0°12′11″
λ_0'	296°22′36″	295° 9′47″	293°57′ 2″	292°44′21″	291°31′45″	290°19′12″	289° 6′43″	287°54′17″
Ω	125°48′48″	125°48′48″	125°48′48″	125°48′49″	125°48′50″	125°48′51″	125°48′52″	125°48′53″
$\lambda_0'-\Omega$	170°33′48″	169°20′59″	168° 8′14″	166°55′32″	165°42′55″	164°30′21″	163°17′51″	162° 5′24″
$\sin(\lambda_0'-\Omega)$	9.21473	9.26673	9.31296	9.35452	9.39224	9.42674	9″45849	9.48788
$\cos\beta_0'$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\cos(\lambda_0'-\Omega)$	9_n99408	9_n99245	9_n99062	9_n98859	9_n98636	9_n98392	9_n98128	9_n97842
$\sin\beta_0'$	7_n45936	7_n29196	7_n01599	6_n04730	6.90306	7.23458	7.42037	7.54949
	9.99993	9.99998	9.99999	0.00000	0.00000	9.99999	9.99998	9.99997
$\cos\beta_0'\sin(\lambda_0'-\Omega)$	9.21473	9.26673	9.31296	9.35452	9.39224	9.42674	9.45849	9.48788
Q	358°59′37″	359°23′34″	359°42′39″	359°58′18″	0°11′ 9″	0°22′ 5″	0°31′29″	0°39′37″
i	2°12′30″	2°12′30″	2°12′30″	2°12′30″	2°12′30″	2°12′29″	2°12′29″	2°12′29″
$Q-i$	356°47′ 7″	357°11′ 4″	357°30′ 9″	357°45′48″	357°58′39″	358° 9′36″	358°19′ 0″	358°27′ 8″
$\sin(Q-i)$	8_n74879	8_n69127	8_n63924	8_n59137	8_n54768	8_n50662	8_n46799	8_n43153
q	9.21480	9.26675	9.31297	9.35452	9.39224	9.42675	9.45851	9.48791
$\cos(Q-i)$	9.99932	9.99948	9.99959	9.99967	9.99973	9.99978	9.99981	9.99984
$\cos B_1\sin L_1$	9.21412	9.26623	9.31256	9.35419	9.39197	9.42653	9.45832	9.48775
	9_n99410	9_n99247	9_n99064	9_n98861	9_n98638	9_n98394	9_n98129	9_n97844
$\cos B_1\cos L_1$	9_n99408	9_n99245	9_n99062	9_n98859	9_n98636	9_n98392	9_n98128	9_n97842
L_1	170°34′35″	169°21′42″	168° 8′52″	166°56′ 7″	165°43′26″	164°30′46″	163°18′14″	162° 5′40″
$\cos B_1$	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999	9.99998
r_1	1.00003	1.00024	1.00044	1.00063	1.00081	1.00098	1.00114	1.00128
$\sin B_1$	7_n96359	7_n95802	7_n95221	7_n94589	7_n93992	7_n93337	7_n92630	7_n91944
L_1-u	167°41′20″	174° 2′ 8″	180°43′40″	187°46′50″	195°11′59″	202°58′46″	211° 6′ 8″	219°31′48″
$\cos(L_1-u)$	9_n98990	9_n99764	9_n99996	9_n99598	9_n98453	9_n96409	9_n93260	9_n88722
$r_1\cos B_1$	1.00001	1.00022	1.00042	1.00061	1.00079	1.00096	1.00113	1.00126
$\sin(L_1-u)$	9.32883	9.01666	8_n10386	9_n13155	9_n41860	9_n59151	9_n71312	9_n80379
ξ_1	0_n98991	0_n99786	1_n00038	0_n99659	0_n98532	0_n96505	0_n93373	0_n88848
r	0.48411	0.47447	0.46476	0.45519	0.44599	0.43745	0.42985	0.42350
Subtract.	0.11794	0.11383	0.11104	0.10974	0.11020	0.11286	0.11840	0.12801
ξ_1-r	1_n10785	1_n11169	1_n11142	1_n10633	1_n09552	1_n07791	1_n05213	1_n01649
	9_n99407	9_n99860	9_n99998	9_n99757	9_n99056	9_n97794	9_n95844	9_n93043
η_1	0.32884	0.01688	9_n10428	0_n13216	0_n41939	0_n59247	0_n71425	0_n80505
$\varrho\cos\theta$	1.11378	1.11309	1.11144	1.10876	1.10496	1.09997	1.09369	1.08606
	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
ζ_1	8_n96362	8_n95826	8_n95265	8_n94652	8_n94073	8_n93435	8_n92764	8_n92072
ϱ^{-1}	8.88621	8.88690	8.88855	8.89123	8.89503	8.90002	8.90630	8.91393
ϱ^{-3}	6.65863	6.66070	6.66565	6.67369	6.68509	6.70006	6.71890	6.74179
r_1^{-3}	6.99991	6.99928	6.99868	6.99811	6.99757	6.99706	6.99658	6.99616
Subtract.	0.07708	0.07211	0.06180	0.04558	0.02261	9.99190	9.95197	9.90106
K	6_n73571	6_n73281	6_n72745	6_n71927	6_n70770	6_n69196	6_n67087	6_n64285
$\xi_1 K$	7.72562	7.73067	7.72783	7.71586	7.69302	7.65701	7.60460	7.53133
$r\,\varrho^3$	7.14274	7.13517	7.13741	7.12888	7.13108	7.13751	7.14875	7.16529
Subtract.	9.86847	9.87285	9.87350	9.86992	9.86082	9.84364	9.81287	0.12154
R_0	7.59409	7.60352	7.60133	7.58578	7.55384	7.50065	7.41747	7.28683
S_0	7_n06455	6_n74969	5.83173	6.85143	7.12709	7.28443	7.38512	7.44790
W_0	5.69933	5.69107	5.68010	5.66579	5.64843	5.62631	5.59851	5.56357
$w k'' m_1\sqrt{p}$	1.36637	1.36641	1.36644	1.36647	1.36649	1.36651	1.36652	1.36653
R	8.96046	8.96993	8.96777	8.95225	8.92033	8.86716	8.78399	8.65336
S	8_n43092	8_n11610	7.19817	8.21790	8.49358	8.65094	8.75164	8.81443
W	7.06570	7.05748	7.04654	7.03226	7.01492	6.99282	6.96503	6.93010
Δi	+ 0″004	+ 0″003	+ 0″003	+ 0″003	+ 0″003	+ 0″002	+ 0″002	+ 0″001
$\Delta\Omega$	+ 0″005	− 0″007	− 0″018	− 0″028	− 0″037	− 0″043	− 0″048	− 0″049
$\Delta\mu_1$	− 0″0181	− 0″0184	− 0″0178	− 0″0164	− 0″0141	− 0″0111	− 0″0078	− 0″0046
$\Delta\mu_2$	+ 0″0314	+ 0″0155	− 0″0019	− 0″0205	− 0″0396	− 0″0580	− 0″0744	− 0″0872
$\Delta\mu$	+ 0″0133	− 0″0129	− 0″0197	− 0″0369	− 0″0537	− 0″0691	− 0″0822	− 0″0918
ΔL_1	− 0″548	− 0″551	− 0″540	− 0″513	− 0″469	− 0″410	− 0″335	− 0″245
ΔL_2	− 0″014	− 0″007	+ 0″001	+ 0″008	+ 0″013	+ 0″017	+ 0″018	+ 0″016
ΔL_3	0	0	0	0	0	0	0	0
ΔL	− 0″562	− 0″558	− 0″539	− 0″505	− 0″456	− 0″393	− 0″317	− 0″229
$\Delta\pi_1$	+ 0″028	− 0″190	− 0″413	− 0″616	− 0″772	− 0″850	− 0″828	− 0″692
$\Delta\pi_2$	− 0″965	− 0″460	+ 0″054	+ 0″529	+ 0″915	+ 1″164	+ 1″238	+ 1″123
$\Delta\pi$	− 0″937	0″650	− 0″359	− 0″087	+ 0″143	+ 0″314	+ 0″410	+ 0″431
Δq_1	+ 0″282	+ 0″286	+ 0″277	+ 0″255	+ 0″219	+ 0″173	+ 0″122	+ 0″071
Δq_2	0″011	− 0″016	+ 0″003	+ 0″046	+ 0″111	+ 0″190	+ 0″276	+ 0″353
Δq	+ 0″271	+ 0″270	+ 0″280	+ 0″301	+ 0″330	+ 0″363	+ 0″398	+ 0″424

b_1

1872				1871			
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24
+ 0°15′19″	+ 0°18′27″	+ 0°21′34″	+ 0°24′40″	+ 0°27′46″	+ 0°30′50″	+ 0°33′54″	+ 0°36′57″
286°41′54″	285°29′34″	284°17′16″	283° 5′ 0″	281°52′47″	280°40′35″	279°28′25″	278°16′17″
125°48′54″	125°48′54″	125°48′54″	125°48′54″	125°48′53″	125°48′52″	125°48′51″	125°48′49″
160°53′ 0″	159°40′40″	158°28′22″	157°16′ 6″	156° 3′54″	154°51′43″	153°39′34″	152°27′28″
9.51520	9.54070	9.56460	9.58705	9.60820	9.62819	9.64709	9.66502
0.00000	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998	9.99998	9.99997
9_n97536	9_n97209	9_n96859	9_n96489	9_n96095	9_n95678	9_n95239	9_n94776
7.64889	7.72972	7.79751	7.85583	7.90724	7.95274	7.99392	8.03133
9.99996	9.99995	9.99994	9.99993	9.99991	9.99990	9.99989	9.99988
9.51520	9.54069	9.56459	9.58704	9.60819	9.62817	9.64707	9.66499
0°46′46″	0°53′ 7″	0°58′46″	1° 3′50″	1° 8′26″	1°12′34″	1°16′24″	1°19′54″
2°12′29″	2°12′29″	2°12′29″	2°12′29″	2°12′29″	2°12′29″	2°12′29″	2°12′29″
358°34′17″	358°40′38″	358°46′17″	358°51′21″	358°55′57″	359° 0′ 5″	359° 3′55″	359° 7′25″
8_n39675	8_n36333	8_n33126	8_n30034	8_n27022	8_n24125	8_n21254	8_n18456
9.51524	9.54074	9.56465	9.58711	9.60828	9.62827	9.64718	9.66511
9.99987	9.99988	9.99990	9.99991	9.99992	9.99993	9.99994	9.99995
9.51511	9.54062	9.56455	9.58702	9.60820	9.62820	9.64712	9.66506
9_n97537	9_n97210	9_n96860	9_n96489	9_n96095	9_n95678	9_n95238	9_n94774
9_n97536	9_n97208	9_n96858	9_n96488	9_n96004	9_n95676	9_n95237	9_n94773
160°53′13″	159°40′52″	158°28′27″	157°16′12″	156° 3′53″	154°51′36″	153°39′25″	152°27′14″
9.99999	9.99998	9.99998	9.99999	9.99999	9.99998	9.99999	9.99999
1.00142	1.00155	1.00166	1.00177	1.00186	1.00195	1.00202	1.00208
7_n91199	7_n90407	7_n89591	7_n88745	7_n87850	7_n86952	7_n85972	7_n84967
228°12′41″	237° 4′34″	246° 2′16″	255° 0′34″	263°53′43″	272°36′42″	281° 5′16″	289°15′54″
9_n82373	9_n73522	9_n60867	9_n41273	9_n02672	8.65864	9.28401	9.51843
1.00141	1.00153	1.00164	1.00176	1.00185	1.00193	1.00201	1.00207
9_n87251	9_n92396	9_n96086	9_n98496	9_n99753	9_n99955	9_n99182	9_n97498
0_n82514	0_n73675	0_n61031	0_n41449	0_n02857	9.66057	0.28602	0.52050
0.41868	0.41562	0.41447	0.41531	0.41809	0.42266	0.42880	0.43623
0.14371	0.16949	0.21406	0.30062	0.14855	9.91753	9.59023	9.33071
0_n96885	0_n90624	0_n82437	0_n71593	0_n56664	0_n34019	9_n87625	9.76694
9_n89180	9_n85890	9_n90774	9_n94515	9_n97225	9_n98991	9_n99874	9_n99918
0_n87392	0_n92549	0_n96250	0_n98672	0_n99938	1_n00148	0_n99383	0_n97705
1.07705	1.06659	1.05476	1.04157	1.02713	1.01157	0.99509	0.97787
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
8_n91341	8_n90562	8_n89757	8_n88922	8_n88036	8_n87147	8_n86174	8_n85175
8.92294	8.93340	8.94523	8.95842	8.97286	8.98842	9.00490	9.02212
6.76882	6.80020	6.83569	6.87526	6.91858	6.96526	7.01470	7.06636
6.99574	6.99535	6.99502	6.99469	6.99442	6.99415	6.99394	6.99376
9.83648	9.75381	9.64661	9.50041	9.28059	8.83749	8.68987	9.25996
6_n60530	6_n55401	6_n48230	6_n37567	6_n19917	5_n80275	5.68381	6.25372
7.43044	7.29076	7.09261	6.79017	6.22774	5_n49332	5.96983	6.77422
7.18750	7.21582	7.25016	7.29057	7.33667	7.38792	7.44350	7.50259
9.87483	9.27494	9.64079	9.83510	9.96482	0.00514	9.98516	9.91014
7.06233	6.49076	6_n73340	7_n12567	7_n30149	7_n39306	7_n42866	7_n41273
7.47922	7.47950	7.44480	7.36239	7.19855	6.80423	6_n67764	7_n23077
5.51871	5.45963	5.37987	5.26489	5.07953	4.67422	4_n54555	5_n10547
1.36653	1.36653	1.36653	1.36653	1.36653	1.36652	1.36652	1.36651
8.42886	7.85729	8_n09993	8_n49220	8_n66802	8_n75958	8_n79518	8_n77924
8.84575	8.84603	8.81133	8.72892	8.56508	8.17075	8_n04416	8_n59728
6.88524	6.82616	6.74640	6.63142	6.44606	6.04074	5_n91207	6_n47198
+ 0″001	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000	+ 0″001
− 0″048	− 0″044	− 0″038	− 0″029	− 0″018	− 0″007	+ 0″005	+ 0″014
− 0″0019	− 0″0003	0″0000	− 0″0010	− 0″0031	− 0″0056	− 0″0078	− 0″0089
− 0″0948	− 0″0955	− 0″0884	− 0″0730	− 0″0497	− 0″0199	+ 0″0146	+ 0″0514
− 0″0967	− 0″0958	− 0″0884	− 0″0740	− 0″0528	− 0″0255	+ 0″0068	+ 0″0425
− 0″145	− 0″039	+ 0″068	+ 0″167	+ 0″252	+ 0″313	+ 0″343	+ 0″334
+ 0″012	+ 0″006	0″000	− 0″004	− 0″006	− 0″004	+ 0″003	+ 0″015
0	0	0	0	0	0	0	0
− 0″133	− 0″033	+ 0″068	+ 0″163	+ 0″246	+ 0″309	+ 0″346	+ 0″349
− 0″449	− 0″127	+ 0″225	+ 0″549	+ 0″786	+ 0″897	+ 0″867	+ 0″714
+ 0″838	+ 0″443	+ 0″029	− 0″290	− 0″408	− 0″244	+ 0″235	+ 1″006
+ 0″389	+ 0″316	+ 0″254	+ 0″259	+ 0″378	+ 0″653	+ 1″102	+ 1″720
+ 0″030	+ 0″004	− 0″001	+ 0″016	+ 0″048	+ 0″087	+ 0″121	+ 0″139
+ 0″408	+ 0″426	+ 0″399	+ 0″326	+ 0″215	+ 0″081	− 0″055	− 0″172
+ 0″438	+ 0″430	+ 0″398	+ 0″342	+ 0″263	+ 0″168	+ 0″066	− 0″033

u

Datum	f^{V}	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$w^2\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$	$'f$	$''f$	$40\Delta\mu$	$\Delta\mu$	ΔL_2	ΔL_1	$\mu_0 t + L_0$	L
								+5'37"7157						
							+15"8305							
1871 Aug. 24						+1"9230		+5'53"5462	+16"81	+0"420	+5'53"7	+20'10"3	1°56'33"6	2°22'37"6
					−0"1569		+17.7535							
Oct. 3				− 669		+1.7661		+6'11"2997	+18.65	+0.466	+6'11"4	+20'12"1	9° 3'49"5	9°30'13"0
			− 93		−0.2238		+19.5196							
Nov 12		+ 14		− 762		+1.5423		+6'30"8193	+20.31	+0.508	+6'30"9	+20'15"2	16°11' 5"3	16°37'51"4
			− 76		−0.3000		+21.0619							
Dec. 22		+ 24		− 841		+1.2423		+6'51"8812	+21.71	+0.543	+6'52"0	+20'19"5	23°18'21"1	23°45'32"6
			− 55		−0.3841		+22.3042							
1872 Jan. 31		+ 30		− 896		+0.8582		+7'14"1854	+22.77	+0.569	+7'14"3	+20'25"0	30°25'37"0	30°53'16"3
			− 25		−0.4737		+23.1624							
Marz 11		+ 29		− 921		+0.3845		+7'37"3478	+23.40	+0.585	+7'37"4	+20'31"4	37°32'52"8	38° 1' 1"6
			+ 4		−0.5658		+23.5469							
April 20		+ 32		− 917		−0.1813		+8' 0"8947	+23.51	+0.588	+8' 0"9	+20'38"6	44°40' 8"7	45° 8'48"2
			+ 36		−0.6575		+23.3656							
Mai 30		+ 34		− 881		−0.8388		+8'24"2603	+23.00	+0.575	+8'24"2	+20'46"4	51°47'24"5	52°16'35"1
	− 1		+ 70		−0.7456		+22.5268							
Juli 9		+ 33		− 811		−1.5844		+8'46"7871	+21.80	+0.545	+8'46"6	+20'54"2	58°54'40"4	59°24'21"2
	+ 22		+ 103		−0.8267		+20.9424							
Aug. 18		+ 55		− 708		−2.4111		+9' 7"7295	+19.82	+0.495	+9' 7"5	+21' 1"6	66° 1'56"2	66°32' 5"3
	+ 19		+ 158		−0.8975		+18.5313							
Sept. 27		+ 74		− 550		−3.3086		+9'26"2608	+16.95	+0.424	+9'26"0	+21' 7"8	73° 9'12"0	73°39'45"8
	+ 48		+ 232		−0.9525		+15.2227							
Nov 6		+ 122		− 318		−4.2611		+9'41"4835	+13.17	+0.329	+9'41"1	+21'12"1	80°16'27"9	80°47'21"1
	+ 51		+ 354		−0.9843		+10.9616							
Dec 16		+ 173		+ 36		−5.2454		+9'52"4451	+ 8.42	+0.210	+9'52"0	+21'13"2	87°23'43"7	87°54'48"9
	+ 64		+ 527		−0.9807		+ 5.7162							
1873 Jan. 25		+ 237		+ 563		−6.2261		+9'58"1613	+ 2.68	+0.067	+9'57"6	+21' 9"8	94°30'59"6	95° 2' 7"0
	+ 28		+ 764		−0.9244		− 0.5099							
Marz 6		+ 265		+ 1327		−7.1505		+9'57"6514	− 4.02	−0.100	+9'57"1	+21' 0"1	101°38'15"4	102° 9'12"6
	− 18		+1029		−0.7917		− 7.6604							
April 15		+ 247		+ 2356		−7.9422		+9'49"9910	−11.57	−0.289	+9'49"3	+20'42"2	108°45'31"2	109°16' 2"7
	−155		+1276		−0.5561		−15.6026							
Mai 25		+ 92		+ 3632		−8.4983		+9'34"3884	−19.81	−0.495	+9'33"7	+20'13"7	115°52'47"1	116°22'34"5
	−296		−1368		−0.1929		−24.1009							
Juli 4		− 204		+ 5000		−8.6912		+9'10"2875	−28.44	−0.711	+9' 9"6	+19'32"6	123° 0' 2"9	123°28'45"1
	−467		+1164		+0.3071		−32.7921							
Aug 13		− 671		+ 6164		−8.3841		+8'37"4954	−37.03	−0.926	+8'36"8	+18'36"8	130° 7'18"8	130°34'32"4
	−428		+ 493		+0.9235		−41.1762							
Sept. 22		−1099		+ 6657		−7.4606		+7'56"3192	−45.01	−1.125	+7'55"7	+17'25"0	137°14'34"6	137°39'55"3
	−157		− 606		+1.5802		−48.6368							
Nov. 1		−1256		+ 6051		−5.8714		+7' 7"6824	−51.74	−1.293	+7' 7"2	+15'57"3	144°21'50"5	144°44'55"0
	+313		−1862		+2.1943		−54.5082							
Dec. 11		− 943		+ 4189		−3.6771		+6'13"1742	−56.56	−1.414	+6'13"0	+14'15"6	151°29' 6"3	151°49'34"9
	+747		−2805		+2.6132		−58.1853							
1874 Jan. 20		− 196		+ 1384		−1.0639		+5'14"9889	−58.95	−1.474	+5'14"9	+12'23"5	158°36'22"1	158°54' 0"5
	+795		−3001		+2.7516		−59.2492							
Marz 1		+ 599		− 1617		+1.6877		+4'15"7397	−58.63	−1.466	+4'15"9	+10'26"5	165°43'38"0	165°58'20"4
	+453		−2402		+2.5899		−57.5615							
April 10		+1052		− 4019		+4.2776		+3'18"1782	−55.62	−1.390	+3'18"5	+ 8'29"8	172°50'53"8	173° 2'42"1
	+ 39		−1350		+2.1880		−53.2839							
Mai 20		+1091		− 5369		+6.4656		+2'24"8943	−50.20	−1.255	+2'25"4	+ 6'38"8	179°58' 9"7	180° 7'13"9
	−307		− 259		+1.6511		−46.8183							
Juni 29		+ 784		− 5628		+8.1167		+1'38"0760	−42.85	−1.071	+1'38"8	+ 4'57"5	187° 5'25"5	187°12' 1"8
	−387		+ 525		+1.0883		−38.7016							
Aug. 8		+ 397		− 5103		+9.2050		+ 59"3744	−34.17	−0.854	+1' 0"1	+ 3'28"5	194°12'41"4	194°17'10"0
	−299		+ 922		+0.5780		−29.4966							
Sept. 17		+ 98		− 4181		+9.7830		+ 29"8778	−24.64	−0.616	+ 30"7	+ 2'12"9	201°19'57"2	201°22'40"8
	−189		+1020		+0.1599		−19.7136							
Oct. 27		− 91		− 3161		+9.9429		+ 10"1642					208°27'13"0	
	− 82		+ 929		−0.1562		− 9.7707							
Dec. 6		− 173		− 2232		+9.7867		+ 0"3935					215°34'28"9	
			+ 756		−0.3794		+ 0.0160							
1875 Jan. 15				− 1476		+9.4073		+ 0"4095					222°41'44"7	
					−0.5270		+ 9.4233							
Feb. 24						+8.8803		+ 9"8328					229°49' 0"6	

	L								π							
Datum	f^{V}	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$w\left(\frac{dL}{dt}\right)$	${}^{1}f$	$\Delta L'_1$	f^{V}	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$w\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$	${}^{1}f$	$\Delta\pi$
							+20′ 9″873								—1° 1′42″960	
1871 Aug. 24						+ 1″094		+20′10″3						+ 39″082		—1° 1′23″0
					+ 1″340		+20′10″967						— 4″862		—1° 1′ 3″878	
Oct. 3				—0″055		+ 2″434		+20′12″1				+ 0″152		+ 34″220		—1° 0′46″3
			—0″030		+ 1.285		+20′13″401				+0″592		— 4.710		—1° 0′29″658	
Nov. 12		— 13		—0.085		+ 3″719		+20′15″2		+0″130		+ 0.742		+ 29″510		—1° 0′14″5
			—0.043		+ 1.200		+20′17″120		—0″052		+0.722		— 3.968		—1° 0′ 0″148	
Dec. 22		— 7		—0.128		+ 4″919		+20′19″5		+0.078		+ 1.464		+ 25″542		— 59′47″1
			—0.050		+ 1.072		+20′22″039		—0.090		+0.800		— 2.504		— 59′34″606	
1872 Jan. 31		— 20		—0.178		+ 5″991		+20′25″0		—0.012		+ 2.264		+ 23″038		— 59′23″0
			—0.070		+ 0.894		+20′28″030		—0.062		+0.788		— 0.240		— 59′11″568	
März 11		— 19		—0.248		+ 6″885		+20′31″4		—0.104		+ 3.052		+ 22″798		— 59′ 0″3
			—0.089		+ 0.646		+20′34″915		—0.072		+0.684		+ 2.812		— 58′48″770	
April 20		— 30		—0.337		+ 7″531		+20′38″6		—0.176		+ 3.736		+ 25″610		— 58′36″3
			—0.119		+ 0.309		+20′42″446		—0.072		+0.508		+ 6.548		— 58′23″160	
Mai 30		— 22		—0.456		+ 7″840		+20′46″4		—0.248		+ 4.244		+ 32″158		— 58′ 7″8
			—0.141		— 0.147		+20′50″286		—0.032		+0.260		+10.792		— 57′51″002	
Juli 9		— 42		—0.597		+ 7″693		+20′54″2		—0.280		+ 4.504		+ 42″950		— 57′30″6
			—0.183		— 0.744		+20′57″979		—0.033		—0.020		+15.296		— 57′ 8″052	
Aug 18		— 35		—0.780		+ 6″949		+21′ 1″6		—0.313		+ 4.484		+0′58″246		— 56′40″3
			—0.218		— 1.524		+21′ 4″928		—0.020		—0.333		+19.780		— 56′ 9″806	
Sept 27		— 49		—0.998		+ 5″425		+21′ 7″8		—0.333		+ 4.151		+1′18″026		— 55′32″6
	+ 27		—0.267		— 2.522		+21′10″353		—0.078		—0.666		+23.931		— 54′51″780	
Nov 6		— 22		—1.265		+ 2″903		+21′12″1		—0.411		+ 3.485		+1′41″957		— 54′ 2″9
	— 2		—0.289		— 3.787		+21′13″256		—0.068		—1.077		+27.416		— 53′ 9″823	
Dec. 16		— 24		—1.554		— 0″884		+21′13″2		—0.479		+ 2.408		+2′ 9″373		— 52′ 7″5
	+ 67		—0.313		— 5.341		+21′12″372		—0.069		—1.556		+29.824		— 51′ 0″450	
1873 Jan. 25		+ 43		—1.867		— 6″225		+21′ 9″8		—0.548		+ 0.852		+2′39″197		— 49′43″4
	+ 76		—0.270		— 7.208		+21′ 6″147		—0.045		—2.104		+30.676		— 48′21″253	
März 6		+119		—2.137		— 13″433		+21′ 0″1		—0.593		— 1.252		+3′ 9″873		— 46′48″8
	+132		—0.151		— 9.345		+20′52″714		+0.171		—2.697		+29.424		— 45′11″380	
April 15		+251		—2.288		— 22″778		+20′42″2		—0.422		— 3.949		+3′39″297		— 43′24″1
	+154		+0.100		—11.633		+20′29″936		+0.420		—3.119		+25.475		— 41′32″083	
Mai 25		+405		—2.188		— 34″411		+20′13″7		—0.002		— 7.068		+4′ 4″772		— 39′31″7
	+129		+0.505		—13.821		+19′55″525		+0.753		—3.121		+18.407		— 37′27″311	
Juli 4		+534		—1.683		— 48″232		+19′32″6		+0.751		—10.189		+4′23″179		— 35′17″1
	— 16		+1.039		—15.504		+19′ 7″293		+1.046		—2.370		+ 8.218		— 33′ 4″132	
Aug 13		+518		—0.644		—1′ 3″736		+18′36″8		+1.797		—12.559		+4′31″397		— 30′48″7
	—195		+1.557		—16.148		+18′ 3″557		+0.710		—0.573		— 4.341		— 28′32″735	
Sept. 22		+323		+0.913		—1′19″884		+17′25″0		+2.507		—13.132		+4′27″056		— 26′18″2
	—492		+1.880		—15.235		+16′43″673		+0.068		+1.934		—17.473		— 24′ 5″679	
Nov. 1		—169		+2.793		—1′35″119		+15′57″3		+2.575		—11.198		+4′ 9″583		— 21′58″7
	—494		+1.711		—12.442		+15′ 8″554		—1.125		+4.509		—28.671		— 19′56″096	
Dec. 11		—663		+4.504		—1′47″561		+14′15″6		+1.450		— 6.689		+3′40″912		— 18′ 2″8
	—326		+1.048		— 7.938		+13′20″993		—1.790		+5.959		—35.360		— 16′15″184	
1874 Jan. 20		—989		+5.552		—1′55″499		+12′23″5		—0.340		— 0.730		+3′ 5″552		— 14′39″3
	+ 58		+0.059		— 2.386		+11′25″494		—1.597		+5.619		—36.090		— 13′ 9″632	
März 1		—931		+5.611		—1′57″885		+10′26″5		—1.937		+ 4.889		+2′29″462		— 11′52″1
	+373		—0.872		+ 3.225		+ 9′27″609		—0.579		+3.682		—31.201		— 10′40″170	
April 10		—558		+4.739		—1′54″660		+ 8′29″8		—2.516		+ 8.571		+1′58″261		— 9′38″9
	+442		—1.430		+ 7.964		+ 7′32″949		+0.376		+1.166		—22.630		— 8′41″909	
Mai 20		—116		+3.309		—1′46″696		+ 6′38″8		2.140		+ 9.737		+1′35″631		— 7′52″8
	+340		—1.546		+11.273		+ 5′46″253		+0.932		—0.974		—12.893		— 7′ 6″278	
Juni 29		+224		+1.763		—1′35″423		+ 4′57″5		—1.208		+ 8.763		+1′22″738		— 6′24″3
	+156		—1.322		+13.036		+ 4′10″830		+0.883		—2.182		— 4.130		— 5′43″540	
Aug. 8		+380		+0.441		—1′22″387		+ 3′28″5		—0.325		+ 6.581		+1′18″608		— 5′ 4″2
	— 17		—0.942		+13.477		+ 2′48″443		—0.583		—2.507		+ 2.451		— 4′24″932	
Sept. 17		+363		—0.501		—1′ 8″610		+ 2′12″9		+0.258		+ 4.074		+1′21″059		— 3′44″6
	— 62		—0.579		+12.976		+ 1′39″533		—0.242		—2.249		+ 6.525		— 3′ 3″873	
Oct. 27		+301		—1.080		— 55″934				+0.500		+ 1.825		+1′27″584		
	— 92		—0.278		+11.896		+ 43″599		+0.034		—1.749		+ 8.350		— 1′36″289	
Dec. 6		+209		—1.358		— 44″038				+0.534		+ 0.076		+1′35″934		
			—0.069		+10.538		— 0″439				—1.215		+ 8.426		— 0″355	
1875 Jan. 15				—1.427		— 33″500						— 1.139		+1′44″360		
					+ 9.111		— 33″939						+ 7.287		+ 1′44″005	
Febr. 24						— 24″389								+1′51″647		

Datum	q: f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$w\left(\frac{dq}{dt}\right)$	$'f$	Δq	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$	$'f$	$\Delta\Omega$	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$w\left(\frac{di}{dt}\right)$	$'f$	Δi
						−12′41″678							+6′ 8″982							+5″386	
1871 Aug. 24					− 6″271		−12′44″8					+ 1″288		+6′ 9″6					+0″053		+5″4
				+0″164		−12′47″949					−0″036		+6′10″270					− 16		+5″439	
Oct. 3			+0″336		− 6″107		−12′51″0			−0″099		+ 1.252		+6′10″9					+0.037		+5″5
		+ 45		+0.500		−12′54″056			+ 11		−0.135		+6′11″522					− 14		+5″476	
Nov. 12	− 24		+0.381		− 5″607		−12′56″9			−0.088		+ 1.117		+6′12″1					+0.023		+5″5
		+ 21		+0.881		−12′59″663			+ 15		−0.223		+6′12″639					− 12		+5″499	
Dec. 22	− 38		+0.402		− 4″726		−13′ 2″1			−0.073		+ 0.894		+6′13″1					+0.011		+5″5
		− 17		+1.283		−13′ 4″389			+ 20		−0.296		+6′13″533					− 8		+5″510	
1872 Jan. 31	− 36		+0.385		− 3″443		−13′ 6″2			−0.053		+ 0.598		+6′13″9					+0.003		+5″5
		− 53		+1.668		−13′ 7″832			+ 31		−0.349		+6′14″131					− 3		+5″513	
März 11	− 38		+0.332		− 1″775		−13′ 8″9			−0.002		+ 0.249		+6′14″3					0.000		+5″5
		− 91		+2.000		−13′ 9″607			+ 30		−0.371		+6′14″380					+ 1		+5″513	
April 20	− 30		+0.241		+ 0″225		−13′ 9″7			+0.008		− 0.122		+6′14″3					+0.001		+5″5
		− 121		+2.241		−13′ 9″382			+ 39		−0.363		+6′14″258					+ 7		+5″514	
Mai 30	− 8		+0.120		+ 2″466		−13′ 8″3			+0.047		− 0.485		+6′14″0					+0.008		+5″5
		− 129		+2.361		−13′ 6″916			+ 37		−0.316		+6′13″773					+ 12		+5″522	
Juli 9	− 4		−0.009		+ 4″827		−13′ 4″7			+0.084		− 0.801		+6′13″5					+0.020		+5″5
		− 133		+2.352		−13′ 2″089			+ 37		−0.232		+6′12″972					+ 16		+5″542	
Aug 18	+ 22		−0.142		+ 7″179		−12′58″7	− 15		+0.121		− 1.033		+6′12″5					+0.036		+5″6
		− 111		+2.210		−12′54″910			+ 22		−0.111		+6′11″939					+ 19		+5″578	
Sept. 27	+ 32		−0.253		+ 9″389		−12′50″4	− 9		+0.143		− 1.144		+6′11″4					+0.055		+5″6
		− 79		+1.957		−12′45″521			+ 13		+0.032		+6′10″795					+ 21		+5″633	
Nov. 6	+ 47		−0.332		+ 11″346		−12′40″0	− 36		+0.156		− 1.112		+6′10″2			− 3		+0.076		+5″7
		− 32		+1.625		−12′34″175			− 23		+0.188		+6′ 9″683			− 5		+ 18		+5″709	
Dec 16	+ 69		−0.364		+ 12″971		−12′27″8	− 45		+0.133		− 0.924		+6′ 9″2			− 8		+0.094		+5″8
		+ 37		+1.261		−12′21″204			− 68		+0.321		+6′ 8″759			− 4		+ 10		+5″803	
1873 Jan. 25	+ 91		−0.327		+ 14″232		−12′14″1	− 60		+0. 65		− 0.603		+6′ 8″4			−12		+0.104		+5″8
		+ 128		+0.934		−12′ 6″972			−128		+0.386		+6′ 8″156			− 7		− 2		+5″907	
März 6	+110		−0.199		+ 15″166		−11′59″4	− 90		−0.063		− 0.217		+6′ 8″0			−19		+0.102		+6″0
		+ 238		+0.735		−11′51″806			−218		+0.323		+6′ 7″939			− 9		− 21		+6″009	
April 15	+121		+0.039		+ 15″901		−11′43″9	− 82		−0.281		+ 0.106		+6′ 7″9			−28		+0.081		+6″1
		+ 359		+0.774		−11′35″905			−300		+0.042		+6′ 8″045			− 4		− 49		+6″090	
Mai 25	+ 99		+0.398		+ 16″675		−11′27″6	− 65		−0.581		+ 0.148		+6′ 8″1			−32		+0.032		+6″1
		+ 458		+1.172		−11′19″230			−365		−0.539		+6′ 8″193			− 2		− 81		+6″122	
Juli 4	+ 10		+0.856		+ 17″847		−11′10″4	+ 12		−0.946		− 0.391		+6′ 8″1			−34		−0.049		+6″1
		+ 468		+2.028		−11′ 1″383			−353		−1.485		+6′ 7″802			+ 3		−115		+6″073	
Aug. 13	−143		+1.324		+ 19″875		−10′51″7	+143		−1.299		− 1.876		+6′ 7″1			−31		−0.164		+6″0
		+ 325		+3.352		−10′41″508			−210		−2.784		+6′ 5″926			+17		−146		+5″909	
Sept 22	−322		+1.649		+ 23″227		−10′30″3	+279		−1.509		− 4.660		+6′ 3″9			−14		−0.310		+5″8
		+ 3		+5.001		−10′18″281			+ 69		−4.293		+6′ 1″266			+22		−160		+5″599	
Nov. 1	−445		+1.652		+ 28″228		−10′ 4″7	+367		−1.440		− 8.953		+5′57″4			+ 8		−0.470		+5″4
		− 442		+6.653		− 9′50″053			+436		−5.733		+5′52″313			+26		−152		+5″129	
Dec 11	−401		+1.210		+ 34″881		− 9′33″3	+306		−1.004		−14.686		+5′45″5			+34		−0.622		+4″8
		− 843		+7.863		− 9′15″172			+742		−6.737		+5′37″627			+21		−118		+4″507	
1874 Jan. 20	−179		+0.367		+ 42″741		− 8′54″5	+137		−0.262		−21.423		+5′27″5			+55		−0.740		+4″1
		−1022		+8.230		− 8′32″428			+879		−6.999		+5′16″204			+15		− 63		+3″767	
März 1	+114		−0.655		+ 50″974		− 8′ 7″6	−146		+0.617		−28.422		+5′ 2″4			+70		−0.803		+3″4
		− 908		+7.575		− 7′41″454			+733		−6.382		+4′47″782			− 6		+ 7		+2″964	
April 10	+335		−1.563		+ 58″549		− 7′12.8	−291		+1.350		34.804		+4′30″8			+64		−0.796		+2″6
		− 573		+6.012		− 6′42″905			+442		−5.032		+4′12″978			−14		+ 71		+2″168	
Mai 20	+412		−2.136		+1′ 4″561		− 6′11″0	−348		+1.792		−39.836		+3′53″3			+50		−0.725		+1″8
		− 161		+3.876		− 5′38″344			+ 94		−3.240		+3′33″142			−27		+121		+1″443	
Juni 29	+329		−2.297		+1′ 8″437		− 5′ 4″3	−253		+1.886		−43.076		+3′11″8			+23		−0.604		+1″1
		+ 168		+1.579		− 4′29″907			−159		−1.354		+2′50″066			−13		+154		+0″839	
Aug. 8	+186		−2.129		+1′10″016		− 3′54″9	−160		+1.727		−44.430		+2′27″9	−1		+10		−0.450		+0″6
		+ 354		−0.550		− 3′19″891			−319		+0.373		+2′ 5″636			−14		+164		+0″389	
Sept. 17	+ 81		−1.775		+1′ 9″466		− 2′45″1	− 44		+1.408		−44.057		+1′43″5	+2		− 4		−0.286		+0″2
		+ 435		−2.325		− 2′10″425			−363		+1.781		+1′21″579			−12		+160		+0″103	
Oct. 27	− 20		−1.340		+1′ 7″141			+ 3		+1.045		−42.276			+6		−16		−0.126		
		+ 415		−3.665		− 1′ 3″284			−360		+2.826		+ 39″303			− 6		+144		−0″023	
Dec. 6	− 55		−0.925		+1′ 3″476			+ 63		+0.685		−39.450			+4		−22		+0.018		
		+ 360		−4.590		+ 0″192			−297		+3.511		− 0″147			− 2		+122		−0″005	
1875 Jan. 15			−0.565		+ 58″886					+0.388		−35.939					−24		+0.140		
				−5.155		+ 59″078					+3.899		− 36″086					+ 98		+0″135	
Febr. 24					+ 53″731							−32.040							+0.238		

D. Allgemeine Uebersicht der Methoden zur strengen Berechnung der speciellen Störungen.

Ueberblickt man die für jede der drei vorangehend entwickelten Methoden nöthigen numerischen Operationen so wird man leicht wahrnehmen, dass die Encke'sche Methode am wenigsten Arbeit bedingt; etwas mehr Mühe erfordert die Hansen-Tietjen'sche Methode, die meiste Arbeit verursacht die Methode der Variation der Constanten, ohne dass übrigens dieser Arbeitszuwachs ein allzu bedeutender zu nennen ist. Diese Bemerkungen verlieren jedoch ihre Gültigkeit, wenn die Störungsrechnungen durch längere Zeit fortgesetzt werden und die Störungen anzuwachsen beginnen; dann drehen sich die Verhältnisse völlig um; bei Encke's Methode wird zuerst die Nothwendigkeit auftreten, auf osculirende Elemente überzugehen, und diese Arbeit ist als eine nicht ganz geringe anzusehen, um so mehr, da beim Beginn der Rechnung an der neuen Osculationsepoche die Integration von Neuem zu beginnen ist. Bei Hansen-Tietjen's Methode kann dieser Uebergang sehr lange hinausgeschoben werden, doch wird derselbe endlich nöthig; denn, wenn die Störungen sehr bedeutend anwachsen, so wird der Gang der zu ermittelnden Differentialquotienten ein sehr unregelmässiger; die Principien der mechanischen Quadratur fordern aber, dass sich die vorgelegte Funktion innerhalb der Störungsintervalle nach Potenzen der Argumente entwickeln lässt, dass also die Differenzwerthe an Grösse verhältnissmässig rasch abnehmen. Man sieht, wenn man dieses Erforderniss zusammenhält mit der Thatsache, dass bei der Bestimmung der Coordinatenstörungen selbst bei mässigen Störungen endlich stets der Zeitpunkt eintritt wo der Gang der Differenzen ein sehr unregelmässiger wird, dass die Methode der Variation der Constanten sich den Forderungen der mechanischen Quadratur am besten anschliesst. Ich stehe daher nicht an, zu behaupten, dass, wenn es sich darum handelt, für ein sehr langes Zeitintervall die Störungen zu bestimmen, man das genaueste und sicherste Resultat nach dieser Methode erhalten wird, denn der sonst als das radikalste Mittel empfohlene Uebergang auf osculirende Elemente ist ein Nothbehelf, der leicht so viel Mehrarbeit verursacht, als durch die frühere kürzere Rechnung gewonnen wurde; andererseits kann die Discontinuität in der Rechnung leicht die Quelle eines Rechnungsfehlers werden, während bei der Variation der Constanten der regelmässige Gang der Differenzwerthe für immer vor constanten Fehlern schützen wird. Beachtet man überdies, da wohl kaum ein Rechner behaupten darf, dass er niemals fehle, dass die Ausmerzung der Fehler bei der Methode der Coordinatenstörungen viel schwieriger ist, indem kleine, das Resultat merkbar schädigende Fehler erst nach einigen Intervallen entdeckt werden und ein grosser Theil der Rechnung von der Stelle des Fehlers an corrigirt werden muss, so wird man sich wohl der von mir auf Grundlage vielfältiger Erfahrungen aufgestellten Behauptung anschliessen, dass die Variation der Constanten in der numerischen Anwendung ebenso, wie in der Analyse

ihren Vorrang behauptet. Nur in jenen Fällen, wo die Bahnen sehr excentrisch sind, wird die Folge des Umstandes, dass die Constanten bei verhältnissmässig geringen Störungen starke Variationen erfahren, die Hansen-Tietjen'sche Methode den Vorrang behaupten.

Hat man aber die Störungen nur für einen sehr beschränkten Zeitraum zu ermitteln, etwa für die Erscheinung eines Kometen oder für einen Planeten für die Zeit einer Opposition, dann wird Encke's Methode unstreitig den Vorzug verdienen. Als ein Vortheil der Methode der Coordinatenstörungen muss auch die Bequemlichkeit betrachtet werden, mit welcher die Störungen an die ungestörten Coordinaten angebracht werden können.

Bei den kleinen Planeten wird man in der Regel zuerst mit sehr rohen Elementen die Störungsrechnung beginnen können; es wird daher wohl stets nothwendig werden, dieser genäherten Störungsrechnung eine zweite nachfolgen zu lassen, die aber auf den Zeitpunkt zu verschieben sein wird, bis das vorhandene Beobachtungsmaterial in Verbindung mit den genäherten Störungswerthen die Ermittelung hinreichend sicherer Elemente zur Bestimmung der definitiven Störungswerthe gestattet. Zur Berechnung dieser provisorischen Störungen kann, wenn man die Variation der Constanten zur Ermittelung derselben benützt, in Anbetracht der Ungenauigkeit der zu Grunde gelegten Elemente, durch längere Zeit ein und dasselbe Elementensystem zur Auswerthung der Differentialquotienten verwendet werden, und ebenso können bei Anwendung der Methode der Coordinatenstörungen alle Glieder, die zweiter Ordnung sind, fortgelassen werden; ich lege aber auf solche Abkürzungen keinen besonderen Werth, indem nicht allzuviel Arbeit erspart wird. Will man sich aber mit Resultaten begnügen, die blos die ersten Potenzen der Massen berücksichtigen, so wird man sich mit Vortheil der im folgenden Abschnitte auseinandergesetzten Methoden bedienen können, die den Vortheil gewähren, dass dieselben die Kürze und Genauigkeit der Coordinatenstörungen gewähren, jedoch die den letzteren anhaftenden Uebelstände, die durch die Einführung der indirecten Glieder entstehen, ganz beseitigen.

Schliesslich ist noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der bei der Methode der Störungsrechnung nach der Variation der Coordinaten möglicher Weise in Betracht kommt. Es wird sich nämlich häufig genug Veranlassung finden, nachdem man längere Zeit die Störungen mit nahe richtigen Elementen fortgeführt hat, die zu Grunde gelegten Elemente nach neueren Beobachtungen zu verbessern; die Fortsetzung der Störungsrechnung wird dann offenbar an der Stelle, wo man den Wechsel in den Elementen hat eintreten lassen, einen mehr minder hervortretenden Sprung in den Differenzwerthen der Störungscomponenten zeigen, der um so auffälliger sein wird, je grösser die in den Elementen vorgenommenen Verbesserungen sind. Dieser Sprung erklärt sich einfach genug aus den vernachlässigten Producten der Incremente der Elemente in die Störungswerthe. Hierbei wird man aber die auffällige Bemerkung machen, dass eine nach der Variation der Constanten durchgeführte Rechnung diesen Sprung kaum merklich hervortreten lässt, während

bei der Variation der Coordinaten in Folge der grossen indirecten Glieder derselbe viel auffälliger hervortritt; man wird daher voraussichtlich der Wahrheit näher kommen und bessere Resultate erlangen, wenn man die Störungsrechnung nach der Variation der Coordinaten durchgeführt vorausgesetzt an der Stelle, von wo ab die Störungsrechnung mit den verbesserten Werthen der Elemente fortgeführt werden soll, auf osculirende Elemente übergeht, und hierbei zur Ermittelung der ungestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten die der bisherigen Störungsrechnung zu Grunde gelegten Elemente benützt. Man findet so jene Incremente, welche die Störungen von der Osculationsepoche an den Elementen hinzugefügt haben, und erhält somit ein mit der Variation der Constanten identisches Resultat. Diese so bestimmten Incremente wird man an die verbesserten Ausgangselemente anbringen und mit diesen Werthen die Störungsrechnung von der neuen Osculationsepoche ab nach der Variation der Coordinaten fortsetzen.

Mit Rücksicht auf die oben gemachten Einschränkungen möchte ich als Resultat der hier gemachten Betrachtungen den Satz hinstellen, dass von den in diesem Werke entwickelten Methoden der strengen Störungsrechnung die Methode der Variation der Constanten in der Anwendung den unbedingten Vorzug verdient.

E. Ermittelung der Störungswerthe mit Rücksicht auf die ersten Potenzen derselben.

Es kann unter Umständen eine blos genäherte Kenntniss der Störungswerthe erwünscht sein, in welchem Falle man sich auf die Glieder erster Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte beschränken darf; da sich unter dieser Voraussetzung für die Rechnung wesentlich bequemere Vorschriften angeben lassen, als dies bei den vorstehenden Methoden möglich ist, so werde ich hier auf dieselben eingehen, um so mehr, da mir nicht bekannt ist, dass von den hier zur Entwickelung gelangenden (Laplace'schen Integrationsmethoden zur Ermittelung der speciellen Störungswerthe irgendwo Gebrauch gemacht ist. Ich werde die Methode auf die Hansen-Tietjen'sche Form der Störung der polaren Coordinaten anwenden, wodurch sich Formen ergeben werden, welche die Vortheile der Coordinatenstörungen mit jenen der Variation der Constanten verbinden, indem jede indirecte Rechnung vermieden ist, ohne dass die Glieder zweiter Ordnung, die bei der Variation der Constanten sehr bald merklich hervortreten, einen allzu nachtheiligen Einfluss äussern. Es lassen sich allerdings noch wesentlich veränderte und bequemere Integrationsmethoden angeben, auf welche ich jedoch vorerst hier nicht eingehe.

Die Differentialgleichungen, welche in der Hansen-Tietjen'schen Methode die indirecte Rechnung bedingen, haben die Form (vergl. pag. 149):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\,\xi = A\,. \qquad 1)$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit den beiden für die ungestörte Bewegung geltenden Differentialgleichungen (I pag. 42):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_0}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}x_0&=0\\ \frac{d^2y_0}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}y_0&=0\;,\end{aligned}\right\}\qquad 2)$$

so erhält man zunächst, wenn man r_0 mit r identificirt, was gestattet ist, ohne mehr als Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen zu vernachlässigen, weil $\frac{1}{r^3}$ mit einem Störungswerthe ξ selbst multiplicirt erscheint, durch die Elimination von $\frac{1}{r^3}$ aus der ersten Gleichung 2) und der Gleichung 1):

$$x_0\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2x_0}{dt^2}=x_0A\;,$$

und ebenso aus der zweiten Gleichung in 2):

$$y_0\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2y_0}{dt^2}=y_0A\;;$$

die Integration dieser Ausdrücke gibt zufolge der Relation:

$$\frac{d}{dt}\left\{x_0\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{dx_0}{dt}\right\}=x_0\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2x_0}{dt^2}\;,$$

sofort die Formen

$$\left.\begin{aligned}x_0\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{dx_0}{dt}&=\int Ax_0\,dt+C'\\ y_0\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{dy_0}{dt}&=\int Ay_0\,dt+C''\;.\end{aligned}\right\}\qquad 3)$$

Knüpft man an diese Integrale die Bedingung, dass dieselben für die Osculationsepoche der Null gleich werden, so resultirt daraus, dass die Integrations-Constanten ebenfalls der Null gleich zu setzen sind; diese Bestimmung wird in der Folge festgehalten werden. Multiplicirt man nun die erste der Gleichungen 3) mit $+y_0$, die zweite mit $-x_0$ und addirt die Resultate, so erhält man sofort:

$$\xi\left\{x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}\right\}=y_0\int Ax_0\,dt-x_0\int Ay_0\,dt\;.\qquad 4)$$

Betrachtet man als die xy-Ebene die ungestörte Bahnebene, so ist der in der Klammer stehende Ausdruck nichts anderes, als das doppelte Sectordifferential (vergl. I pag. 12 und 15); man kann daher schreiben:

$$x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}=r^2\frac{dv}{dt}=k\sqrt{p_0(1+m)}\;;\qquad 5)$$

vernachlässigt man, wie dies schon oben geschehen ist, die zweiten und höheren Potenzen der Massen, und lässt überall den Nullindex weg, so erhält man:

$$\xi=\frac{y}{k\sqrt{p}}\int Ax\,dt-\frac{x}{k\sqrt{p}}\int Ay\,dt\;.\qquad 6)$$

in welchem Ausdrucke der Parameter und die auftretenden Coordinaten der ungestörten Bewegung entlehnt werden dürfen, ohne die gesetzte Genauigkeitsgrenze zu überschreiten.

Durch die Gleichung 6) ist demnach eine directe Integration der vorgelegten Differentialgleichung ermöglicht, welche bis auf Grössen von der zweiten Ordnung der Massen richtig ist. Man könnte das eben angezeigte Verfahren ohne allzugrosse Schwierigkeiten auf strenge Formen hinführen, doch würden in diesem Falle vielfache Complicationen auftreten, so dass die früher entwickelten strengen Störungsmethoden für die Anwendung bequemer erscheinen. Uebrigens bietet diese Methode noch die Möglichkeit, jene Correctionen der Störungswerthe zu ermitteln, die aus einer Abänderung der zu Grunde gelegten Elemente entstehen; doch gehe ich auf diese Entwickelungen hier nicht näher ein.

Bei der Gleichung 6) wurde vorerst über die Wahl des Coordinatensystemes für x und y nichts weiter festgesetzt, ausser dass die xy-Ebene mit der ungestörten Bahnebene zusammenfällt, was durch die Einführung der Gleichung 5) geschah. Legt man die positive x-Achse in das Perihel, so wird

$$x = r \cos v$$
$$y = r \sin v \; ;$$

da aber bei der gewöhnlich üblichen Einheit in r durch die Multiplication mit x und y bei der Anwendung dieser Methode auf die kleinen Planeten eine Vergrösserung der numerischen Werthe eintreten würde, so setze ich:

$$x = \cos E - e$$
$$y = \sin E \cos \varphi \; ,$$

wo E die excentrische Anomalie vorstellt, also die Grösse a (die halbe grosse Achse) als Einheit eingeführt erscheint; die hier auftretenden Grössen sind übrigens durch die vorbereitenden Rechnungen bereits bekannt.

Das Resultat der bisherigen Untersuchungen lässt sich also dahin aussprechen, dass ein bis auf Grössen zweiter Ordnung richtiger Werth aus der Integration der Differentialgleichung 1) hervorgeht durch:

$$\xi = \frac{a^2}{k\sqrt{p}} \left\{ \sin E \cos \varphi \int A \, (\cos E - e) \, dt - (\cos E - e) \int A \sin E \cos \varphi \, dt \right\} \; . \qquad 7)$$

Es soll nun diese Form, die einer sehr allgemeinen Anwendung fähig ist, für die Hansen-Tietjen'sche Wahl der polaren Coordinaten verwendet werden. Die Anwendung der urspünglichen Hansen'schen Form wäre zwar in diesem Falle zweckmässiger, doch wird es unter der Voraussetzung, dass einer nach der vorliegenden Methode geführten vorläufigen Störungsrechnung seiner Zeit eine strenge Berechnung der Störungen etwa nach der Hansen-Tietjen'schen Methode nachfolgen soll, angemessener und bequemer sein, diese Form bereits in Rechnung gezogen zu haben.

Nimmt man nur auf die ersten Potenzen der Massen Rücksicht, so lassen sich die bei der Entwickelung der Hansen-Tietjen'schen Methode gegebenen Differentialgleichungen (pag. 148) in der Form schreiben:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2\nu}{r^3} &= \Sigma\,(R\ \ w_1) + 2\,\frac{k\sqrt{p}}{r^4}\int\Sigma\,(U)\,dt \\
\frac{d\,\Delta M}{dt} &= -\,2\,\mu\,\nu \\
\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} &= \Sigma\,(W_1) \\
\frac{d\,\Delta\omega}{dt} &= \frac{1}{r^2}\int\Sigma\,(U)\,dt\,,
\end{aligned}
\right\}\qquad 8)
$$

wobei die Bedeutung der in diesen Formeln vorkommenden Grössen leicht aus den dortigen Entwickelungen klar gelegt werden kann. In diesen Ausdrücken wollen wir einige unwesentliche Abänderungen vornehmen, um die Anwendung des Integrales 7) zu erleichtern; dadurch werden die Buchstaben in den obigen Formeln eine etwas geänderte Bedeutung gegen früher erlangen. Setzt man nämlich, um nicht nachträglich die Multiplication mit a^2 ausführen zu müssen:

$$
z = \frac{a^2}{\sqrt{p}}\,m_1\,w\,k\,10^7
$$

und

$$
\begin{aligned}
U &= z\,K\,r\,\eta' \\
R &= z\left\{\frac{K\xi'}{r} - \frac{1}{\varrho^3}\right\} \\
W &= z\,K\,\zeta'\,,
\end{aligned}
$$

welche Grössen für jeden einzelnen störenden Planeten gerechnet werden müssen, und bezeichnet durch ein vorgesetztes Summenzeichen die Summen der so ermittelten störenden Kräfte für die verschiedenen in Betracht gezogenen Planeten, so wird man zunächst in den Formeln 8) zu setzen haben:

$$
\left.
\begin{aligned}
U' &= \int\Sigma\,(U)\,dt \\
R' &= \Sigma\,(R) + \frac{2\,w\,k\sqrt{p}}{r^4}\,U'\,.
\end{aligned}
\right\}\qquad 9)
$$

und die erforderlichen einfachen Integrale sind dann:

$$
\left.
\begin{aligned}
Z_s &= \int\Sigma\,(W)\,\{\cos E - e\}\,dt \\
Z_c &= \int\Sigma\,(W)\,\sin E\cos\varphi\,dt \\
N_s &= \int(R')\,\{\cos E - e\}\,dt \\
N_c &= \int(R')\,\sin E\cos\varphi\,dt\,.
\end{aligned}
\right\}\qquad 10)
$$

sobald diese mit Hilfe der mechanischen Quadratur ermittelt sind, ergeben sich die Integrale der in 8) auftretenden Störungsgrössen durch die Ausdrücke:

$$
\left.
\begin{aligned}
\nu &= N_s\sin E\cos\varphi - N_c\,(\cos E - e) \\
\Delta M &= -\,\frac{2\,w\,\mu}{10^7}\int\nu\,dt
\end{aligned}
\right\}\qquad 11)
$$

$$\delta\omega = \frac{n k \sqrt{p}}{a^2\, 10^7 \sin 1''} \int \frac{U}{r^2}\, dt$$
$$z = Z_s \sin E \cos\varphi - Z_c (\cos E - e) \, . \qquad \text{II}$$

wobei zu beachten ist, dass die drei letzten Integrale aus den einfach summirten Werthen nur für jene bestimmten Zeitepochen berechnet zu werden brauchen, für welche deren Kenntniss, etwa zum Zwecke des Vergleichens der Rechnung mit den Beobachtungen, erforderlich ist.

Wie man sieht, ist jede indirecte Rechnung vermieden, und man ist in der Lage, die Störungsrechnung durchaus ephemeridenartig für das ganze vorgelegte Zeitintervall zu erledigen, und so alle in der Rechnung auftretenden und im weiteren Verlaufe derselben nöthigen Grössen vor ihrer Verwendung durch Bildung der Differenzwerthe streng auf ihre Richtigkeit prüfen zu können.

Vergleicht man die nöthigen Rechnungsoperationen bei den strengen Methoden mit den hier erforderlichen, so wird man eine sehr wesentliche Abkürzung nicht wahrnehmen, doch verursacht die zuletzt erwähnte Anlage und Durchführung der Rechnung eine solche Erleichterung bei der thatsächlichen Anwendung, dass über die Vortheile der eben entwickelten Methode kein Zweifel bestehen kann.

Trägt man nun alle für die Rechnung nöthigen Formeln zusammen, so wird man zunächst die gegenseitige Bahnlage des gestörten und des störenden Planeten zu berechnen haben nach:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2} J \sin\tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi') &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega' - \Omega) \sin\tfrac{1}{2}(i' + i) \\
\sin\tfrac{1}{2} J \cos\tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi') &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega' - \Omega) \sin\tfrac{1}{2}(i' - i) \\
\cos\tfrac{1}{2} J \sin\tfrac{1}{2}(\Phi - \Phi') &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega' - \Omega) \cos\tfrac{1}{2}(i' + i) \\
\cos\tfrac{1}{2} J \cos\tfrac{1}{2}(\Phi - \Phi') &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega' - \Omega) \cos\tfrac{1}{2}(i' - i) \, .
\end{aligned} \qquad \text{I}$$

Ich finde so, indem ich für Erato die bei den vorhergehenden Störungsrechnungen (pag. 173) benützten Elemente verwende und für Jupiter und Saturn annehme:

$$\Omega'_{♃} = 99^\circ\ 0'\ 36'' \qquad \Omega'_{♄} = 112^\circ\ 31'\ 36''$$
$$i'_{♃} = 1^\circ\ 18'\ 46'' \qquad i'_{♄} = 2^\circ\ 12'\ 24'' \, .$$

nach I:

$$J_{♃} = 1^\circ\ 11'\ 30'' \qquad J_{♄} = 0^\circ\ 36'\ 22''$$
$$(\Omega' + \Phi')_{♃} = 335^\circ\ 17'\ 50'' \qquad (\Omega' + \Phi')_{♄} = 56^\circ\ 25'\ 26''$$
$$(\Phi - \omega)_{♃} = -\ 63^\circ\ 8'\ 48'' \qquad (\Phi - \omega)_{♄} = 17^\circ\ 58'\ 48'' \, .$$

Ist L' die aus den astronomischen Ephemeriden zu entnehmende Länge in der Bahn, so wird für jeden störenden Planeten zu setzen sein:

$$\begin{aligned}
u' &= L' - (\Omega' + \Phi') \\
\operatorname{tang} u &= \operatorname{tang} u' \cos J \\
\sin B_1 &= \sin u' \sin J \\
L_1' &= u + (\Phi - \omega) \, .
\end{aligned} \qquad \text{II}$$

Im vorliegenden Falle wurde aber von der Kleinheit der Neigung Vortheil gezogen, indem unmittelbar u aus u' abgeleitet wurde (vergl. pag. 160) mittelst der Formel:

$$u = u' - \frac{\tang \frac{1}{2} J^2}{\sin 1''} \sin 2\, u'$$

welche Rechnung durch eine kleine Tafel, die mit dem Argumente u' den Correctionswerth gab, erleichtert wurde.

Die ungestörten wahren Anomalien und Radienvectoren für Erato wurden der Rechnung entlehnt, welche bei der Encke'schen Methode als Beispiel gedient hat, und ebenso die Logarithmen der Grössen ($\cos E - e$) und $\sin E \cos \varphi$; dieselben stehen auf dem mit (2) bezeichneten Bogen (pag. 266 ff.).

Man hat nun für jeden einzelnen störenden Planeten, indem dessen Radiusvector r_1 aus den Ephemeriden entlehnt wird, weiter zu berechnen:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \cos \vartheta \cos \Theta &= r_1 \cos B_1 \cos (L'_1 - v) - r = \xi' - r \\
\varrho \cos \vartheta \sin \Theta &= r_1 \cos B_1 \sin (L'_1 - v) = \eta' \\
\varrho \sin \vartheta &= r_1 \sin B_1 = \zeta' \\
\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3} &= K \\
w k\, (10^7 m_1) \frac{a^2}{\sqrt{p}} &= \varkappa \\
\log w k\, (10^7 m_♃) &= 3.81733 \\
\log w k\, (10^7 m_♄) &= 3.2934 \quad \text{40 tägiges Intervall.} \\
U &= \varkappa K r \eta' \\
R &= \frac{\varkappa K \xi'}{r} - \frac{\varkappa}{\varrho^3} \\
W &= \varkappa K \zeta' ;
\end{aligned}\right\} \quad \text{III)}$$

Dann bildet man:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma (U) &= U_♃ + U_♄ + \ldots \\
\Sigma (R) &= R_♃ + R_♄ + \ldots \\
\Sigma (W) &= W_♃ + W_♄ + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

Die hierfür nöthigen Rechnungen habe ich im Umfange der früher ausgeführten Beispiele berechnet und für Jupiter durchaus fünfstellig durchgeführt, um später (pag. 264) die Fehler der Methode mit Sicherheit nachweisen zu können; sonst würde im Allgemeinen eine vierstellige Rechnung genügen. Die Rechnung selbst ist auf dem mit ♃ und ♄ bezeichneten Bogen (pag. 268 ff.) durchgeführt, und zwar steht oben die Rechnung für Jupiter, unten jene für Saturn.

Nun schreitet man zur Bildung des Integrales von $\Sigma (U)$; man wird für dieses und die folgenden Integrale nach der mechanischen Quadratur die oben entwickelten Formeln (pag. 35) anzuwenden haben, und zwar:

Für die Bildung der Anfangsconstanten hat man die Formel:

$$ {}^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) - \ldots $$

Für die Bildung des Integrales die Formel: (V)

$$ \int^{a+iw} f(x)\,dx = {}^{\mathrm{I}}f(a+iw) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a+iw) + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a+iw) - \ldots $$

In dem letzteren Ausdrucke sind die angesetzten Functionswerthe arithmetische Mittel. Ausserdem bildet man die Integrale Z_s und Z_c; man hat also:

$$ \begin{aligned} (U) &= \int \Sigma(U)\,dt \\ Z_s &= \int \Sigma(W)(\cos E - e)\,dt \\ Z_c &= \int \Sigma(W)\sin E\cos\varphi\,dt \\ {}^{*}z &= Z_s \sin E\cos\varphi - Z_c(\cos E - e). \end{aligned} \qquad \text{VI} $$

Hat man diese Integralwerthe für die Epochen der Rechnung mittelst der Formeln (V) hergestellt, so hat die Bildung der folgenden Grössen keine Schwierigkeit:

$$ \begin{aligned} (R) &= \Sigma\left(R + \frac{2\,wk\sqrt{p}}{r^4}(U)\right) \\ \log 2(wk) &= 0.13867 \quad \text{(40tägiges Intervall)} \\ {}^{*}\Delta\omega &= \frac{wk\sqrt{p}}{a^2\,10^7\sin 1''}\int \frac{1}{r^2}(U)\,dt \\ N_s &= \int (R)\{\cos E - e\}\,dt \\ N_c &= \int (R)\sin E\cos\varphi\,dt. \end{aligned} \qquad \text{VII} $$

Aus diesen letzteren Grössen, welche ebenfalls ohne Schwierigkeit nach (V) hergestellt werden können, bildet man schliesslich:

$$ \begin{aligned} \nu &= N_s \sin E\cos\varphi - N_c(\cos E - e) \\ {}^{*}\Delta M &= -\frac{2\,w\,\mu}{10^7}\int \nu\,dt \\ \log\left\{-\frac{2w}{10^7}\right\} &= 4_n90309 \quad \text{(40tägiges Intervall).} \end{aligned} \qquad \text{VIII} $$

Die in (VII) und (VIII) auftretenden constanten Factoren der Integrale wird man bei der Rechnung sogleich unter das Integralzeichen bringen und beachten, dass die in den Formelsystemen (VI), (VII) und (VIII) mit * bezeichneten Integrale aus den summirten Reihen nur an jenen Stellen abzuleiten sind, wo die Kenntniss der Störungswerthe aus anderen Gründen nöthig ist.

Nach diesen Bemerkungen wird das nachfolgende Beispiel wohl leicht verständlich sein. Ich habe das Resultat dieser genäherten Störungsrechnung mit den früher streng ermittelten Werthen von 120 zu 120 Tagen verglichen und erhalte

die nachstehenden Unterschiede im Sinne: strenge — genäherte Rechnung; es sind also die aus der Vernachlässigung der höheren Potenzen entstehenden Correctionen angesetzt, wobei die Fehler von z und ν in Einheiten der siebenten Stelle verstanden werden:

	dz	$d\nu$	$d\Delta M$	$d\Delta\omega$
1875 Febr. 24	0	0	0″0	0″0
1874 Octbr. 27	0	0	0.0	0.0
1874 Juni 29	0	0	0.0	0.0
1874 März 1	0	+ 2	0.0	0.0
1873 Nov. 1	0	+ 13	— 0.2	+ 0.1
1873 Juli 4	— 1	+ 32	— 0.8	+ 0.5
1873 März 6	— 3	+ 66	— 2.5	+ 1.4
1872 Nov. 6	— 10	+ 137	— 5.0	+ 2.7
1872 Juli 9	— 19	+ 257	— 7.1	+ 4.5
1872 März 11	— 31	+ 390	— 6.5	+ 6.6
1871 Nov. 12	— 38	+ 415	— 2.7	+ 8.7
1870 Juli 15	— 36	+ 259	+ 2.1	+ 10.5 .

Betrachtet man die in der vorstehenden Zusammenstellung enthaltenen Werthe, so wird man den hohen Grad der Annäherung, der durch das eben entwickelte Verfahren erreicht wurde, sofort erkennen. In dem vorgelegten Beispiele sind mit Absicht sehr ungünstige Verhältnisse gewählt worden (Jupiternähe); in der Regel werden sich die Annäherungen noch weit günstiger gestalten. Ausserdem ist die Rechnung weiter fortgeführt worden, als man dies in ähnlichen Fällen thun wird, was bei der ausserordentlichen Grösse der Störungen (Encke's strenge Methode wird am Schlusse kaum mehr mit Sicherheit anwendbar) bedeutende Differenzen hervorbringen muss; man wird von dieser Methode in der Regel Gebrauch machen, wenn etwa nicht mehr als drei oder vier Oppositionen zur Bahnbestimmung vorliegen; legt man dann die Osculationsepoche nahe in die Mitte, so werden selbst bei noch ungünstigeren Verhältnissen, als sie im vorliegenden Beispiele auftreten, die obigen Formeln nahezu strenge Werthe liefern. Bestimmt man nun mit Hilfe dieser genäherten Störungswerthe die Elemente nach den vorhandenen Beobachtungen, so wird man vom Zeitpunkte der gewählten Osculationsepoche an, nach einer der oben entwickelten Methoden die strengen Störungswerthe neu zu berechnen haben. Die Ermittelung der Störungen von der Osculationsepoche nach rückwärts wird wohl in der Regel unterbleiben können, da meist in den hier in Betracht kommenden Fällen eine Rückrechnung auf entferntere Epochen nicht nöthig sein wird und für den naheliegenden Zeitraum die vorhandenen Näherungswerthe selbst strengen Anforderungen genügen werden.

Schliesslich mache ich darauf aufmerksam, dass ich im LXII. Bande (November-Heft) der Sitzungsberichte der kais. Academie der Wissenschaften zu Wien eine

Methode der Störungsrechnung publicirt habe, die ebenfalls nur die ersten Potenzen der Massen berücksichtigt und ganz ausserordentliche Vortheile und Abkürzungen liefert, wenn es sich darum handelt, die Störungwerthe für mehre Revolutionen eines periodischen Kometen zu berechnen. Da aber diese Forderung selten eintreten wird, so gehe ich hier nicht näher auf diese Methode ein und begnüge mich mit dem eben angeführten Hinweis.

(62)$_1$

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20
v	188° 8′16″	183° 2′ 2″	177°56′23″	172°50′20″	167°42′51″	162°32′54″	157°19′26″	152° 1′21″
r	0.56402	0.56481	0.56488	0.56423	0.56285	0.56076	0.55795	0.55442
$\cos E - e$	0_n06415	0_n06872	0_n06912	0_n06535	0_n05731	0_n04482	0_n02753	0_n00496
$\sin E \cos \varphi$	9_n21947	8_n79299	8.62511	9.16448	9.39533	9.54226	9.64852	9.73023
ΣW	− 162.9	− 180.0	− 196.7	− 211.8	− 223.9	− 231.5	− 232.4	− 225.2
$\log \Sigma W$	2_n21192	2_n25527	2_n29380	2_n32593	2_n35005	2_n36455	2_n36624	2_n35257
$2wk\sqrt{p}\,U$	4_n77666	4_n31281	4.32372	4.80867	5.03454	5.18003	5.28286	5.35697
r^4	2.25608	2.25924	2.25952	2.25692	2.25140	2.24304	2.23180	2.21768
$J\Sigma R$	− 331.6	− 113.1	+ 115.9	+ 356.2	+ 606.9	+ 864.9	+ 1124.8	+ 1378.1
ΣR	+ 467.8	+ 627.0	+ 812.9	+ 1026.3	+ 1265.0	+ 1521.8	+ 1782.6	+ 2025.8
$\log R$	2.13418	2.71088	2.96792	3.14067	3.27229	3.37780	3.46351	3.53198
$\frac{wk''\sqrt{p}}{10^7\,a^2}\,U$	1_n79910	1_n33525	1.34616	1.83111	2.05698	2.20247	2.30530	2.37941
r^2	1.12804	1.12962	1.12996	1.12846	1.12570	1.12152	1.11590	1.10884
N_c	1_n64444	1_n02119	0_n84510	2_n07737	2_n64777	3_n03523	3_n33047	3_n56790
N_s	2_n86617	2_n55654	2.68305	3.26203	3.56819	3.78491	3.95293	4.08828
$-n_2$	+ 51	+ 12	+ 8	+ 139	+ 507	+ 1202	+ 2280	+ 3740
$+n_1$	+ 122	+ 22	+ 20	+ 267	+ 919	+ 2124	+ 3994	+ 6584
$\log n$	1.85126	1.00000	1.07918	2.10721	2.61490	2.96473	3.23401	3.45393

(62)$_2$

Datum	1874			1873				
	April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4
v	146°37′30″	141° 6′43″	135°27′43″	129°39′11″	123°39′43″	117°27′49″	111° 1′59″	104°20′37″
r	0.55016	0.54520	0.53952	0.53315	0.52611	0.51842	0.51013	0.50129
$\cos E - e$	9_n97642	9_n94091	9_n89700	9_n84259	9_n77437	9_n68682	9_n56963	9_n39980
$\sin E \cos \varphi$	9.79514	9.84754	9.89000	9.92412	9.95092	9.97101	9.98470	9.99205
ΣW	− 208.9	− 183.9	− 152.2	− 117.0	− 82.4	− 51.6	− 26.6	− 8.1
$\log \Sigma W$	2_n31994	2_n26458	2_n18241	2_n06819	1_n91593	1_n71265	1_n42488	0_n90849
$2wk\sqrt{p}\,U$	5.40871	5.44142	5.45719	5.45770	5.44467	5.41996	5.38560	5.34375
r^4	2.20064	2.18080	2.15808	2.13260	2.10444	2.07368	2.04052	2.00516
$J\Sigma R$	+ 1614.6	+ 1822.3	+ 1991.2	+ 2114.0	+ 2188.9	+ 2219.6	+ 2213.5	+ 2180.6
ΣR	+ 2222.7	+ 2343.8	+ 2365.9	+ 2280.6	+ 2096.5	+ 1839.2	+ 1540.3	+ 1230.6
$\log R$	3.58402	3.61973	3.63920	3.64292	3.63199	3.60840	3.57447	3.53291
$\frac{wk''\sqrt{p}}{10^7\,a^2}\,U$	2.43115	2.46386	2.47963	2.48014	2.46711	2.44240	2.40804	2.36619
r^2	1.10032	1.09040	1.07904	1.06630	1.05222	1.03684	1.02026	1.00258
N_c	3_n76408	3_n92825	4_n06611	4_n18167	4_n27801	4_n35779	4_n42346	4_n47721
N_s	4.19886	4.28912	4.36197	4.41952	4.46367	4.49623	4.51893	4.53341
$-n_2$	+ 5502	+ 7399	+ 9186	+ 10575	+ 11282	+ 11082	+ 9842	+ 7534
$+n_1$	+ 9863	+ 13698	+ 17864	+ 22062	+ 25977	+ 29325	+ 31888	+ 33532
$\log n$	3.63959	3.79927	3.93842	4.06021	4.16717	4.26109	4.34333	4.41494

(62)3

1873				1872				
Mai 25	April 15	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9
97°22′ 5″	90° 4′52″	82°27′29″	74°28′44″	66° 7′44″	57°24′10″	48°18′27″	38°51′54″	29° 6′56″
0.49198	0.48232	0.47244	0.46251	0.45276	0.44342	0.43480	0.42720	0.42094
9_n10454	7_n13793	9.09506	9.39451	9.56439	9.67931	9.76223	9.82305	9.86680
9.99290	9.98684	9.97319	9.95090	9.91844	9.87350	9.81248	9.72933	9.61261
+ 4.5	+ 11.9	+ 15.7	+ 16.7	+ 16.0	+ 14.2	+ 11.8	+ 8.9	+ 6.1
0.65321	1.07559	1.19590	1.22272	1.20412	1.15229	1.07188	0.94939	0.78533
5.29656	5.24616	5.19464	5.14402	5.09623	5.05313	5.01627	4.98685	4.96561
1.96792	1.92928	1.88976	1.85004	1.81104	1.77368	1.73920	1.70880	1.68376
+ 2131.3	+ 2074.3	+ 2017.8	+ 1967.8	+ 1928.4	+ 1903.0	+ 1892.7	+ 1896.9	+ 1913.6
+ 933.4	+ 664.1	+ 429.8	+ 233.2	+ 73.7	— 51.2	— 143.9	— 207.6	— 244.7
3.48639	3.43749	3.38874	3.34262	3.30148	3.26759	3.24274	3.22771	3.22243
2.31900	2.26860	2.21708	2.16646	2.11867	2.07557	2.03871	2.00929	1.98805
0.98396	0.96464	0.94488	0.92502	0.90552	0.88684	0.86960	0.85440	0.84188
4_n52103	4_n55664	4_n58553	4_n60892	4_n62785	4_n64312	4_n65537	4_n66505	4_n67245
4.54117	4.54354	4.54160	4.53619	4.52798	4.51739	4.50468	4.48991	4.47305
+ 4222	+ 49	— 4793	— 10079	— 15568	— 21010	— 26158	— 30768	— 34614
+ 34203	+ 33914	+ 32718	+ 30696	+ 27952	+ 24597	+ 20757	+ 16567	+ 12180
4.47685	4.52975	4.57416	4.61039	4.63869	4.65903	4.67131	4.67518	4.67019

(62)4

1872				1871				
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct.	Aug. 24	Juli 15
19° 7′ 3″	8°56′48″	358°41′33″	348°27′ 3″	338°18′58″	328°22′29″	318°41′55″	309°20′29″	300°20′20″
0.41631	0.41354	0.41277	0.41406	0.41732	0.42239	0.42902	0.43691	0.44574
9.89620	9.91274	9.91718	9.90970	9.88997	9.85710	9.80933	9.74348	9.65365
9.43605	9.10984	8_n27553	9_n22006	9_n48944	9_n64655	9_n75310	9_n82983	9_n88630
+ 3.3	+ 0.5	— 2.0	— 4.5	— 6.8	— 9.0	11.0	— 12.8	— 14.5
0.51851	9.69897	0_n30103	0_n65321	0_n83251	0_n95424	1_n04139	1_n10721	1_n16137
4.95263	4.94746	4.94923	4.95679	4.96886	4.98423	5.00186	5.02082	5.04044
1.66524	1.65416	1.65108	1.65624	1.66928	1.68956	1.71608	1.74764	1.78296
+ 1938.2	+ 1964.7	+ 1986.8	+ 1997.8	+ 1993.3	+ 1970.9	+ 1931.0	+ 1875.8	+ 1809.2
— 258.5	— 252.2	— 229.6	— 194.9	— 151.8	— 104.2	— 55.3	— 7.7	+ 37.4
3.22523	3.23363	3.24482	3.25598	3.26517	3.27107	3.27316	3.27141	3.26637
1.97507	1.96990	1.97167	1.97923	1.99130	2.00667	2.02430	2.04326	2.06288
0.83262	0.82708	0.82554	0.82812	0.83464	0.84478	0.85804	0.87382	0.89148
4_n67770	4_n68080	4_n68165	4_n68015	4_n67620	4_n66976	4_n66086	4_n64967	4_n63640
4.45398	4.43265	4.40911	4.38362	4.35675	4.32934	4.30249	4.27743	4.25544
— 37488	— 39223	— 39704	— 38891	— 36827	— 33640	— 29525	— 24726	— 19501
+ 7763	+ 3487	— 484	— 4015	— 7018	— 9460	— 11366	— 12801	— 13859
4.65563	4.63053	4.59351	4.54253	4.47435	4.38346	4.25910	4.07646	3.75143

$\mathfrak{A}$ u. $\mathfrak{b}_1$

Datum	1875 Febr. 4	Jan. 15	1874 Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20
u'	227°29′50″	224°28′33″	221°27′22″	218°26′15″	215°25′ 7″	212°23′58″	209°22′41″	206°21′16″
Δu	— 22	— 22	— 22	— 21	— 21	— 20	— 19	— 17
$\sin u'$	9_n86761	9_n84548	9_n82089	9_n79355	9_n76379	9_n72901	9_n69070	9_n64730
$\sin B_1$	8_n18561	8_n16348	8_n13889	8_n11155	8_n08109	8_n04701	8_n00870	7_n96530
r_1	0.73657	0.73673	0.73683	0.73686	0.73683	0.73675	0.73660	0.73639
$\cos B_1$	9.99995	9.99995	9.99996	9.99996	9.99997	9.99997	9.99998	9.99998
L'_1	164°20′40″	161°19′23″	158°18′12″	155°17′ 6″	152°15′58″	149°14′50″	146°13′34″	143°12′11″
$L'_1 - r$	336°12′24″	338°17′21″	340°21′49″	342°26′46″	344°33′ 7″	346°41′56″	348°54′ 8″	351°10′50″
$\cos (L'_1 - r)$	9.96142	9.96804	9.97398	9.97929	9.98402	9.98819	9.99180	9.99483
$r_1 \cos B_1$	0.73652	0.73668	0.73679	0.73682	0.73680	0.73672	0.73658	0.73637
$\sin (L'_1 - r)$	9_n60578	9_n56811	9_n52641	9_n47944	9_n42547	9_n36186	9_n28439	9_n18560
ξ'	0.69794	0.70472	0.71077	0.71611	0.72082	0.72491	0.72838	0.73120
r	0.56402	0.56481	0.56488	0.56423	0.56285	0.56076	0.55795	0.55442
Subtr	9.55774	9.57990	9.60123	9.62187	9.64217	9.66211	9.68176	9.70103
$\xi' - r$	0.12176	0.14471	0.16611	0.18610	0.20502	0.22287	0.23971	0.25545
	9_n93289	9_n91509	9_n89265	9_n86404	9.86981	9.90286	9.93241	9.95766
η'	0_n34230	0_n30479	0_n26320	0_n21626	0_n16227	0_n09858	0_n02097	9_n92197
$\varrho \cos \vartheta$	0.40941	0.38970	0.37055	0.35222	0.33521	0.32001	0.30730	0.29779
	9.99977	9.99977	9.99978	9.99979	9.99980	9.99982	9.99984	9.99986
ζ'	8_n92218	8_n90021	8_n87572	8_n84841	8_n81792	8_n78376	8_n74530	8_n70169
ϱ	9.59036	9.61007	9.62923	9.64757	9.66459	9.67981	9.69254	9.70207
ϱ^3	8.77108	8.83021	8.88769	8.94271	8.99377	9.03943	9.07762	9.10621
r_1^{-3}	7.79029	7.78981	7.78951	7.78942	7.78951	7.78975	7.79020	7.79083
Subtr.	9.95205	9.95851	9.96390	9.96836	9.97198	9.97484	9.97700	9.97847
K	8.72313	8.78872	8.85159	8.91107	8.96575	9.01427	9.05462	9.08468
$\xi' : r$	0.13392	0.13991	0.14589	0.15188	0.15797	0.16415	0.17043	0.17678
$\varkappa K$	3.29031	3.35590	3.41877	3.47825	3.53293	3.58145	3.62180	3.65186
$\eta' : r$	0_n90632	0_n86960	0_n82808	0_n78049	0_n72512	0_n65934	0_n57892	0_n47639
$\varkappa K \xi' : r$	3.42423	3.49581	3.56466	3.63013	3.69090	3.74560	3.79223	3.82864
$\varkappa : \varrho^3$	3.33826	3.39739	3.45487	3.50989	3.56095	3.60661	3.64480	3.67339
Subtr.	9.34026	9.40544	9.45883	9.50377	9.54258	9.57654	9.60660	9.63318
R	+ 477.0	+ 635.1	+ 819.8	+ 1031.9	+ 1269.2	+ 1524.6	+ 1784.0	+ 2025.7
U	— 15726	— 16807	— 17654	— 18144	— 18115	17410	— 15875	— 13435
W	— 163.1	— 180.3	— 197.0	— 212.2	— 224.3	— 231.9	— 232.9	— 225.7
u'	260°50′8	259°36′2	258°21′7	257° 7′3	255°53′0	254°38′9	253°24′9	252°11′0
Δu	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	— 0.1	— 0.1	— 0.1
$\sin u'$	9_n9944	9_n9928	9_n9910	9_n9889	9_n9867	9_n9843	9_n9815	9_n9786
$\sin B_1$	8_n0188	8_n0172	8_n0154	8_n0133	8_n0111	8_n0087	8_n0059	8_n0030
r_1	0.9950	0.9954	0.9957	0.9961	0.9964	0.9968	0.9971	0.9974
$\cos B_1$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
L'_1	278°49′6	277°35′0	276°20′5	275° 6′1	273°51′8	272°37′6	271°23′6	270° 9′7
$L'_1 - r$	90°41′3	94°33′0	98°24′1	102°15′8	106° 9′0	110° 4′7	114° 4′2	118° 8′4
$\cos (L'_1 - r)$	8_n0797	8_n8994	9_n1647	9_n3272	9_n4443	9_n5357	9_n6105	9_n6736
$r_1 \cos B_1$	0.9950	0.9954	0.9957	0.9961	0.9964	0.9968	0.9971	0.9974
$\sin (L'_1 - r)$	0.0000	9.9986	9.9953	9.9900	9.9825	9.9728	9.9605	9.9454
ξ'	9_n0747	9_n8948	0_n1604	0_n3233	0_n4407	0_n5325	0_n6076	0_n6710
r	0.5640	0.5648	0.5649	0.5642	0.5628	0.5608	0.5579	0.5544
Subtr.	0.0139	0.0841	0.1443	0.1971	0.2443	0.2871	0.2769	0.2466
$\xi' - r$	0_n5779	0_n6489	0_n7092	0_n7613	0_n8071	0_n8479	0_n8845	0_n9176
	9.9703	9.9597	9.9476	9.9340	9.9188	9.9019	9.8830	9.8617
η'	0.9950	0.9940	0.9910	0.9861	0.9789	0.9696	0.9576	0.9428
$\varrho \cos \vartheta$	1.0247	1.0343	1.0434	1.0521	1.0601	1.0677	1.0746	1.0811
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
ζ'	9_n0138	9_n0126	9_n0111	9_n0094	9_n0075	9_n0055	9_n0030	9_n0004
ϱ	8.9753	8.9657	8.9566	8.9479	8.9399	8.9323	8.9254	8.9189
ϱ^3	6.9259	6.8971	6.8698	6.8437	6.8197	6.7969	6.7762	6.7567
r_1^{-3}	7.0150	7.0139	7.0128	7.0118	7.0107	7.0097	7.0088	7.0078
Subtr.	9.3574	9.4894	9.5910	9.6745	9.7422	9.8009	9.8503	9.8936
K	6_n2833	6_n3865	6_n4608	6_n5182	6_n5619	6_n5978	6_n6265	6_n6503
$\xi' : r$	8_n5107	9_n3300	9_n5955	9_n7591	9_n8779	9_n9717	0_n0497	0_n1166
$\varkappa K$	0_n3265	0_n4297	0_n5040	0_n5614	0_n6051	0_n6410	0_n6697	0_n6935
$\eta' : r$	1.5590	1.5588	1.5559	1.5503	1.5417	1.5304	1.5155	1.4972
$\varkappa K \xi' : r$	8.8372	9.7597	.0995	0.3205	0.4830	0.6127	0.7194	0.8101
$\varkappa : \varrho^3$	0.9691	0.9403	0.9130	0.8869	0.8629	0.8401	0.8194	0.7999
Subtr	9.9968	9.9704	9.9276	9.8625	0.1456	9.8377	9.4132	8.3759
R	— 9.2	— 8.1	— 6.9	— 5.6	— 4.2	— 2.8	— 1.4	+ 0.1
U	— 77	— 97	— 115	— 129	— 140	148	— 153	— 155
W	+ 0.2	+ 0.3	+ 0.3	+ 0.4	+ 0.4	+ 0.4	+ 0.5	+ 0.5

♃ u. ♄ 2

1874			1873					
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25
203°19′39″	200°17′46″	197°15′36″	194°13′ 5″	191°10′ 9″	188° 6′45″	185° 2′52″	181°58′26″	178°53′24″
− 16	− 14	− 12	− 10	− 9	− 6	− 4	− 2	+ 1
9_n59768	9_n54017	9_n47233	9_n39025	9_n28714	9_n14958	8_n94442	8_n53711	8.28717
7_n91568	7_n85817	7_n79033	7_n70825	7_n60514	7_n46758	7_n26242	6_n85511	6.60517
0.73611	0.73578	0.73539	0.73493	0.73443	0.73386	0.73325	0.73257	0.73185
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
140°10′35″	137° 8′44″	134° 6′36″	131° 4′ 7″	128° 1′12″	124°57′51″	121°54′ 0″	118°49′36″	115°44′37″
353°33′ 5″	356° 2′ 1″	358°38′53″	1°24′56″	4°21′29″	7°30′ 2″	10°52′ 1″	14°28′59″	18°22′32″
9.99724	9.99896	9.99988	9.99987	9.99874	9.99627	9.99214	9.98597	9.97727
0.73610	0.73577	0.73538	0.73492	0.73443	0.73386	0.73325	0.73257	0.73185
9_n05042	8_n83993	8_n37279	8.39276	8.88075	9.11573	9.27538	9.39810	9.49864
0.73334	0.73473	0.73526	0.73479	0.73317	0.73013	0.72539	0.71854	0.70912
0.55016	0.54520	0.53952	0.53315	0.52611	0.51842	0.51013	0.50129	1.49198
9.71990	9.73810	9.75544	9.77151	9.78595	9.79810	9.80725	9.81232	9.81204
0.27006	0.28330	0.29496	0.30466	0.31206	0.31652	0.31738	0.31361	0.30402
9.97775	9.99181	9.99908	9.99904	9.99140	9.97608	9.95306	9.92223	9.88316
9_n78652	9_n57570	9_n10817	9.12768	9.61518	9.84959	0.00863	0.13067	0.23049
0.29231	0.29149	0.29588	0.30562	0.32066	0.34044	0.36432	0.39138	0.42086
9.99989	9.99991	9.99994	9.99996	9.99998	9.99999	0.00000	0.00000	0.00000
8_n65179	8_n59395	8_n52572	8_n44318	8_n33957	8_n20144	7_n99567	7_n58768	7.33702
9.70758	9.70842	9.70406	9.69434	9.67932	9.65955	9.63568	9.60862	9.57914
9.12274	9.12526	9.11218	9.08302	9.03766	8.97865	8.90704	8.82586	8.73742
7.79167	7.79266	7.79383	7.79521	7.79671	7.79842	7.80025	7.80229	7.80445
9.97925	9.97932	9.97862	9.97702	9.97434	9.97033	9.96464	9.95678	9.94611
9.10199	9.10458	9.09080	9.06004	9.01232	8.94898	8.87168	8.78264	8.68353
0.18318	0.18953	0.19574	0.20164	0.20700	0.21171	0.21526	0.21725	0.21714
3.66917	3.67176	3.65798	3.62722	3.57948	3.51616	3.43886	3.34982	3.25071
0_n33668	0_n12090	9_n64769	9.66083	0.14129	0.36801	0.51876	0.63196	0.72247
3.85235	3.86129	3.85372	3.82886	3.78654	3.72787	3.65412	3.56777	3.46785
3.68992	3.69244	3.67936	3.65020	3.60514	3.54583	3.47422	3.39304	3.30460
9.65663	9.67688	9.69375	9.70663	9.71471	9.71658	9.71030	9.69276	9.65925
+ 2221.0	+ 2340.6	+ 2361.1	+ 2274.2	+ 2088.6	+ 1829.8	+ 1529.4	+ 1218.4	+ 920.1
− 10136	− 6204	− 2021	+ 1941	+ 5257	+ 7659	+ 9070	+ 9589	+ 9401
− 209.4	− 184.4	− 152.7	− 117.6	− 83.0	− 52.2	27.2	− 8.7	+ 3.9
250°57′2	249°43′5	248°29′9	247°16′4	246° 3′0	244°49′7	243°36′5	242°23′4	241°10′3
− 0.1	− 0.1	− 0.1	0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1
9_n9756	9_n9722	9_n9687	9_n9649	9_n9609	9_n9567	9_n9522	9_n9475	9_n9425
8_n0000	7_n9966	7_n9931	7_n9893	7_n9853	7_n9811	7_n9766	7_n9719	7_n9669
0.9977	0.9980	0.9983	0.9986	0.9988	0.9991	0.9993	0.9996	0.9998
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
268°55′9	267°42′2	266°28′6	265°15′1	264° 1′7	262°48′4	261°35′2	260°22′1	259° 9′0
122°18′4	126°35′5	131° 0′9	135°35′9	140°22′0	145°20′6	150°33′2	156° 1′5	161°46′9
9_n7279	9_n7753	9_n8170	9_n8540	9_n8866	9_n9152	9_n9399	9_n9608	9_n9777
0.9977	0.9980	0.9983	0.9986	0.9988	0.9991	0.9993	0.9996	0.9998
9.9269	9.9047	9.8777	9.8449	9.8047	9.7549	9.6916	9.6089	9.4951
0_n7256	0_n7733	0_n8153	0_n8526	0_n8854	0_n9143	0_n9392	0_n9604	0_n9775
0.5502	0.5452	0.5395	0.5331	0.5261	0.5184	0.5101	0.5013	0.4920
0.2221	0.2018	0.1847	0.1700	0.1575	0.1467	0.1375	0.1295	0.1229
0_n9477	0_n9751	1_n0000	1_n0226	1_n0429	1_n0610	1_n0767	1_n0899	1_n1004
9_n8607	9_n8827	9_n9027	9_n9211	9_n9377	9_n9527	9_n9660	9_n9776	9_n9870
0.9246	0.9027	0.8760	0.8435	0.8035	0.7540	0.6909	0.6085	0.4949
1.0870	1.0924	1.0973	1.1015	1.1052	1.1083	1.1107	1.1123	1.1134
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8_n9977	8_n9946	8_n9914	8_n9879	8_n9841	8_n9802	8_n9759	8_n9715	8_n9667
8.9130	8.9076	8.9027	8.8985	8.8948	8.8917	8.8893	8.8877	8.8866
6.7390	6.7228	6.7081	6.6955	6.6844	6.6751	6.6679	6.6631	6.6598
7.0069	7.0060	7.0051	7.0043	7.0035	7.0027	7.0020	7.0013	7.0006
9.9310	9.9636	9.9919	0.0155	0.0354	0.0516	0.0638	0.0714	0.0762
6_n6700	6_n6864	6_n7000	6_n7110	6_n7198	6_n7267	6_n7317	6_n7345	6_n7360
0_n1754	0_n2281	0_n2758	0_n3195	0_n3593	0_n3959	0_n4291	0_n4591	0_n4855
0_n7132	0_n7296	0_n7432	0_n7542	0_n7630	0_n7699	0_n7749	0_n7777	0_n7792
1.4748	1.4479	1.4155	1.3766	1.3296	1.2724	1.2010	1.1098	0.9869
0.8886	0.9577	1.0190	1.0737	1.1223	1.1658	1.2040	1.2368	1.2647
0.7822	0.7660	0.7513	0.7387	0.7276	0.7183	0.7111	0.7063	0.7030
9.4434	9.7442	9.9306	0.0655	0.1707	9.8083	9.8316	9.8483	9.8607
+ 1.7	+ 3.2	+ 4.8	+ 6.4	+ 7.9	+ 9.4	+ 10.9	+ 12.2	+ 13.3
− 154	− 150	− 144	− 135	− 124	− 110	− 95	− 77	− 58
+ 0.5	+ 0.5	+ 0.5	+ 0.6	+ 0.6	+ 0.6	+ 0.6	+ 0.6	+ 0.6

($\mathfrak{A}$ u. $\mathfrak{b}$)$_3$

Datum	1873			1872				
	April 17	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9
u'	175°47′43″	172°41′22″	169°34′17″	166°26′26″	163°17′45″	160° 8′13″	156°57′49″	153°46′28″
$\varDelta u$	+ 3	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 15	+ 17
$\sin u'$	8.86522	9.10465	9.25770	9.37006	9.45853	9.53119	9.59253	9.64533
$\sin B_1$	7.18322	7.42265	7.57570	7.68806	7.77653	7.84919	7.91053	7.96333
r_1	0.73107	0.73025	0.72938	0.72846	0.72751	0.72651	0.72547	0.72441
$\cos B_1$	0.00000	0.00000	0.00000	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998
L'_1	112°38′58″	109°32′40″	106°25′37″	103°17′48″	100° 9′ 9″	96°59′39″	93°49′16″	90°37′57″
$L'_1 - v$	22°34′ 6″	27° 5′11″	31°56′53″	37°10′ 4″	42°44′59″	48°41′12″	54°57′22″	61°31′ 1″
$\cos(L'_1 - v)$	9.96540	9.94955	9.92867	9.90139	9.86589	9.81966	9.75906	9.67843
$r_1 \cos B_1$	0.73107	0.73025	0.72938	0.72845	0.72750	0.72650	0.72546	0.72439
$\sin(L'_1 - v)$	9.58409	9.65833	9.72358	9.78114	9.83174	9.87570	9.91313	9.94397
ξ'	0.69647	0.67980	0.65805	0.62984	0.59339	0.54616	0.48452	0.40282
r	0.48232	0.47244	0.46251	0.45276	0.44342	0.43480	0.42720	0.42094
Subtract.	9.80440	9.78674	9.75488	9.70193	9.61536	9.46581	9.14950	8.62946
$\xi' - r$	0.28672	0.25918	0.21739	0.15469	0.05878	9.90061	9.57670	9_n03228
	9.86324	9.90468	9.93678	9.96130	9.97935	9.99158	9.99837	9.99988
η'	0.31516	0.38858	0.45296	0.50959	0.55924	0.60220	0.63859	0.66836
$\varrho \cos \vartheta$	0.45192	0.48390	0.51618	0.54829	0.57989	0.61062	0.64022	0.66848
	0.00000	0.00000	9.99999	9.99999	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998
ζ'	7.91429	8.15290	8.30508	8.41652	8.50404	8.57570	8.63600	8.68774
ϱ^{-1}	9.54808	9.51610	9.48381	9.45170	9.42009	9.38936	9.35976	9.33150
ϱ^{-3}	8.64424	8.54830	8.45143	8.35510	8.26027	8.16808	8.07928	7.99450
r_1^{-3}	7.80679	7.80925	7.81186	7.81462	7.81747	7.82047	7.82359	7.82677
Subtr	9.93177	9.91256	9.88688	9.85243	9.80567	0.08864	9.90403	9.67339
K	8.57601	8.46086	8.33831	8.20753	8.06594	7.90911	7.72762	7.50016
$\xi' \cdot r$	0.21415	0.20736	0.19554	0.17708	0.14997	0.11136	0.05732	9.98188
$\varkappa K$	3.14319	3.02804	2.90549	2.77471	2.63312	2.47629	2.29480	2.06734
$\eta' r$	0.79748	0.86102	0.91547	0.96235	1.00266	1.03700	1.06579	1.08930
$\varkappa K \xi' \cdot r$	3.35734	3.23540	3.10103	2.95179	2.78309	2.58765	2.35212	2.04922
$\varkappa \varrho^3$	3.21142	3.11548	3.01861	2.92228	2.82745	2.73526	2.64646	2.56168
Subtr	9.60133	9.50245	9.32011	8.84703	9.03158	9.60722	9.98652	9.84055
R	+ 649.8	+ 414.9	+ 218.1	+ 58.8	− 65.3	− 156.6	− 218.1	− 252.5
U	+ 8723	+ 7746	+ 6622	+ 5458	+ 4323	+ 3261	+ 2294	+ 1434
W	+ 11.4	+ 15.2	+ 16.2	+ 15.5	+ 13.7	+ 11.3	+ 8.5	+ 5.7
u'	239°57′4	238°44′5	237°31′7	236°18′9	235° 6′3	233°53′6	232°41′1	231°28′6
$\varDelta u$	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1
$\sin u$	9_n9373	9_n9319	9_n9261	9_n9202	9_n9139	9_n9074	9_n9005	9_n8934
$\sin B_1$	7_n9617	7_n9563	7_n9505	7_n9446	7_n9383	7_n9318	7_n9249	7_n9178
r_1	1.0000	1.0002	1.0004	1.0006	1.0008	1.0010	1.0011	1.0013
$\cos B_1$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
L'_1	257°56′1	256°43′2	255°30′4	254°17′6	253° 5′0	251°52′3	250°39′8	249°27′3
$L'_1 - v$	167°51′2	174°15′7	181° 1′7	188° 9′9	195°40′8	203°33′9	211°47′9	220°20′4
$\cos(L'_1 - v)$	9_n9901	9_n9978	9_n9999	9_n9956	9_n9836	9_n9622	9_n9294	9_n8821
$r_1 \cos B_1$	1.0000	1.0002	1.0004	1.0006	1.0008	1.0010	1.0011	1.0013
$\sin(L'_1 - v)$	9.3231	9.0000	8_n2540	9_n1524	9_n4318	9_n6018	9_n7218	9_n8112
ξ'	0_n9901	0_n9980	1_n0003	0_n9962	0_n9844	0_n9632	0_n9305	0_n8834
r	0.4823	0.4724	0.4625	0.4528	0.4434	0.4348	0.4272	0.4209
Subtr.	0.1175	0.1133	0.1105	0.1093	0.1098	0.1127	0.1185	0.1286
$\xi' - r$	1_n1076	1_n1113	1_n1108	1_n1055	1_n0942	1_n0759	1_n0490	1_n0120
	9_n9942	9_n9987	0_n0000	9_n9973	9_n9869	9_n9767	9_n9563	9_n9271
η'	0.3231	0.0002	9_n2544	0_n1530	0_n4326	0_n6028	0_n7229	0_n8125
$\varrho \cos \vartheta$	1.1134	1.1126	1.1108	1.1082	1.1043	1.0992	1.0927	1.0849
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
ζ'	8_n9617	8_n9565	8_n9509	8_n9452	8_n9391	8_n9328	8_n9260	8_n9191
ϱ^{-1}	8.8866	8.8874	8.8892	8.8918	8.8957	8.9008	8.9073	8.9151
ϱ^{-3}	6.6598	6.6622	6.6676	6.6754	6.6871	6.7024	6.7219	6.7453
r_1^{-3}	6.9999	6.9993	6.9987	6.9981	6.9976	6.9971	6.9966	6.9962
Subtr.	0.0749	0.0694	0.0582	0.0423	0.0187	9.9872	9.9456	9.8932
K	6_n7347	6_n7316	6_n7258	6_n7177	6_n7058	6_n6896	6_n6675	6_n6385
$\xi' \cdot r$	0_n5078	0_n5256	0_n5378	0_n5434	0_n5410	0_n5284	0_n5033	0_n4625
$\varkappa K$	0_n7779	0_n7748	0_n7693	0_n7609	0_n7490	0_n7328	0_n7107	0_n6817
$\eta' r$	0.8054	0.4726	9_n7169	0_n6058	0_n8760	1_n0376	1_n1501	1_n2334
$\varkappa K \xi' \cdot r$	1.2857	1.3004	1.3068	1.3043	1.2900	1.2612	1.2140	1.1442
$\varkappa \cdot \varrho^3$	0.7030	0.7054	0.7108	0.7186	0.7303	0.7456	0.7651	0.7885
Subtr.	9.8684	9.8727	9.8730	9.8695	9.8600	9.8419	9.8001	0.1032
R	+ 14.3	+ 14.9	+ 15.1	+ 14.9	+ 14.1	+ 12.7	+ 10.5	+ 7.8
U	− 38	− 18	+ 3	+ 23	+ 42	+ 59	+ 73	+ 82
W	+ 0.5	+ 0.5	+ 0.5	+ 0.5	+ 0.5	+ 0.5	+ 0.4	+ 0.4

(♃ u. ♄)$_4$

1872				1871				
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15
150°34'10"	147°20'53"	144° 6'34"	140°51'13"	137°34'48"	134°17'17"	130°58'40"	127°38'55"	124°18' 2"
+ 19	+ 20	+ 21	+ 22	+ 22	+ 22	+ 22	+ 21	+ 20
9.69141	9.73202	9.76808	9.80024	9.82902	9.85482	9.87793	9.89860	9.91703
8.00941	8.05002	8.08608	8.11824	8.14702	8.17282	8.19593	8.21660	8.23503
0.72331	0.72218	0.72103	0.71985	0.71866	0.71745	0.71623	0.71501	0.71378
9.99998	9.99997	9.99997	9.99996	9.99996	9.99995	9.99995	9.99994	9.99994
87°25'41"	84°12'25"	80°58' 7"	77°42'47"	74°26'22"	71° 8'51"	67°50'14"	64°30'28"	61° 9'34"
68°18'38"	75°15'37"	82°16'34"	89°15'44"	96° 7'24"	102°46'22"	109° 8'19"	115° 9'59"	120°49'14"
9.56770	9.40556	9.12840	8.10979	9_n02804	9_n34456	9_n51568	9_n62864	9_n70957
0.72329	0.72215	0.72100	0.71981	0.71862	0.71740	0.71618	0.71495	0.71372
9.96811	9.98547	9.99604	9.99996	9.99752	9.98912	9.97531	9.95668	9.93388
0.29099	0.12771	9.84940	8.82960	9_n74666	0_n06166	0_n23186	0_n34359	0_n42329
0.41631	0.41354	0.41277	0.41406	0.41732	0.42239	0.42902	0.43691	0.44574
9.52440	9.96905	9.86136	9.98854	0.08403	0.15718	0.21354	0.25687	0.28995
9_n81539	0_n09676	0_n27413	0_n40260	0_n50135	0_n57957	0_n64256	0_n69378	0_n73569
9.99619	9.98734	9.97345	9.95468	9.93134	9.90381	9.87257	9_n86028	9_n88910
0.69140	0.70762	0.71704	0.71977	0.71614	0.70652	0.69149	0.67163	0.64760
0.69521	0.72028	0.74359	0.76509	0.78480	0.80271	0.81892	0.83350	0.84659
9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997
8.73272	8.77220	8.80711	8.83809	8.86568	8.89027	8.91216	8.93161	8.94881
9.30476	9.27969	9.25638	9.23488	9.21517	9.19726	9.18105	9.16647	9.15338
7.91428	7.83907	7.76914	7.70464	7.64551	7.59178	7.54315	7.49941	7.46014
7.83007	7.83346	7.83691	7.84045	7.84402	7.84765	7.85131	7.85497	7.85866
9.33037	8.11400	9.22757	9.56482	9_n76303	9.90443	0.01415	0.10297	0.17706
7.16044	5.94746	6_n99671	7_n26946	7_n40854	7_n49621	7_n55730	7_n60238	7_n63720
9.87468	9.71417	9.43663	8.41554	9_n32934	9_n63957	9_n80284	9_n90668	9_n97755
1.72762	0.51464	1_n56389	1_n83664	1_n97572	2_n06339	2_n12448	2_n16956	2_n20438
1.10771	1.12116	1.12981	1.13383	1.13346	1.12891	1.12051	1.10854	1.09334
1.60230	0.22881	1_n00052	0_n25218	1.30506	1.70296	1.92732	2.07624	2.18193
2.48146	2.40625	2.33632	2.27182	2.21269	2.15896	2.11033	2.06659	2.02732
9.93848	9.99710	0.01960	0.00413	9.94265	9.81295	9.71940	8.35159	9.63105
− 263.0	− 253.1	− 226.9	− 188.8	− 143.0	− 93.7	− 44.3	+ 2.6	+ 45.5
+ 684	+ 43	− 494	− 934	− 1286	− 1557	− 1758	− 1897	− 1985
+ 2.9	+ 0.2	− 2.3	− 4.7	− 6.9	− 9.0	− 10.9	− 12.6	− 14.2
230°16'1	229° 3'7	227°51'4	226°39'0	225°26'7	224°14'5	223° 2'3	221°50'1	220°37'9
− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.1
9_n8860	9_n8782	9_n8701	9_n8617	9_n8528	9_n8437	9.8341	9_n8241	9_n8137
7_n9104	7_n9026	7_n8945	7_n8861	7_n8772	7_n8681	7_n8585	7_n8485	7_n8381
1.1014	1.0015	1.0017	1.0018	1.0019	1.0019	1.0020	1.0021	1.0021
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
248°14'8	247° 2'4	245°50'1	244°37'3	243°25'4	242°13'2	241° 1'0	239°48'8	238°36'6
229° 7'8	238° 5'6	247° 8'6	256°10'7	265° 6'4	273°50'7	282°19'1	290°28'3	298°16'3
9_n8158	9_n7231	9_n5893	9_n3782	8_n9309	8.8264	9.3291	9.5437	9.6754
1.0014	1.0015	1.0017	1.0018	1.0019	1.0019	1.0020	1.0021	1.0021
9_n8787	9_n9288	9_n9645	9_n9872	9_n9984	9_n9990	9_n9899	9_n9717	9_n9449
0_n8172	0_n7246	0_n5910	0_n3800	9_n9328	9.8283	0.3311	0.5458	0.6775
0.4163	0.4135	0.4128	0.4141	0.4173	0.4224	0.4290	0.4369	0.4457
0.1453	0.1728	0.2210	0.2843	0.1231	9.8724	9.4029	9.4548	9.8484
0_n9625	0_n8974	0_n8120	0_n6984	0_n5404	0_n2948	9_n7340	9.8917	0.2941
9_n8868	9_n8653	9_n9132	9_n9494	9_n9753	9_n9917	9_n9993	9_n9985	9_n9895
0_n8801	0_n9303	0_n9662	0_n9890	1_n0003	1_n0009	0_n9919	0_n9738	0_n9470
1.0757	1.0650	1.0530	1.0396	1.0250	1.0092	0.9926	0.9753	0.9575
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8_n9118	8_n9041	8_n8962	8_n8879	8_n8791	8_n8700	8_n8605	8_n8506	8_n8402
8.9243	8.9350	8.9470	8.9604	8.9750	8.9908	9.0074	9.0247	9.0425
6.7729	6.8050	6.8410	6.8812	6.9250	6.9724	7.0222	7.0741	7.1275
6.9957	6.9953	6.9950	6.9947	6.9944	6.9941	6.9939	6.9938	6.9938
9.8263	9.7403	9.6290	9.4752	9.2387	8.7096	8.8282	9.3077	9.5569
6_n5992	6_n5453	6_n4700	6_n3564	6_n1637	5_n6820	5.8221	6.3015	6.5507
0_n4009	0_n3111	0_n1782	9_n9659	9_n5155	9.4059	9.9021	0.1089	0.2318
0_n6424	0_n5885	0_n5132	0_n3996	0_n2069	9_n7252	9.8653	0.3447	0.5939
1_n2964	1_n3438	1_n3790	1_n4031	1_n4176	1_n4233	1_n4209	1_n4107	1_n3927
1.0433	0.8996	0.6914	0.3655	9.7224	9_n1311	9.7674	0.4536	0.8257
0.8161	0.8482	0.8842	0.9244	0.9682	1.0156	1.0654	1.1173	1.1707
9.8372	9.0991	9.7473	9.8597	9.9746	0.0063	9.9776	9.8938	0.0839
+ 4.5	+ 0.9	− 2.7	− 6.1	− 8.8	− 10.5	− 11.0	− 10.3	− 8.1
+ 87	+ 86	+ 78	+ 63	+ 42	+ 14	− 19	− 57	− 97
+ 0.4	+ 0.3	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1	0.0	− 0.1	− 0.2	− 0.3

Datum	f'''	f''	f'	$\Sigma U dt$	f	U	$\log (U)$
					+ 46828		
1871 Juli 15				— 2082		+ 45778	4.66066
			+ 128		+ 44746		
Aug. 24		+ 49		— 1954		+ 43756	4.64104
	+ 8		+ 177		+ 42792		
Oct 3		+ 57		— 1777		+ 41887	4.62208
	+ 8		+ 234		+ 41015		
Nov 12		+ 65		— 1543		+ 40221	4.60445
	+ 9		+ 299		+ 39472		
Dec. 22		+ 74		— 1244		+ 38822	4.58908
	+ 8		+ 373		+ 38228		
1872 Jan 31		+ 82		— 871		+ 37758	4.57701
	+ 8		+ 455		+ 37357		
März 11		+ 90		— 416		+ 37107	4.56945
	+ 7		+ 545		+ 36941		
April 20		+ 97		+ 129		+ 36956	4.56768
	+ 6		+ 642		+ 37070		
Mai 30		+ 103		+ 771		+ 37398	4.57285
	+ 3		+ 745		+ 37841		
Juli 9		+ 106		+ 1516		+ 38533	4.58583
	— 4		+ 851		+ 39357		
Aug. 18		+ 102		+ 2367		+ 40464	4.60707
	— 10		+ 953		+ 41724		
Sept. 27		+ 92		+ 3320		+ 43300	4.63649
	— 21		+ 1045		+ 45044		
Nov. 6		+ 71		+ 4365		+ 47136	4.67335
	— 43		+ 1116		+ 49409		
Dec. 16		+ 28		+ 5481		+ 52054	4.71645
	— 69		+ 1144		+ 54890		
1873 Jan. 25		— 41		+ 6625		+ 58108	4.76424
	— 105		+ 1103		+ 61515		
März 6		— 146		+ 7728		+ 65291	4.81486
	— 153		+ 957		+ 69243		
April 15		— 299		+ 8685		+ 73516	4.86638
	— 190		+ 658		+ 77928		
Mai 25		— 489		+ 9343		+ 82562	4.91678
	— 217		+ 169		+ 87271		
Juli 4		— 706		+ 9512		+ 92039	4.96397
	— 183		— 537		+ 96783		
Aug. 13		— 889		+ 8975		+ 101350	5.00582
	— 101		— 1426		+ 105758		
Sept. 22		— 990		+ 7549		+ 109692	5.04018
	+ 79		— 2416		+ 113307		
Nov. 1		— 911		+ 5133		+ 116115	5.06489
	+ 267		— 3327		+ 118440		
Dec. 11		— 644		+ 1806		+ 119652	5.07792
	+ 426		— 3971		+ 120246		
1874 Jan. 20		— 218		— 2165		+ 119510	5.07741
	+ 471		— 4189		+ 118081		
März 1		+ 253		— 6354		+ 115249	5.06164
	+ 383		— 3936		+ 111727		
April 10		+ 636		— 10290		+ 106888	5.02893
	+ 226		— 3300		+ 101437		
Mai 20		+ 862		— 13590		+ 94883	4.97719
	+ 46		— 2438		+ 87847		
Juni 29		+ 908		— 16028		+ 79998	4.90308
	— 75		— 1530		+ 71819		
Aug. 8		+ 833		— 17558		+ 63131	4.80025
	— 154		— 697		+ 54261		
Sept. 17		+ 679		— 18255		+ 45161	4.65476
	— 157		— 18		+ 36006		
Oct. 27		+ 522		— 18273		+ 26847	4.42889
	— 161		+ 504		+ 17733		
Dec. 6		+ 361		— 17769		+ 8789	3.94394
	— 125		+ 865		— 36		
1875 Jan. 15		+ 236		— 16904		— 8571	3_n93303
			+ 1101		— 16940		
Febr. 24				— 15803		— 24939	4_n39688
					— 32743		

Datum	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d(Z_s)$	${}^{I}f$	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d(Z_c)$	${}^{I}f$
					— 2110.0					+ 912.5
1871 Juli 15				— 6.5					+ 11.2	
			— 0.6		— 2116.5			— 2.5		+ 923.7
Aug. 24				— 7.1					+ 8.7	
			0.0		— 2123.6			— 2.5		+ 932.4
Oct. 3				— 7.1					+ 6.2	
			+ 0.6		— 2130.7			— 2.2		+ 938.6
Nov. 12				— 6.5					+ 4.0	
			+ 1.2		— 2137.2			— 1.9		+ 942.6
Dec. 22				— 5.3					+ 2.1	
			+ 1.6		— 2142.5			— 1.4		+ 944.7
1872 Jan. 31				— 3.7			+ 0.7		+ 0.7	
			+ 2.0		— 2146.2			— 0.7		+ 945.4
März 11				— 1.7			+ 0.8		0.0	
			+ 2.1		— 2147.9			+ 0.1		+ 945.4
April 20				+ 0.4			+ 0.7		+ 0.1	
			+ 2.2		— 2147.5			+ 0.8		+ 945.5
Mai 30				+ 2.6			+ 0.8		+ 0.9	
			+ 1.9		— 2144.9			+ 1.6		+ 946.4
Juli 9		— 0.5		+ 4.5			+ 0.7		+ 2.5	
			+ 1.4		— 2140.4			+ 2.3		+ 948.9
Aug. 18		— 0.5		+ 5.9			+ 0.6		+ 4.8	
			+ 0.9		— 2134.5			+ 2.9		+ 953.7
Sept. 27		— 0.9		+ 6.8			0.0		+ 7.7	
			0.0		— 2127.7			+ 2.9		+ 961.4
Nov. 6		— 0.9		+ 6.8			— 0.2		+ 10.6	
			— 0.9		— 2120.9			+ 2.7		+ 972.0
Dec. 16		— 0.9		+ 5.9			— 1.1		+ 13.3	
			— 1.8		— 2115.0	— 0.6		+ 1.6		+ 985.3
1873 Jan. 25		— 0.3		+ 4.1			— 1.7		+ 14.9	
	+ 0.4		— 2.1		— 2110.9	— 1.5		— 0.1		+ 1000.2
März 6		+ 0.1		+ 2.0			— 3.2		+ 14.8	
	+ 1.3		— 2.0		— 2108.9	— 0.6		— 3.3		+ 1015.0
April 15		+ 1.4		0.0			— 3.8		+ 11.5	
	+ 1.8		— 0.6		— 2108.9	— 1.5		— 7.1		+ 1026.5
Mai 25		+ 3.2		— 0.6			— 5.3		+ 4.4	
	+ 2.1		+ 2.6		— 2109.5	0.0		— 12.4		+ 1030.9
Juli 4		+ 5.3		+ 2.0			— 5.3		— 8.0	
	+ 2.0		+ 7.9		— 2107.5	+ 0.4		— 17.7		+ 1022.9
Aug. 13		+ 7.3		+ 9.9			— 4.9		— 25.7	
	+ 1.4		+ 15.2		— 2097.6	+ 1.8		— 22.6		+ 997.2
Sept. 22		+ 8.7		+ 25.1			— 2.7		— 48.3	
	— 0.2		+ 23.9		— 2072.5	+ 3.4		— 25.3		+ 948.9
Nov. 1		+ 8.5		+ 49.0			+ 0.7		— 73.6	
	— 2.2		+ 32.4		— 2023.5	+ 4.0		— 24.6		+ 875.3
Dec. 11		+ 6.3		+ 81.4			+ 4.7		— 98.2	
	— 4.6		+ 38.7		— 1942.1	+ 3.8		— 19.9		+ 777.1
1874 Jan. 20		+ 1.7		+ 120.1			+ 8.5		— 118.1	
	— 4.7		+ 40.4		— 1822.0	+ 2.1		— 11.4		+ 659.0
März 1		— 3.0		+ 160.5			+ 10.6		— 129.5	
	— 4.5		+ 37.4		— 1661.5	— 0.5		— 0.8		+ 529.5
April 10		— 7.5		+ 197.9			+ 10.1		— 130.3	
	— 3.6		+ 29.9		— 1463.6	— 1.9		+ 9.3		+ 399.2
Mai 20		— 10.1		+ 227.8			+ 8.2		— 121.0	
	— 0.6		+ 19.8		— 1235.8	— 2.9		+ 17.5		+ 278.2
Juni 29		— 10.7		+ 247.6			+ 5.3		— 103.5	
	+ 0.4		+ 9.1		— 988.2	— 3.0		+ 22.8		+ 174.7
Aug. 8		— 10.3		+ 256.7			+ 2.3		— 80.7	
	+ 2.2		— 1.2		— 731.5	— 2.7		+ 25.1		+ 94.0
Sept. 17		— 8.1		+ 255.5			— 0.4		— 55.6	
	+ 1.8		— 9.3		— 476.0	— 1.7		+ 24.7		+ 38.4
Oct. 27		— 6.3		+ 246.2			— 2.1		— 30.9	
	+ 2.2		— 15.6		— 229.8	— 1.0		+ 22.6		+ 7.5
Dec. 6		— 4.1		+ 230.6			— 3.1		— 8.3	
	+ 1.7		— 19.7		+ 0.8	— 0.6		+ 19.5		— 0.8
1875 Jan. 15		— 2.4		+ 210.9			— 3.7		+ 11.2	
			— 22.1		+ 211.7			+ 15.8		+ 10.4
Febr. 24				+ 188.8					+ 27.0	
					+ 400.5					+ 37.4

Datum	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d\ N_s$	${}^{I}f$	N_s	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d\ N_c$	${}^{I}f$	N_c
—					+17608.9							−42566.8	
1871 Juli 15				+831.8		+18007.0					−1421.3		−43290.6
—			+203.1		+18440.7					+158.8		−43988.1	
Aug. 24		−28.8		+1034.9		+18942.2			+41.4		−1262.5		−44634.3
—	−11.4		+174.3		+19475.6			−6.5		+200.2		−45250.6	
Oct. 3		−40.2		+1209.2		+20067.2			+34.9		−1062.3		−45799.9
—	−7.8		+134.1		+20684.8			−11.1		+235.1		−46312.9	
Nov. 12		−48.0		+1343.3		+21347.3			+23.8		−827.2		−46747.3
—	−3.0		+86.1		+22028.1			−13.7		+258.9		−47140.1	
Dec. 22		−51.0		+1429.4		+22737.8			+10.1		−568.3		−47446.4
—	+3.5		+35.1		+23457.5			−12.9		+269.0		−47708.4	
1872 Jan. 31		−47.5		+1464.5		+24188.9			−2.8		−299.3		−47880.5
—	+8.6		−12.4		+24922.0			−9.8		+266.2		−48007.7	
Marz 11		−38.9		+1452.1		+25650.9			−12.6		−33.1		−48046.0
—	+12.0		−51.3		+26374.1			−3.1		+253.6		−48040.8	
April 20		−26.9		+1400.8		+27080.1			−15.7		+220.5		−47951.0
—	+10.6		−78.2		+27774.9			+3.4		+237.9		−47820.3	
Mai 30		−16.3		+1322.6		+28443.6			−12.3		+458.4		−47610.3
—	+6.7		−94.5		+29097.5			+8.5		+225.6		−47361.9	
Juli 9		−9.6		+1228.1		+29719.9			−3.8		+684.0		−47038.4
—	+1.3		−104.1		+30325.6			+11.8		+221.8		−46677.9	
Aug. 18		−8.3		+1124.0		+30896.6	−1.4		+8.0		+905.8		−46243.7
—	−6.0		−112.4		+31449.6			+10.4		+229.8		−45772.1	
Sept. 27		−14.3		+1011.6		+31965.3	−1.5		+18.4		+1135.6		−45224.1
—	−9.6		−126.7		+32461.2			+8.9		+248.2		−44636.5	
Nov. 6		−23.9		+884.9		+32915.0	−5.3		+27.3		+1383.8		−43966.3
—	−13.9		−150.6		+33346.1			+3.6		+275.5		−43252.7	
Dec. 16		−37.8		+734.3		+33727.1	−5.5		+30.9		+1659.3		−42447.3
—	−15.1		−188.4		+34080.4			−1.9		+306.4		−41593.4	
1873 Jan. 25		−52.9		+545.9		+34371.0	−7.0		+29.0		+1965.7		−40637.4
—	−14.2		−241.3		+34626.3			−8.9		+335.4		−39627.7	
März 6		−67.1		+304.6		+34801.3	−8.3		+20.1		+2301.1		−38506.1
—	−10.6		−308.4		+34930.9			−17.2		+355.5		−37326.6	
April 15		−77.7		−3.8		+34957.8	−9.8		+2.9		+2656.6		−36028.4
—	−2.8		−386.1		+34927.1			−27.0		+358.4		−34670.0	
Mai 25		−80.5		−389.9		+34767.7	−8.7		−24.1		+3015.0		−33191.9
—	+10.1		−466.6		+34537.2			−35.7		+334.3		−31655.0	
Juli 4		−70.4		−856.5		+34151.2	−6.1		−59.8		+3349.3		−30006.3
—	+27.5		−537.0		+33680.7			−41.8		+274.5		−28305.7	
Aug. 13		−42.9		−1393.5		+33031.2	+1.3		−101.6		+3623.8		−26513.1
—	+47.3		−579.9		+32287.2			−40.5		+172.9		−24681.9	
Sept. 22		+4.4		−1973.4		+31349.5	+14.4		−142.1		+3796.7		−22792.5
—	+61.5		−575.5		+30313.8			−26.1		+30.8		−20885.2	
Nov. 1		+65.9		−2548.9		+29085.5	+23.8		−168.2		+3827.5		−18967.2
—	+65.0		−509.6		+27764.9			−2.3		−137.4		−17057.7	
Dec. 11		+130.9		−3058.5		+26273.5	+31.2		−170.5		+3690.1		−15193.9
—	+48.8		−378.7		+24706.4			+28.9		−307.9		−13367.6	
1874 Jan. 20		+179.7		−3437.2		+23012.4	+23.7		−141.6		+3382.2		−11644.3
—	+21.0		−199.0		+21269.2			+52.6		−449.5		−9985.4	
März 1		+200.7		−3636.2		+19459.2	+9.7		−89.0		+2932.7		−8477.1
—	−10.9		+1.7		+17633.0			+62.3		−538.5		−7052.7	
April 10		+189.8		−3634.5		+15807.4	−5.1		−26.7		+2394.2		−5808.7
—	−35.9		+191.5		+13998.5			+57.2		−565.2		−4658.5	
Mai 20		+153.9		−3443.0		+12254.0	−15.4		+30.5		+1829.0		−3697.4
—	−47.9		+345.4		+10555.5			+41.8		−534.7		−2829.5	
Juni 29		+106.0		−3097.6		+8972.8	−18.4		+72.3		+1294.3		−2140.3
—	−47.2		+451.4		+7457.9			+23.4		−462.4		−1535.2	
Aug. 8		+58.8		−2646.2		+6094.1	−15.7		+95.7		+831.9		−1084.5
—	−40.0		+510.2		+4811.7			+7.7		−366.7		−703.3	
Sept. 17		+18.8		−2136.0		+3699.9	−10.5		+103.4		+465.2		−444.4
—	−29.8		+529.0		+2675.7			−2.8		−263.3		−238.1	
Oct. 27		−11.0		−1607.0		+1828.2	−6.2		+100.6		+201.9		−119.5
—	−20.0		+518.0		+1068.7			−9.0		−162.7		−36.2	
Dec. 6		−31.0		−1089.0		+482.0	−2.2		+91.6		+39.2		−7.0
—	−11.9		+487.0		−20.3			−11.2		−71.1		+3.0	
1875 Jan. 15		−42.9		−602.0		−360.2			+80.4		−31.9		−10.5
—			+444.1		−622.3					+9.3		−28.9	
Febr. 24				−157.9		−734.8					−22.6		−44.1
—					−780.2							−51.5	

Datum	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d(\varDelta M)$	f	f^{II}	f^{I}	$d(\varDelta\omega)$	f
					+ 1° 3′23″95				— 8′58″16
1871 Juli 15				— 28″93				+14″84	
			—32″21		+ 1° 2′55″02		—0″07		— 8′43″32
Aug. 24		+0″24		— 1′ 1″14				+14.77	
	+0″86		—31.97		+ 1° 1′53″88		—0.11		— 8′28″55
Oct. 3		+1.10		— 1′33″11				+14.66	
	+0.91		—30.87		+ 1° 0′20″77		—0.14		— 8′13″89
Nov. 12		+2.01		— 2′ 3″98				+14.52	
	+0.87		—28.86		+ 58′16″79		—0.18		— 7′59″37
Dec. 22		+2.88		— 2′32″84				+14.34	
	+0.83		—25.98		+ 55′43″95		—0.18		— 7′45″03
1872 Jan. 31		+3.71		— 2′58″82				+14.16	
	+0.67		—22.27		+ 52′45″13		—0.16		— 7′30″87
März 11		+4.38		— 3′21″09		+0″05		+14.00	
	+0.48		—17.89		+ 49′24″04		—0.11		— 7′16″87
April 20		+4.86		— 3′38″98		+0.10		+13.89	
	+0.26		—13.03		+ 45′45″06		—0.01		— 7′ 2″98
Mai 30		+5.12		— 3′52″01		+0.13		+13.88	
	+0.02		— 7.91		+ 41′53″05		+0.12		— 6′49″10
Juli 9		+5.14		— 3′59″92		+0.17		+14.00	
	—0.22		— 2.77		+ 37′53″13		+0.29		— 6′35″10
Aug. 18		+4.92		— 4′ 2″69		+0.18		+14.29	
	—0.37		+ 2.15		+ 33′50″44		+0.47		— 6′20″81
Sept. 27		+4.55		— 4′ 0″54		+0.21		+14.76	
	—0.55		+ 6.70		+ 29′49″90		+0.68		— 6′ 6″05
Nov. 6		+4.00		— 3′53″84		+0.22		+15.44	
	—0.62		+10.70		+ 25′56″06		+0.90		— 5′50″61
Dec. 16		+3.38		— 3′43″14		+0.20		+16.34	
	—0.73		+14.08		+ 22′12″92		+1.10		— 5′34″27
1873 Jan. 25		+2.65		— 3′29″06		+0.18		+17.44	
	—0.68		+16.73		+ 18′43″86		+1.28		— 5′16″83
März 6		+1.97		— 3′12″33		+0.14		+18.72	
	—0.76		+18.70		+ 15′31″53		+1.42		— 4′58″11
April 15		+1.21		— 2′53″63		+0.07		+20.14	
	—0.70		+19.91		+ 12′37″90		+1.49		— 4′37″97
Mai 25		+0.51		— 2′33″72		—0.01		+21.63	
	—0.66		+20.42		+ 10′ 4″18		+1.48		— 4′16″34
Juli 4		—0.15		— 2′13″30		—0.17		+23.10	
	—0.62		+20.27		+ 7′50″88		+1.31		— 3′53″24
Aug. 13		—0.77		— 1′53″03		—0.29		+24.42	
	—0.54		+19.50		+ 5′57″85		+1.02		— 3′28″82
Sept. 22		—1.31		— 1′33″53		—0.47		+25.44	
	—0.44		+18.19		+ 4′24″32		+0.55		— 3′ 3″38
Nov. 1		—1.75		— 1′15″34		—0.61		+25.99	
	—0.28		+16.44		+ 3′ 8″98		—0.06		— 2′37″39
Dec. 11		—2.03		— 58″90		—0.72		+25.93	
	—0.19		+14.41		+ 2′10″08		—0.78		— 2′11″46
1874 Jan. 20		—2.22		— 44″49		—0.74		+25.15	
	—0.03		+12.19		+ 1′25″59		—1.52		— 1′46″31
März 1		—2.25		— 32″30		—0.69		+23.63	
	+0.09		+ 9.94		+ 53″29		—2.21		— 1′22″68
April 10		—2.16		— 22″36		—0.56		+21.42	
	+0.17		+ 7.78		+ 30″93		—2.77		— 1′ 1″26
Mai 20		—1.99		— 14″58		—0.42		+18.65	
	+0.26		+ 5.79		+ 16″35		—3.19		— 42″61
Juni 29		—1.73		— 8″79		—0.22		+15.47	
	+0.29		+ 4.06		+ 7″56		—3.41		— 27″14
Aug. 8		—1.44		— 4″73		—0.10		+12.05	
	+0.27		+ 2.62		+ 2″83		—3.51		— 15″09
Sept. 17		—1.17		— 2″11		+0.01		+ 8.54	
	+0.32		+ 1.45		+ 0″72		—3.50		— 6″55
Oct. 27		—0.85		— 0″66		+0.10		+ 5.04	
	+0.26		+ 0.60		+ 0″06		—3.40		— 1″51
Dec. 6		—0.59		— 0″06		+0.15		+ 1.65	
	+0.27		+ 0.01		0		—3.25		+ 0″14
1875 Jan. 15		—0.32		— 0″05		+0.17		— 1.61	
			— 0.31		— 0″05		—3.08		— 1″47
Febr. 24				— 0″36				— 4.69	
					— 0″41				— 6″16

Methode der kleinsten Quadrate.

A. Theoretische Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendung auf die einfachsten Fälle.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen.

Alle Bestimmungen, die sich auf Beobachtungen gründen, sind von begrenzter Genauigkeit; hat man daher mehre Beobachtungen einer und derselben Grösse, so werden jene im Allgemeinen nahe identische Resultate geben; die Abweichungen selbst untereinander werden aber ganz wesentlich von der Güte der angewandten Instrumente, der Geschicklichkeit des Beobachters und den bei der Beobachtung stattfindenden Umständen abhängig sein. Liegen nun mehre solche directe Bestimmungen einer und derselben Grösse vor, denen man Allen a priori dieselbe Genauigkeit zuschreiben darf, so wird das arithmetische Mittel der einzelnen Beobachtungsresultate wohl als der wahrscheinlichste Werth betrachtet werden dürfen; dieser Satz soll gleichsam als Axiom ohne Beweis hingestellt werden, da derselbe so viel Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nimmt, dass man die Annahme als evident anzunehmen sich erlauben kann.

Als Grundlage für die Methode der kleinsten Quadrate wird man dem entsprechend den folgenden Satz anzusehen haben: »Ist eine Grösse durch eine Reihe unmittelbarer Bestimmungen von gleicher Verlässlichkeit bestimmt worden, so ist das aus diesen Beobachtungen gezogene arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth«, d. h. der Werth, der voraussichtlich der Wahrheit am nächsten kommt.

Bezeichnet man die durch die directe Beobachtung erhaltenen Werthe der Unbekannten mit M_1, M_2, M_3, ... M_m, das arithmetische Mittel mit x, so ist, wenn die Anzahl der Einzelbeobachtungen durch m bezeichnet wird, der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten bestimmt durch

$$x = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_m}{m},$$

oder auch

$$mx = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_m .$$

Bildet man nun die Differenzen zwischen den einzelnen Beobachtungen und dem wahrscheinlichsten Werth, so werden diese Differenzen der Hauptsache nach als

Beobachtungsfehler angesehen werden können, und bildet man die Summe derselben, so wird sein:

$$(M_1 - x) + (M_2 - x) + \ldots + (M_m - x) = M_1 + M_2 + \ldots + M_m - m x = 0. \quad (1)$$

Es ist also die Summe der Beobachtungsfehler oder genauer ausgedrückt, die Summe der Differenzen zwischen den Beobachtungsresultaten und dem arithmetischen Mittel der Null gleich, eine Relation, die übrigens unmittelbar aus der Idee des arithmetischen Mittels resultirt. Diese Relation kann aber auch in einer anderen Weise gefasst werden, die für die folgenden Untersuchungen von besonderen Nutzen ist und deren Giltigkeit weiter unten auf einem anderen Wege nachgewiesen werden wird. Sucht man nämlich für die Funktion:

$$(M_1 - x)^2 + (M_2 - x)^2 + \ldots + (M_m - x)^2$$

die Bedingung des Minimums, so erhält man durch Differentiation dieses Ausdruckes nach x und durch die nachträgliche Nullsetzung der Derivation ebenfalls einen mit der Relation (1) identischen Ausdruck; es findet sich nämlich nach Ausführung der angezeigten Operationen:

$$(M_1 - x) + (M_2 - x) + \ldots + (M_m - x) = 0.$$

Bedenkt man, dass diese Ableitung auch für das Maximum gilt, dass aber die Funktion in der hier auftretenden Form kein geschlossenes Maximum besitzt, da mit unendlich wachsendem x der Werth der Summe der Quadrate unendlich gross wird, so wird man ebenfalls das oben hingestellte Axiom umformen können in das folgende: »der wahrscheinlichste Werth einer Unbekannten, die durch mehre gleich verlässliche Beobachtungen bestimmt ist, ist derjenige, welcher die Summe der Quadrate der Differenzen, die zwischen der Beobachtung und Rechnung auftreten, zu einem Minimum macht.« In dieser Form hingestellt hat das Axiom des arithmetischen Mittels der Methode den Namen gegeben.

Es dürfte aber angemessen sein, den Nachweis zu liefern, dass keine andere Funktion dieser Minimumbedingung genügt. Es sei F eine Funktion des Beobachtungsfehlers $(M - x)$, welche Differenz der Kürze halber mit $\varDelta$ bezeichnet werden soll; das Axiom des arithmetischen Mittels sagt aber aus:

$$\varDelta_1 + \varDelta_2 + \ldots + \varDelta_m = 0.$$

Es wird also zu untersuchen sein, welche Formen der Funktion der Bedingung

$$F(\varDelta_1) + F(\varDelta_2) + \ldots + F(\varDelta_m) = \text{Minimum}$$

in Verbindung mit der ersteren Relation genügen können. Für die Bedingung des Minimums kann aber gesetzt werden:

$$\frac{d F(\varDelta_1)}{d \varDelta_1} + \frac{d F(\varDelta_2)}{d \varDelta_2} + \ldots + \frac{d F(\varDelta_m)}{d \varDelta_m} = 0. \quad (2)$$

Um nun aus dieser Funktionalgleichung die Form der Funktion selbst zu bestimmen, wird man diese Gleichung nochmals differentiiren mit Rücksicht auf die Bedingung des arithmetischen Mittels. Man wird dieser letzteren Bedingung einfach dadurch genügen, dass man für $\varDelta_m$ den Werth

$$\varDelta_m = -\varDelta_1 - \varDelta_2 - \ldots - \varDelta_{m-1} \quad (3)$$

einführt, wodurch die übrigen Unterschiede $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_{m-1}$ von einander völlig unabhängig erscheinen. Beachtet man, dass ist:

$$\frac{d(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_{m-1})}{d\Delta_1}=1$$

$$\frac{d(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_{m-1})}{d\Delta_2}=1$$

u. s. f.

und schreibt der Kürze halber für

$$\frac{dF(\Delta)}{d\Delta}=F'(\Delta),$$

so erhält man durch Differentiation des Ausdruckes 2) nach Δ_1, wenn man der Relation 3) entsprechend das Differential des letzten Gliedes, welches nebst dem ersten bei der Differentiation nach Δ_1 nicht verschwindet:

$$\frac{dF'(\Delta_1)}{d\Delta_1}=\frac{dF'(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_{m-1})}{d(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_{m-1})}$$

ähnlich erhält man durch die Differentiation von 2) nach Δ_2, Δ_3 u. s. w.:

$$\frac{dF'(\Delta_2)}{d\Delta_2}=\frac{dF'(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_{m-1})}{d(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_{m-1})}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{dF'(\Delta_{m-1})}{d\Delta_{m-1}}=\frac{dF'(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_{m-1})}{d(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_{m-1})}.$$

Da also nun $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_{m-1}$ völlig von einander unabhängig erscheinen, so kann die Gleichheit dieser Differentialquotienten nur dann bestehen, wenn diese selbst einer Constanten gleich sind. Es resultirt demnach für die vorgelegte Funktion die Relation:

$$\frac{dF'(\Delta)}{d\Delta}=c_0.$$

Die Integration ergibt, wenn man wieder für $F'(\Delta)$ die ursprüngliche Form restituirt:

$$\frac{dF(\Delta)}{d\Delta}=c_0\Delta+c_1. \tag{4}$$

Es lässt sich jedoch leicht erweisen, dass die Constante c_1 der Null gleich gesetzt werden muss, denn führt man diese eben gewonnene Relation in die Gleichung 2) ein, so erhält man:

$$c_0(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_m)+mc_1=0.$$

Da aber der Coëfficient von c_0 nach der Idee des arithmetischen Mittels der Null gleich ist, so muss ebenfalls c_1 der Null gleich sein; man kann also statt 4) schreiben:

$$\frac{dF(\Delta)}{d\Delta}=c_0\Delta.$$

Integrirt man nun diese Gleichung nochmals, so erhält man:

$$F(\Delta)=\tfrac{1}{2}c_0\Delta^2+c_2,$$

woraus unmittelbar resultirt, dass die einzige Funktion, die der gestellten Bedingung

genügt, diejenige ist, die die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht; die willkürliche Constante kommt natürlich hier nicht weiter in Betracht, da dieselbe die Bedingung des Minimums nicht afficirt.

Indem so die oben aufgestellten Axiome als völlig identisch angesehen werden können, sieht man sofort ein, dass der Lösung des Problems in dem einfachen, hier in Betracht gezogenen Falle keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr entgegenstehen; doch complicirt sich die Sache sofort, wenn es sich um die Bestimmung von mehren Unbekannten aus vielen Beobachtungen handelt; es wird sich aber in der Folge zeigen, dass man mit dem aufgestellten Principe ausreichen und durch consequente Anwendung desselben die complicirtesten Fälle der Rechnung unterwerfen kann.

Es wurde bisher vorausgesetzt, dass die zum wahrscheinlichsten Resultate zusammenzufassenden Beobachtungen oder Theilresultate von gleicher Verlässlichkeit sind; ist nun dies nicht der Fall, so muss auf diesen Umstand gehörig Rücksicht genommen werden. Bei der Lösung der vorgelegten Aufgabe wird im weiteren Verlaufe der Entwickelungen ein grosser Vorzug der Methode der kleinsten Quadrate sich herausstellen, indem man durch dieselbe in den Stand gesetzt wird, die wahrscheinliche Unsicherheit des Resultates nach den übrigbleibenden Differenzen zwischen den Beobachtungen und der Rechnung zu bestimmen, also die Vertrauenswürdigkeit des Resultates auf ein numerisches Maass zurückzuführen. So wünschenswerth es ist, Methoden zu besitzen, welche die Ermittelung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten gestatten, so wenig befriedigend wären dieselben für sich allein, wenn man nicht durch dieselben ein nach bestimmten Principien bestimmtes Maass für die Genauigkeit der gewonnenen Resultate erhalten würde; die durch die Methode der kleinsten Quadrate gebotene Möglichkeit, dieser Forderung zu genügen, muss zu einem nicht immer gehörig gewürdigten Hauptvorzug derselben gezählt werden.

Sollen Beobachtungen oder Theilresultate von differenter Genauigkeit mit einander verbunden werden, so muss man sich vor Allem die Ursachen klar machen, welche diese Verschiedenheit bedingen; der einfachste Fall ist etwa der, wo man die einzelnen Beobachtungsdaten als Resultate verschiedener Beobachtungsreihen aufzufassen in der Lage ist, so dass also das Resultat einer Beobachtungsreihe als eine Beobachtung hingestellt wird und die Einzelnbeobachtungen innerhalb dieser verschiedenen Reihen von gleicher Genauigkeit angesehen werden dürfen. Die Anzahl der zum Theilresultate vereinigten Einzelnbeobachtungen wird offenbar als ein Maassstab für die Genauigkeit desselben angesehen werden, und es soll die denselben ausdrückende Zahl den Namen »Gewicht« erhalten. Es sei der Werth der Unbekannten x bestimmt worden durch eine Reihe von m' Beobachtungen, die einzelnen Beobachtungen sind von gleicher Vertrauenswürdigkeit, haben also das gleiche Gewicht, diese Einzelnbeobachtungen seien: $M_1', M_2', \ldots M'_{m'}$. Man erhält den wahrscheinlichsten Werth x' aus dieser Reihe für die Unbekannte nach dem Obigen:

$$x' = \frac{M_1' + M_2' + \ldots + M'_{m'}}{m'} \; .$$

Eine zweite Beobachtungsreihe ähnlich behandelt ergäbe:

$$x'' = \frac{M_1'' + M_2'' + \ldots + M''_{m''}}{m''} \; ,$$

eine dritte:

$$x''' = \frac{M_1''' + M_2''' + \ldots + M'''_{m'''}}{m'''} \quad \text{u. s. f.}$$

Hält man hierbei die gemachte Voraussetzung fest, dass allen Beobachtungen in jeder dieser Beobachtungsreihen eine gleiche Genauigkeit a priori zugeschrieben wird, so kann man auch den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten x aus der Gesammtheit dieser Beobachtungen nach dem Satze des arithmetischen Mittels finden:

$$x = \frac{M_1' + M_2' + \ldots + M_1'' + M_2'' + \ldots + M_1''' + M_2''' + \ldots}{m' + m'' + m''' + \ldots} \; ,$$

welche Gleichung mit Rücksicht auf die oben aufgestellten Theilresultate geschrieben werden kann:

$$x = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots}{m' + m'' + m''' + \ldots} \; , \tag{5}$$

welcher Ausdruck sofort zu dem folgenden Satze führt: Wenn aus Beobachtungsresultaten, denen verschiedene aber bekannte Gewichtszahlen zugeschrieben werden, der wahrscheinlichste Werth gefunden werden soll, so erhält man denselben, wenn man die Beobachtungsresultate mit dem zugehörigen Gewichte multiplicirt und die Summe dieser Producte durch die Summe der Gewichte dividirt. Das Gewicht dieser Bestimmung selbst ist offenbar der Summe der Gewichte gleich.

Weiter resultirt, dass nothwendig sein muss:

$$m'(x' - x) + m''(x'' - x) + \ldots = 0 \; . \tag{6}$$

An dem Ausdrucke 5) wird seinem Werthe nach nichts geändert, wenn man den Zähler und Nenner mit einem beliebigen Factor a multiplicirt, also setzt:

$$x = \frac{a m' x' + a m'' x'' + a m''' x''' + \ldots}{a m' + a m'' + a m''' + \ldots} \; ,$$

woraus man sofort schliessen kann, dass die Gewichte nur Relativzahlen sind und keineswegs ganze Zahlen zu sein brauchen. Eine Beobachtung mit dem Gewichte »Null« ist verfehlt, und wird gleichsam nicht mitgezählt, wird verworfen, ein negatives Gewicht hat aber nach der Idee desselben keine Bedeutung. Bezeichnet man mit p das Gewicht, so wird man sich stets vor Augen halten müssen, dass p einen positiven Werth hat; es würde sich daher einigermassen aus diesem und anderen später hervortretenden Gründen empfehlen für das Gewicht das Symbol pp einzuführen; da dies aber nicht üblich ist, so bleibe ich bei der gewählten Bezeichnung.

Man kann sich die oben angeführten Theilresultate x', x'', x''' ... auf die verschiedenartigste Weise entstanden denken, so z. B. sei x' mit Hilfe eines genaueren Instrumentes erhalten worden als x'', x''' wäre durch einen anderen Beobachter von geringerer Geschicklichkeit geliefert u. s. w., so sind dies Umstände,

die den Theilresultaten verschiedenes Gewicht ertheilen; die Discussion einer jeden dieser Beobachtungsreihen wird, geleitet durch die Principien, die in der Folge entwickelt werden, aus den Beobachtungen selbst eine Gewichtsbestimmung ermöglichen, eine Bestimmung, die bisher stillschweigend als vollzogen betrachtet wurde; es wird nämlich offenbar jenen Beobachtungen der einzelnen Reihen, die innerhalb derselben kleinere Differenzen zwischen den Beobachtungen und der Rechnung übrig lassen, ein grösseres Gewicht zuzuschreiben sein und damit das Gewicht gewissermassen a posteriori bestimmt. Man wird aber hierbei zu bemerken haben, dass offenbar nur dann eine einigermassen sichere Bestimmung des Gewichtes der Beobachtungen in den verschiedenen Reihen a posteriori erlangt werden kann, wenn die Beobachtungen einer jeden Reihe zahlreich sind, weil ja nur in diesem Falle auf eine Ausgleichung der zufälligen Fehlerquellen, die die einzelne Beobachtung betreffen, mit einiger Sicherheit gerechnet werden darf, ein Umstand, der nicht immer gehörig berücksichtigt wird.

§ 2. Die gesetzmässige Vertheilung der Beobachtungsfehler.

Nach den vorausgehenden allgemein orientirenden Bemerkungen wird es angemessen erscheinen, vorerst die Gesetze zu finden, nach denen die Beobachtungsfehler trotz ihrer scheinbaren Regellosigkeit sich halten und anordnen; hierbei werden aber nur die rein zufälligen Fehler in Betracht gezogen werden, da die Methode der kleinsten Quadrate kein Mittel an die Hand geben kann, eine die Beobachtungen in constanter Weise entstellende Fehlerquelle zu finden und ihrer Grösse nach zu bestimmen. Es ist in diesem Falle die Aufgabe des Beobachters, die Anordnung und die Reduction der Beobachtungen so zu treffen, dass solche constante Fehler möglichst wenig in den Vordergrund treten; hierüber lassen sich aber offenbar keine allgemeinen Vorschriften geben, doch wird man beachten, dass es nur in den seltensten Fällen gelingen wird, trotz aller darauf aufgewendeten Mühen, die Beobachtungen völlig von diesen constanten Fehlerquellen zu befreien; es wird daher im Allgemeinen die durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundene Unsicherheit des Resultates, die sich nur auf die zufällig auftretenden Fehler gründet, zu klein gefunden werden und die thatsächliche grösser sein, entsprechend dem begangenen, seiner Grösse nach aber unbekannten constanten Fehler. Diese Betrachtung, welche durch die Erfahrung allseitig bestätigt wird, muss man sich stets bei der Beurtheilung der theoretisch bestimmten Unsicherheit des Resultates aus der Uebereinstimmung der Beobachtungen vor Augen halten, und würde man dies stets gethan haben, so würden manche Vorwürfe, die man der Methode in ungerechtfertigter Weise zugeschoben hat, nicht gemacht worden sein.

Dass die zufälligen Fehler in der That eine gewisse Anordnung in Bezug auf ihre Grösse zeigen müssen, lässt sich leicht in den allgemeinsten Zügen nachweisen;

so wird z. B. der Fadenantritt eines Aequator-Sternes an einem grösseren Meridianinstrumente im Durchschnitt auf etwa 0.07 Zeitsecunden für einen mässig geübten Beobachter genau aufzufassen sein; ein Fehler von einer halben Secunde wird daher äusserst selten auftreten, Fehler von 0.1 aber sehr häufig. Diese Betrachtung berechtigt also zu dem Schlusse, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens einer gewissen Fehlergrösse selbst eine Funktion der letzteren ist.

Man wird daher behaupten können,

$$\varphi(\varDelta)$$

wird die Wahrscheinlichkeit des Eintretens einer gewissen Fehlergrösse $\varDelta$ darstellen, wobei vorläufig die Form der Funktion φ selbst unbekannt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler $\varDelta'$ eintritt, wird also durch $\varphi(\varDelta')$ ausgedrückt werden können. Lässt man nun die Werthe $\varDelta$, $\varDelta'$ $\varDelta''$ ... der Reihe nach alle Werthe annehmen zwischen den Grenzen $-c$ und $+c$, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler sich innerhalb dieser Grössen findet, offenbar gleich sein der Summe der Wahrscheinlichkeiten der innerhalb dieser Grenzen befindlichen Fehler, und sei diese Summe durch P bezeichnet, so ist:

$$P = \sum_{\varDelta=-c}^{\varDelta=+c} \varphi(\varDelta);$$

bei einer grossen Beobachtungsreihe kann man aber wohl annehmen, dass die Fehler selbst ihrer Grösse nach nahe continuirlich in einander übergehen. Erlaubt man sich diese allerdings nur theilweise gerechtfertigte Annahme, so wird man diese Summe durch ein Integral ersetzen dürfen und die Form erhalten:

$$P = \int_{-c}^{+c} \varphi(\varDelta)\, d\varDelta. \qquad 1)$$

Dieser für die weitere Behandlung nothwendige Uebergang von einer Summe auf ein Integral wird uns zur Vorsicht mahnen, wenn Resultate aus einer geringen Zahl von Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet werden sollen; die Methode fordert, dass mindestens in einer gewissen Annäherung die Summe durch das Integral ersetzt werden darf; diese Voraussetzung wird um so fehlerhafter sein, je geringer die Anzahl der Beobachtungen ist. Dieser hier hervorgehobene Umstand tritt nicht nur bei der eben angestellten Betrachtung nachtheilig hervor, sondern auch bei den weiter unten folgenden Betrachtungen.

In dem Ausdruck 1) wird nothwendig P stets kleiner als die Einheit sein müssen, denn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines gewissen Falles drückt das Verhältniss desselben zu allen möglichen aus; dieses Verhältniss kann daher nur dann der Einheit gleich gesetzt werden, wenn die Fehlergrenzen so weit gezogen werden, dass dieselben alle möglichen Fälle in sich schliessen, denn dann geht die Wahrscheinlichkeit in die Gewissheit $= 1$ über.

Durch diese Betrachtungen ist man in der Lage, das obige bestimmte Integral für einen bestimmten Grenzwerth seinem numerischen Werthe nach anzugeben,

eine Auswerthung, die seiner Zeit von besonderem Nutzen sein wird zur Bestimmung einer Integrationsconstante. Die Gewissheit, dass der Fehler innerhalb der gesteckten Grenzen liegt, wird man nur dann haben, wenn man die Fehlergrenzen unendlich weit steckt, also für $c = \pm \infty$ substituirt, es wird dann $P = 1$ und es besteht daher die für die Folge wichtige Relation:

$$1 = \int_{-c}^{+c} \varphi(\Delta)\, d\Delta\ . \qquad 2)$$

Diese Betrachtungen selbst führen aber nicht zur Kenntniss der Form der Funktion; zu diesem Ende muss man das Problem von einer anderen Seite fassen. Mag man die Unbekannte x, die durch die Beobachtung bestimmt wird, wie immer wählen, so werden, sobald eine bestimmte Annahme über dieselbe gemacht wird, ganz bestimmte Differenzen auftreten zwischen dieser Annahme und den beobachteten Werthen, die durch Δ', Δ'', Δ''' ... dargestellt werden sollen. Die Wahrscheinlichkeiten eines jeden dieser einzelnen Fehler ist aber bestimmt durch $\varphi(\Delta')$, $\varphi(\Delta'')$, $\varphi(\Delta''')$ .... die Wahrscheinlichkeit aber, dass diese bestimmten Fehler Δ', Δ'', Δ''' ... gleichzeitig vorhanden sind, also mit einer bestimmten Annahme über die Unbekannte eintreten, wird gleich sein dem Producte dieser Wahrscheinlichkeiten, nämlich der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit. Bezeichnet man diese letztere mit W, so wird man haben:

$$W = \varphi(\Delta') \cdot \varphi(\Delta'') \cdot \varphi(\Delta''') \ldots \qquad 3)$$

Diese Productform rechtfertigt sich durch die folgende Betrachtung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Tritt unter y Fällen das geforderte Ereigniss nur l mal ein, so ist die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens bestimmt durch: $\frac{y}{l}$; sind etwa in einer Urne 10 Kugeln, von denen 6 weiss und 4 schwarz sind, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem Zuge eine weisse Kugel zieht, sein: $\frac{6}{10}$. Nimmt man weiter eine Urne mit z Kugeln, von denen n weiss sind, so wird die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weissen Kugel sein $\frac{n}{z}$; will man nun die Wahrscheinlichkeit kennen, welche sich darbietet, dass bei gleichzeitigen Zügen aus beiden Urnen zwei weisse Kugeln gehoben werden, so bedenke man, dass im Ganzen yz verschiedene Fälle möglich sind, weil jede Kugel aus der ersten Urne gleichzeitig mit einer jeden Kugel der zweiten Urne gezogen werden kann. Da nun in der ersten Urne l weisse, in der zweiten n vorhanden sind, so ist die Anzahl der möglichen Züge, bei der gleichzeitig weisse Kugeln zum Vorschein kommen, nach demselben Principe ln; also ist das Verhältniss zwischen den günstigen Fällen (ln) zu den möglichen Fällen (yz) die Wahrscheinlichkeit des Eintretens, somit wird die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit sein: $\frac{l \cdot n}{y \cdot z}$. Die Betrachtungen könnten beliebig fortgesetzt werden und führen zu dem Resultate, dass die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit gleich ist dem Producte der einfachen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Es ist klar, dass hierbei die völlige

Unabhängigkeit der einzelnen Ereignisse von einander gesichert sein muss. Hiermit erscheint die obige Productform 3) gerechtfertigt.

Es muss nun hervorgehoben werden, dass derjenige Werth der Unbekannten der wahrscheinlichste ist, der W zu einem Maximum macht, da derselbe zu der wahrscheinlichsten Fehlercombination führt. Ist, wie oben, x die Unbekannte, so wird jede Aenderung in x, da dadurch die Fehler Δ', Δ'', Δ''' ... geändert werden, auch den Werth von W beeinflussen; für die Bedingung des Maximums wird man daher haben:

$$\frac{dW}{dx} = 0 \,. \tag{4}$$

Geht man auf die Entstehung der Grössen Δ', Δ'', Δ''' ... zurück, wonach ist:

$$\begin{aligned} \Delta' &= M' - x \\ \Delta'' &= M'' - x \\ \Delta''' &= M''' - x \,, \\ &\dots \end{aligned}$$

so wird, da die beobachteten Werthe M', M'', M''' ... in einem gegebenen Falle Constante sind, sein:

$$d\Delta' = d\Delta'' = d\Delta''' = -dx \,,$$

oder:

$$\frac{d\Delta'}{dx} = \frac{d\Delta''}{dx} = \frac{d\Delta'''}{dx} = \dots = -1 \,. \tag{5}$$

Differentiirt man also 3) nach x, so erhält man:

$$\frac{dW}{dx} = \{\varphi(\Delta'') \cdot \varphi(\Delta''') \dots\} \frac{d\varphi(\Delta')}{dx} + \{\varphi(\Delta') \cdot \varphi(\Delta''') \dots\} \frac{d\varphi(\Delta'')}{dx} + $$
$$+ \{\varphi(\Delta') \cdot \varphi(\Delta'') \dots\} \frac{d\varphi(\Delta''')}{dx} + \dots$$

oder auch mit Rücksicht auf die Bedingung des Maximum 4) nach einer offenkundigen Transformation:

$$0 = \frac{W}{\varphi(\Delta')} \frac{d\varphi(\Delta')}{dx} + \frac{W}{\varphi(\Delta'')} \frac{d\varphi(\Delta'')}{dx} + \dots \tag{6}$$

Führt man nun zur Abkürzung für die erste Derivation der Funktion φ das Symbol φ' ein, so wird sein:

$$\frac{d\varphi(\Delta')}{d\Delta'} = \varphi'(\Delta'), \quad \frac{d\varphi(\Delta'')}{d\Delta''} = \varphi'(\Delta''), \dots$$

und die Gleichung 6) kann geschrieben werden, wenn man den gemeinsamen Factor W wegen der links vom Gleichheitszeichen stehenden Null weglässt:

$$\frac{\varphi'(\Delta')}{\varphi(\Delta')} \left(\frac{d\Delta'}{dx}\right) + \frac{\varphi'(\Delta'')}{\varphi(\Delta'')} \left(\frac{d\Delta''}{dx}\right) + \dots = 0 \,.$$

oder mit Rücksicht auf 5):

$$\frac{\varphi'(\Delta')}{\varphi(\Delta')} + \frac{\varphi'(\Delta'')}{\varphi(\Delta'')} + \frac{\varphi'(\Delta''')}{\varphi(\Delta''')} + \dots + \frac{\varphi'(\Delta^m)}{\varphi(\Delta^m)} = 0. \tag{7}$$

Der Satz des arithmetischen Mittels ergab:

$$\Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \dots + \Delta^m = 0 \,. \tag{8}$$

welche Relation mit 7) gleichzeitig der Voraussetzung nach bestehen muss. Man könnte geneigt sein, da vorerst die Fehler $\varDelta'$, $\varDelta''$, $\varDelta'''$ ... von einander unabhängig sind, die einzelnen Glieder der beiden Gleichungen 7) und 8) zu identificiren, nachdem man eine derselben mit dem unbestimmten Factor k multiplicirt hat; letzteres ist nothwendig, da in Folge der Form der Gleichungen (beiderseits steht rechts die Null) constante Factoren verschwunden sein können, wie es auch in der That der Fall ist; man würde durch dieses Verfahren auch richtige Formen erhalten, doch erscheint es strenger zum Nachweise den folgenden Weg einzuschlagen. Aus der Gleichung 8) folgt:

$$\varDelta^{m} = -(\varDelta' + \varDelta'' + \varDelta''' + \ldots + \varDelta^{m-1}),$$

substituirt man diesen Werth in die Gleichung 7), so resultirt:

$$\frac{\varphi'(\varDelta')}{\varphi(\varDelta')} + \frac{\varphi'(\varDelta'')}{\varphi(\varDelta'')} + \ldots + \frac{\varphi'(\varDelta^{m-1})}{\varphi(\varDelta^{m-1})} + \frac{\varphi'(-\varDelta' - \varDelta'' \ldots - \varDelta^{m-1})}{\varphi(-\varDelta' - \varDelta'' \ldots - \varDelta^{m-1})} = 0 .$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach $\varDelta'$, $\varDelta''$, $\varDelta'''$ u. s. w., und schreibt man der Kürze halber:

$$f(\varDelta) = \frac{\varphi'(\varDelta)}{\varphi(\varDelta)} ,$$

so ist, weil

$$\frac{d(-\varDelta' - \varDelta'' \ldots - \varDelta^{m-1})}{d\varDelta'} = -1 ,$$

da

$$\frac{df(\varDelta')}{d\varDelta'} = \frac{df(-\varDelta' - \varDelta'' - \ldots - \varDelta^{m-1})}{d(-\varDelta' - \varDelta'' - \ldots - \varDelta^{m-1})}$$

$$\frac{df(\varDelta'')}{d\varDelta''} = \frac{df(-\varDelta' - \varDelta'' - \ldots - \varDelta^{m-1})}{d(-\varDelta' - \varDelta'' - \ldots - \varDelta^{m-1})}$$

u. s. f.

also:

$$\frac{df(\varDelta')}{d\varDelta'} = \frac{df(\varDelta'')}{d\varDelta''} = \frac{df(\varDelta''')}{d\varDelta'''} = \ldots$$

Da aber nunmehr $\varDelta'$, $\varDelta''$, $\varDelta'''$ ... völlig unabhängig sind, so kann diese Gleichheit der Differentialquotienten nur bestehen, wenn dieselben einer Constante gleich sind, und man hat also:

$$\frac{df(\varDelta)}{d\varDelta} = k .$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$f(\varDelta) = \frac{\varphi'(\varDelta)}{\varphi(\varDelta)} = k\varDelta + c .$$

Die Integrationsconstante c ist aber der Null gleich, wie man sich leicht überzeugt, wenn man das Resultat dieser Gleichung in die Gleichung 7) substituirt und mit der Bedingung 8) vergleicht. Man hat also:

$$\frac{\varphi'(\varDelta)}{\varphi(\varDelta)} = k\varDelta . \qquad 9)$$

Es ist hiermit eine Relation erlangt, die zwischen der Funktion φ und ihrer ersten Derivation besteht, und es wird dadurch die Möglichkeit geboten, die Form

der Funktion zu eruiren. Setzt man nun in 9) die früher als Abkürzung eingeführte Relation:

$$\varphi'(\Delta) = \frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta}$$

ein, so findet sich

$$\frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)} = k\,\Delta\, d\Delta\,,$$

und die Integration lässt finden, wenn man die Integrationsconstante durch log. nat. $\varkappa$ darstellt:

$$\log.\ \mathrm{nat.}\ \{\varphi(\Delta)\} = \tfrac{1}{2}\,k\,\Delta^2 + \log.\ \mathrm{nat.}\ \varkappa\ ,$$

oder:

$$\log.\ \mathrm{nat.}\ \frac{\varphi(\Delta)}{\varkappa} = \tfrac{1}{2}\,k\,\Delta^2\ ,$$

und schliesslich:

$$\varphi(\Delta) = \varkappa\, e^{\frac{1}{2}k\Delta\Delta}\ . \qquad 10)$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen vorstellt.

Ueber das Zeichen von $\varkappa$ und k lässt sich aber sofort eine Entscheidung treffen. Da die Wahrscheinlichkeit eine positive Grösse sein muss, so wird zunächst $\varkappa$ nothwendig positiv sein müssen, und da weiter $\varkappa$, e und $\frac{1}{2}k$ Constante sind, so wird, wenn Δ vergrössert und k positiv vorausgesetzt wird, der Werth links vom Gleichheitszeichen ein grösserer, und es tritt der der Erfahrung widersprechende Fall ein, dass die Wahrscheinlichkeit grösserer Fehler grösser ist, als die kleinerer, während gerade das Gegentheil stattfindet; ist aber k negativ, so tritt sofort die erwünschte Uebereinstimmung mit der Erfahrung hervor; um dies anzuzeigen, soll in der Folge gesetzt werden:

$$\tfrac{1}{2}\,k = -\,h^2\ ,$$

und man hat also:

$$\varphi(\Delta) = \varkappa\, e^{-hh\Delta\Delta} \qquad 11)$$

welche Gleichung nun φ der Form nach vollkommen bestimmt. Die Constanten $\varkappa$ und h bedürfen aber noch einer näheren Bestimmung, und es soll zunächst die Bestimmung von $\varkappa$ vorgenommen werden. Es ist oben pag. 283 die Gleichung gefunden worden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\Delta)\, d\Delta = 1\ ,$$

hervorgegangen aus der Betrachtung, dass man mit Gewissheit voraussetzen darf, dass die Fehler innerhalb der Grenzen $\pm\infty$ eingeschlossen sind; ersetzt man nun die Funktion φ durch ihre jetzt bekannte Form, so hat man:

$$\varkappa\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hh\Delta\Delta}\, d\Delta = 1\ , \qquad 12)$$

woraus sofort resultirt, dass eine Bestimmung der Constante $\varkappa$ durch diese Relation möglich ist, sobald der Werth des vorliegenden bestimmten Integrales, welches ein

Euler'sches Integral (Gammafunktion) ist, bekannt ist. Um dasselbe zu entwickeln, setze man:

$$h\Delta = t$$

$$d\Delta = \frac{dt}{h}$$

und man hat die Form:

$$\frac{\varkappa}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tt}\,dt = 1\,. \qquad (13)$$

Es ist aber:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tt}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-tt}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-tt}\,dt\,.$$

und vermöge der Form der Funktion (t erscheint nur in quadratischer Form):

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tt}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-tt}\,dt = J\,. \qquad (14)$$

Da nun der Werth eines bestimmten Integrales nicht geändert werden kann, wenn man statt der Variabeln eine andere Bezeichnung einführt, so wird man haben:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-vv}\,dv = J\,. \qquad (15)$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen (14) und (15) und beachtet, dass die Integrationsordnung beliebig ist, so erhält man:

$$J^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(tt+vv)}\,dt\,dv\,.$$

Setzt man nun:

$$v = tu\,; \quad \text{also } dv = t\,du\,.$$

so wird auch:

$$J^2 = \int_{0}^{\infty} du \int_{0}^{\infty} t\,e^{-tt(1+uu)}\,dt\,.$$

Führt man zuerst die Integration nach t aus, so muss u als Constante angesehen werden, man hat also setzend:

$$t^2(1+u^2) = x\,,$$

auch:

$$t\,dt = \frac{dx}{2(1+u^2)}\,,$$

und es wird:

$$\int_{0}^{\infty} t\,e^{-tt(1+uu)}\,dt = \frac{1}{2(1+u^2)}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-\frac{e^{-x}}{2(1+u^2)}\right]_{x=0}^{x=\infty}.$$

Für die obere Grenze verschwindet der Werth des Integrales, für die untere wird er aber:

$$-\frac{1}{2(1+u^2)} \,,$$

man hat also:

$$J^2 = \int_0^\infty \frac{du}{2(1+u^2)} = \Big[\tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} u\Big]_{u=0}^{u=\infty} \,.$$

Für die obere Grenze wird aber der Werth des Integrales $\frac{\pi}{4}$, für die untere verschwindet er; man hat demnach:

$$J^2 = \frac{\pi}{4} \,,$$

oder:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tt}\, dt = \sqrt{\pi} \,. \qquad (16)$$

Setzt man also diesen Werth des bestimmten Integrales in die Gleichung (13), so resultirt:

$$\frac{\varkappa}{h}\sqrt{\pi} = 1$$

oder

$$\varkappa = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \,,$$

und die Gleichung (11) erhält die Form:

$$\varphi(\varDelta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-hh\varDelta\varDelta} \qquad (17)$$

welche Gleichung nur mehr die Constante h enthält, auf welche weiter unten näher eingegangen werden soll; hier sei nur vorläufig bemerkt, dass dieselbe ganz wesentlich mit der Güte der Beobachtungen im Zusammenhang steht und daher den Namen »Maass der Präcision« erhalten hat.

Mit der Gleichung (17) ist die Eingangs dieses Paragraphen vorgelegte Frage beantwortet, indem dieselbe die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Fehlers $\varDelta$ als Funktion von $\varDelta$ darstellt. Die Form selbst ist symmetrisch, erreicht ihr Maximum für $\varDelta = 0$, und wird erst der Null gleich für $\varDelta = \infty$.

§ 3. Das Maass der Präcision.

Die Gleichung (17) des vorausgehenden Paragraphen enthält die Constante h, deren Bedeutung noch klar zu legen ist. $\varphi(\varDelta)$ drückt die Wahrscheinlichkeit aus des Eintretens eines Fehlers von der Grösse $\varDelta$; je genauer eine Beobachtungsreihe ist, um so kleiner werden die zu erwartenden Fehler sein, während die Wahrscheinlichkeit als das Verhältniss der günstigen zu allen möglichen Fällen

offenbar nicht von der Genauigkeit der Beobachtungsreihe abhängig sein kann; es hat demnach die Constante h die Aufgabe, die geforderte Ausgleichung vorzunehmen. Bevor aber weiter vorgegangen werden kann, muss der Inhalt des Begriffes, welchen man durch das Wort Genauigkeit ausdrückt, näher definirt werden. Vorerst wird man sofort erkennen, dass die Genauigkeit eine Relativzahl sein muss, die das Verhältniss der Güte der Beobachtungen gegen einander bestimmt; wenn nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer Beobachtung oder irgend eines Resultates aus Beobachtungen zwischen den Grenzen $-\gamma$ und $+\gamma$ liegt, der Wahrscheinlichkeit gleich ist, dass der Fehler irgend einer anderen Beobachtung oder eines Beobachtungsresultates zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ liegt, so wollen wir die Voraussetzung machen, dass sich die Genauigkeit des ersten Resultates zum zweiten, wie δ zu γ verhält; oder in Worten: die Genauigkeiten verhalten sich umgekehrt zu einander, wie die den Resultaten zuzuschreibenden Fehler. Es ist somit der Begriff »Genauigkeit«, wie derselbe in der Folge genommen werden soll, definirt.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Fehler beziehungsweise zwischen den Grenzen $-\gamma$ und $+\gamma$ und $-\delta$ und $+\delta$, enthalten ist, ist aber (vergl. I pag. 282) bestimmt durch:

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} d\Delta \,, \qquad \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-HH\Delta\Delta} d\Delta \,,$$

wobei sofort für die Constante h in beiden Systemen verschiedene Buchstaben gewählt wurden, da man schon aus den diesen Paragraphen einleitenden Betrachtungen weiss, dass die Constante h eine Funktion der Genauigkeit sein wird. Sollen aber die obigen Fehlergrenzen für die beiden Systeme dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, so wird sein müssen:

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} h e^{-hh\Delta\Delta} d\Delta = \int_{-\delta}^{+\delta} H e^{-HH\Delta\Delta} d\Delta \,.$$

Setzt man nun

$$h\Delta = x \,, \qquad H\Delta = y \,,$$

so wird die Einführung der neuen Variabeln in die obigen Integrale mit Rücksicht auf die Aenderung der Grenzen ergeben:

$$\int_{-\gamma h}^{+\gamma h} e^{-xx} dx = \int_{-\delta H}^{+\delta H} e^{-yy} dy \,.$$

Da bei den bestimmten Integralen der Unterschied der Buchstaben x und y ohne Bedeutung ist, so können diese beiden Integrale im Allgemeinen einander nur gleich werden, wenn ist:

$$\gamma h = \delta H \,,$$

oder auch:

$$h : H = \delta : \gamma \,.$$

d. h. die verschiedenen Werthe der Grösse h verhalten sich zu einander, wie umgekehrt die den Resultaten mit gleicher Wahrscheinlichkeit zuzuschreibenden Fehler. Hält man dieses Resultat mit der obigen Definition über die Genauigkeit zusammen, so resultirt der Satz, dass sich die verschiedenen h zu einander verhalten, wie die Genauigkeiten; deshalb nennt Gauss die Constante h »das Maass der Präcision«, wobei aber wohl zu beachten ist, dass das Maass der Präcision von dem Ausdrucke Gewicht, der oben (pag. 270) näher erläutert wurde, streng zu trennen ist. Auf die Relation, die jedoch zwischen diesen beiden Begriffen zweifellos besteht, wird später zurückgekommen werden.

Da nun die Bedeutung der Constante h erkannt ist, wird es möglich sein, den oben (pag 277) auf ganz anderem Wege bewiesenen Satz, dass der wahrscheinlichste Werth, der durch das arithmetische Mittel definirt wird, auch dadurch bestimmt ist, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist, in einfacher Weise zu verificiren.

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlersystemes W ist oben (pag. 283) dargestellt worden durch:

$$W = \varphi(\Delta') \cdot \varphi(\Delta'') \cdot \varphi(\Delta''') \ldots .$$

Sind nun der Zahl nach m Beobachtungen von gleicher Präcision vorhanden, so würde sich nach Gleichung 17) pag. 288 hierfür schreiben lassen:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-hh(\Delta'\Delta' + \Delta''\Delta'' + \ldots + \Delta^m \Delta^m)};$$

nun ist aber für W das Maximum zu suchen, da der wahrscheinlichste Werth verlangt wird; es wird aber, da π und e an sich Constante sind und h es ebenfalls ist für einen bestimmten Fall, dies nur dann erreicht werden können, wenn man den Exponenten von e zu einem Minimum macht, welche Bedingung sofort den Schluss gestattet, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum sein muss.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Grösse h kann man das eben erhaltene Princip auf Beobachtungen von verschiedener Präcision ausdehnen; wären die Präcisionen der verschiedenen Beobachtungen beziehungsweise h', h'', h''' u. s. f., so wird für die Wahrscheinlichkeit eines Systemes von m Fehlern sich ähnlich wie oben ergeben:

$$W = \frac{h' . h'' \ldots h^m}{\sqrt{\pi^m}} e^{-(h'h'\Delta'\Delta' + h''h''\Delta''\Delta'' + \ldots + h^m h^m \Delta^m \Delta^m)}.$$

Nun ist aber in einem concreten Falle das Prodnct $h' . h'' \ldots h^m$ eine Constante, demnach wird W ein Maximum, wenn

$$h' h' \Delta' \Delta' + h'' h'' \Delta'' \Delta'' + \ldots + h^m h^m \Delta^m \Delta^m$$

ein Minimum ist. Bei Beobachtungen verschiedener Genauigkeit bestimmt sich daher der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten dadurch, dass man die Summe der Quadrate aus dem Producte der Fehler in die Präcisionen zu einem Minimum macht.

Differentiirt man den eben erhaltenen Ausdruck nach Δ', Δ'' ... Δ^m und setzt das Resultat der Null gleich, so ist der Bedingung des Minimums, mit Rücksicht dass in einem gegebenen Falle $d\Delta' = d\Delta'' = d\Delta'''$ ... ist, genügt durch:

$$h'\,h'\,\Delta' + h''\,h''\,\Delta'' + \ldots + h^m\,h^m\,\Delta^m = 0.$$

Vergleicht man mit diesem Resultate die Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes einer Unbekannten (Gleichung 6 pag. 280) aus Beobachtungen mit verschiedenem Gewichte und schreibt in der citirten Gleichung statt m' und $(x' - x)$ die Buchstaben p' und Δ' und analog die übrigen Grössen, so wird man zufolge dieser Gleichung haben:

$$p'\,\Delta' + p''\,\Delta'' + \ldots + p^m\,\Delta^m = 0\ ,$$

und daraus unmittelbar den Schluss ziehen dürfen, unbeschadet dass die beiden Gleichungen mit willkürlichen constanten Factoren durchmultiplicirt sein können, dass die Quadrate der Präcisionen sich zu einander verhalten, wie die Gewichte oder die Präcisionen sich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln der Gewichte. Dieser wichtige Satz wird sich später wieder auf einem ganz anderen Wege beweisen lassen.

§ 4. Der wahrscheinliche Fehler.

Ein mit dem Maasse der Präcision sehr nahe verwandter Ausdruck ist in der Methode der kleinsten Quadrate der Begriff des wahrscheinlichen Fehlers. Es soll unter dem Ausdrucke wahrscheinlicher Fehler jener Fehler definirt erscheinen, der die Eigenschaft hat, dass in einem gegebenen Falle der Wahrscheinlichkeit nach, sowohl ebenso viele Fehler grösser als auch kleiner gefunden werden wie er selbst ist, so dass er, wenn man die Fehler ihrer absoluten Grösse nach geordnet hinschreibt, in die Mitte derselben zu stehen kommt.

Mit Rücksicht auf die bisherigen Entwickelungen hat man:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-hh\,\Delta\Delta}\,d\Delta = 1\ .$$

Es sei durch r der wahrscheinliche Fehler bezeichnet; zerfällt man das oben hingeschriebene Integral dieser Grenze entsprechend, so hat man auch:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{r} e^{-hh\,\Delta\Delta}\,d\Delta + \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_r^{\infty} e^{-hh\,\Delta\Delta}\,d\Delta = 1\ .$$

Da diese Integrale die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der Fehler zwischen den bezüglichen Grenzen darstellen, so muss der Definition nach für den wahrscheinlichen Fehler sein:

$$\int_0^{r} e^{-hh\,\Delta\Delta}\,d\Delta = \int_r^{\infty} e^{-hh\,\Delta\Delta}\,d\Delta\ ,$$

oder mit Rücksicht auf die erstere Relation:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-hh\Delta\Delta}\, d\Delta = \tfrac{1}{2}\,; \qquad 1)$$

setzt man, um die weiteren Entwickelungen bequemer zu gestalten:

$$t = h\Delta$$
$$dt = h\, d\Delta\,,$$

so wird für die Grenze $\Delta = r$ zu setzen sein: $t = hr$; da aber dieser Werth von t in einem gegebenen Falle ein völlig bestimmter ist, so soll für denselben der Buchstabe T eingeführt werden; man hat also:

$$T = hr \quad \text{oder} \quad r = \frac{T}{h}\,.$$

Man erhält demnach mit Rücksicht auf 1) für die Bestimmung der Grenze T die Gleichung:

$$\int_0^T e^{-tt}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,. \qquad 2)$$

Es ist sofort klar, dass diese Gleichung nur durch Versuche gelöst werden kann, etwa in der Weise, dass man sich eine Integraltafel für das vorliegende Integral mit dem Argumente »obere Grenze« entwirft und jenen Werth des Argumentes durch Interpolation zu finden sucht, der der Relation 2) genügt. Es stellt sich daher vorerst die Aufgabe, das vorgelegte Integral numerisch auszuwerthen. Es lassen sich hierzu sehr verschiedene analytische Methoden angeben, die aber alle sehr beschwerlich in der Ausführung werden, wenn T nahe der Einheit gleich ist; ich will hier nur einige dieser Methoden kurz anführen.

Ist T klein, so kann man mit Vortheil die Integration durch Theilung anwenden; man erhält sofort:

$$\int e^{-tt}\, dt = t\, e^{-tt} + 2\int t^2 e^{-tt}\, dt\,.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so findet sich:

$$\int e^{-tt}\, dt = t\, e^{-tt} + \tfrac{2}{3}\, t^3 e^{-tt} + \tfrac{2}{3} \cdot 2 \int t^4 e^{-tt}\, dt\,.$$

und man erhält schliesslich die Reihe:

$$\int e^{-tt}\, dt = t\, e^{-tt} \left\{ 1 + \frac{(2t^2)^1}{3} + \frac{(2t^2)^2}{3\cdot 5} + \frac{(2t^2)^3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots \right\}$$

und durch Einführung der Grenzen:

$$\int_0^T e^{-tt}\, dt = T e^{-TT} \left\{ 1 + \frac{(2T^2)^1}{3} + \frac{(2T^2)^2}{3\cdot 5} + \frac{(2T^2)^3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots \right\}\,,$$

welche Reihe jedoch nur mit Vortheil angewendet wird, so lange $T < 1$ ist, wiewohl dieselbe theoretisch für jeden endlichen Werth von T convergirt.

Ist aber $T > 1$, so empfiehlt sich die folgende von **Laplace** ausgeführte Verwandlung des obigen Integrales in einen Kettenbruch. Setzt man:

$$e^{tt}\int e^{-tt}\,dt = u_0\,,$$

so ist:

$$\frac{du_0}{dt} = 2\,t\,e^{tt}\int e^{-tt}\,dt + 1 = 2\,t\,u_0 + 1 = u_1$$

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} = \frac{du_1}{dt} = 2\,u_1\,t + 2\,u_0 = u_2$$

$$\frac{d^3u_0}{dt^3} = \frac{du_2}{dt} = 2\,u_2\,t + 4\,u_1 = u_3$$

$$\frac{d^4u_0}{dt^4} = \frac{du_3}{dt} = 2\,u_3\,t + 6\,u_2 = u_4\,.$$

oder allgemein:

$$u_{n+1} = 2\,u_n\,t + 2\,n\,u_{n-1}\,.$$

in welchem Ausdruck n der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 ... annehmen kann. Dividirt man nun diesen Ausdruck beiderseits mit u_n, um das Verhältniss von zwei auf einander folgenden Differentialquotienten zu kennen, so wird:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,t + 2\,n\,\frac{u_{n-1}}{u_n}\,,$$

woraus folgt:

$$\frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} - 2\,t}{2\,n} = \frac{u_{n-1}}{u_n}\,,$$

und es wird dann sein:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{2\,n}{2\,t - \frac{u_{n+1}}{u_n}} = -\frac{\frac{2\,n}{2\,t}}{1 - \frac{1}{2\,t}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}}\,.$$

schreibt man also:

$$k = \frac{1}{2\,t^2}\,,$$

so erhält man auch:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{2\,n\sqrt{\frac{k}{2}}}{1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\sqrt{\frac{k}{2}}}\,. \qquad 3$$

wodurch das Verhältniss zweier auf einander folgender Differentialquotienten durch das Verhältniss des höheren derselben gegen den nächst höheren ausgedrückt erscheint unter dem Vorbehalte, dass nicht $n = 0$ ist, indem in diesem Falle die obige allgemeine Formel ihre Giltigkeit verliert. Es soll nun das Verhältniss in diesem speciellen Falle untersucht werden, also u_0 durch $\frac{u_1}{u_0}$ ausgedrückt werden. Es war aber oben die Relation gefunden worden:

$$u_1 = 2\,u_0\,t + 1\,.$$

also ist:

$$\frac{u_1}{u_0} = 2t + \frac{1}{u_0}, \quad \frac{1}{u_0} = \frac{u_1}{u_0} - 2t,$$

wonach nun geschrieben werden kann:

$$e^{tt}\int e^{-tt}\,dt = u_0 = -\frac{1}{2t - \frac{u_1}{u_0}};$$

multiplicirt man linker Hand mit $2t$ und dividirt den Nenner rechter Hand durch $2t$ und ersetzt diese letztere Grösse durch k, so findet sich sofort:

$$2t \cdot e^{tt}\int e^{-tt}\,dt = -\frac{1}{1 - \frac{u_1}{u_0}\sqrt{\frac{k}{2}}} \tag{4}$$

welche Relation die Bestimmung des Integrales von der Kenntniss des Werthes $\frac{u_1}{u_0}$ abhängig macht, es ist aber nach 3) (pag. 293):

$$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{2\sqrt{\frac{k}{2}}}{1 - \frac{u_2}{u_1}\sqrt{\frac{k}{2}}}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{k}{2}}}{1 - \frac{u_3}{u_2}\sqrt{\frac{k}{2}}}$$

$$\frac{u_3}{u_2} = -\frac{2 \cdot 3\sqrt{\frac{k}{2}}}{1 - \frac{u_4}{u_3}\sqrt{\frac{k}{2}}}$$

u. s. w.

Substituirt man successive diese Werthe in 4), so findet sich leicht der folgende Kettenbruch:

$$2te^{tt}\int e^{-tt}\,dt = -\cfrac{1}{1+\cfrac{k}{1+\cfrac{2k}{1+\cfrac{3k}{1+\cfrac{4k}{\cdots}}}}}$$

dessen Bildungsgesetz klar ist. Führt man nun in diesem Ausdrucke die Grenze $0 = T$ ein, so wird der Ausdruck die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhalten; nun ist aber (vergl. 16) pag. 288):

$$\int_0^{\infty} e^{-tt}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

also ist auch:

$$\int_0^T e^{-tt}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_T^{\infty} e^{-tt}\,dt.$$

Man erhält demnach durch Einsetzung der Grenzen T und ∞ in dem Kettenbruche unter Berücksichtigung der Bedeutung von k:

$$\int_0^T e^{-tt}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-TT}}{2T}\left\{\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2T^2}}{\cdots}}}}\right\}.$$

Viel rascher als nach irgend einer Methode erhält man den numerischen Werth, wenn man auf das vorgelegte Integral die mechanische Quadratur anwendet, welches Beispiel ausführlich pag. 36 u. ff. behandelt ist. Es soll nun mit Hilfe der daselbst gefundenen Zahlen der numerische Werth von T bestimmt werden, der der Gleichung 2) (pag. 292) genügt; es ist bekanntlich:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0.443\ 1134\ 627\ .$$

Vergleicht man diesen Werth mit der Integraltafel (Tafel X), so sieht man sofort, dass die gesuchte Grenze zwischen die Argumentwerthe 0.47 und 0.48 fällt; interpolirt man das betreffende Intervall in engere Grenzen, so erhält man die folgende Specialtafel:

	J	f^{I}	f^{II}	f^{III}
0.475	0.441 5697 030			
		+ 7976 381		
0.476	0.442 3073 411		— 7590	
		+ 7968 791		— 9
0.477	0.443 1642 202		— 7599	
		+ 7961 192		— 8
0.478	0.443 9603 394		— 7607	
		+ 7953 585		
0.479	0.444 7556 979			

Der zu suchende Werth liegt daher sehr nahe dem Argumente 0.477.

Stellt man daher mit Hilfe der Differenzwerthe vom Argumente 0.477 ausgehend die Funktion nach Potenzen von n, dem Abstande vom nächsten Argumente in Einheiten des Intervalles, dar, so erhält man als Bestimmungsgleichung für n

$$0.443\ 1134\ 627 = 0.443\ 1642\ 202 + 0.000\ 7964\ 993\ n - 0.000\ 0003\ 799\ n^2\,,$$

woraus folgt:

$$n = -0.0637\ 239\ ,$$

es ist mithin der gesuchte Werth von T, der als Specialwerth mit ϱ bezeichnet werden soll:

$$\varrho = 0.476\ 9362\ 761\ ,$$

der nur um wenige Einheiten der zehnten Decimale unrichtig sein kann. Es ist also, wenn wie oben (pag. 292) mit r der wahrscheinliche Fehler, mit h das Maass der Präcision bezeichnet wird,

$$\varrho = hr\,,\quad h = \frac{\varrho}{r}\,,\quad r = \frac{\varrho}{h}\,. \qquad 5)$$

wobei durch die numerische Bestimmung von ϱ erreicht wird, dass man der durch die Gleichung 1) (pag. 292) ausgedrückten Bedingung genügt.

Das Maass der Präcision ist demnach umgekehrt proportional dem wahrscheinlichen Fehler und kann bestimmt werden, sobald der wahrscheinliche Fehler r bekannt ist. Indem es sofort klar ist, dass eine Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers möglich sein wird, wenn man sich nur vergegenwärtigt, dass nach der Definition für denselben aus einer grösseren Beobachtungsreihe schon ein Näherungswerth erlangt werden muss, wenn man die Beobachtungsfehler ihrer Grösse nach ordnet und den Fehler der bei dieser Anordnung in die Mitte fallenden Beobachtung (ungerade Anzahl der Beobachtungen) oder das Mittel der Fehler der beiden mittleren Beobachtungen (gerade Anzahl) als Werth für r annimmt. Wiewohl später schärfere Methoden angegeben werden zur Erlangung des Werthes von r, so genügt doch dieser Hinweis, dass die Möglichkeit geboten ist, im gegebenen Falle das Maass der Präcision h numerisch festzustellen und hiermit erscheint das Integral

$$\int_a^b \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} d\Delta , \tag{6}$$

welches die Wahrscheinlichkeit angibt für das Auftreten eines bestimmten Fehlers innerhalb der willkürlichen Grenzen a und b, vollständig bestimmt.

Wenn man die bisherigen Entwickelungen überblickt, so sieht man, dass aus dem Axiom des arithmetischen Mittels allein die Herstellung des eben hingeschriebenen Integrales möglich war; die gemachten Schlussfolgerungen erscheinen aber nur dann völlig streng, wenn eine unendliche Anzahl von Beobachtungen, die frei von constanten Fehlern sind, vorliegt; man wird demnach, da in einem speciellen Falle doch nur eine endliche Anzahl von Beobachtungen vorliegen kann, mit einem halbwegs annehmbaren Grade von Sicherheit den Resultaten dieser Formel nur dann Vertrauen schenken dürfen, wenn die Beobachtungen zahlreich sind; sind sie es aber nicht, so werden die nach diesen Principien abgeleiteten Resultate zwar im grossen Durchschnitte den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen, können aber im speciellen Falle trügerisch sein.

Die Formel 6) wird eine zweckmässige Gelegenheit bieten, die theoretisch gefundene Form durch die Beobachtungen selbst zu prüfen; setzt man vorerst voraus, dass r in irgend einer Weise für eine specielle Beobachtungsreihe bestimmt vorliege, also h bestimmbar ist nach 5) (pag. 295) (die Zahl der Beobachtungen sei m), so wird, wenn man, da das Auftreten negativer und positiver Fehler nach der quadratischen Form von 6) gleiche Wahrscheinlichkeit hat, die Fehler ihrer absoluten Grösse nach in Rechnung zieht, die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines bestimmten Fehlers innerhalb der Grenzen $\pm\Delta_1$ bestimmt sein durch:

$$m \int_{-\Delta_1}^{+\Delta_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} d\Delta .$$

wobei sich die Multiplication mit m daraus erklärt, dass das vorgelegte Integral der Bestimmung der Constanten gemäss für die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ der Einheit (Gewissheit) gleich wird Um nun dieses Integral in eine Tafel bringen zu können. wollen wir die schon mehrfach ausgeführte Substitution

$$h\,\Delta = t$$

anwenden und erhalten hierfür:

$$m \int\limits_{-h\Delta_1}^{+h\Delta_1} \frac{e^{-tt}}{\sqrt{\pi}}\, dt = m \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{h\Delta_1} e^{-tt}\, dt\ .$$

Das zuletzt angeführte Integral ist bereits numerisch durch die Tafel X gegeben; zur bequemeren Anwendung habe ich aber aus dieser Tafel durch Multiplication mit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ eine kleinere Tafel (Tafel XIV) abgeleitet, die auf 5 Decimalen, was für die vorliegenden Zwecke mehr als ausreichend ist, den Werth des bestimmten Integrales

$$J_{h\Delta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{h\Delta} e^{-tt}\, dt$$

mit dem Argumente »obere Grenze $= h\,\Delta$« angibt; es wird also die Anzahl der Fehler A_1 sein, die der Wahrscheinlichkeit gemäss ihrer absoluten Grösse nach zwischen den Grenzen 0 und Δ_1 liegen für eine Beobachtungsreihe von m Beobachtungen, deren Maass der Präcision h ist:

$$A_1 = m\, J_{h\Delta_1}\ ;$$

für die Fehlergrenze Δ_2 erhält man ähnlich:

$$A_2 = m\, J_{h\Delta_2}\ ,$$

u. s. f., es wird daher die Anzahl der Fehler ${}_1A_2$ zwischen den Grenzen Δ_1 und Δ_2 bestimmt sein, wenn man sich vorstellt, dass $\Delta_2 > \Delta_1$ ist, durch:

$${}_1A_2 = m\,\{J_{h\Delta_2} - J_{h\Delta_1}\}\ . \qquad 7)$$

Theilt man demnach für eine gegebene Beobachtungsreihe die Fehler entsprechend ihrer Grösse in Gruppen, so erhält man empirisch das Gesetz der Fehlervertheilung; vergleicht man diese Erfahrungsresultate mit der Formel 7), so erhält man ein Bild, in wie weit die theoretisch gefundenen Grundlagen mit der Erfahrung stimmen. Indem weiter unten ein ausführliches Beispiel für die Behandlung einer Beobachtungsreihe nach den hier dargelegten Methoden vorgenommen werden wird, schalte ich hier nur die Bemerkung ein, dass die Erfahrung in der That das Resultat der Formel 7) bestätigt, wenn nur den allgemein nothwendigen Forderungen genügt wird; es zeigt sich nur im Allgemeinen die Abweichung, dass grosse Fehler in der Praxis etwas häufiger vorkommen, als es die Theorie gestattet, was wohl darin seine Erklärung findet, dass selbst bei den sorgfältigst angestellten Beobachtungsreihen eine oder die andere Beobachtung durch ein zufälliges Versehen im höheren Maasse entstellt wird, eine Discontinuität, die den Forderungen der Methode entgegen ist.

§ 5. Der Durchschnittsfehler und der mittlere Fehler.

Zieht man aus allen Beobachtungsfehlern das Mittel ohne Rücksicht auf das Vorzeichen derselben, also ihrem absoluten numerischen Werthe nach, so soll das so gewonnene Resultat mit dem Namen »Durchschnittsfehler« bezeichnet und für denselben der Buchstabe η gesetzt werden; man bezeichnet wohl auch diesen so bestimmten Fehler als »Mittel der Fehler«. Bildet man aber das arithmetische Mittel aus den Fehlerquadraten und zieht aus diesem Mittel die Quadratwurzel, so erhält man den »mittleren Fehler«, der mit dem Buchstaben ε bezeichnet werden soll. Man wird zu beachten haben, dass beide Definitionen völlig willkürlich sind, durch dieselben aber ganz bestimmte Begriffe bezeichnet werden. Sind also (Δ'), (Δ''), ... (Δ^{m}) die wahren Beobachtungsfehler ohne Rücksicht auf das Vorzeichen ihrer absoluten Grösse nach, und m die Zahl der Beobachtungen, so bestehen den obigen Definitionen gemäss die Relationen:

$$\text{Durchschnittsfehler} = \eta = \frac{1}{m}\left\{(\Delta') + (\Delta'') + \ldots + (\Delta^{m})\right\}$$

$$\text{mittlerer Fehler} = \varepsilon = \sqrt{\frac{\Delta'\Delta' + \Delta''\Delta'' + \ldots + \Delta^{m}\Delta^{m}}{m}}\,.$$

Mit Hilfe dieser Relationen wird man in der Lage sein, das Verhältniss der eben hingeschriebenen Fehler zu dem wahrscheinlichen Fehler zu bestimmen. Es ist bekannt, dass durch $\varphi(\Delta)$, wo die Form der Funktion nunmehr durch die vorstehenden Untersuchungen völlig festgestellt ist, die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Fehlers von der Grösse Δ dargestellt wird; ist m die Anzahl der Beobachtungen, so werden $m\,\varphi(\Delta)$ Fehler von der Grösse Δ auftreten; man wird also, wenn man die Summe der Fehler ihrem absoluten Werthe nach bildet, demnach für diese Summe erhalten aus jenen Fehlern die die Grösse Δ_1 haben: $\Delta_1\, m\,\varphi(\Delta_1)$, aus jenen Fehlern von der Grösse Δ_2 wird sich die Summe bilden $\Delta_2\, m\,\varphi(\Delta_2)$ u. s. f.; es ist demnach:

$$(\Delta') + (\Delta'') + \ldots + (\Delta^{m}) = m\left\{\Delta_1\varphi(\Delta_1) + \Delta_2\varphi(\Delta_2) + \Delta_3\varphi(\Delta_3) + \ldots\right\},$$

oder auch:

$$\eta = \Sigma\,\Delta\,\varphi(\Delta).$$

Setzt man nun wieder eine grosse Beobachtungsreihe voraus, so ist es erlaubt sich die obige Summe näherungsweise durch ein Integral ersetzt zu denken und man erhält mit Rücksicht auf die bisherigen Entwickelungen:

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\,\varphi(\Delta)\,d\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} h\,\Delta\,e^{-hh\Delta\Delta}\,d\Delta\,.$$

Um nun das eben aufgestellte Integral auszuwerthen, setze man $h\Delta = t$, es wird demnach:

$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} 2\,t\,e^{-tt}\,dt = \left(-\frac{e^{-tt}}{h\sqrt{\pi}}\right)_0^{\infty}.$$

nach Einführung der Grenzen resultirt:

$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\,.$$

nun war oben (pag. 295) gefunden worden

$$h = \frac{\varrho}{r}\,,$$

wobei ϱ eine Constante ($\varrho = 0.47694$) vorstellt und r der wahrscheinliche Fehler ist. Substituirt man diesen Werth für h in dem Ausdruck für η, so erhält man die folgende lineare Relation, die zwischen dem Durchschnittsfehler η und dem wahrscheinlichen Fehler r besteht:

$$\eta = \frac{r}{\varrho\sqrt{\pi}} = 1.1829\, r\,.$$

oder:

$$r = \varrho\sqrt{\pi}\cdot\eta = 0.8453\,\eta\,. \qquad 1)$$

In ganz ähnlicher Weise wird sich die Relation zwischen dem mittleren Fehler ε und dem wahrscheinlichen r herstellen lassen. Sind wieder m Beobachtungen vorhanden, so werden Fehler von der Grösse Δ_1 vorhanden sein $m\varphi(\Delta_1)$, also der Beitrag zur Summe der Fehlerquadrate $m\Delta_1^2\varphi(\Delta_1)$, ebenso erhält man als den Beitrag für die Summe der Fehlerquadrate aus den Fehlern von der Grösse Δ_2 den Werth $m\Delta_2^2\varphi(\Delta_2)$, es ist also, ähnlich wie früher:

$$\varepsilon^2 = \Sigma\,\Delta^2\varphi(\Delta)\,.$$

Ersetzt man wieder, eine grosse Beobachtungsreihe voraussetzend, die Summe durch ein Integral, führt für $\varphi(\Delta)$ die bereits bekannte Form ein und dehnt die Grenzen, um alle Fehler zu umfassen, bis auf ∞ aus, so wird:

$$\varepsilon^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 e^{-hh\Delta\Delta}\,d\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\Delta^2 e^{-hh\Delta\Delta}\,d\Delta\,.$$

Zur Auswerthung dieses bestimmten Integrales setze man $h\Delta = t$, so erhält man zunächst:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} 2\,tt\,e^{-tt}\,dt\,,$$

dieses Integral lässt sich aber leicht auf bekannte Formen zurückführen. Wendet man darauf die theilweise Integration an, so ist, wenn man setzt:

$$y = e^{-tt}\,, \quad dx = dt$$

$$\int_{0}^{\infty} 2\,tt\,e^{-tt}\,dt = \left(-t\,e^{-tt}\right)_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-tt}\,dt\,.$$

Das erste Glied wird durch Einsetzung der Grenzen der Null gleich, das zweite Glied ist aber bereits oben (pag. 288) entwickelt und gleich $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, es ist also:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2h^2}\,.$$

daher:

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

ersetzt man wieder h durch $\frac{\varrho}{r}$, so wird:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{r}{\varrho\sqrt{2}} = 1.4826\, r \\ r &= \varrho\sqrt{2}\,.\,\varepsilon = 0.6745\, \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Der Zusammenhang zwischen ε und r ist demnach wieder ein linearer und der Factor von ε nahezu gleich $\frac{2}{3}$. Vergleicht man nun die beiden gewonnenen Relationen 1) und 2), so resultirt noch eine Relation zwischen η und ε, es wird sein:

$$\eta = \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,, \quad \varepsilon = \eta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

§. 6. Das Verhältniss der Genauigkeit des arithmetischen Mittels zu der einer Einzelnbeobachtung.

Sei x der wahre Werth der Unbekannten, die durch die Beobachtungen M', M'', M''', ... bestimmt werden soll, so sind die Beobachtungsfehler selbst offenbar:

$$\varDelta' = M' - x\,, \quad \varDelta'' = M'' - x\,, \quad \varDelta''' = M''' - x \text{ u. s. f.},$$

oder

$$x = M' - \varDelta'\,, \quad x = M'' - \varDelta''\,, \quad x = M''' - \varDelta''' \text{ u. s. f.},$$

zieht man aus diesen m Gleichungen das Mittel, so erhält man:

$$x = \frac{1}{m}(M' + M'' + M''' + \ldots) - \frac{1}{m}(\varDelta' + \varDelta'' + \varDelta''' + \ldots)\,.$$

Das erste Glied stellt demnach das arithmetische Mittel selbst, also den wahrscheinlichsten Werth dar, das zweite Glied den Fehler desselben; bezeichnet man mit E den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels, so ist in diesem Falle das Quadrat des mittleren Fehlers bestimmt durch:

$$E^2 = \frac{1}{m^2}\{\varDelta' + \varDelta'' + \varDelta''' + \ldots\}^2\,,$$

oder:

$$m^2 E^2 = (\varDelta'^2 + \varDelta''^2 + \varDelta'''^2 + \ldots + 2(\varDelta'\varDelta'' + \varDelta'\varDelta''' + \ldots + \varDelta''\varDelta''' + \ldots)$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes enthält die Summe der Producte aus den Amben ohne Wiederholung, die sich aus den Beobachtungsfehlern bilden lassen; da nun positive und negative Fehler mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind, so wird man bei einer grösseren Beobachtungsreihe wohl die Behauptung aufstellen dürfen, dass sich diese Producte in der Summe grossentheils aufheben, oder dass mindestens diese Summe gegen das erste aus nothwendig positiven Grössen sich summirende Glied sehr klein wird. Es wird also genähert gesetzt werden dürfen:

$$m^2 E^2 = \Sigma(\varDelta\varDelta)\,.$$

Da in der Folge häufig die Summenzeichen vorkommen, so werde ich hierfür die bequeme Gauss'sche Bezeichnung einführen, indem man statt des Summenzeichens die zu summirende Funktion in eckige Klammer setzt, es ist also:

$$\Sigma (\Delta \Delta) = [\Delta \Delta] = m^2 E^2 .$$

Ist nun ε der mittlere Fehler einer Beobachtung, so ist nach der Definition des mittleren Fehlers:

$$m \varepsilon^2 = [\Delta \Delta] ,$$

und es besteht demnach die Relation:

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} , \qquad 1)$$

da aber die mittleren, wahrscheinlichen und Durchschnitts-Fehler in linearer Relation zu einander stehen, so ist auch:

$$E : \varepsilon = R : r = H : \eta = 1 : \sqrt{m} , \qquad 2)$$

d. h. der mittlere, wahrscheinliche und Durchschnitts-Fehler des arithmetischen Mittels verhält sich zum mittleren, wahrscheinlichen und Durchschnitts-Fehler einer einzelnen Beobachtung, wie sich umgekehrt die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen zur Einheit verhält. Bezeichnet man aber durch H das Maass der Präcision des arithmetischen Mittels, mit h das der einzelnen Beobachtung, so resultirt auch:

$$1 : \sqrt{m} = h : H) , \qquad 3$$

d. h. die Genauigkeit nimmt im Verhältniss der Quadratwurzeln aus der Anzahl der Beobachtungen zu; hält man diess mit der oben (pag. 270) gegebenen Definition des Gewichtes p zusammen, wonach dasselbe der Anzahl der Beobachtungen proportional wächst und bezeichnet mit P das Gewicht des arithmetischen Mittels, so erhält man eine bereits anderweitig (pag. 291) erwiesene Relation:

$$h : H = \sqrt{p} : \sqrt{P} . \qquad 4$$

d. h. die Quadrate der Präcisionen verhalten sich zu einander wie die Gewichte, und die Präcisionen verhalten sich zu einander, wie die Quadratwurzeln der Gewichte; daraus resultirt auch:

$$\left.\begin{aligned} E : \varepsilon &= \sqrt{p} : \sqrt{P} \\ R : r &= \sqrt{p} : \sqrt{P} \\ H : \eta &= \sqrt{p} : \sqrt{P} \end{aligned}\right\} \qquad 5$$

d. h. die Quadrate der Präcisionen verhalten sich umgekehrt zu einander wie die mittleren, wahrscheinlichen und Durchschnitts-Fehler.

§ 7. Bestimmung des mittleren und des Durchschnitts-Fehlers aus gleichwerthigen Beobachtungen.

Es war bisher immer vorausgesetzt worden, dass die wahren Beobachtungsfehler Δ', Δ'' ... bekannt seien, und aus diesen wurden die verschiedenen Fehlerarten hergeleitet. Nun sind aber die wahren Beobachtungsfehler niemals in voller

Strenge bekannt und es stellt sich daher die Aufgabe, aus den nur nahe richtig zu bestimmenden Beobachtungsfehlern (Beobachteter Werth — arithmetisches Mittel) nach dem Principe der Wahrscheinlichkeit die verschiedenen Fehlerarten zu bestimmen.

Sind M', M'', M''' ... die beobachteten Grössen und M der Werth des arithmetischen Mittels, und werden die durch die Rechnung gefundenen Fehler (Beob. Werth — arithm. Mittel) durch v bezeichnet, so ist:

$$v' = M' - M, \quad v'' = M'' - M, \quad v''' = M''' - M \ldots$$

welche Werthe mit den wahren Beobachtungsfehlern identisch wären, wenn M dem wahren Werthe der Unbekannten x entsprechen würde, welche Voraussetzung nur dann statthaft ist, wenn eine sehr grosse Anzahl von Beobachtungen vorliegt. Sei nun der Fehler des arithmetischen Mittels durch δ bezeichnet, so ist:

$$M - x = \delta$$

und offenbar:

$$\Delta' = M' - x, \quad \Delta'' = M'' - x, \quad \Delta''' = M''' - x \ldots$$

oder

$$\Delta' = v' + \delta, \quad \Delta'' = v'' + \delta, \quad \Delta''' = v''' + \delta \ldots$$

Sind nun m derartige Beobachtungen vorhanden, so wird die Summe der Fehlerquadrate bestimmt sein durch:

$$[\Delta\Delta] = [vv] + 2[v]\delta + m\delta^2 .$$

Nun ist aber nach der Bestimmung des arithmetischen Mittels M nothwendig:

$$[v] = 0 ,$$

also besteht auch die wichtige Relation:

$$[\Delta\Delta] = [vv] + m\delta^2 , \tag{1}$$

in welcher aber δ unbekannt ist und den Unterschied zwischen dem wahren Werth und dem arithmetischen Mittel angibt; es wird aber das Quadrat dieses Unterschiedes mit dem Quadrate des mittleren Fehlers des Resultates im Durchschnitte übereinkommen. Ist also ε der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung, so ist auch nach Gleichung 2) des vorausgehenden Paragraphen (pag. 301):

$$\delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{m} ;$$

andererseits ist aber nach der Definition des mittleren Fehlers:

$$m\,\varepsilon^2 = [\Delta\Delta] ,$$

daher schreibt sich statt 1):

$$m\,\varepsilon^2 = [vv] + \varepsilon^2 ,$$

oder:

$$\varepsilon^2 = \frac{[vv]}{m-1} , \quad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{m-1}} . \tag{2}$$

nach welcher Formel der mittlere Fehler zu bestimmen ist, aus den zwischen den Beobachtungen und dem arithmetischen Mittel auftretenden Differenzen v.

Geht man sofort auf die Relationen über, die den mittleren Fehler mit dem wahrscheinlichen Fehler verbinden, so erhält man:

$$r = \pm\, 0.6745 \sqrt{\frac{[r\,r]}{m-1}}\,. \qquad 3)$$

und die bezüglichen Fehler der arithmetischen Mittel werden:

$$E = \pm \sqrt{\frac{[r\,r]}{m\,(m-1)}}\,, \qquad R = \pm\, 0.6745 \sqrt{\frac{[r\,r]}{m\,(m-1)}}\,. \qquad 4)$$

Hiermit ist die Möglichkeit geboten aus den Beobachtungen selbst r und demnach auch h zu bestimmen und so die Bedeutung von $\varphi(\Delta)$ völlig festzustellen; man ist also jetzt in der Lage, an jeder gegebenen Beobachtungsreihe die theoretisch gewonnenen Resultate über die Fehlervertheilung zu prüfen. Ehe ich aber daran gehe, will ich noch zeigen, wie man zur Kenntniss des Werthes r auch durch die Summe der Unterschiede zwischen den Beobachtungen und dem arithmetischen Mittel genommen im absoluten Sinne $[+r]$ gelangen kann, ein Verfahren, welches bei gleichwerthigen Beobachtungen auf eine bequemere Rechnung führt. Setzt man vorerst eine sehr umfassende Beobachtungsreihe voraus, so wird sehr nahe sein:

$$m\,\eta = [+r]\,, \quad m\,\varepsilon^2 = [r\,r]\,,$$

und mit Rücksicht auf die Relation (pag. 300):

$$\eta = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,,$$

wird im grossen Durchschnitte sein:

$$[+r] = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{m\,[r\,r]} \quad \text{oder} \quad \sqrt{[r\,r]} = \pm \frac{[+r]}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

womit also jene Relation hergestellt ist, die im Allgemeinen zwischen $[r\,r]$ und $[+r]$ bestehen wird; setzt man dieselbe in die Gleichung 2), 3) und 4) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \pm\, 1.2533\, \frac{[+r]}{\sqrt{m\,(m-1)}}\,, & E &= \pm\, 1.2533\, \frac{[+r]}{m\sqrt{m-1}}\,, \\ r &= \pm\, 0.8453\, \frac{[+r]}{\sqrt{m\,(m-1)}}\,, & R &= \pm\, 0.8453\, \frac{[+r]}{m\sqrt{m-1}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

---

§ 8. Erläuterung und Prüfung der vorstehenden Methoden durch die Beobachtungen.

Es soll nun zur Erläuterung und Prüfung der vorstehenden Methoden ein Beispiel vorgenommen werden, welches allerdings nicht ganz die genügende Ausdehnung hat, doch würde ein grösseres Beispiel zu viel Raum in Anspruch nehmen. Es wurde mit Hilfe einer Mikrometerschraube ein Intervall von 600″ 40mal gemessen

um den Gangfehler der Schraube zu bestimmen; ich setze neben eine jede Beobachtung sofort den Unterschied zwischen dem angenommenen Mittel und derselben im Sinne: Beobachtung-Rechnung, und ausserdem das Quadrat dieses Unterschiedes an; man erhält so:

	M'	v	vv		M'	v	vv		M'	v	vv
1	600″0	− 2″2	4″84	15	601″4	− 0″8	0″64	28	600″9	− 1″3	1″69
2	599.7	− 2.5	6.25	16	601.4	− 0.8	0.64	29	601.4	− 0.8	0.64
3	599.5	− 2.7	7.29	17	603.4	+ 1.2	1.44	30	600.8	− 1.4	1.96
4	604.6	+ 2.4	5.76	18	603.1	+ 0.9	0.81	31	600.0	− 2.2	4.84
5	603.9	+ 1.7	2.89	19	601.8	− 0.4	0.16	32	600.7	− 1.5	2.25
6	604.8	+ 2.6	6.76	20	600.6	− 1.6	2.56	33	601.4	− 0.8	0.64
7	606.1	+ 3.9	15.21	21	602.0	− 0.2	0.04	34	602.9	+ 0.7	0.49
8	604.7	+ 2.5	6.25	22	602.7	+ 0.5	0.25	35	602.9	+ 0.7	0.49
9	602.1	− 0.1	0.01	23	603.7	+ 1.5	2.25	36	602.4	+ 0.2	0.04
10	602.2	0.0	0.00	24	602.1	− 0.1	0.01	37	602.4	+ 0.2	0.04
11	600.7	− 1.5	2.25	25	602.3	+ 0.1	0.01	38	602.1	− 0.1	0.01
12	602.4	+ 0.2	0.04	26	602.6	+ 0.4	0.16	39	603.6	+ 1.4	1.96
13	601.6	− 0.6	0.36	27	602.7	+ 0.5	0.25	40	603.6	+ 1.4	1.96
14	601.7	− 0.5	0.25								

Da allen Beobachtungen das gleiche Gewicht zuerkannt ist, so ist der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten gleich dem arithmetischen Mittel, es ist also:

$$M = 602''2\ ,$$

und die Unterschiede dieses Mittelwerthes gegen die Beobachtungen finden sich in der mit v überschriebenen Columne; bildet man überdies die Quadrate dieser Fehler, so hat man sich vorerst die nöthigen Hilfsgrössen verschafft, um den wahrscheinlichen Fehler r zu bestimmen; man erhält zunächst:

$$[+v] = 45.1 \qquad [vv] = 84.39\ .$$

Zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers kann man beide Werthe benützen; es ist klar, dass eine völlige Uebereinstimmung beider Zahlen nicht hervortreten wird, indem ja die Identität nur bei einer unendlichen Anzahl der Beobachtungen hervortreten könnte; man hat nach § 7 Gleichung 3) und 5) (pag. 303) hierfür die Relationen, wenn man sofort die auftretenden Coëfficienten logarithmisch ansetzt und zu den Formeln das aus den obigen Zahlen gewonnene Resultat hinzufügt:

$$r = \pm\,[9.8290]\sqrt{\frac{[vv]}{m-1}} = \pm\,0''992$$

$$r = \pm\,[9.9270]\,\frac{[+v]}{\sqrt{m\,(m-1)}} = \pm\,0''962\ .$$

Man sieht, dass beide Resultate in sehr befriedigender Weise stimmen; da aber in der Regel die mit Hilfe des mittleren Fehlers berechneten Werthe von r der Wahrheit näher kommen, als die aus dem Durchschnittsfehler erhaltenen, so soll für die

folgenden Rechnungen der erstere Werth $r = \pm 0''992$ beibehalten werden, wiewohl es klar ist, dass man keine wesentlich anderen Resultate erhalten würde, wenn man den zweiten allein benützen würde. Berechnet man nun den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels (vergl. 2 pag. 301), so findet sich:

$$R = \frac{r}{\sqrt{m}} = \pm 0''157 .$$

Das Maass der Präcision findet sich nach § 4 pag. 295:

$$h = \frac{0.6785}{r} = 0.481 .$$

Um nun die Theorie mit der Erfahrung durch die Formel § 4 (Gleichung 7) (pag. 297) vergleichen zu können, ordne ich die obigen Fehler ihrer Grösse nach. Man findet so, wenn man jeden Fehler mit der Nummer der Beobachtung versehen ansetzt:

	$+v$		$+v$		$+v$		$+v$
10	0''0	26	0''4	33	0''8	20	1''6
9	0.1	14	0.5	18	0.9	5	1.7
24	0.1	22	0.5	17	1.2	1	2.2
25	0.1	27	0.5	28	1.3	31	2.2
38	0.1	13	0.6	30	1.4	4	2.4
12	0.2	34	0.7	39	1.4	2	2.5
21	0.2	35	0.7	40	1.4	8	2.5
36	0.2	15	0.8	11	1.5	6	2.6
37	0.2	16	0.8	23	1.5	3	2.7
19	0.4	29	0.8	32	1.5	7	3.9

Fasst man nun die Fehler in Gruppen zusammen, die zwischen den Grenzen 0.0 — 0.5, 0.5 — 1.0, 1.0 — 1.5, 1.5 — 2.0, 2.0 — 2.5 und 2.5 — ∞ liegen, und zählt die Hälfte jener Fehler, die genau an der Grenze liegen, zur Hälfte zur vorangehenden und zur Hälfte zur nachfolgenden Gruppe, so erhält man als Resultat jene Zahlen, die ich weiter unten in der mit »beobachtet« überschriebenen Columne aufgenommen habe. Bildet man nun die Argumente $h\Delta$ für die Integraltafel XIV (vergl. § 4 pag. 297), so erhält man mit Hilfe derselben:

Δ	$h\Delta$	$J_{\Delta h}$	$J_{h\Delta_2} - J_{h\Delta_1}$
0.0	0.000	0.000	
			0.266
0.5	0.240	0.266	
			0.238
1.0	0.481	0.504	
			0.188
1.5	0.721	0.692	
			0.134
2.0	0.962	0.826	
			0.085
2.5	1.202	0.911	
			0.089
∞	∞	1.000	

Multipliirt man nun die in der letzten Columne als erste Differenzwerthe angesetzten Zahlen mit der Anzahl der Beobachtungen (vergl. § 4 pag. 297), so findet man die nach der Theorie innerhalb der gegebenen Grenzen sich vorfindende Fehleranzahl; dieselbe steht in der Columne »berechnet«.

Grenzen	beobachtet	berechnet
0.0—0.5	12.5	10.6
0.5—1.0	9.5	9.5
1.0—1.5	6.5	7.5
1.5—2.0	3.5	5.4
2.0—2.5	4.0	3.4
2.5—∞	4.0	3.6

Die Vergleichung zeigt also, dass in der That die Theorie mit der Erfahrung in sehr befriedigender Weise stimmt.

§ 9. Bestimmung des mittleren Fehlers aus ungleichwerthigen Beobachtungen.

Es ist bei den letzten Entwickelungen stets der einfachste Fall in Betracht gezogen worden, wo eine Unbekannte aus einer bestimmten Anzahl directer Beobachtungen von gleichem Gewichte abgeleitet wurde; es soll nun die Aufgabe gelöst werden, aus Beobachtungen von verschiedenen Gewichten den mittleren und den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung mit der Gewichtseinheit zu ermitteln. Die Resultate der Beobachtungen wären M', M'', M''', ..., diesen Resultaten wären beziehungsweise die Gewichte p', p'', p''' ... zugetheilt, dann ist der durch das arithmetische Mittel bestimmte wahrscheinlichste Werth der Unbekannten (vergl. pag. 280) M bestimmt durch:

$$M = \frac{p' M' + p'' M'' + p''' M''' + \ldots}{p' + p'' + p''' + \ldots} = \frac{[p M]}{[p]}, \tag{1}$$

in welchem Ausdrucke die Gewichtseinheit offenbar willkürlich ist. Einigt man sich aber über eine Einheit und sei dann ε der mittlere Fehler einer Beobachtung, die das Gewicht 1 erhält, so ist offenbar der mittlere Fehler des Endresultates bestimmt durch:

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}} .$$

Bezeichnet man ähnlich wie früher mit x den wahren Werth der Unbekannten und setzt wieder:

$$M - x = \delta ,$$

so wird die Relation zwischen den wirklichen Beobachtungsfehlern Δ', Δ'', Δ''' ... und den Differenzen zwischen den beobachteten Werthen und dem angenommenen Mittelwerthe bestimmt sein durch:

$$\Delta' = v' + \delta\,, \quad \Delta'' = v'' + \delta\,, \quad \Delta''' = v''' + \delta\,, \ \ldots$$

der Fehler Δ' wird zur Beobachtung M' gehören, die das Gewicht p' erhält und ähnlich für die übrigen. Statt aber einer Beobachtung das Gewicht p' zuzuschreiben, kann man sich vorstellen, dass dieselbe das Resultat ist von p' Einzelnbeobachtungen mit der Gewichtseinheit, es wird also in dieser der Fehler Δ', p' mal vorkommen, ebenso der Fehler Δ'', p'' mal u. s. f.; es wird demnach sein:

$$[p\Delta\Delta] = [p\,v\,v] + 2\,[p\,v]\,\delta + [p]\,\delta^2\,.$$

Hier ist aber der Bildung der Grösse M gemäss streng:

$$[p\,v] = 0\,,$$

demnach hat man auch:

$$[p\Delta\Delta] = [p\,v\,v] + [p]\,\delta^2.$$

Für δ^2 wird aber, wie oben, das Quadrat des mittleren Fehlers des Gesammtresultates zu setzen sein, also da ist:

$$\delta^2 = E^2 = \frac{\varepsilon^2}{[p]}\,,$$

so wird man haben:

$$[p\Delta\Delta] = [p\,v\,v] + \varepsilon^2. \tag{2}$$

Es erübrigt nur noch die Grösse $[p\Delta\Delta]$ durch ε auszudrücken. Es ist aber im Durchschnitte für die wahrscheinlichen Fehlerquadrate anzunehmen:

$$\Delta'\Delta' = \frac{\varepsilon^2}{p'}\,, \quad \Delta''\Delta'' = \frac{\varepsilon^2}{p''}\,, \quad \Delta'''\Delta''' = \frac{\varepsilon^2}{p'''}\,, \ \ldots$$

also:

$$[p\Delta\Delta] = m\,\varepsilon^2\,,$$

wenn m die Anzahl der Beobachtungen, die verschiedenes Gewicht haben, vorstellt, welche Zahl jedoch nicht mit der Summe der Gewichte verwechselt werden darf. Führt man nun diese Relation in Gleichung 1) ein, so findet sich sofort:

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{m-1}}\,, \quad E = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p]\,(m-1)}}\,. \tag{3}$$

und für die wahrscheinlichen Fehler:

$$r = \pm\,0.6745\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{m-1}}\,, \quad R = \pm\,0.6745\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p]\,(m-1)}}\,. \tag{4}$$

Man wird beachten, dass man ganz dasselbe Resultat für ε und r erhalten würde, wenn man jede einzelne Beobachtung mit der Quadratwurzel des Gewichtes (also mit der Präcision) multipliciren würde und dann die gefundenen Zahlen so behandelt hätte, wie Beobachtungen mit gleichem Gewichte. Es wird sich später herausstellen, dass auch in complicirteren Fällen dieses Verhältniss hervortritt und man hat demnach ein sehr einfaches und radicales Hilfsmittel gewonnen, um Beobachtungsresultate von verschiedenem Gewichte nach jenen Methoden behandeln zu können, die für gleichwerthige Beobachtungen gelten.

Schliesslich kann noch bemerkt werden, dass man für die Rechnung des wahrscheinlichen Fehlers auch die absoluten Fehler verwerthen kann; mit Hilfe der zuletzt gemachten Bemerkung wird man aber statt der Relation:

$$\Sigma(v) = \pm \frac{+r}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} ,$$

die pag. 303 gefunden wurde, zu schreiben haben:

$$\Sigma[\sqrt{p}\, v] = \pm \frac{+r \Sigma \sqrt{p}}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} ,$$

und erhalten:

$$r = \pm 0.8453 \frac{+v\sqrt{p}}{\sqrt{m(m-1)}} , \qquad R = \pm 0.8453 \frac{+v\sqrt{p}}{\sqrt{[p]m(m-1)}} . \qquad 5)$$

doch bieten diese Formeln im vorliegenden Falle geringere practische Vortheile als oben.

Es sollen nun die vorstehenden Formeln durch ein Beispiel erläutert werden; ich werde das früher gewählte Beispiel wieder vornehmen, aber dasselbe durch eine willkürliche Zusammenfassung der Einzelnbeobachtungen in Resultate von verschiedenen Gewicht verwandeln; ich erhalte so:

	M	Gewicht	v	vv	pvv
1—5	601″5	5	− 0″7	0.49	2.45
6—8	605″2	3	+ 3.0	9.00	27.00
9	602.1	1	− 0.1	0.01	0.01
10—12	601.8	3	− 0.4	0.16	0.48
13—17	601.9	5	− 0.3	0.09	0.45
18	603.1	1	+ 0.9	0.81	0.81
19—20	601.2	2	− 1.0	1.00	2.00
21—30	602.1	10	− 0.1	0.01	0.10
31—34	601.2	4	− 1.0	1.00	4.00
35—40	602.8	6	+ 0.6	0.36	2.16

daneben habe ich in die Columne v und vv die Unterschiede der Beobachtung gegen die mit Rücksicht auf Gewicht abgeleiteten Mittelwerthe und die Quadrate derselben gesetzt. In der Columne pvv finden sich die letztgenannten Fehlerquadrate mit ihrem Gewichte multiplicirt; für M findet sich nach Gleichung 1) pag. 306:

$$M = 602''2 ; \qquad \text{und weiter } [p\,vv] = 39.46 .$$

so wird also nach Gleichung 3) und 4) pag. 307:

$$r = \pm 1''41$$
$$R = \pm 0''22 .$$

Vergleicht man diese Zahl mit der oben (pag. 305) für R gefundenen $\pm 0''16$, so findet man allerdings keine ganz genügende Uebereinstimmung, wie dies zu erwarten ist, da in dem letzteren Falle die Anzahl der Beobachtungen, die man den Principien der Wahrscheinlichkeit unterworfen hat, nur gleich 10 ist; man wird daher bei einer so geringen Zahl nicht erwarten dürfen, dass sich alle Zufälligkeiten völlig

eliminiren können und dies als erneuten Hinweis betrachten dürfen, dass die Methode der kleinsten Quadrate nur dann, und hier auch nur unter gewissen oben erwähnten Vorbehalten, verlässliche Resultate liefern kann, wenn eine grosse Anzahl von Beobachtungen vorliegt. Da bei der Durchführung des obigen Beispieles aber nur die Absicht vorlag, die Rechnung nach den Formeln klar zu legen, so mag dasselbe für diesen nächsten Zweck genügen.

---

§ 10. Ermittelung des mittleren Fehlers eines Resultates aus der Summe und Differenz directer Beobachtungen.

Indem durch die vorstehenden Entwickelungen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf den Fall directer Beobachtungen der Unbekannten erledigt erscheint, soll der durch die Ueberschrift bezeichnete Specialfall anhangsweise hier näher vorgenommen werden, hauptsächlich aus dem Grunde, weil derselbe in einer völlig unabhängigen Art eine bereits in zweifacher Weise erwiesene theoretische Grundlage der Methode bestätigt. — Die bisherigen Betrachtungen waren bislang den Fällen angepasst worden, wo unmittelbar die zu bestimmende Grösse beobachtet wurde, in der Anwendung wird man aber meist mit complicirteren Fällen zu thun haben, welche sich jedoch meist ohne Schwierigkeit auf die bisher in Betracht gezogenen einfachen Fälle reduciren lassen; bevor jedoch an die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe geschritten wird, soll hier noch der verhältnissmässig einfache Fall in Betracht gezogen werden, wo eine Grösse durch die Summe und Differenz unmittelbar beobachteter Werthe bestimmt wird, wobei jedoch die beobachteten Werthe als völlig von einander unabhängig gedacht werden. Es ist also x bestimmt durch die Relation:

$$x = y_1 \pm y_2 ,$$

wobei durch y_1 und y_2 die wahren Werthe der Funktionen vorgestellt werden, die durch ihre Summe oder Differenz den wahren Werth von x finden lassen. Die Beobachtungen selbst werden aber den wahren Werth von y_1 und y_2 nicht genau wiedergeben und der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen einer jeden solchen Beobachtungsreihe sei beziehungsweise ε_1 und ε_2. Die Beobachtungen werden hier:

für y_1 die Fehler $\Delta_1', \Delta_1'', \Delta_1''' \ldots$

» y_2 » » $\Delta_2', \Delta_2'', \Delta_2''' \ldots$

ergeben, demnach wird der Fehler von x sein, der sich aus Combination der ersten Beobachtungen ergibt, je nachdem man die Summen und Differenzen zu nehmen hat

$$(\Delta_1' \pm \Delta_2') ,$$

und ähnlich erhält man aus der Combination der zweiten und folgenden Beobachtungen:

$$\Delta_1'' \pm \Delta_2'' , \quad \Delta_1''' \pm \Delta_2''' , \ldots$$

Bildet man nun die Summe der Fehlerquadrate und nennt ε_0 den mittleren Fehler einer Bestimmung von x und setzt voraus, dass sowohl y_1 als auch y_2, m mal

beobachtet wurde, so dass m Bestimmungen von x vorliegen, so muss nach der Definition des mittleren Fehlers sein:

$$m\,\varepsilon_0^2 = [\Delta_1\,\Delta_1] \pm 2\,[\Delta_1\,\Delta_2] + [\Delta_2\,\Delta_2]\,.$$

Ist aber die Anzahl der Beobachtungen gross, so wird bald das mittlere Glied, welches aus der Summe von Gliedern mit verschiedenen Zeichen gebildet wird, gegen die äusseren Glieder, die sich aus Quadraten summiren, verhältnissmässig klein werden und man wird mit einem gewissen Grade der Annäherung schreiben dürfen:

$$m\,\varepsilon_0^2 = [\Delta_1\,\Delta_1] + [\Delta_2\,\Delta_2]\,.$$

Bedenkt man aber, das ist:

$$[\Delta_1\,\Delta_1] = m\,\varepsilon_1^2\,, \qquad [\Delta_2\,\Delta_2] = m\,\varepsilon_2^2\,.$$

so erhält man unmittelbar:

$$\varepsilon_0 = \pm\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\,, \tag{1}$$

d. h. der mittlere Fehler einer solchen combinirten Beobachtung ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der mittleren Fehler der directen Beobachtungen.

Wie man sieht, könnte man leicht diese Betrachtungen auf solche Beobachtungen ausdehnen, die sich aus mehren directen Beobachtungen additiv und subtractiv combiniren, man würde den mittleren Fehler der Bestimmung von x_1 dann erhalten aus:

$$\varepsilon_0 = \pm\sqrt{[\varepsilon\,\varepsilon]}\,.$$

wobei gesetzt ist:

$$[\varepsilon\,\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots \tag{2}$$

und sich die verschiedenen ε_1, ε_2 ... auf die Resultate der directen Messung beziehen; natürlich gilt auch dieselbe Relation für den wahrscheinlichen Fehler, man hat daher:

$$r_0 = \pm\sqrt{[r\,r]}\,.$$

Wollte man das Gewicht einer solchen Bestimmung von x bestimmen, so hat man nur zu beachten, dass nach dem obigen (vergl. pag. 301) sich die Gewichte direct wie die Quadrate der Präcisionen oder umgekehrt wie die Quadrate der wahrscheinlichen Fehler verhalten; seien nun die Gewichte der einzelnen Bestimmungen p_1, p_2, p_3 ..., so wird sein:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{p_1}\,, \quad \varepsilon_2^2 = \frac{1}{p_2}\,, \quad \varepsilon_3^2 = \frac{1}{p_3}\,\ldots$$

und man hat:

$$p = \frac{p_1\,p_2\,p_3\,\ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}\,. \tag{3}$$

Hätte man die Unbekannte durch die Summation von m gleich genauen Beobachtungen, deren mittlerer Fehler ε sei, bestimmt, so ist der mittlere Fehler dieser Summe ε_0 nach den eben angestellten Betrachtungen bestimmt durch:

$$\varepsilon_0^2 = m\,\varepsilon^2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_0 = \pm\,\varepsilon\sqrt{m}\,.$$

dividirt man nun beiderseits durch m, so erhält man eine schon früher auf eine ganz andere Weise (pag. 301) bewiesene Relation, nämlich:

$$\frac{\varepsilon_0}{m} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} .$$

wobei man zu beachten hat, dass $\frac{\varepsilon_0}{m}$ der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels ist. Es nimmt also der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels im umgekehrten Verhältniss zur Quadratwurzel der Anzahl der zum Mittel vereinigten Beobachtungen ab. Der früher betrachtete Fall der Ermittelung des mittleren Fehlers eines Resultates aus der Summe und Differenz directer Beobachtungen ist einer Erweiterung fähig, die häufig genug in der Anwendung vorkommt; es seien nämlich die einzelnen Summenwerthe y_1, y_2, y_3, ... bevor dieselben zum Resultate zusammenzufassen sind, mit den constanten, aber bekannt vorausgesetzten Factoren beziehungsweise α_1, α_2, α_3, ... zu multipliciren, dann hat die vorgelegte Funktion die Form:

$$x = \pm \alpha_1 y_1 \pm \alpha_2 y_2 \pm \alpha_3 y_3 \pm \ldots$$

Sind nun die bezüglichen mittleren Fehler der Beobachtungsresultate y_1, y_2, y_3 ... ausgedrückt durch ε_1, ε_2, ε_3 ..., so ist sofort klar, dass die α Factoren bedingen werden, dass der mittlere Fehler des ersten Productes $\alpha_1 \varepsilon_1$ sein wird, der zweite $\alpha_2 \varepsilon_2$ u. s. f., daraus kann man unmittelbar den Schluss ziehen mit Rücksicht auf die für den einfacheren Fall gemachten Betrachtungen, dass der mittlere Fehler des Resultates x, der wieder durch ε_0 bezeichnet wird, sich darstellt durch:

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{\alpha_1^2 \varepsilon_1^2 + \alpha_2^2 \varepsilon_2^2 + \alpha_3^2 \varepsilon_3^2 + \ldots} = \pm \sqrt{[\alpha^2 \varepsilon^2]} ; \qquad 4$$

sind die wahrscheinlichen Fehler ε_1, ε_2, ε_3 ... alle gleich, so erhält man:

$$\varepsilon_0 = \pm \varepsilon \sqrt{[\alpha\alpha]} \qquad 5$$

B. Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Bestimmung einer oder mehrer unabhängiger Unbekannten aus Beobachtungen.

§ 1. Allgemeines.

Es kann nun daran gegangen werden, die Lösung der allgemeinen Aufgabe durchzuführen, nämlich die Ermittelung der wahrscheinlichsten Werthe einer beliebigen Anzahl von Unbekannten, welche Funktionen der beobachteten Grössen sind; die oben betrachteten speciellen Fälle der directen Beobachtung sind natürlich in dieser allgemeinen Auflösung mit inbegriffen.

Dieses allgemeine Problem umfasst zwei Klassen von Aufgaben, welche von einander abgetrennt werden müssen. In der ersten Klasse sind die Unbekannten

unabhängig independent von einander, sind also keinen weiteren Bedingungen unterworfen als den Beobachtungen möglichst zu genügen, so dass vor Anstellung der Beobachtungen jedes beliebige System von Werthen dieselbe Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nimmt; in der zweiten Klasse sind schon a priori gewisse Bedingungen vorhanden, die streng erfüllt sein müssen, und ausserdem muss der möglichst gute Anschluss an die Beobachtungen erzielt werden. Dieser letztere Fall spielt insbesonders bei den geodätischen Ausgleichsrechnungen eine wichtige Rolle, kann aber für den Zweck des vorliegenden Werkes übergangen werden, da in den wenigen hier in Betracht kommenden Fällen leicht der richtige Weg mit Hilfe der Methoden der ersten Klasse gefunden werden kann; es wird daher in der Folge nur auf die Bestimmung von einander unabhängiger Unbekannten Rücksicht genommen. Wiewohl dadurch die Aufgabe schon wesentlich eingeschränkt ist, so muss noch eine weitere Einschränkung vorgenommen werden, die daraus resultirt, dass die folgenden Betrachtungen einen linearen Zusammenhang der Unbekannten mit den Beobachtungen fordern, ein Fall, der selten genug bei der Anwendung hervortreten wird; ist also das Verhältniss, wie es in der Regel der Fall, kein lineares, so wird man sich von Fall zu Fall dadurch helfen können, dass man die lineare Form herstellt, indem man sich in irgend einer durch das Problem bestimmten Weise sehr genäherte Werthe für die Unbekannten verschafft und die Verbesserungen dieser Näherungen sucht; betrachtet man diese als Grössen erster Ordnung, so wird der Zusammenhang zwischen den Incrementen der Unbekannten zu der dadurch bedingten Aenderung in der Beobachtung durch den diesbezüglichen Differentialquotienten in linearer Weise ausgedrückt sein. Es kann unter Umständen die Ermittelung der genäherten Werthe der Unbekannten und die Entwickelung der Differentialquotienten Schwierigkeiten machen, für diese Lösung lassen sich aber keine allgemeinen Regeln geben, da dieselben von der Natur des vorgelegten Problemes abhängig sind. Es wird in der Folge vorausgesetzt, dass für die gestellte Aufgabe den eben ausgesprochenen Forderungen genügt ist.

Es ist demnach die vorgelegte Aufgabe dadurch wesentlich erleichtert, dass die Form der Abhängigkeit der Unbekannten von den Beobachtungen eine lineare ist. Ist also M der beobachtete Werth, $x, y, z \ldots$ die Unbekannten, $a, b, c \ldots$ die durch das Problem bestimmten Coëfficienten, so ist die allgemeine Form der Relation zwischen der Beobachtung und den Unbekannten dargestellt durch:

$$a x + b y + c z + \ldots + l = M.$$

Eine solche Gleichung allein gibt nur eine Relation zwischen den Unbekannten, ist aber nicht zur Bestimmung derselben ausreichend; es müssen nothwendig mindestens ebensoviele essentiel verschiedene Gleichungen vorhanden sein, als Unbekannte zu bestimmen sind; in dem letzteren Falle ist die Bestimmung derselben eben möglich, soll aber die Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden, so ist es klar, dass mehr Gleichungen als Unbekannte vorhanden sein müssen. Sind nun $M_1, M_2, M_3 \ldots$ die beobachteten Werthe, so wird man als Bedingungsgleichungen haben:

$$\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 &= M_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 &= M_2 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + l_3 &= M_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Diese werden sich aber sofort einfacher schreiben lassen, wenn man zur Abkürzung einführt:

$$\begin{aligned}
M_1 - l_1 &= n_1 \\
M_2 - l_2 &= n_2 \\
M_3 - l_3 &= n_3 \\
\vdots \quad \vdots \quad & \vdots
\end{aligned}$$

wo n_1, n_2, n_3 ... mit den Beobachtungen im directen Zusammenhange bleiben, weil l_1, l_2, l_3 ... durch das Problem bestimmte Grössen sind; es schreiben sich daher die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots &= n_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots &= n_2 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots &= n_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots
\end{aligned}$$

Wären die Beobachtungsfehler völlig Null, so würde jede beliebige Combination aus einer zur Bestimmung der Unbekannten hinreichenden Anzahl von Gleichungen identische Werthe für die Unbekannten finden lassen, wegen der Beobachtungsfehler aber werden zwischen solchen verschiedenen Lösungen Differenzen auftreten; die Lösung muss demnach so vorgenommen werden, dass den Beobachtungen nach dem Principe der Wahrscheinlichkeit genügt wird. Hierbei wird auch auf den Umstand dass nicht allen Beobachtungen das gleiche Gewicht ertheilt wird, Rücksicht zu nehmen sein. Die folgenden Betrachtungen werden aber lehren, dass man durch ein sehr einfaches Verfahren in diesem Falle die Bedingungsgleichungen auf gleichwerthige zurückführen kann.

Sind v_1, v_2, v_3 ... die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler in den Beobachtungen genommen im Sinne: Beobachtung - Rechnung, so werden die obigen Bedingungsgleichungen nach Einsetzung der gefundenen wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten für n_1, n_2, n_3 .. nicht die durch die Beobachtung gefundenen Werthe finden lassen, sondern offenbar die Werthe $(n_1 - v_1)$, $n_2 - v_2$ ..., es werden sich daher statt der Bedingungsgleichungen die folgenden, jetzt völlig erfüllten Relationen schreiben lassen:

$$\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + v_1 &= n_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + v_2 &= n_2 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + v_3 &= n_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots
\end{aligned}$$

Ist nun ε der mittlere Fehler einer Beobachtung mit der Gewichtseinheit, so

wird der mittlere Fehler einer Beobachtung sein mit dem Gewichte p_1 offenbar $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}$, mit dem Gewichte p_2 aber $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}}$ u. s. w. Würde man jeder der eben hingestellten Gleichungen die Gewichtseinheit zutheilen, so würde der mittlere Fehler von v_1, v_2, v_3 u. s. w. im Allgemeinen gleich werden ε; es sollen aber entsprechend den angenommenen Gewichten die Fehler $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}$, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}}$ ... gefunden werden, dies wird man aber erreichen können, wenn man die oben hingeschriebenen Gleichungen mit $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$ u. s. w. durchmultiplicirt; man hat dann:

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{p_1}\,a_1\,x + \sqrt{p_1}\,b_1\,y + \sqrt{p_1}\,c_1\,z + \ldots + \sqrt{p_1}\,v_1 = \sqrt{p_1}\,n_1 \\
\sqrt{p_2}\,a_2\,x + \sqrt{p_2}\,b_2\,y + \sqrt{p_2}\,c_2\,z + \ldots + \sqrt{p_2}\,v_2 = \sqrt{p_2}\,n_2 \\
\sqrt{p_3}\,a_3\,x + \sqrt{p_3}\,b_3\,y + \sqrt{p_3}\,c_3\,z + \ldots + \sqrt{p_3}\,v_3 = \sqrt{p_3}\,n_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad 1)$$

Behandelt man nun diese Gleichungen unter Annahme gleicher Gewichte für dieselben, so wird jede Gleichung als mittleren Fehler ε geben; es wird also sein:

$$\varepsilon = \sqrt{p_1}\,v_1 \quad \text{oder} \quad v_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{p_2}\,v_2 \quad \text{oder}\,, \quad v_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}}\,.$$

und die mittleren Fehler von v_1, v_2 ... sind entsprechend den ihnen zugetheilten Gewichten bestimmt. Man leitet daraus die Regel ab, dass Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten ebenso behandelt werden können, wie Beobachtungen von gleichen Gewichten, wenn man alle Bedingungsgleichungen vorher mit der Quadratwurzel des Gewichtes oder mit der Präcision durchmultiplicirt.

Die vorausgehenden Betrachtungen haben also gezeigt, dass man unter allen Bedingungen das Problem reduciren kann auf den einfachsten Fall, nämlich auf lineare Gleichungen mit gleichem Gewichte.

§ 2. Bildung der Normalgleichungen.

Den im vorstehenden Paragraphen aufgestellten Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + \ldots - n_1 = 0 \\
a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + \ldots - n_2 = 0 \\
a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + \ldots - n_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad 1)$$

kann im Allgemeinen in den hier in Betracht kommenden Fällen nicht völlig genügt werden: es werden Unterschiede übrig bleiben, wenn für x, y, z bestimmte

Werthe eingesetzt werden, die, im Sinne: Beobachtung-Rechnung genommen, durch $v_1, v_2, v_3 \ldots$ bezeichnet werden sollen; man wird also haben:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - n_1 = - v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - n_2 = - v_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots - n_3 = - v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 2)$$

Die Unbekannten $x, y, z \ldots$ sind aber so zu bestimmen, dass die Fehler v auf das geringste Maass herabgedrückt werden; das wahrscheinlichste System wird aber nach den bisherigen theoretischen Betrachtungen dasjenige sein, welches die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht; man wird also der Relation genügen müssen:

$$[v\,v] = v_1\,v_1 + v_2\,v_2 + v_3\,v_3 + \ldots = \text{Minimum}. \quad 3)$$

Da aber $x, y, z \ldots$ völlig von einander unabhängig vorausgesetzt werden, so muss die Bedingung des Minimum für jede dieser Unbekannten erfüllt sein; und es ist daher nothwendig:

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,x} = 0\,, \quad \frac{d\,[v\,v]}{d\,y} = 0\,, \quad \frac{d\,[v\,v]}{d\,z} = 0 \ldots \quad 4)$$

Diese Differentialrelation gilt auch für das Maximum, doch schliesst sich das letztere sofort hier nach der Gestalt der Gleichungen aus, indem dasselbe nur für unendliche Werthe der Unbekannten eintritt.

Den durch die Gleichungen 4) aufgestellten Bedingungen allein und keinen weiteren, ist die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten unterworfen, gelingt es also, wie es in der That der Fall ist, mit Hilfe dieser Relationen ohne weitere Voraussetzungen die Unbekannten zu bestimmen, so ist das vorgesteckte Ziel erreicht.

Führt man in Gleichung 4) die angezeigten Operationen mit Hilfe der Gleichung 3) aus, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \frac{d\,v_1}{d\,x} + v_2 \frac{d\,v_2}{d\,x} + v_3 \frac{d\,v_3}{d\,x} + \ldots = 0 \\ v_1 \frac{d\,v_1}{d\,y} + v_2 \frac{d\,v_2}{d\,y} + v_3 \frac{d\,v_3}{d\,y} + \ldots = 0 \\ v_1 \frac{d\,v_1}{d\,z} + v_2 \frac{d\,v_2}{d\,z} + v_3 \frac{d\,v_3}{d\,z} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 5)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der in der Gleichung 4) aufgestellten Anzahl der Bedingungen, die aber wieder nur von der Anzahl der Unbekannten bestimmt ist; es sind in Gleichung 5) also so viel Gleichungen von verschiedener Zusammensetzung enthalten als Unbekannte vorhanden sind, und es erübrigt daher nichts zur Bestimmung der Unbekannten als die Coefficienten der Gleichungen 5) auf bekannte Werthe zu reduciren. Vorerst werden sich die Differentialquotienten von v nach Gleichung 2) sehr leicht bestimmen; man erhält aus diesen letzteren Gleichungen sofort durch Differentiation:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\frac{d v_1}{d x}, \quad b_1 = -\frac{d v_1}{d y}, \quad c_1 = -\frac{d v_1}{d z}, \quad \ldots \\ a_2 &= -\frac{d v_2}{d x}, \quad b_2 = -\frac{d v_2}{d y}, \quad c_2 = -\frac{d v_2}{d z}, \quad \ldots \\ a_3 &= -\frac{d v_3}{d x}, \quad b_3 = -\frac{d v_3}{d y}, \quad c_3 = -\frac{d v_3}{d z}, \quad \ldots \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Man kann daher statt Gleichung 5) auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots &= 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Ersetzt man nun den Werth von v_1, v_2, v_3 ... durch die Relationen in der Gleichung 2) (pag. 315), so verwandelt sich die erste Gleichung 7) in:

$$\left.\begin{aligned} & a_1 a_1 x + a_1 b_1 y + a_1 c_1 z + \ldots - a_1 n_1 \\ + & a_2 a_2 x + a_2 b_2 y + a_2 c_2 z + \ldots - a_2 n_2 \\ + & a_3 a_3 x + a_3 b_3 y + a_3 c_3 z + \ldots - a_3 n_3 \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} = 0,$$

ähnlich wird die zweite Gleichung 7) sich schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} & a_1 b_1 x + b_1 b_1 y + b_1 c_1 z + \ldots - b_1 n_1 \\ + & a_2 b_2 x + b_2 b_2 y + b_2 c_2 z + \ldots - b_2 n_2 \\ + & a_3 b_3 x + b_3 b_3 y + b_3 c_3 z + \ldots - b_3 n_3 \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} = 0$$

u. s. f. — Führt man nun die abkürzende Gauss'sche Summenbezeichnung (pag. 301) ein, so wird man statt der Gleichungen 7) schreiben können die folgenden, in welchen die Coëfficienten völlig bekannte Grössen sind:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \ldots &= [a\,n] \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + \ldots &= [b\,n] \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + \ldots &= [c\,n] \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen kommt gleich der Anzahl der Unbekannten, die Auflösung dieser Gleichungen bestimmt die Unbekannten nach dem Axiome, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist; man nennt diese Gleichungen die Normalgleichungen, weil dieselben für die Bestimmung der Unbekannten maassgebend (normirend) sind.

Die Bildung und Herstellung der Normalgleichungen ist nunmehr theoretisch völlig bestimmt, nur wird die thatsächliche Durchführung der zahlreichen Multiplicationen und Additionen, besonders wenn die Anzahl der Unbekannten und der Bedingungsgleichungen anwächst, das Bedürfniss fühlbar machen, die nothwendigen Rechnungsoperationen möglichst übersichtlich zu gestalten, so dass nicht leicht ein

Product übergangen werden kann, und geeignete Prüfungsmittel für die Richtigkeit der Rechnung herbeizuschaffen.

Letzteres Verlangen kann leicht durch Bildung einiger Hilfsgrössen befriedigt werden. Bildet man nämlich die Summe aller zu einer Bedingungsgleichung gehöriger Coëfficienten und bezeichnet dieselbe durch s mit einem entsprechenden Index, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + n_1 = s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + n_2 = s_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 + \ldots + n_3 = s_3 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (9)$$

und man wird sofort zur Prüfung der Coëfficienten der Normalgleichungen, wenn man sich die Bedeutung des Gauss'schen Summenzeichens klar macht, haben:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a] + [a\,b] + [a\,c] + \ldots [a\,n] = [a\,s] \\ [a\,b] + [b\,b] + [b\,c] + \ldots [b\,n] = [b\,s] \\ [a\,c] + [b\,c] + [c\,c] + \ldots [c\,n] = [c\,s] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a\,n] + [b\,n] + [c\,n] + \ldots [n\,n] = [n\,s] \end{array}\right\} \quad (10)$$

welchen Relationen innerhalb der Unsicherheit der Rechnungsoperationen genügt werden muss. Hierbei könnte aber eine beträchtliche Unsicherheit dadurch entstehen, dass die Coëfficienten der verschiedenen Unbekannten sehr different in Bezug auf ihre Grösse sind. Es muss nämlich die Rechnung, um dieselbe nicht allzu weitläufig zu gestalten, auf eine gewisse Anzahl von Decimalen beschränkt bleiben; bei den Producten der grossen Zahlen wird aber die Unsicherheit der Rechnung schon Stellen beeinflussen, die bei den Producten der kleinen Zahlen noch ganz sicher erscheinen und es muss gewiss ganz erwünscht sein, sich auch der Richtigkeit dieser kleinen Producte zu versichern; hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dass die kleinen Coëfficienten sich mit derselben Unbekannten verbinden, denn es ist klar, dass ein kleiner oder mehre kleine Coëfficienten bei einer Unbekannten, wenn nur ein grosser Coëfficient derselben vorhanden ist, einer derartigen Prüfung nicht bedürfen. Man kann nun leicht dieser Forderung genügen, wenn man für die Unbekannten andere Grössen einführt, welche die zugehörigen Coëfficienten für die verschiedenen Unbekannten nahe gleichwerthig machen, und es wird sich stets lohnen, diese kleine Mühe nicht zu scheuen und stets die auftretenden Factoren möglichst homogen der Rechnung zu Grunde zu legen. Es ist mir stets am bequemsten und sichersten erschienen, den grössten Coëfficienten, mit dem die Unbekannte multiplicirt erscheint, herauszuheben und mit demselben alle Coëfficienten dieser Unbekannten zu dividiren. Seien der Reihe nach α, β, γ ... die grössten Coëfficienten von x, y, z, ... und sei ν der grösste Werth in der Reihe der Werthe $n_1\, n_2\, n_3$ ... so erhalten die Bedingungsgleichungen nunmehr die Form:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{a_1}{\alpha}(\alpha x) + \frac{b_1}{\beta}(\beta y) + \frac{c_1}{\gamma}(\gamma z) \ldots . = \frac{n_1}{\nu} \\
\frac{a_2}{\alpha}(\alpha x) + \frac{b_2}{\beta}(\beta y) + \frac{c_2}{\gamma}(\gamma z) \ldots . = \frac{n_2}{\nu} \\
\frac{a_3}{\alpha}(\alpha x) + \frac{b_3}{\beta}(\beta y) + \frac{c_3}{\gamma}(\gamma z) \ldots . = \frac{n_3}{\nu} \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{array}\right\} \qquad 11)$$

aus welchen nun die Unbekannten (αx), (βy), (γz) ... mit Hilfe der Normalgleichungen in Einheiten von ν erhalten werden. Man wird demnach vor Beginn der Rechnungsoperationen zur Ermittelung der Normalgleichungen den eben gemachten Vorschriften gemäss die Coëfficienten erst homogen gestalten, und mit diesen dann die Operationen beginnen; es ist klar, dass, um von der in 10) angedeuteten Summenprüfung möglichst bequem Vortheil zu ziehen, die Summen s nach 9) erst mit dem homogen gemachten Coëfficienten berechnet werden. Es mögen vielleicht einem in diesen Gebiete der Rechnung wenig erfahrenen Rechner die hier angegebenen Vorschriften auf den ersten Blick die Rechnung zu erschweren scheinen, die häufigere Anwendung aber wird denselben bald lehren, dass sie ganz wesentlich zur Sicherung und Bequemlichkeit der Rechnung beitragen.

Ich werde nun zeigen, wie man die weitere Rechnung zur Bildung der Normalgleichungen und zur Lösung derselben übersichtlich anlegen kann und setze die ursprüngliche Form der Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{l}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots = n_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots = n_2 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{array}$$

voraus, wobei jedoch nunmehr die Coëfficienten und die Unbekannten der Bedingung der Homogenität unterworfen sind. Die Bildung der Produkte kann nun leicht entweder mit Hilfe der gewöhnlichen Logarithmentafeln oder nach Bessel's Vorschlag mit Hilfe von Quadrattafeln vorgenommen werden; ich werde zuerst das erstere Verfahren auseinandersetzen.

Man wird sich zunächst auf einen mit Horizontallinien überzogenen Bogen so viel Verticalcolumnen vorbereiten, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind; in die erste Horizontalzeile setzt man nun die logarithmischen Coëfficienten der Unbekannten x, in die zweite die von y u. s. f.; in die vorletzte Zeile kommen die Logarithmen von n, in die letzte die von s, nachdem man sich vorerst auf einem Nebenblatte nach den Gleichungen 9) dieselben durch Summation verschafft hat. Man hat also zwei Horizontalzeilen mehr auszufüllen, als Unbekannte vorhanden sind; das Schema gestaltet sich also wie folgt, wobei die Ziffern in den Köpfen der Columnen den Hinweis auf die Nummer der Bedingungsgleichung vorstellen sollen.

Nummer der Bedingungsgleichung	1	2	3	. . . .
Coëfficient von x	$\log a_1$	$\log a_2$	$\log a_3$	. . . .
» » y	$\log b_1$	$\log b_2$	$\log b_3$	. . . .
» » z	$\log c_1$	$\log c_2$	$\log c_3$	. . . .
⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	
Fehler	$\log n_1$	$\log n_2$	$\log n_3$	. . . .
Summe	$\log s_1$	$\log s_2$	$\log s_3$	. . . .

Auf demselben Folioblatte wird man nun, wenn die Bedingungsgleichungen und die Unbekannten nicht zu zahlreich sind, Platz für die gebildeten Producte finden; man wird sich zu diesem Ende, wenn man durch μ die Anzahl der Unbekannten bezeichnet:

$$\frac{(\mu+2)(\mu+3)}{1 \cdot 2} - 1 \tag{12}$$

Verticalcolumnen bilden, die um zwei Horizontalzeilen mehr enthalten als Bedingungsgleichungen vorhanden sind. In die erste Zeile jeder dieser Verticalcolumnen setzt man als Aufschrift das bezeichnende Product, also aa, ab, ac ... bb, bc ... nn, ns, in die letzte Zeile wird dann die Summe der Producte der Verticalcolumnen eingesetzt. Sollte die Anzahl der Bedingungsgleichungen gross sein, so wird man die Zahl der Horizontallinien um einige vermehren und zwar nach einer bestimmten Anzahl von Bedingungsgleichungen die Summen der Producte bilden, um durch die später zu erwähnenden Prüfungsgleichungen den Ort eines eventuellen Fehlers zu bestimmen. Nun schreibt man auf den unteren Rand eines Papieres die Logarithmen von a_1, a_2, a_3 ... und hält dieselben über die a Reihe zum Zwecke der Addition; hierbei wird man wohl ohne Mühe die Addition der Logarithmen von links nach rechts führend, sofort die zugehörige Zahl aus den Logarithmentafeln hinschreiben können; man erlangt so der Reihe nach die Producte $a_1 a_1$, $a_2 a_2$, $a_3 a_3$ ... die man in die Columne aa sofort einsetzt; hierauf rückt man den Papierstreifen über die nächste Horizontalreihe, und erhält durch die analogen Operationen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ ... und so rückt man bis zur s Reihe herab und findet schliesslich $a_1 s_1$, $a_2 s_2$, $a_3 s_3$ ...; sind so die Partialproducte gebildet, so addirt man die Zahlen einer jeden Verticalcolumne und sieht nach, ob der Relation (vgl. Gleichung 10 pag. 317)

$$[aa] + [ab] + [ac] \ldots + [an] = [as]$$

genügt wird. Zeigt sich eine Differenz und ist man sonst geübt in der Ausführung numerischer Rechnungen, so wird man vorerst den Fehler auf sich beruhen lassen können, da die weiteren Prüfungsgleichungen, wenn man sonst keinen merklichen Fehler begeht, den Ort des Fehlers näher bezeichnen werden; hat man aber nicht die nöthige Sicherheit, so wird es wohl angemessen sein, die einzelnen Horizontalzeilen durch die Relationen

$$a_1 a_1 + a_1 b_1 + a_1 c_1 + \ldots + a_1 n_1 = a_1 s_1$$
$$a_2 a_2 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + \ldots + a_2 n_2 = a_2 s_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

zu prüfen und den Fehler zu ermitteln; ist so die genügende Uebereinstimmung hergestellt, so schreibt man sich auf den unteren Rand eines Papieres die b Coëfficienten und hält dieselben vorerst über die Reihe der b Coëfficienten, man erhält so der Reihe nach die Producte $b_1 b_1$, $b_2 b_2$, die sofort in die entsprechende Columne bb eingetragen werden; nun rückt man den Papierstreifen über die c Coëfficienten und erhält so $b_1 c_1$, $b_2 c_2$ ... und rückt so vorwärts, bis man die Reihen der bs Coëfficienten berechnet hat, und kann wieder die zweite Gleichung in 10) zur Probe heranziehen; dann behandelt man ähnlich die c Coëfficienten und setzt das Verfahren so lange fort, bis man die nn und die ns Reihe gebildet hat, womit die Bildung der Producte vollständig erledigt ist. Die letzteren zwei Productsummen sind zwar für die Bildung der Normalgleichungen nicht erforderlich, sie werden aber später von Nutzen sein.

Verschiebt man die Bildung der Prüfungsrechnung 10) bis zum Schluss der Rechnung, ein Verfahren, welches nur einem sehr geübten Rechner empfohlen werden kann, so wird sich leicht der Ort des Fehlers entdecken lassen; denn jede Summe ist, mit Ausnahme der quadratischen Summen, in den Prüfungsgleichungen zweimal vertreten, stimmen alle zwei Summenprüfungen nicht, so ist der Fehler in der beiden Prüfungsgleichungen gemeinsamen Summe enthalten; stimmt nur eine Gleichung nicht, so ist der Fehler in der quadratischen Summe dieser Prüfungsgleichung enthalten.

Es dürfte angemessen sein, das obige Verfahren durch ein ausführliches Beispiel zu erläutern, und ich entlehne das Beispiel der in diesem Buche durchgeführten Ermittelung der Erato-Elemente, für welche neun Normalorte als Grundlage gedient haben. Es werden die Verbesserungen der Elemente L', μ, Φ, Ψ, Ω' und i' gesucht; die Ausgangs-Elemente selbst lassen die in der ersten Verticalcolumne aufgeführten Fehler übrig; die Bedingungsgleichungen, deren Entstehung in dem Abschnitte über Bahnverbesserung ausführlich erläutert wird, stellen sich wie folgt, wobei die ersten neun Gleichungen den Rectascensionen, die letzteren neun Gleichungen den Declinationen angehören (die Coëfficienten der Unbekannten sind logarithmisch angesetzt):

1)	$-37''05 = 0.30905\,\partial L'$	$+4_n02489\,\partial\mu$	$+0_n55422\,\partial\Phi$	$+9.84755\,\partial\Psi$	$+9.49648\sin i'\,\partial\Omega'$	$+7.52654\,\partial i'$
2)	$-12.73 = 0.19343$	3_n86719	0.06517	0.45225	9_n26378	9.41113
3)	$+10.29 = 9.98284$	3_n61616	0.33255	9_n07498	9.42941	8_n56894
4)	$-\ 9.87 = 0.29157$	3_n36846	0_n55121	8.23311	9.47252	9.02028
5)	$-\ 0.05 = 0.24141$	3_n09724	9.89428	0.50920	9_n39733	9.16190
6)	$+22.28 = 9.99830$	2_n43954	0.34646	8.80219	9.43667	8.22679
7)	$+27.09 = 9.99289$	2.14609	0.04135	0_n29030	8_n82060	9_n42796
8)	$+17.07 = 0.16524$	2.92722	0_n27582	0_n35475	9_n20162	9.40554
9)	$+\ 1.69 = 0.33893$	3.36051	0_n39441	0.47186	7_n90340	9_n53201

		$\partial L'$	$\partial\mu$	$\partial\Phi$	$\partial\Psi$	$\sin i'\,\partial\Omega'$	$\partial i'$
10)	$-13.43 =$	$9.91933\,\partial L'$	$+3_n63584\,\partial\mu$	$+0_n16726\,\partial\Phi$	$+9.40052\,\partial\Psi$	$+0_n20387\sin i'\,\partial\Omega'$	$+7_n91601\,\partial i'$
11)	$+3.39 =$	9_n47080	3.14361	9_n37231	9_n72809	9.73292	0.12685
12)	$-5.19 =$	9_n59488	3.22932	9_n94427	8.48426	0.13569	8_n95724
13)	$-7.56 =$	9.89620	2_n97590	0_n15707	8_n41814	0_n19554	9_n41379
14)	$-0.64 =$	9_n24551	2.09786	8_n92589	9_n51281	9.67384	0.15635
15)	$-8.24 =$	9_n61165	2.06824	9_n95831	8_n63121	0.14366	8.61533
16)	$7.35 =$	9_n38470	1_n48233	9_n45701	9.67595	9.93704	0_n03399
17)	$+4.13 =$	9.45671	2.22118	9_n57067	9_n64269	9_n84854	0_n11500
18)	$-1.30 =$	9.80366	2.82036	9_n87793	9.92280	0_n03453	0.06537

Vor Allem hat man nun die Gleichungen gleichwerthig zu machen und hat dieselben zu diesem Ende (vergl. § 1 pag. 314) mit den Quadratwurzeln der Gewichte durchzumultipliciren; in diesem Falle kann aber das sonst nöthige Hinschreiben der gleichwerthigen Gleichungen umgangen werden, da alle Normalorte das Gewicht 1 erhalten mit Ausnahme des dritten Ortes, dem das Gewicht $\frac{1}{2}$ zugeschrieben werden soll; ich denke mir daher die Gleichungen 3) und 12) mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ durchmultiplicirt. Dem Gleichungssystem 11) (pag. 318) entsprechend setze ich, um die Coëfficienten möglichst homogen zu machen (die Coëfficienten logarithmisch):

$$x = 0.33893\,\partial L'$$
$$y = 4.02489\,\partial\mu$$
$$z = 0.55422\,\partial\Phi$$
$$t = 0.50020\,\partial\Psi$$
$$u = 0.20387\,\partial\Omega'\sin i'$$
$$w = 0.15635\,\partial i'$$
$$v = 37''05\ .$$

und erhalte so (vergl. pag. 319) das folgende Werthtableau, in welchem alle Werthe logarithmisch auf vier Stellen, was genügend ist, angesetzt sind und wobei s durch die Summation aller Coëfficienten derselben Verticalreihe (9) pag. 317 erhalten wurde:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log Coëff. v. x	9.9701	9.8545	9.4934	9.9526	9.9024	9.6594	9.6540	9.8203	0.0000
» » » y	0_n0000	9_n8423	9_n4408	9_n3430	9_n0723	8_n4140	8.1212	8.9023	9.3356
» » » z	0_n0000	9.5109	9.6278	9_n9970	9.3400	9.7922	9.4871	9_n7216	9_n8402
» » » t	9.3383	9.9430	8_n4153	7.7239	0.0000	8.2930	9_n7811	9_n8455	9.9627
» » » u	9.2920	9_n0599	9.0750	9.2680	9_n1935	9.2328	8_n6107	8_n0977	7_n6995
» » » w	7.3702	9.2548	8_n2621	8.8039	9.0055	8.0704	9_n2716	9.2492	9_n3757
log n	0_n0000	9_n5300	9.2031	9_n4255	7_n1302	9.7791	9.8640	9.6634	8.6717
log s	0_n2170	9.9743	9.8638	9_n5040	0.2656	0.2681	9.8200	8.7889	0.0957

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
log Coëff v. x	9.5801	9_n1319	9_n1054	9.5573	8_n9066	9_n2727	9_n0458	9.1178	9.4647
" " " y	9_n6109	0.1187	9.0530	8_n0510	8.0730	8.0433	7_n4571	8.1963	8.7955
" " " z	9_n6130	8_n8181	9_n2395	9_n6028	8_n3717	9_n4041	8_n9028	9_n0164	9_n3237
" " " t	8.8913	9_n2189	7.8246	7_n9089	9_n0036	8_n1220	9.1667	9_n1335	9.4136
" " " u	0_n0000	9.5200	9.7813	9_n9917	9.4700	9.9398	9.7332	9_n6447	9_n8307
" " " w	7_n7597	9.9705	8_n6504	9_n2574	0.0000	8.4590	9_n8776	9_n9586	9.9090
log n	9_n5593	8.9614	8_n9950	9_n3097	8_n2374	9_n3471	9_n2975	9.0471	8_n5451
log s	0_n2375	0.0520	9.4462	0_n1770	0.0353	9.3688	9_n6617	0_n1245	9.6999

Es wurden nun 12 pag. 319 entsprechend 35 Verticalcolumnen vorbereitet; da aber die Anzahl der Gleichungen eine bedeutende, wurde die Summe der ersten und letzten neun Horizontalzeilen gebildet und diese stets der Prüfungsgleichung unterzogen, man hatte dann:

	aa	ab	ac	ad	ae	af	an	as	bb	bc	bd	be
1	+0.8714	−0.9335	−0.9335	+0.2034	+0.1831	+0.0022	0.9335	−1.5407	+1.0000	+1.0000	0.2179	−0.1961
2	+0.5117	−0.4975	+0.2319	+0.6273	0.0821	+0.1287	−0.2458	+0.6742	+0.4838	−0.2255	−0.6100	+0.0798
3	+0.0970	−0.0859	+0.1322	−0.0081	+0.0370	−0.0057	+0.0612	+0.2276	+0.0761	−0.1171	+0.0072	0.0328
4	+0.8038	−0.1978	−0.8904	+0.0047	+0.1664	+0.0655	0.2388	−0.2865	+0.0487	+0.2191	−0.0012	−0.0409
5	+0.6380	−0.0943	+0.1748	+0.7988	−0.1247	+0.0809	0.0011	+1.4723	+0.0140	−0.0258	−0.1181	+0.0184
6	+0.2083	−0.0119	+0.2829	+0.0090	+0.0780	+0.0054	+0.2745	+0.8462	+0.0007	−0.0161	−0.0005	−0.0044
7	+0.2032	+0.0060	+0.1384	−0.2723	−0.0187	−0.0843	+0.3296	+0.3020	+0.0002	+0.0041	−0.0080	−0.0005
8	+0.4494	+0.0535	0.3531	0.4697	−0.0667	+0.1190	+0.3088	+0.0412	+0.0064	−0.0421	−0.0559	−0.0079
9	+1.0000	+0.2165	0.6922	+0.9178	0.0050	−0.2375	+0.0470	+1.2466	+0.0469	0.1499	+0.1987	−0.0011
Σ	+4.7828	−1.5449	1.9090	+1.8109	+0.1673	+0.0742	−0.3981	−2.9829	+1.6768	+0.6467	−0.8057	−0.1855
10	+0.1448	0.1554	0.1561	+0.0296	0.3805	0.0022	−0.1379	0.6575	+0.1667	+0.1675	−0.0318	+0.4082
11	+0.0184	−0.0178	+0.0089	+0.0224	0.0458	−0.1266	−0.0124	−0.1529	+0.0173	0.0086	−0.0218	+0.0444
12	+0.0162	−0.0144	+0.0221	0.0009	−0.0770	+0.0057	+0.0126	0.0356	+0.0128	−0.0196	+0.0008	+0.0684
13	+0.1302	0.0322	−0.1446	0.0029	0.3540	0.0653	0.0736	−0.5424	+0.0080	+0.0358	+0.0007	+0.0876
14	+0.0065	−0.0010	+0.0019	+0.0081	0.0238	−0.0806	+0.0014	−0.0875	+0.0001	0.0003	0.0012	+0.0035
15	+0.0351	−0.0021	+0.0475	+0.0025	−0.1631	−0.0054	+0.0417	0.0438	+0.0001	0.0028	−0.0001	+0.0096
16	+0.0123	+0.0003	+0.0089	−0.0163	−0.0601	+0.0838	+0.0220	+0.0510	0.0000	+0.0002	−0.0004	−0.0016
17	+0.0172	+0.0021	−0.0136	−0.0178	−0.0579	−0.1192	+0.0146	0.1747	+0.0002	−0.0016	−0.0021	−0.0069
18	+0.0850	+0.0182	−0.0614	+0.0756	−0.1974	+0.2364	−0.0102	+0.1461	+0.0039	−0.0132	+0.0162	−0.0423
Σ	+0.4657	−0.2023	−0.2864	+0.1003	−1.3596	−0.0734	−0.1418	−1.4973	+0.2091	+0.1574	−0.0397	+0.5709

	bf	bn	bs	cc	cd	ce	cf	cn	cs	dd	de	df
1	0.0023	+1.0000	+1.6504	+1.0000	−0.2179	−0.1961	−0.0023	+1.0000	+1.6504	+0.0475	+0.0427	+0.0005
2	−0.1251	+0.2389	−0.6556	+0.1051	+0.2844	−0.0372	+0.0583	−0.1115	+0.3056	+0.7692	−0.1007	+0.1577
3	+0.0050	0.0542	0.2016	+0.1801	−0.0110	+0.0704	0.0078	+0.0833	+0.3101	+0.0007	0.0031	+0.0005
4	0.0161	+0.0588	[illegible]	+0.9862	−0.0053	0.1813	−0.0726	+0.2646	+0.3174	0.0000	+0.0010	+0.0004
5	0.0120	+0.0002	0.2177	+0.0479	+0.2188	[illegible]	+0.0222	0.0003	+0.4033	+1.0000	−0.1561	+0.1013
6	0.0003	0.0156	[illegible]	+0.3841	+0.0122	+0.1059	+0.0073	+0.3727	+1.1489	+0.0004	+0.0034	+0.0002
7	0.0025	+0.0097	[illegible]	+0.0942	0.1854	0.0127	−0.0574	+0.2244	+0.2056	+0.3649	+0.0250	+0.1129
8	+0.0142	+0.0368	+0.0049	+0.2775	+0.3691	+0.0524	0.0935	0.2427	0.0324	+0.4969	+0.0697	−0.1244
9	−0.0514	+0.0102	+0.2099	+0.4791	0.6351	+0.0035	+0.1644	−0.0325	−0.8628	+0.8422	−0.0046	−0.2178
Σ	0.1905	+1.2848	+0.8815	+3.5542	0.1702	−0.2523	+0.0186	+1.5580	+3.4461	+3.5158	0.1227	+0.0313
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+0.0061	0.0779	−0.0004
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−0.0222	[illegible]	[illegible]	0.0742	+0.0274	0.0560	−0.1547
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+0.0172	0.0485	0.0000	+0.0040	−0.0003
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+0.3031	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+0.0080	+0.0015
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+0.0006	[illegible]	[illegible]	0.0235	−0.0004	0.0255	+0.0102	0.0298	−0.1008
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+0.2034	[illegible]	0.0073	+0.0564	0.0593	+0.0002	−0.0115	−0.0004
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−0.0432	[illegible]	[illegible]	+0.0367	+0.0215	+0.0794	0.1107
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+0.0141	+0.0458	+0.0944	0.0116	+0.1383	+0.0185	+0.0600	+0.1236
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+0.1427	[illegible]	+0.0074	[illegible]	[illegible]	0.1755	+0.2102
Σ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1993	−0.0320

	dn	ds	ee	ef	en	es	ff	fn	fs	nn	ns
1	−0.2179	0.3507	+0.0385	+0.0005	−0.1961	0.3238	0.0000	−0.0023	−0.0039	+1.0000	+1.6504
2	−0.3013	+0.8266	+0.0132	−0.0206	+0.0394	−0.1082	+0.0323	−0.0618	+0.1695	+0.1180	−0.3238
3	−0.0051	−0.0190	+0.0141	−0.0022	+0.0233	+0.0860	+0.0003	−0.0036	−0.0134	+0.0386	+0.1435
4	−0.0014	−0.0017	+0.0344	+0.0136	−0.0494	−0.0593	+0.0053	−0.0195	−0.0234	+0.0710	+0.0851
5	−0.0013	+1.8433	+0.0244	−0.0158	+0.0002	−0.2878	+0.0103	−0.0001	+0.1867	0.0000	−0.0025
6	+0.0118	+0.0364	+0.0292	+0.0020	+0.1028	+0.3169	+0.0001	+0.0071	+0.0218	+0.3616	+1.1149
7	−0.4417	−0.4046	+0.0017	+0.0077	−0.0302	−0.0277	+0.0349	−0.1367	−0.1252	+0.5346	+0.4868
8	−0.3228	−0.0431	+0.0099	−0.0177	−0.0458	−0.0061	+0.0315	+0.0818	+0.0109	+0.2122	+0.0283
9	+0.0431	+1.1439	0.0000	+0.0012	−0.0002	−0.0062	+0.0564	−0.0112	−0.2961	+0.0022	+0.0585
Σ	−1.2366	+3.0221	+0.1654	−0.0313	−0.1560	0.4153	+0.1711	−0.1463	0.0731	+2.3382	+3.2442
10	−0.0282	−0.1345	+1.0000	+0.0057	+0.3625	+1.7280	0.0000	+0.0021	+0.0099	+0.1314	+0.6263
11	−0.0151	−0.1869	+0.1143	+0.3159	+0.0309	+0.3816	+0.8730	+0.0855	+1.0546	+0.0084	+0.1033
12	−0.0007	+0.0019	+0.3652	−0.0270	0.0599	+0.1688	+0.0020	+0.0014	−0.0125	+0.0098	−0.0277
13	+0.0017	+0.0122	+0.9625	+0.1775	+0.2002	+1.4747	+0.0327	+0.0369	+0.2719	+0.0416	+0.3167
14	+0.0017	−0.1094	+0.0871	+0.2951	−0.0051	+0.3201	+1.0000	0.0173	+1.0847	+0.0003	−0.0187
15	+0.0029	−0.0031	+0.7578	+0.0250	0.1936	+0.2035	+0.0008	0.0064	+0.0067	+0.0495	−0.0520
16	−0.0291	−0.0674	+0.2927	−0.4081	−0.1073	−0.2482	+0.5691	+0.1497	+0.3462	+0.0304	+0.0910
17	−0.0152	+0.1811	+0.1947	+0.4012	−0.0402	+0.5877	+0.8264	−0.1013	+1.2108	+0.0124	0.1484
18	−0.0091	+0.1299	+0.4586	−0.5491	+0.0238	−0.3393	+0.6577	0.0285	+0.1064	+0.0012	0.0076
Σ	−0.0911	−0.1762	+4.2329	+0.2362	+0.2023	+4.2760	+3.9617	+0.1251	+4.3787	+0.2040	+0.8629

Bildet man nun, den Prüfungsgleichungen 10 pag 317 gemäss, die Proben so erhält man:

	1—9 Summe	1—9 direct. Werth	10—18 Summe	10—18 direct. Werth
as	+ 2.0832	+ 2.0826	− 1.4075	− 1.4073
bs	+ 0.8817	+ 0.8815	+ 1.0407	+ 1.0406
cs	+ 3.4460	+ 3.4461	+ 1.1736	+ 1.1737
ds	+ 3.0228	+ 3.0221	0.1766	0.1762
es	− 0.4151	0.4153	+ 4.2773	+ 4.2760
fs	− 0.0726	− 0.0731	+ 4.3786	+ 4.3787
ns	+ 3.2440	+ 3.2442	+ 0.8631	+ 0.8629

so dass eine für die vierstellige Rechnung völlig befriedigende Uebereinstimmung zu Tage tritt; vereinigt man die zwei zusammengehörigen Partialsummen, so erhält man für die Normalgleichungen die folgenden Coëfficienten:

$[aa] = +5.2485$, $[bb] = +1.8850$, $[cc] = +4.0440$, $[dd] = +3.0070$, $[ee] = +4.3983$
$[ab] = -1.7472$, $[bc] = +0.8011$, $[cd] = -0.2350$, $[de] = -0.3220$, $[ef] = +0.2049$
$[ac] = -2.1054$, $[bd] = -0.8454$, $[ce] = +0.3416$, $[df] = -0.0007$, $[en] = +0.0463$
$[ad] = +1.0112$, $[be] = +0.3854$, $[cf] = -0.0072$, $[dn] = -1.3277$, $[ff] = +4.1328$
$[ae] = -1.1023$, $[bf] = -0.0037$, $[cn] = +1.8681$, $[fn] = -0.0212$
$[af] = +0.0008$, $[bn] = +1.1403$,
$[an] = -0.5300$.

und überdiess ist die Summe der auftretenden Fehlerquadrate

$$[nn] = +2.0322,$$

von welcher Summe später Gebrauch gemacht wird.

Etwas abgeändert wird man die Bildung der Normalgleichungen vornehmen müssen, wenn man nach Bessel's Vorgange Quadrattafeln zur Herstellung derselben anwenden will; die Anwendung dieser letzteren bietet nach meinen eigenen Erfahrungen über diesen Gegenstand so wesentliche Vorzüge vor dem zuerst auseinandergesetzten Verfahren, dass ich nicht anstehe, dasselbe als besonders zweckmässig zu empfehlen; einer der wesentlichsten Vortheile ist darin zu suchen, dass das Zeichen der Producte nicht in Betracht kommt, sondern durchaus positive Werthe in das Product-Schema einzutragen sind; es ist hierdurch eine wesentliche Fehlerquelle vermieden, die selbst dem geübtesten Rechner gefährlich ist, nämlich die Zeichenfehler; ausserdem ist die Anzahl der zu bildenden Verticalcolumnen wesentlich vermindert; die Verminderung beträgt μ Columnen, wenn μ die Anzahl der Unbekannten vorstellt. Um aber das Bessel'sche Verfahren mit Vortheil anwenden zu können, ist es erwünscht, bequem eingerichtete Quadrattafeln zu besitzen; ich habe deshalb als Tafel XV eine solche Tafel eingefügt, die innerhalb der Grenzen o—2 die Quadrate für jeden Hunderttheil des Argumentes auf vier Stellen angibt, eine für die vorliegenden Zwecke meist ausreichende Genauigkeitsgrenze.

Die Grenzen dieser Tafel werden niemals bei der Bildung der Producte der Coëfficienten überschritten werden, wenn man nur die Coëfficienten durch entsprechende Abänderung der Unbekannten nach den in diesem Abschnitte bereits empfohlenen Regeln homogen macht; nur die Prüfungscoëfficienten s, (von denen man für die folgenden Prüfungsgleichungen nur die Quadrate benützt) können hiervon eine Ausnahme machen; man wird sich aber hierbei erinnern, dass identisch ist:

$$s^2 = 2as - a^2 + (s - a)^2,$$

wo für a jene ganze Zahl zu wählen sein wird, die $s - a$ kleiner als 2 macht und wobei natürlich das Zeichen von s stets positiv gedacht wird. Mit dieser Formel wird man leicht die die Grenzen dieser Quadrattafel ausnahmsweise überschreitenden Coëfficienten berechnen können.

Um mit Hilfe einer Quadrattafel ein Product zu berechnen, erinnere man sich dass offenbar ist:

$$ab = \tfrac{1}{2}\{(a + b)^2 - a^2 - b^2\};$$

es ist also:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 b_1 = \tfrac{1}{2}\{(a_1 + b_1)^2 - a_1{}^2 - b_1{}^2\} \\ a_2 b_2 = \tfrac{1}{2}\{(a_2 + b_2)^2 - a_2{}^2 - b_2{}^2\} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \qquad 13)$$

demnach auch mit Benutzung des symbolischen Summenzeichen

$$[ab] = \tfrac{1}{2}\{[(a + b)^2] - [aa] - [bb]\}.$$

Man bedarf daher, wenn man die in den Normalgleichungen auftretenden Coëfficienten und ausserdem $[nn]$ bilden will, der folgenden Quadratsummen:

$$
\begin{array}{lllll}
[a\,a] . & [(a+b)^2] . & [(a+c)^2] . & \ldots . & [(a+n)^2] \\
 & [b\,b] . & [(b+c)^2] . & \ldots . & [(b+n)^2] \\
 & & [c\,c] & \ldots . & [(c+n)^2] \\
 & & & \ldots\ldots & \\
 & & & & [n\,n]
\end{array}
$$

und es stellt sich die Aufgabe, dieselben in zweckmässiger Weise zu bilden und das Resultat der Rechnung zu prüfen. Vor Allem wird man wieder vor Beginn der Rechnung jede der Bedingungsgleichungen mit der Quadratwurzel des zugehörigen Gewichtes durchmultipliciren und die Coëfficienten der Unbekannten möglichst homogen machen (vergl. pag. 318); ich setze deshalb voraus, dass die Unbekannten und die Fehlereinheit so gewählt sind, dass der grösste auftretende Coëfficient einer jeden der Unbekannten und der grösste Fehler der Einheit gleich ist. Hiermit bildet man ähnlich wie oben die Summen:

$$
\left.
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + n_1 \\
s_2 &= a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + n_2 \\
s_3 &= a_3 + b_3 + c_3 + \ldots + n_3 \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}
\right\} \tag{14}
$$

und stellt sich das folgende dem früher benützten analoge Schema zusammen, in welchem aber statt der Logarithmen die Zahlen selbst Aufnahme finden:

Nummer der Bedingungsgleichung	1	2	3	....
Coëfficient von x	a_1	a_2	a_3	....
» » y	b_1	b_2	b_3	....
» » z	c_1	c_2	c_3	....
. . .	.	.	.	
. . .	.	.	.	
Fehler	n_1	n_2	n_3	....
Summe	s_1	s_2	s_3	....

Hierauf bilde man sich wieder ein Schema mit

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1 \cdot 2} + 1$$

Verticalcolumnen, wobei μ die Anzahl der Unbekannten vorstellt; jede Verticalcolumne erhält drei Zeilen mehr als die Anzahl der Unbekannten ist; die erste Zeile dient zur bezeichnenden Ueberschrift, die vorletzte für die Summe der Werthe, in die letzte Zeile wird bei den nicht quadratischen Gliedern, die Summe der Quadrate der Einzelglieder angesetzt, also unter $[(a+b)^2]$ kommt $[a\,a] + [b\,b]$, unter $[(a+c)^2]$ die Summe $[a\,a] + [c\,c]$ u. s. w., welcher Zusatz sich leicht erklärt, wenn man die Bildung der Productsummen $[a\,b]$, $[a\,c]$ u. s. w. sich vergegenwärtigt. Vorerst bildet man die Quadrate aller Coëfficienten, dann schreibt man sich die a Coëfficienten auf den unteren Rand eines Papiers, hält dieselben über die b Reihe,

und indem man beide Coëfficienten mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen addirt, erhält man das nunmehr vom Zeichen unabhängige Argument für die Quadrattafel und bildet so die $(a+b)^2$ Reihe; nun rückt man um eine Zeile tiefer und erhält die $(a+c)^2$ Reihe u. s. f. bis zum Schlusse, dann beginnt man mit den b Coëfficienten dieselbe Operation, indem man zuerst die $(b+c_i)^2$ Reihe ableitet u. s. f. Das sich so bildende Schema wird also das folgende sein:

	aa	bb	cc	. . .	ss	$(a+b)^2$	$(a+c)^2$	. . . .	$(a+n)^2$	$(b+c)^2$	. . .
1	a_1a_1	b_1b_1	c_1c_1	. .	s_1s_1	$(a_1+b_1)^2$	$(a_1+c_1)^2$	. .	$(a_1+n_1)^2$	$(b_1+c_1)^2$	. . . .
2	a_2a_2	b_2b_2	c_2c_2	. . . .	s_2s_2	$(a_2+b_2)^2$	$(a_2+c_2)^2$	. . . .	$(a_2+n_2)^2$	$(b_2+c_2)^2$	. . . .
3	a_3a_3	b_3b_3	c_3c_3	. . .	s_3s_3	$(a_3+b_3)^2$	$(a_3+c_3)^2$	. . . .	$(a_3+n_3)^2$	$(b_3+c_3)^2$	. . .
.	. .	. .	. .	. . . .	. . .	. . .	. .	. . . .	. . .	. . .	. . . .
.	. .	.	.	. . . .	. .	. . .	. .	. . . .	. .	. .	. . . .
	$[aa]$	$[bb]$	$[cc]$	. . .	$[ss]$	$[(a+b)^2]$	$[(a+c)^2]$	. . . .	$[(a+n)^2]$	$[(b+c)^2]$	. . . .
						$[aa]+[bb]$	$[aa]+[cc]$	. . .	$[aa]+[nn]$	$[bb]+[cc]$	. . .

Um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, quadrirt man die Gleichungen (14) (pag. 325), addirt dieselben und denkt sich die Producte nach (13) (pag. 324) zerlegt, so resultiren leicht die folgenden Prüfungsgleichungen, in welchen wieder durch μ die Anzahl der Unbekannten dargestellt wird:

$$\begin{aligned} [ss] &+ (\mu-1)\{[aa]+[bb]+[cc]+\ldots+[nn]\} = \\ &= [(a+b)^2]+[(a+c)^2]+[(a+d)^2]+\ldots+[(a+n)^2] \\ &+ [(b+c)^2]+[(b+d)^2]+\ldots+[(b+n)^2] \\ &+ [(c+d)^2]+\ldots+[(c+n)^2] \\ &+ \ldots \\ &+ \end{aligned} \qquad (15)$$

d. h. die Summe ss vermindert um die $(\mu-1)$ fache Summe der Quadrate der quadratischen Coëfficienten ist gleich der Summe der Quadrate der übrigen Coëfficienten. Lässt diese Prüfung Fehler vermuthen, so wird die Anwendung dieser Formel auf die einzelnen Glieder den Ort des Fehlers entdecken lassen, denn es ist ja allgemein:

$$\begin{aligned} s_is_i &+ (\mu-1)\{a_ia_i+b_ib_i+c_ic_i+\ldots+n_in_i\} = \\ &= (a_i+b_i)^2+(a_i+c_i)^2+(a_i+d_i)^2+\ldots+(a_i+n_i)^2 \\ &+ (b_i+c_i)^2+(b_i+d_i)^2+\ldots+(b_i+n_i)^2 \\ &+ (c_i+d_i)^2+\ldots+(c_i+n_i)^2 \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Hat man sich so eine sichere Prüfung der Richtigkeit der berechneten Grössen verschafft, so bildet man die für die Normalgleichungen nöthigen Formen durch

$$[\alpha\beta] = \tfrac{1}{2}\{[(\alpha+\beta)^2] - [\alpha\alpha] - [\beta\beta]\} \qquad (16)$$

es wird also z. B. sein:

$$[ab] = \tfrac{1}{2}\{[(a+b)^2] - [aa] - [bb]\}$$
$$[ac] = \tfrac{1}{2}\{[(a+c)^2] - [aa] - [cc]\}$$
u. s. w.,

welche Operation durch die Angaben in der letzten Zeile einer jeden Verticalcolumne sehr sicher durchgeführt wird, und man erhält so leicht alle die für die Normalgleichungen nöthigen Coëfficienten; dass man sich in dieser letzteren Operation keinen Fehler hat zu Schulden kommen lassen, prüft man leicht durch die folgende, ohne Schwierigkeit zu verificirende Relation; es ist nämlich, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} S = \{[ab] &+ [ac] + [ad] + \ldots + [an] \\ &+ [bc] + [bd] + \ldots + [bn] \\ &\qquad + [cd] + \ldots + [cn] \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \} \\ 2S = [ss] &- \{[aa] + [bb] + [cc] + \ldots + [nn]\}, \end{aligned}\right\} \quad 17)$$

womit demnach der letzte Schritt in der Bildung der Normalgleichungen geprüft erscheint.

Die für den Kometen I 1866 im Beispiele des letzten Abschnittes gebildeten homogen gemachten Differentialquotienten finden sich nach dem obigen Schema (pag. 326) zusammengestellt, wenn man die Summe der Coëfficienten mit s bezeichnet, wie folgt:

Rectascensionen.

	1	2	3	4	5	6	7
a	+ 1.0000	+ 0.7834	+ 0.3711	+ 0.2530	+ 0.1661	+ 0.1014	+ 0.0239
b	+ 0.9856	+ 0.5986	+ 0.3210	+ 0.2509	+ 0.2012	+ 0.1650	+ 0.1228
c	+ 0.5987	+ 0.1417	0.0226	— 0.0530	0.0721	0.0847	0.0982
d	+ 1.0000	+ 0.5704	+ 0.2754	— 0.2077	+ 0.1648	+ 0.1390	+ 0.1188
e	— 0.3398	— 0.0237	+ 0.0485	+ 0.0573	+ 0.0613	+ 0.0631	+ 0.0620
f	0.0868	+ 0.0716	+ 0.0265	+ 0.0066	— 0.0095	0.0220	0.0357
n	— 0.4440	+ 1.0000	0.0505	— 0.2242	— 0.1275	— 0.4748	+ 0.1407
s	+ 2.7137	+ 3.1420	+ 0.9694	+ 0.4983	+ 0.3845	— 0.1130	+ 0.3343

Declinationen.

	8	9	10	11	12	13	14
a	— 0.0313	— 0.8942	— 0.5436	0.3819	— 0.2546	— 0.1567	0.0371
b	— 0.8798	— 1.0000	— 0.6679	— 0.5697	— 0.5000	— 0.4499	0.3927
c	— 1.0000	— 0.5280	— 0.1953	0.1407	— 0.1108	— 0.0942	— 0.0805
d	— 0.0815	+ 0.0451	+ 0.0970	+ 0.0907	+ 0.0827	+ 0.0763	+ 0.0703
e	+ 1.0000	+ 0.5371	+ 0.1997	+ 0.1388	+ 0.1032	+ 0.0815	+ 0.0603
f	+ 1.0000	+ 0.4154	+ 0.0721	+ 0.0146	— 0.0179	0.0369	— 0.0530
n	+ 0.1670	+ 0.4989	— 0.1846	+ 0.3077	— 0.4483	— 0.0132	+ 0.1275
s	+ 0.1744	— 0.9257	— 1.2226	— 0.5405	— 1.1457	— 0.5931	— 0.3052

Die Bildung der Quadrate nach dem auf pag. 326 gegebenen Schema unter Benutzung der Tafel XV ergibt:

Nr.	aa	bb	cc	dd	ee	ff	nn	ss	$(a+b)^2$	$(a+c)^2$	$(a+d)^2$	$(a+e)^2$	$(a+f)^2$	$(a+n)^2$	$(b+c)^2$
1	1.0000	0.9714	0.3584	1.0000	0.1155	0.0076	0.1971	7.3642	3.9426	2.5558	4.0000	0.4359	0.8340	0.3091	2.5100
2	0.6137	0.3583	0.0201	0.3253	0.0006	0.0051	1.0000	9.8722	1.9099	0.8558	1.8328	0.5771	0.7310	3.1805	0.5480
3	0.1377	0.1030	0.0005	0.0758	0.0023	0.0007	0.0025	0.9398	0.4790	0.1214	0.4179	0.1761	0.1581	0.1028	0.0890
4	0.0640	0.0629	0.0028	0.0431	0.0033	0.0000	0.0503	0.2483	0.2539	0.0400	0.2122	0.0963	0.0674	0.0008	0.0392
5	0.0276	0.0405	0.0052	0.0271	0.0037	0.0001	0.0162	0.1478	0.1349	0.0088	0.1095	0.0518	0.0245	0.0015	0.0166
6	0.0103	0.0272	0.0072	0.0193	0.0040	0.0005	0.2254	0.0128	0.0710	0.0003	0.0578	0.0270	0.0063	0.1394	0.0065
7	0.0006	0.0151	0.0096	0.0141	0.0038	0.0013	0.0198	0.1118	0.0215	0.0055	0.0203	0.0074	0.0001	0.0271	0.0006
8	0.0010	0.7740	1.0000	0.0066	1.0000	1.0000	0.0279	0.0304	0.8301	1.0636	0.0127	0.9384	0.9384	0.0184	3.5336
9	0.7996	1.0000	0.2788	0.0020	0.2885	0.1726	0.2489	0.8569	3.5880	2.0227	0.7210	0.1275	0.2292	0.1562	2.3348
10	0.2955	0.4461	0.0381	0.0094	0.0399	0.0052	0.0341	1.4947	1.4677	0.5459	0.1994	0.1182	0.2223	0.5303	0.7451
11	0.1458	0.3246	0.0198	0.0082	0.0192	0.0002	0.0947	0.2921	0.9055	0.2731	0.0848	0.0590	0.1349	0.0055	0.5047
12	0.0648	0.2500	0.0123	0.0068	0.0106	0.0003	0.2010	1.3126	0.5694	0.1335	0.0296	0.0229	0.0742	0.4941	0.3731
13	0.0245	0.2024	0.0088	0.0058	0.0066	0.0014	0.0002	0.3517	0.3679	0.0629	0.0065	0.0056	0.0374	0.0289	0.2960
14	0.0014	0.1542	0.0065	0.0049	0.0036	0.0028	0.0162	0.0931	0.1847	0.0138	0.0011	0.0705	0.0081	0.0082	0.2239
	3.1865	4.7297	1.7681	1.5484	1.5016	1.1978	2.1343	23.1284	14.7261	7.7031	7.7056	2.6437	3.4659	5.0028	11.2211
									7.9162	4.9546	4.7349	4.6881	4.3843	5.3208	6.4978

Nr.	$(b+d)^2$	$(b+e)^2$	$(b+f)^2$	$(b+n)^2$	$(c+d)^2$	$(c+e)^2$	$(c+f)^2$	$(c+n)^2$	$(d+e)^2$	$(d+f)^2$	$(d+n)^2$	$(e+f)^2$	$(e+n)^2$	$(f+n)^2$
1	3.9426	0.4170	0.8078	0.2934	2.5558	0.0670	0.2620	0.0239	0.4359	0.8340	0.3091	0.1820	0.6144	0.2818
2	1.3666	0.3305	0.4492	2.5555	0.5070	0.0139	0.0455	1.3035	0.2989	0.4122	2.4661	0.0023	0.9532	1.1483
3	0.3557	0.1365	0.1207	0.0731	0.0639	0.0007	0.0000	0.0053	0.1049	0.0911	0.0506	0.0056	0.0000	0.0006
4	0.2103	0.0950	0.0663	0.0007	0.0239	0.0000	0.0021	0.0768	0.0702	0.0459	0.0003	0.0041	0.0279	0.0473
5	0.1340	0.0690	0.0368	0.0054	0.0086	0.0001	0.0067	0.0398	0.0512	0.0241	0.0014	0.0027	0.0044	0.0188
6	0.0924	0.0520	0.0204	0.0960	0.0029	0.0005	0.0113	0.3130	0.0408	0.0137	0.1128	0.0017	0.1695	0.2468
7	0.0584	0.0341	0.0076	0.0694	0.0004	0.0013	0.0180	0.0018	0.0327	0.0069	0.0673	0.0007	0.0411	0.0110
8	0.9241	0.0144	0.0144	0.5081	1.1696	0.0000	0.0000	0.6939	0.8436	0.8436	0.0073	4.0000	1.3619	1.3619
9	0.9118	0.2143	0.3418	0.2511	0.2332	0.0001	0.0127	0.0008	0.3389	0.2120	0.2959	0.9072	1.0733	0.8359
10	0.3259	0.2192	0.3550	0.7267	0.0097	0.0000	0.0152	0.1443	0.0880	0.0286	0.0077	0.0739	0.0002	0.0126
11	0.2294	0.1857	0.3081	0.0686	0.0025	0.0000	0.0159	0.0279	0.0526	0.0111	0.1587	0.0235	0.1939	0.1039
12	0.1741	0.1574	0.2682	0.8993	0.0008	0.0001	0.0165	0.3126	0.0346	0.0042	0.1337	0.0073	0.1191	0.2174
13	0.1396	0.1357	0.2370	0.2145	0.0003	0.0002	0.0172	0.0115	0.0249	0.0015	0.0040	0.0020	0.0047	0.0025
14	0.1039	0.1105	0.1986	0.0703	0.0001	0.0004	0.0178	0.0022	0.0171	0.0003	0.0391	0.0000	0.0352	0.0055
	8.9688	2.1713	3.2319	5.8321	4.5787	0.0843	0.4409	2.9573	2.4343	2.5292	3.6540	5.2130	4.6042	4.2943
	6.2781	6.2313	5.9275	6.8640	3.3165	3.2697	2.9659	3.9024	3.0500	2.7462	3.6827	2.6994	3.6359	3.3321

Die Probegleichung (15) (pag. 326) ergibt das folgende befriedigende Resultat:

$$16.0064\,(\mu - 1) = 80.3320$$
$$ss = 23.1284$$
$$\text{Summe} = 103.4604$$
$$\text{Summe der nichtquadrat. Gl.} = 103.4626.$$

Aus der Verbindung der Zahlen der beiden letzten Zeilen findet sich nach (16) pag. 326 für die übrigen Coëfficienten der Normalgleichungen:

$[ab] = +3.4049$. $[bc] = +2.3616$. $[cd] = +0.6311$. $[de] = -0.3078$

$[ac] = +1.3742$. $[bd] = +1.3453$. $[ce] = -1.5927$, $[df] = -0.1085$

$[ad] = +1.4853$. $[be] = -2.0300$. $[cf] = -1.2625$. $[dn] = -0.0143$

$[ae] = -1.0222$. $[bf] = -1.3478$. $[cn] = -0.4725$. $[ef] = +1.2568$

$[af] = -0.4502$. $[bn] = -0.5150$. $[en] = +0.4841$

$[an] = -0.1590$. $[fn] = +0.4811$

Die Summe dieser Coëfficienten ist nach 17 (pag. 327) gleich S; setzt man für ss jenen Werth ein, der sich ergeben würde, wenn die Probegleichung 15) (pag. 326) völlig stimmen würde, so hätte man zu setzen $ss = 23.1306$ (pag. 328), es ist also:

$$\begin{aligned} ss &= 23.1306 \\ \text{Summe der Quadrate} &= 16.0664 \\ \text{Differenz} = 2\,S &= 7.0642 \\ S &= 3.5321 \\ \text{die Summe der Coëff. } S &= 3.5320 \end{aligned}$$

was eine gute Uebereinstimmung ist; um diese stets zu erhalten, wird es immer gut sein, von der wie oben corrigirten Summe ss Gebrauch zu machen.

---

§ 3. Bestimmung der Eliminationsgleichungen.

Die Auflösung der Normalgleichungen wird am zweckmässigsten ebenfalls in geordneter und übersichtlicher Form durchgeführt, um einerseits die Auflösung möglichst vor Rechenfehlern zu sichern, und anderseits die Bestimmung der Unbekannten so genau als thunlich zu erhalten. Die Ordnung in der man die Unbekannten ansetzt, ist an sich gleichgültig, doch wird es sich später als vortheilhaft erweisen, falls die Bestimmung einer oder mehrer Unbekannten sehr unsicher ausfällt, dieselben als die letzten anzusehen; auf diesen Fall einer besonderen Unsicherheit in der Auflösung der Normalgleichungen werde ich am Schlusse dieses Abschnittes, der die Methode der kleinsten Quadrate behandelt, ausführlich eingehen, da er in der Anwendung der vorliegenden Methode auf Bahnbestimmungen ziemlich häufig auftritt. Ich werde, um hier die Anordnung der Rechnung anschaulich zu machen, annehmen, dass sechs Unbekannte zur Bestimmung vorliegen, es ist dies der bei astronomischen Untersuchungen überwiegend häufig eintretende Specialfall und es wird ein leichtes sein, von Fall zu Fall das vorliegende Schema zu verengern oder zu erweitern. Es sind also die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [af]w &= [an] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t + [be]u + [bf]w &= [bn] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cd]t + [ce]u + [cf]w &= [cn] \\ [ad]x + [bd]y + [cd]z + [dd]t + [de]u + [df]w &= [dn] \\ [ae]x + [be]y + [ce]z + [de]t + [ee]u + [ef]w &= [en] \\ [af]x + [bf]y + [cf]z + [df]t + [ef]u + [ff]w &= [fn] \end{aligned}\right\} \quad \text{A}$$

Man kann nun die Auflösung dieser Gleichungen so einrichten, dass man durch die entsprechende Elimination einer Unbekannten vorerst auf fünf Gleichungen hingeführt wird, die ebenso symmetrisch construirt sind, wie die sechs ursprünglichen Normalgleichungen. Die Unbekannte x wird sich nothwendig am sichersten aus

der ersten Gleichung bestimmen, da in dieser die zu x gehörigen Factoren in der quadratischen Form mit einander summirt erscheinen. Man hat daher zur Bestimmung von x aus der ersten Gleichung in A:

$$x = \frac{[an]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,t - \frac{[ae]}{[aa]}\,u - \frac{[af]}{[aa]}\,w\,. \qquad 1)$$

welcher Werth in die folgenden Gleichungen zum Zwecke der Elimination einzusetzen wäre. Durch die Substitution wird jeder der neu entstehenden Coëfficienten ein Binom, für welche eine weitere symbolische Bezeichnung eingeführt werden soll; man wird also schreiben für die in der zweiten Gleichung auftretenden Binome:

$$\begin{aligned}
&[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb1]\,, \qquad && [be] - \frac{[ab]}{[aa]}[ae] = [be1]\\
&[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc1]\,, && [bf] - \frac{[ab]}{[aa]}[af] = [bf1]\\
&[bd] - \frac{[ab]}{[aa]}[ad] = [bd1]\,, && [bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an] = [bn1]\,.
\end{aligned}$$

in der dritten Gleichung werden auftreten:

$$\begin{aligned}
&[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc1]\,, \qquad && [cf] - \frac{[ac]}{[aa]}[af] = [cf1]\\
&[cd] - \frac{[ac]}{[aa]}[ad] = [cd1]\,, && [cn] - \frac{[ac]}{[aa]}[an] = [cn1]\\
&[ce] - \frac{[ac]}{[aa]}[ae] = [ce1]\,,
\end{aligned}$$

die vierte:

$$\begin{aligned}
&[dd] - \frac{[ad]}{[aa]}[ad] = [dd1]\,, \qquad && [df] - \frac{[ad]}{[aa]}[af] = [df1]\\
&[de] - \frac{[ad]}{[aa]}[ae] = [de1]\,, && [dn] - \frac{[ad]}{[aa]}[an] = [dn1]
\end{aligned}$$

die fünfte:

$$\begin{aligned}
&[ee] - \frac{[ae]}{[aa]}[ae] = [ee1]\,, \qquad && [en] - \frac{[ae]}{[aa]}[an] = [en1]\\
&[ef] - \frac{[ae]}{[aa]}[af] = [ef1]\,.
\end{aligned}$$

und endlich die sechste Gleichung fordert die Berechnung von:

$$[ff] - \frac{[af]}{[aa]}[af] = [ff1]\,, \qquad [fn] - \frac{[af]}{[aa]}[an] = [fn1]\,.$$

Hat man nun die vorstehend eingeführten Hilfsgrössen berechnet, so reducirt sich das System der sechs Gleichungen in A auf das folgende ebenfalls symmetrisch angeordnete System von fünf Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
[bb1]\,y + [bc1]\,z + [bd1]\,t + [be1]\,u + [bf1]\,w &= [bn1]\\
[bc1]\,y + [cc1]\,z + [cd1]\,t + [ce1]\,u + [cf1]\,w &= [cn1]\\
[bd1]\,y + [cd1]\,z + [dd1]\,t + [de1]\,u + [df1]\,w &= [dn1]\\
[be1]\,y + [ce1]\,z + [de1]\,t + [ee1]\,u + [ef1]\,w &= [en1]\\
[bf1]\,y + [cf1]\,z + [df1]\,t + [ef1]\,u + [ff1]\,w &= [fn1]
\end{aligned}\right\} \qquad B$$

Ehe ich weiter gehe, will ich noch eine Frage erörtern, die für die Folge von Wichtigkeit ist, nämlich ob die neu eingeführten Symbole $[bb1]$, $[bc1]$, $[bd1]$ ... in analoger Weise wie die Symbole $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$ ... aus Productsummen von gleicher Verbindung entstanden gedacht werden können, etwa in der folgenden Weise:

$$[bb1] = (b_1 1)(b_1 1) + (b_2 1)(b_2 1) + (b_3 1)(b_3 1) + \dots$$
$$[bc1] = (b_1 1)(c_1 1) + (b_2 1)(c_2 1) + (b_3 1)(c_3 1) + \dots$$

u. s. f.

Diese Frage kann den folgenden Betrachtungen zu Folge bejaht werden. Die allgemeine Form dieser neuen und auch in der Folge einzuführenden Symbole ist, wenn man auf die Entstehung und Entwickelung der Hilfsgrössen zurückgeht:

$$[pr1] = (p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 + \dots) - \frac{(q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 + \dots)(q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 + \dots)}{q_1 q_1 + q_2 q_2 + q_3 q_3 + \dots}$$

wobei $p_1, p_2, \dots r_1, r_2, \dots$ die Coëfficienten zweier beliebiger Unbekannten darstellen, während durch $q_1, q_2, \dots$ die Factoren der zu eliminirenden Unbekannten bezeichnet werden. Multiplicirt man beiderseits mit dem Nenner, für welchen auch das Symbol $[qq]$ geschrieben werden kann und beachtet, dass sich nach der Ausführung der Multiplicationen die Glieder, in denen alle 4 Indices gleich werden, rechts vom Gleichheitszeichen aufheben, so erhält man vorerst die Form:

$$[qq][pr1] = \left\{ \begin{array}{l} \quad p_1 r_1 (q_2 q_2 + q_3 q_3 + \dots) - q_1 p_1 q_2 r_2 - q_2 p_2 q_1 r_1 - \dots \\ + p_2 r_2 (q_1 q_1 + q_3 q_3 + \dots) - q_1 p_1 q_3 r_3 - q_2 p_2 q_3 r_3 - \dots \\ + p_3 r_3 (q_1 q_1 + q_2 q_2 + \dots) - q_1 p_1 q_1 r_1 - q_2 p_2 q_1 r_1 - \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

für welche auch geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} [qq][pr1] = {} & (p_1 q_2 - q_1 p_2)(r_1 q_2 - q_1 r_2) + (p_2 q_3 - q_2 p_3)(r_2 q_3 - q_2 r_3) + \dots \\ + {} & (p_1 q_3 - q_1 p_3)(r_1 q_3 - q_1 r_3) + (p_2 q_1 - q_2 p_1)(r_2 q_1 - q_2 r_1) + \dots \\ + {} & (p_1 q_4 - q_1 p_4)(r_1 q_4 - q_1 r_4) + (p_2 q_5 - q_2 p_5)(r_2 q_5 - q_2 r_5) + \dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{aligned}$$

war die Anzahl der ursprünglichen Bedingungsgleichungen m, so wird die Anzahl der Glieder in diesem Ausdrucke sein $\frac{m(m-1)}{2}$; vergleicht man demnach die neu eingeführten Hilfsgrössen mit diesem Resultate und beachtet insbesondere die einzelnen Factoren, so sieht man sofort, dass man in der That sich dieselben in ähnlicher Weise, wie die ursprünglichen Summensymbole entstanden denken kann, nur steigt der höchste Index, da in den letzteren m angenommen wurde, auf $\frac{m(m-1)}{2}$. Für die quadratischen Symbole $[bb1]$, $[cc1]$, $[dd1]$ ... ist für p und r derselbe Buchstabe zu setzen, man erhält daher rechts vom Gleichheitszeichen eine Summe quadratischer Glieder; man kann daraus den wichtigen Schluss ziehen, dass die quadratischen Symbole stets positiv sein müssen. Ferner kann man hervorheben, dass wenn zwischen den Coëfficienten der verschiedenen Unbekannten ein nahe proportionales Verhältniss besteht, so dass z. B. in den Relationen:

$$p_1 = s q_1 + \lambda_1$$
$$p_2 = s q_2 + \lambda_2$$
$$p_3 = s q_3 + \lambda_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nothwendig klein wird, die obigen Coëfficienten für die quadratischen Glieder die Form annehmen:

$$(\lambda_1 q_2 - \lambda_2 q_1)^2 + (\lambda_2 q_3 - \lambda_3 q_2)^2 + \ldots$$
$$(\lambda_1 q_3 - \lambda_3 q_1)^2 + \ldots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

d. h. der für die Unbekannten bestimmende Coëfficient wird der Null gleich bis auf Glieder zweiter Ordnung von λ, und eine Bestimmung wird also, wenn λ klein wird, nicht möglich, was übrigens aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen folgt, doch wird man aus dem obigen Ausdrucke leicht die Bemerkung ableiten, dass der Fall der Kleinheit der Coëfficienten nur unter dieser Bedingung auftreten kann.

Aus den Gleichungen B nun eliminirt man y in ähnlicher Weise wie früher x aus A, und man wird aus ähnlichen Gründen, wie früher, y zunächst aus der ersten bestimmen und das Resultat in die folgenden einsetzen; es ist:

$$y = \frac{[bn1]}{[bb1]} - \frac{[bc1]}{[bb1]} z - \frac{[bd1]}{[bb1]} t - \frac{[be1]}{[bb1]} u - \frac{[bf1]}{[bb1]} w \qquad 2.$$

Man wird also neue Hilfsgrössen zu bestimmen haben:

$$[cc1] - \frac{[bc1]}{[bb1]} [bc1] = [cc2], \qquad [cf1] - \frac{[bc1]}{[bb1]} [bf1] = [cf2],$$
$$[cd1] - \frac{[bc1]}{[bb1]} [bd1] = [cd2], \qquad [cn1] - \frac{[bc1]}{[bb1]} [bn1] = [cn2]$$
$$[ce1] - \frac{[bc1]}{[bb1]} [be1] = [ce2].$$

$$[dd1] - \frac{[bd1]}{[bb1]} [bd1] = [dd2], \qquad [df1] - \frac{[bd1]}{[bb1]} [bf1] = [df2]$$
$$[de1] - \frac{[bd1]}{[bb1]} [be1] = [de2], \qquad [dn1] - \frac{[bd1]}{[bb1]} [bn1] = [dn2]$$

$$[ee1] - \frac{[be1]}{[bb1]} [be1] = [ee2], \qquad [en1] - \frac{[be1]}{[bb1]} [bn1] = [en2]$$
$$[ef1] - \frac{[be1]}{[bb1]} [bf1] = [ef2].$$

$$[ff1] - \frac{[bf1]}{[bb1]} [bf1] = [ff2], \qquad [fn1] - \frac{[bf1]}{[bb1]} [bn1] = [fn2].$$

Nach Einführung dieser Hilfsgrössen erhält man das System:

$$\left.\begin{aligned}
[cc2]z + [cd2]t + [ce2]u + [cf2]w &= [cn2] \\
[cd2]z + [dd2]t + [de2]u + [df2]w &= [dn2] \\
[ce2]z + [de2]t + [ee2]u + [ef2]w &= [en2] \\
[cf2]z + [df2]t + [ef2]u + [ff2]w &= [fn2]
\end{aligned}\right\} \quad C$$

Bestimmt man daraus z nach der ersten Gleichung:

$$z = \frac{[cn2]}{[cc2]} - \frac{[cd2]}{[cc2]}\,t - \frac{[ce2]}{[cc2]}\,u - \frac{[cf2]}{[cc2]}\,w \qquad (3)$$

substituirt diesen Werth in die folgenden und bildet:

$$[dd2] - \frac{[cd2]}{[cc2]}[cd2] = [dd3]\,, \qquad [df2] - \frac{[cd2]}{[cc2]}[cf2] = [df3]$$

$$[de2] - \frac{[cd2]}{[cc2]}[ce2] = [de3]\,, \qquad [dn2] - \frac{[cd2]}{[cc2]}[cn2] = [dn3]$$

$$[ee2] - \frac{[ce2]}{[cc2]}[ce2] = [ee3]\,, \qquad [en2] - \frac{[ce2]}{[cc2]}[cn2] = [en3]$$

$$[ef2] - \frac{[ce2]}{[cc2]}[cf2] = [ef3]\,.$$

$$[ff2] - \frac{[cf2]}{[cc2]}[cf2] = [ff3]\,, \qquad [fn2] - \frac{[cf2]}{[cc2]}[cn2] = [fn3]\,,$$

so hat man daher die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [dd3]\,t + [de3]\,u + [df3]\,w &= [dn3] \\ [de3]\,t + [ee3]\,u + [ef3]\,w &= [en3] \\ [df3]\,t + [ef3]\,u + [ff3]\,w &= [fn3] \end{aligned}\right| \qquad (D)$$

bestimmt man also wieder t nach

$$t = \frac{[dn3]}{[dd3]} - \frac{[de3]}{[dd3]}\,u - \frac{[df3]}{[dd3]}\,w\,. \qquad (4)$$

und berechnet als neue Hilfsgrössen:

$$[ee3] - \frac{[de3]}{[dd3]}[de3] = [ee4]\,, \qquad [en3] - \frac{[de3]}{[dd3]}[dn3] = [en4]$$

$$[ef3] - \frac{[de3]}{[dd3]}[df3] = [ef4]\,.$$

$$[ff3] - \frac{[df3]}{[dd3]}[df3] = [ff4]\,, \qquad [fn3] - \frac{[df3]}{[dd3]}[dn3] = [fn4]\,.$$

so hat man Alles zurückgeführt auf die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [ee4]\,u + [ef4]\,w &= [en4] \\ [ef4]\,u + [ff4]\,w &= [fn4] \end{aligned}\right| \qquad (E)$$

bestimmt man nun u nach:

$$u = \frac{[en4]}{[ee4]} - \frac{[ef4]}{[ee4]}\,w \qquad (5)$$

und berechnet die Hilfsgrössen:

$$[ff4] - \frac{[ef4]}{[ee4]}[ef4] = [ff5]\,, \qquad [fn4] - \frac{[ef4]}{[ee4]}[en4] = [fn5]\,.$$

so wird man schliesslich haben:

$$[ff5]\,w = [fn5]\,, \qquad (F)$$

woraus resultirt:

$$w = \frac{[fn5]}{[ff5]} \qquad 6)$$

Ist einmal w bestimmt, so wird sich durch successive Benützung der Formeln 5), 4), 3), 2) und 1) die Bestimmung der Unbekannten u, t, z, y und x ergeben, welches Verfahren am bequemsten erscheint, wenn nicht das Gewicht der Unbekannten gefordert wird, sondern nur die Unbekannten selbst bestimmt werden sollen; im letzteren Falle empfiehlt sich ein anderes Verfahren, welches weiter unten ausgeführt wird. Die ersten Gleichungen in A, B, C, D, E und F kann man die Eliminationsgleichungen nennen und hat demnach für dieselben die Form:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [af]w &= [an]\\
[bb1]y + [bc1]z + [bd1]t + [be1]u + [bf1]w &= [bn1]\\
[cc2]z + [cd2]t + [ce2]u + [cf2]w &= [cn2]\\
[dd3]t + [de3]u + [df3]w &= [dn3]\\
[ee4]u + [ef4]w &= [en4]\\
[ff5]w &= [fn5]
\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Es könnte auf den ersten Blick den Anschein haben, als ob die Berechnung dieser zahlreichen Hilfsgrössen schwer durchführbar wäre, indem es nicht leicht ist, stets die Uebersicht zu erhalten und sich bei diesen vielfachen Multiplicationen vor Fehlern zu schützen. Man wird deshalb bedacht sein müssen, die Rechnung übersichtlich anzuordnen und zweckmässige Prüfungsgleichungen einzuführen. Ehe ich aber das Schema, nach dem man die Elimination ausführen kann angebe, werde ich vorerst die Prüfungsgleichungen näher bezeichnen und entwickeln, da die Elimination und Controlrechnung unter einem abgethan werden kann, also sofort auch die Prüfungsrechnungen in das Schema aufzunehmen sind.

Es waren oben (pag. 317) als Prüfungsgleichungen benützt worden die Summen:

$$\begin{aligned}
[aa] + [ab] + [ac] + \ldots\ldots + [an] &= [as]\\
[ab] + [bb] + [bc] + \ldots\ldots + [bn] &= [bs]\\
[ac] + [bc] + [cc] + \ldots\ldots + [cn] &= [cs]\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
[an] + [bn] + [cn] + \ldots\ldots + [nn] &= [ns]
\end{aligned}$$

Diese Summen, die früher zur Herstellung entsprechender Prüfungsgleichungen gedient haben, wird man zweckmässig zu weiteren Controlen benützen können; hierbei wird es sich aber für die Sicherung der weiteren Rechnung förderlich erweisen, diesen Gleichungen völlig zu genügen, so dass für $[as]$, $[bs]$ u. s. w. nicht die direct berechneten Werthe in Anwendung kommen, sondern jene, die durch die Summirung der links vom Gleichheitszeichen stehenden Werthe erhalten werden. Bildet man nun ähnlich wie früher neue Hilfsgrössen und setzt:

$$[bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] = [bs1]$$

so ist, wenn man $[bs]$ und $[as]$ seiner Bedeutung nach auflöst:

$$[bs1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] + [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] + \ldots + [bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an]$$

und mit Berücksichtigung der oben (pag. 330) eingeführten Hilfsgrössen auch:

$$[bs1] = [bb1] + [bc1] + \ldots + [bn1],$$

wodurch eine zweckmässige Controlgleichung hergestellt ist. Um also den Uebergang von den sechs Normalgleichungen (A) auf die Gleichungen (B) zu prüfen, bildet man die Hilfsgrössen:

$$[bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] = [bs1], \qquad [es] - \frac{[ae]}{[aa]}[as] = [es1],$$

$$[cs] - \frac{[ac]}{[aa]}[as] = [cs1], \qquad [fs] - \frac{[af]}{[aa]}[as] = [fs1]$$

$$[ds] - \frac{[ad]}{[aa]}[as] = [ds1],$$

und hat dann die Prüfungsgleichungen:

$$[bs1] = [bb1] + [bc1] + [bd1] + [be1] + [bf1] + [bn1]$$
$$[cs1] = [bc1] + [cc1] + [cd1] + [ce1] + [cf1] + [cn1]$$
$$[ds1] = [bd1] + [cd1] + [dd1] + [de1] + [df1] + [dn1]$$
$$[es1] = [be1] + [ce1] + [de1] + [ee1] + [ef1] + [en1]$$
$$[fs1] = [bf1] + [cf1] + [df1] + [ef1] + [ff1] + [fn1]$$

von denen jedoch nur die erstere in der Regel zur Prüfung Anwendung findet, der andern aber wird man bedürfen, um die Richtigkeit der folgenden Prüfungsgleichungen zu erweisen; ich werde, da sich die Beweise für das Bestehen dieser und der folgenden Relationen in der oben durchgeführten Weise leicht herstellen lassen, nur die erforderlichen Hilfsgrössen und Prüfungsgleichungen aufstellen.

$$[cs1] - \frac{[bc1]}{[bb1]}[bs1] = [cs2], \qquad [es1] - \frac{[be1]}{[bb1]}[bs1] = [es2]$$

$$[ds1] - \frac{[bd1]}{[bb1]}[bs1] = [ds2], \qquad [fs1] - \frac{[bf1]}{[bb1]}[bs1] = [fs2]$$

$$[cs2] = [cc2] + [cd2] + [ce2] + [cf2] + [cn2]$$
$$[ds2] = [cd2] + [dd2] + [de2] + [df2] + [dn2]$$
$$[es2] = [ce2] + [de2] + [ee2] + [ef2] + [en2]$$
$$[fs2] = [cf2] + [df2] + [ef2] + [ff2] + [fn2]$$

$$[ds2] - \frac{[cd2]}{[cc2]}[cs2] = [ds3], \qquad [fs2] - \frac{[cf2]}{[cc2]}[cs2] = [fs3]$$

$$[es2] - \frac{[ce2]}{[cc2]}[cs2] = [es3].$$

$$[ds3] = [dd3] + [de3] + [df3] + [dn3]$$
$$[es3] = [de3] + [ee3] + [ef3] + [en3]$$
$$[fs3] = [df3] + [ef3] + [ff3] + [fn3]$$

$$[es\,3] - \frac{[de\,3]}{[dd\,3]}[ds\,3] = [es\,4] \,, \qquad [fs\,3] - \frac{[df\,3]}{[dd\,3]}[ds\,3] = [fs\,4]$$

$$[es\,4] = [ee\,4] + [ef\,4] + [en\,4]$$
$$[fs\,4] = [ef\,4] + [ff\,4] + [fn\,4]$$

$$[fs\,4] - \frac{[ef\,4]}{[ee\,4]}[es\,4] = [fs\,5]$$

$$[fs\,5] = [ff\,5] + [fn\,5] \,,$$

womit die Rechnung einer sehr durchgreifenden Controle unterworfen erscheint.

Ich könnte nun daran gehen, das unten ausführlich vorgelegte Schema, welches ich für die Anwendung zusammengestellt in den Text aufgenommen habe, zu erläutern. Es finden sich die Eliminationsrechnungen auf der linken Seite des aufgeschlagenen Buches (pag. 340), die Prüfungsgleichungen nebst einigen erläuternden Noten auf der rechten. Nachdem es aber zweckmässig erscheint, in das Schema auch jene Rechnungen aufzunehmen, welche die Herabminderung der Summe der Fehlerquadrate nn durch die Bestimmung der einzelnen Unbekannten enthalten und schliesslich die minimale Fehlerquadratsumme kennen lehren, so sollen vorerst die hierzu nöthigen Ableitungen gemacht werden. Diese Grösse gibt eine sehr durchgreifende Prüfung für die Richtigkeit der gesammten Rechnungen, indem die Substitution der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen die einzelnen übrig bleibenden Fehler erkennen lässt, deren Quadratsumme mit dem bei der Elimination hierfür gefundenen Werthe innerhalb der Unsicherheit der Rechnung stimmen muss. Ueberdiess hat die Ermittelung dieser Grössen eine Bedeutung, wenn man die Unsicherheit in den Unbekannten auf ein numerisches Maass zurückführen will. Es fanden sich oben (pag. 315) die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + \ldots - n_1 = -\,v_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + \ldots - n_2 = -\,v_2 \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + \ldots - n_3 = -\,v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad 8)$$

in welchen die Grössen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ die nach der Bestimmung der Unbekannten auftretenden Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung sind, wenn für x, y, $z \ldots$ die aus den Normalgleichungen resultirenden Werthe eingesetzt werden; die Summe dieser Fehlerquadrate

$$v_1\,v_1 + v_2\,v_2 + v_3\,v_3 + \ldots = [v\,v]$$

kann auch dadurch gebildet werden, dass man die Gleichungen 8) rechts und links mit dem zugehörigen $-v$ durchmultiplicirt und Alles addirt, man erhält so, wenn man zur Abkürzung einführt:

$$\begin{array}{l} a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + \ldots = [a\,v] \\ b_1\,v_1 + b_2\,v_2 + b_3\,v_3 + \ldots = [b\,v] \\ c_1\,v_1 + c_2\,v_2 + c_3\,v_3 + \ldots = [c\,v] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_1\,v_1 + n_2\,v_2 + n_3\,v_3 + \ldots = [n\,v] \end{array}$$

die Relation:

$$[nv] - [av]x - [bv]y - [cv]z - [dv]t - [ev]u - [fv]w = [vv] .$$

Nun ist aber nach Gleichung (7) (pag. 316) für die Bedingung des Minimums der Fehlerquadrate, welches durch die Auflösung der Normalgleichungen erhalten wird:

$$[av] = 0, \quad [bv] = 0, \quad [cv] = 0, \quad [dv] = 0, \quad [ev] = 0, \quad [fv] = 0 ,$$

woraus man die wichtige Relation ableitet:

$$[vn] = [vv] . \tag{9}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (8) (pag. 330) mit den zugehörigen $-n$ durch und addirt, so erhält man:

$$[nn] - [an]x - [bn]y - [cn]z - [dn]t - [en]u - [fn]w = [vn] = [vv] , \tag{10}$$

welche Gleichung also sofort die Grösse $[vv]$ finden lässt, sobald die Unbekannten $x, y, z \ldots$ den Normalgleichungen gemäss bestimmt sind. Es ist aber oben (pag. 330) x bestimmt worden durch:

$$x = \frac{[an]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[ae]}{[aa]}u - \frac{[af]}{[aa]}w ;$$

setzt man also diesen Werth von x in Gleichung (10) ein und schreibt überdiess:

$$[nn] - \frac{[an]}{[aa]}[an] = [nn\cdot 1] ,$$

so wird mit Rücksicht auf die oben (pag. 330) eingeführten Hilfsgrössen gesetzt werden dürfen:

$$[nn\cdot 1] - [bn\cdot 1]y - [cn\cdot 1]z - [dn\cdot 1]t - [en\cdot 1]u - [fn\cdot 1]w = [vv] .$$

Ersetzt man wieder y nach der Gleichung (2) (pag. 332) und schreibt:

$$[nn\cdot 1] - \frac{[bn\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bn\cdot 1] = [nn\cdot 2] ,$$

so wird:

$$[nn\cdot 2] - [cn\cdot 2]z - [dn\cdot 2]t - [en\cdot 2]u - [fn\cdot 2]w = [vv] ,$$

welches Verfahren bis zur letzten Unbekannten in ähnlicher Weise fortgesetzt werden kann; man hat also für die vorliegenden Gleichungen mit sechs Unbekannten die folgenden sechs Hilfsgrössen zu berechnen:

$$\left.\begin{aligned}
[nn\cdot 1] &= [nn] - \frac{[an]}{[aa]}[an] , & [nn\cdot 4] &= [nn\cdot 3] - \frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[dn\cdot 3] \\
[nn\cdot 2] &= [nn\cdot 1] - \frac{[bn\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bn\cdot 1] , & [nn\cdot 5] &= [nn\cdot 4] - \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}[en\cdot 4] \\
[nn\cdot 3] &= [nn\cdot 2] - \frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cn\cdot 2] , & [nn\cdot 6] &= [nn\cdot 5] - \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}[fn\cdot 5]
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und hat dann die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Summe der übrig-

bleibenden Fehlerquadrate $[vv]$, von denen man gewöhnlich nur die letzte in Anwendung bringen wird:

$$\left.\begin{aligned}
[nn] - [an]x - [bn]y - [cn]z - [dn]t - [en]u - [fn]w &= [vv] \\
[nn1] - [bn1]y - [cn1]z - [dn1]t - [en1]u - [fn1]w &= [vv] \\
[nn2] - [cn2]z - [dn2]t - [en2]u - [fn2]w &= [vv] \\
[nn3] - [dn3]t - [en3]u - [fn3]w &= [vv] \\
[nn4] - [en4]u - [fn4]w &= [vv] \\
[nn5] - [fn5]w &= [vv] \\
[nn6] &= [vv]
\end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Die Grösse $[nn6] = [vv]$ kann aber auch mit Hilfe der Summengrössen in ganz anderer Weise erhalten werden und diese Bestimmung wird, da dieselbe ebenfalls im Ganzen die Bildung von nur sechs Hilfsgrössen erfordert, als zweckmässige Controle benützt werden dürfen. Diese Prüfung ist eine der durchgreifendsten, doch wird dieselbe nur dann gut übereinstimmende Resultate geben, wenn die Auflösung der Normalgleichungen keiner besonderen Unsicherheit unterworfen ist. Der Fall des Eintretens einer solchen besonderen Unsicherheit wird am Schlusse dieses Abschnittes ausführlicher behandelt werden. Beachtet man die Bedeutung der Summengrösse

$$[ns] = [an] + [bn] + [cn] + [dn] + [en] + [fn] + [nn],$$

und bildet die Hilfsgrösse:

$$[ns1] = [ns] - \frac{[an]}{[aa]}[as],$$

so wird nach Auflösung der mit s verbundenen Summenglieder rechts vom Gleichheitszeichen geschrieben werden dürfen:

$$[ns1] = [bn] - \frac{[an]}{[aa]}[ab] + [cn] - \frac{[an]}{[aa]}[ac] + \ldots + [nn] - \frac{[an]}{[aa]}[an]$$

oder durch Einführung der oben benützten Hilfsgrössen:

$$[ns1] = [bn1] + [cn1] + [dn1] + [en1] + [fn1] + [nn1].$$

Aehnlich vorgehend, wird man die Hilfsgrössen:

$$\left.\begin{aligned}
[ns1] &= [ns] - \frac{[an]}{[aa]}[as] \\
[ns2] &= [ns1] - \frac{[bn1]}{[bb1]}[bs1] \\
[ns3] &= [ns2] - \frac{[cn2]}{[cc2]}[cs2] \\
[ns4] &= [ns3] - \frac{[dn3]}{[dd3]}[ds3] \\
[ns5] &= [ns4] - \frac{[en4]}{[ee4]}[es4] \\
[ns6] &= [ns5] - \frac{[fn5]}{[ff5]}[fs5]
\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

bilden und die Relationen haben:

$$\left.\begin{aligned}
[ns1] &= [bn1] + [cn1] + [dn1] + [en1] + [fn1] + [nn1] \\
[ns2] &= [cn2] + [dn2] + [en2] + [fn2] + [nn2] \\
[ns3] &= [dn3] + [en3] + [fn3] + [nn3] \\
[ns4] &= [en4] + [fn4] + [nn4] \\
[ns5] &= [fn5] + [nn5] \\
[ns6] &= [nn6]
\end{aligned}\right\} \quad 14$$

womit die geforderten Prüfungsgleichungen erlangt sind, von denen man bei der practischen Anwendung jedoch nur die letzte Gleichung benützen wird.

Ich gehe nun daran, an der Hand des auf pag. 340 aufgenommenen Schemas zu zeigen, in welcher einfachen und übersichtlichen Weise die für die Elimination nothwendigen Rechnungen und Controlen durchgeführt werden können.

Zunächst ziehe man auf einem mit Horizontallinien überzogenen Blatte zwei Verticalcolumnen mehr aus, als Unbekannte vorhanden sind. In die erste Zeile setzt man neben einander die Werthe, die mit a verbunden sind, also $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$ ... $[an]$, $[as]$ und darunter in die zweite Zeile die Logarithmen derselben und macht diese zweite Zeile etwa durch ein angehängtes E besonders kenntlich, denn es ist dies die erste Eliminationsgleichung, welche die Bestimmung von x (vergl. pag. 330) vermittelt. In die dritte Zeile kommen die mit b verbundenen Werthe $[bb]$, $[bc]$ ... $[bs]$ und man rückt hierbei um eine Verticalcolumne nach rechts ein, so dass die mit b verbundenen Buchstaben dieselben werden, die früher in denselben Verticalcolumnen mit a combinirt waren. In die erste Verticalcolumne der vierten Zeile setzt man $\log \frac{[ab]}{[aa]}$; dieser und alle in derselben Verticalcolumne enthaltenen Logarithmen müssen sorgfältig auf ihre Richtigkeit geprüft werden, da sich ein Fehler in denselben der Summencontrole leicht entzieht; ich habe diese wichtige Bemerkung deshalb im Schema hervorgehoben. Nun schreibt man diesen Logarithmus von $\frac{[ab]}{[aa]}$ auf den unteren Rand eines Zettelchens und addirt denselben der Reihe nach zu den Logarithmen von $[ab]$, $[ac]$ ... $[as]$, die alle in der zweiten Zeile stehen; indem man die Ziffern der beiden Logarithmen von vorn addirt, wird man das Hinschreiben der so entstehenden Logarithmen gänzlich vermeiden können, wenn man sofort die Zahlen aufsucht, und sie in die vierte Zeile und zwar in dieselbe Verticalcolumne, in der das Product gebildet wurde, einträgt. Es kommt also zu stehen:

$$\begin{array}{llcl}
\frac{[ab]}{[aa]}[ab] & \text{unter} & [bb] \\
\frac{[ab]}{[aa]}[ac] & \text{»} & [bc] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{[ab]}{[aa]}[as] & \text{unter} & [bs]\,.
\end{array}$$

	aa $\log aa$	ab $\log ab$	ac $\log ac$	ad $\log ad$	ae $\log ae$	af $\log af$	an $\log an$	as $\log as$	E
$\log \frac{ab}{aa}$ ·		bb $\frac{ab}{aa}\, ab$	bc $\frac{ab}{aa}\, ac$	bd $\frac{ab}{aa}\, ad$	be $\frac{ab}{aa}\, ae$	bf $\frac{ab}{aa}\, af$	bn $\frac{ab}{aa}\, an$	bs $\frac{ab}{aa}\, as$	
		$bb1$ $\log bb1$	$bc1$ $\log bc1$	$bd1$ $\log bd1$	$be1$ $\log be1$	$bf1$ $\log bf1$	$bn1$ $\log bn1$	$bs1$ $\log bs1$	1) ! E
$\log \frac{ac}{aa}$ ·			cc $\frac{ac}{aa}\, ac$	cd $\frac{ac}{aa}\, ad$	ce $\frac{ac}{aa}\, ae$	cf $\frac{ac}{aa}\, af$	cn $\frac{ac}{aa}\, an$	cs $\frac{ac}{aa}\, as$	
$\log \frac{bc1}{bb1}$ ·			$cc1$ $\frac{bc1}{bb1}\, bc1$	$cd1$ $\frac{bc1}{bb1}\, bd1$	$ce1$ $\frac{bc1}{bb1}\, be1$	$cf1$ $\frac{bc1}{bb1}\, bf1$	$cn1$ $\frac{bc1}{bb1}\, bn1$	$cs1$ $\frac{bc1}{bb1}\, bs1$	2)
			$cc2$ $\log cc2$	$cd2$ $\log cd2$	$ce2$ $\log ce2$	$cf2$ $\log cf2$	$cn2$ $\log cn2$	$cs2$ $\log cs2$	3) ! E
$\log \frac{ad}{aa}$ ·				dd $\frac{ad}{aa}\, ad$	de $\frac{ad}{aa}\, ae$	df $\frac{ad}{aa}\, af$	dn $\frac{ad}{aa}\, an$	ds $\frac{ad}{aa}\, as$	
$\log \frac{bd1}{bb1}$ ·				$dd1$ $\frac{bd1}{bb1}\, bd1$	$de1$ $\frac{bd1}{bb1}\, be1$	$df1$ $\frac{bd1}{bb1}\, bf1$	$dn1$ $\frac{bd1}{bb1}\, bn1$	$ds1$ $\frac{bd1}{bb1}\, bs1$	4)
$\log \frac{cd2}{cc2}$ ·				$dd2$ $\frac{cd2}{cc2}\, cd2$	$de2$ $\frac{cd2}{cc2}\, ce3$	$df2$ $\frac{cd2}{cc2}\, cf3$	$dn2$ $\frac{cd2}{cc2}\, cn2$	$ds2$ $\frac{cd2}{cc2}\, cs2$	5)
				$dd3$ $\log dd3$	$de3$ $\log de3$	$df3$ $\log df3$	$dn3$ $\log dn3$	$ds3$ $\log ds3$	6) ! E
$\log \frac{ae}{aa}$ ·					ee $\frac{ae}{aa}\, ae$	ef $\frac{ae}{aa}\, af$	en $\frac{ae}{aa}\, an$	es $\frac{ae}{aa}\, as$	
$\log \frac{be1}{bb1}$ ·					$ee1$ $\frac{be1}{bb1}\, be1$	$ef1$ $\frac{be1}{bb1}\, bf1$	$en1$ $\frac{be1}{bb1}\, bn1$	$es1$ $\frac{be1}{bb1}\, bs1$	7)
$\log \frac{ce2}{cc2}$ ·					$ee2$ $\frac{ce2}{cc2}\, ce2$	$ef2$ $\frac{ce2}{cc2}\, cf2$	$en2$ $\frac{ce2}{cc2}\, cn2$	$es2$ $\frac{ce2}{cc2}\, cs2$	8)
$\log \frac{de3}{dd3}$ ·					$ee3$ $\frac{de3}{dd3}\, de3$	$ef3$ $\frac{de3}{dd3}\, df3$	$en3$ $\frac{de3}{dd3}\, dn3$	$es3$ $\frac{de3}{dd3}\, ds3$	9)
					$ee4$ $\log ee4$	$ef4$ $\log ef4$	$en4$ $\log en4$	$es4$ $\log es4$	10) ! E
$\log \frac{af}{aa}$ ·		$\log \frac{an}{aa}$ ·	nn $\frac{an}{aa}\, an$	ns $\frac{an}{aa}\, as$		ff $\frac{af}{aa}\, af$	fn $\frac{af}{aa}\, an$	fs $\frac{af}{aa}\, as$	
$\log \frac{bf1}{bb1}$ ·		$\log \frac{bn1}{bb1}$ ·	$nn1$ $\frac{bn1}{bb1}\, bn1$	$ns1$ $\frac{bn1}{bb1}\, bs1$	16	$ff1$ $\frac{bf1}{bb1}\, bf1$	$fn1$ $\frac{bf1}{bb1}\, bn1$	$fs1$ $\frac{bf1}{bb1}\, bs1$	11
$\log \frac{cf2}{cc2}$ ·		$\log \frac{cn2}{cc2}$ ·	$nn2$ $\frac{cn2}{cc2}\, cn2$	$ns2$ $\frac{cn2}{cc2}\, cs2$	17	$ff2$ $\frac{cf2}{cc2}\, cf2$	$fn2$ $\frac{cf2}{cc2}\, cn2$	$fs2$ $\frac{cf2}{cc2}\, cs2$	12
$\log \frac{df3}{dd3}$ ·		$\log \frac{dn3}{dd3}$ ·	$nn3$ $\frac{dn3}{dd3}\, dn3$	$ns3$ $\frac{dn3}{dd3}\, ds3$	18	$ff3$ $\frac{df3}{dd3}\, df3$	$fn3$ $\frac{df3}{dd3}\, dn3$	$fs3$ $\frac{df3}{dd3}\, ds3$	13
$\log \frac{ef4}{ee4}$ ·		$\log \frac{en4}{ee4}$ ·	$nn4$ $\frac{en4}{ee4}\, en4$	$ns4$ $\frac{en4}{ee4}\, es4$	19	$ff4$ $\frac{ef4}{ee4}\, ef4$	$fn4$ $\frac{ef4}{ee4}\, en4$	$fs4$ $\frac{ef4}{ee4}\, es4$	14)
		$\log \frac{fn5}{ff5}$ ·	$nn5$ $\frac{fn5}{ff5}\, fn5$	$ns5$ $\frac{fn5}{ff5}\, fs5$	20	$ff5$ $\log ff5$	$fn5$ $\log fn5$	$fs5$	15) ! E
			$nn6$	$ns6$	21		$\log w$		

Probegleichungen.

1)	$[bs1] = [bb1] + [bc1] + [bd1] + [be1] + [bf1] + [bn1]$	!
2)	$[cs1] = [bc1] + [cc1] + [cd1] + [ce1] + [cf1] + [cn1]$	
3)	$[cs2] = [cc2] + [cd2] + [ce2] + [cf2] + [cn2]$	!
4)	$[ds1] = [bd1] + [cd1] + [dd1] + [de1] + [df1] + [dn1]$	
5)	$[ds2] = [cd2] + [dd2] + [de2] + [df2] + [dn2]$	
6)	$[ds3] = [dd3] + [de3] + [df3] + [dn3]$	!
7)	$[es1] = [be1] + [ce1] + [de1] + [ee1] + [ef1] + [en1]$	
8)	$[es2] = [ce2] + [de2] + [ee2] + [ef2] + [en2]$	
9)	$[es3] = [de3] + [ee3] + [ef3] + [en3]$	
10)	$[es4] = [ee4] + [ef4] + [en4]$	!
11)	$[fs1] = [bf1] + [cf1] + [df1] + [ef1] + [ff1] + [fn1]$	
12)	$[fs2] = [cf2] + [df2] + [ef2] + [ff2] + [fn2]$	
13)	$[fs3] = [df3] + [ef3] + [ff3] + [fn3]$	
14)	$[fs4] = [ef4] + [ff4] + [fn4]$	
15)	$[fs5] = [ff5] + [fn5]$	!
16)	$[ns1] = [bn1] + [cn1] + [dn1] + [en1] + [fn1] + [nn1]$	
17)	$[ns2] = [cn2] + [dn2] + [en2] + [fn2] + [nn2]$	
18)	$[ns3] = [dn3] + [en3] + [fn3] + [nn3]$	
19)	$[ns4] = [en4] + [fn4] + [nn4]$	
20)	$[ns5] = [fn5] + [nn5]$	
21)	$[ns6] = [nn6]$	!

Bei der Anwendung wird man sich in der Regel mit den mit einem Ausrufungszeichen versehenen Probegleichungen, bei denen sich alle Werthe in derselben Horizontalzeile befinden, begnügen können. Die mit E bezeichneten Werthreihen entsprechen den Eliminationsgleichungen, die mit einem ' versehenen Logarithmen müssen besonders nachgesehen werden, da sich ein Fehler in denselben leicht der Controle entzieht.

Zieht man nun die Zahlen dieser vierten Zeile von jenen der darüber stehenden dritten Zeile ab und setzt die so entstehenden Differenzwerthe in die fünfte Zeile, so hat man die Hilfsgrössen:

$$[bb1],\ [bc1],\ [bd1],\ [be1],\ [bf1],\ [bn1],\ [bs1]$$

erhalten. Das dieser Zeile angehängte Zeichen (1) weist auf die auf pag. 341 stehende Prüfungsgleichung hin, welche Bemerkung für dieses und die ähnlichen Anmerkungszeichen für die Folge hier hervorgehoben werden soll. Dieser Probe muss völlig innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung genügt werden.

Ich kann mir aber wohl sparen, den weiteren Vorgang der Rechnung auseinanderzusetzen, indem die bisherigen Andeutungen in Verbindung mit dem auf pag. 310 in extenso mitgetheilten Eliminationsschema wohl genügen werden, um die zweckmässige Anlage der Rechnung und die Bildung der nothwendigen Hilfsgrössen anschaulich zu machen. Ist die Elimination beendet, so wird man an die Bildung der Grösse $[nn6]$ schreiten, die wohl auch durch das Schema selbst hinreichend erläutert ist.

Ich werde nun die oben (pag. 323) ermittelten Coëfficienten der Normalgleichungen den hier gegebenen Vorschriften gemäss auflösen und glaube, dass ich mich hierbei weiterer Erläuterungen enthalten kann; um die Elimination nicht zu unsicher zu machen, habe ich mich fünfstelliger logarithmischer Tafeln bedient; der Vorschlag, der hier und da gemacht wurde, im Falle einer besonderen Unsicherheit der Auflösung grössere logarithmische Tafeln hierbei anzuwenden, muss als unzweckmässig bezeichnet werden, wie dies eine einfache Ueberlegung zeigt. Sind die Normalgleichungen nämlich mit Hilfe kleinerer Tafeln gebildet, so erhält man dann nur eine Lösung, die von der Unsicherheit dieser logarithmischen Rechnung abhängt. In der folgenden Rechnung sind die Eliminationsgleichungen durch ein angehängtes E und die aus den Coëfficienten der Normalgleichungen gebildeten Zeilen durch ein vorgesetztes Sternchen bezeichnet, ausserdem sind die dem Resultate entsprechenden Probegleichungen in der letzten Verticalcolumne neben den direct berechneten Werthen angesetzt:

x	y	z	t	u	w	n	s	Proben
+ 5.24850	− 1.74720	− 2.19540	+ 1.91120	− 1.19230	+ 0.00080	− 0.53990	+ 1.48570	
0.72003	0_n24234	0_n34151	0.28131	0_n07639	6.90309	9_n73231	0.17193	E
*	+ 1.88590	+ 0.80410	− 0.84540	+ 0.38540	− 0.00370	+ 1.44930	+ 1.92840	
9_n52231	+ 0.58164	+ 0.73083	− 0.63624	+ 0.39692	− 0.00027	+ 0.17973	− 0.49459	
	+ 1.30426	+ 0.07327	− 0.20916	− 0.01152	− 0.00343	+ 1.26957	+ 2.42299	+ 2.42299
	0.11537	8.86493	9_n32048	8_n06145	7_n53529	0.10365	0.38435	E
		+ 4.04400	− 0.23560	+ 0.34160	− 0.00720	+ 1.86810	+ 4.61960	
9_n62148		+ 0.91832	− 0.79945	+ 0.49873	− 0.00033	+ 0.22583	− 0.62146	
		+ 3.12568	+ 0.56385	− 0.15713	− 0.00687	+ 1.64227	+ 5.24106	
8.74956		+ 0.00412	− 0.01175	− 0.00065	− 0.00019	+ 0.07132	+ 0.13612	
		+ 3.12156	+ 0.57560	− 0.15648	− 0.00668	+ 1.57095	+ 5.10494	+ 5.10495
		0.49437	9.76012	9_n19446	7_n82478	0.19617	0.70799	E
			+ 3.66700	− 0.32200	− 0.00070	− 1.32770	+ 2.84680	
9.56128			+ 0.69597	− 0.43418	+ 0.00029	− 0.19660	+ 0.54101	
			+ 2.97103	+ 0.11218	− 0.00099	− 1.13110	+ 2.30579	
9_n20511			+ 0.03354	+ 0.00185	+ 0.00055	− 0.20359	− 0.38856	
			+ 2.93749	+ 0.11033	− 0.00154	− 0.92751	+ 2.69435	
9.26575			+ 0.10614	− 0.02885	− 0.00123	+ 0.28968	+ 0.94132	
			+ 2.83135	+ 0.13918	− 0.00031	− 1.21719	+ 1.75303	+ 1.75303
			0.45199	9.14358	6_n49136	0_n08536	0.24379	E
			*	+ 4.39830	+ 0.20490	+ 0.04630	+ 3.86220	
9_n35636				+ 0.27086	− 0.00018	+ 0.12265	− 0.33752	
				+ 4.12744	+ 0.20508	− 0.07635	+ 4.19972	
7_n94608				+ 0.00010	+ 0.00003	− 0.01121	− 0.02140	
				+ 4.12734	+ 0.20505	− 0.06514	+ 4.22112	
$8_n7\ 009$				+ 0.00784	+ 0.00033	− 0.07875	− 0.25591	
				+ 4.11950	+ 0.20472	+ 0.01361	+ 4.47703	
8.69159				+ 0.00684	− 0.00002	− 0.05983	+ 0.08617	
				+ 4.11266	+ 0.20474	+ 0.07344	+ 4.39086	+ 4.39084
		nn	ns	0.61412	9.31120	8.86593	0.64255	E
		+ 2.63220	+ 4.10710		+ 4.13280	− 0.02120	+ 4.30570	
6.18306	9_n01228	+ 0.05554	− 0.15283		0.00000	− 0.00008	+ 0.00023	
		+ 2.57666	+ 4.25993		+ 4.13280	− 0.02112	+ 4.30547	
7_n41992	9.98828	+ 1.23574	+ 2.35847		+ 0.00001	− 0.00334	− 0.00637	
		+ 1.34092	+ 1.90146		+ 4.13279	− 0.01778	+ 4.31184	
7_n33041	9.70180	+ 0.79062	+ 2.56918		+ 0.00001	− 0.00336	− 0.01092	
		+ 0.55030	− 0.66772		+ 4.13278	− 0.01442	+ 4.32276	
6_n03937	9_n63337	+ 0.52328	− 0.75363		0.00000	+ 0.00013	− 0.00019	
		+ 0.02702	+ 0.08591		+ 4.13278	− 0.01455	+ 4.32295	
8.69708	8.25181	+ 0.00131	+ 0.07841		+ 0.01019	+ 0.00366	+ 0.21859	
		+ 0.02571	+ 0.00750		+ 4.12259	− 0.01821	+ 4.10436	+ 4.10438
	7_n64514	+ 0.00008	− 0.01813		0.61517	8_n26031		E
		+ 0.02563	+ 0.02563			7_n64514		

Wie man sieht, stimmen alle Proben in sehr befriedigender Weise, ausserdem zeigt die starke Herabminderung der Fehlerquadrate von $+2.63220$ auf $+0.02563$, dass eine sehr wesentliche Verbesserung in der Darstellung der Beobachtungen erreicht werden wird.

§ 4. Bestimmung der Unbekannten aus den Eliminationsgleichungen.

Liegt blos die Aufgabe vor, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten zu ermitteln, ohne auf die Bestimmung der Unsicherheit derselben eingehen zu wollen, so wird es sich wohl am meisten empfehlen, durch successive Rücksubstitutionen in den vorliegenden Eliminationsgleichungen die Werthe der Unbekannten zu ermitteln; das Schema der Rechnung gestaltet sich hierfür wie folgt:

	$+[en4]$ $-w[ef4]$	$+[dn3]$ $-w[df3]$ $-u[de3]$	$+[cn2]$ $-w[cf2]$ $-u[ce2]$ $-t[cd2]$	$+[bn1]$ $-w[bf1]$ $-u[be1]$ $-t[bd1]$ $-z[bc1]$	$+[an]$ $-w[af]$ $-u[ae]$ $-t[ad]$ $-z[ac]$ $-y[ab]$
	$\Sigma(u)$ $\log\Sigma(u)$ $\log[ee4]$	$\Sigma(t)$ $\log\Sigma(t)$ $\log[dd3]$	$\Sigma(z)$ $\log\Sigma(z)$ $\log[cc2]$	$\Sigma(y)$ $\log\Sigma(y)$ $\log[bb1]$	$\Sigma(x)$ $\log\Sigma(x)$ $\log[aa]$
$\log w$	$\log u$	$\log t$	$\log z$	$\log y$	$\log x$

welches Schema wohl an sich verständlich ist; man hat hierbei nur zu beachten, dass die erste Zeile sofort hingeschrieben werden kann, die zweite Zeile aber mit Benützung des bereits im Eliminationsschema aufgenommenen Werthes von w; die dritte Zeile erhält man mit Hilfe des Werthes u, der durch die bisherigen Rechnungen bekannt ist u. s. f.; hierbei stellen die Zeichen Σ die Summen der übereinanderstehenden Werthe vor. Die erforderlichen Producte bildet man am einfachsten, indem man den Logarithmus der betreffenden Unbekannten auf den untersten Rand eines Zettels schreibt und denselben hierauf successive über die entsprechenden Logarithmen der Eliminationsgleichungen hält. Man hat hierbei zu beachten, dass man im Eliminationsschema Seite 340 bei dem untersten links vorspringenden Logarithmus zu beginnen und stets in derselben Verticalcolumne von einer der mit E bezeichneten Eliminationsgleichungen zur anderen nach aufwärts fortzurücken hat; dies wird sofort klar, wenn man sich die Eliminationsgleichungen ausgeschrieben hinstellt, nämlich:

$$
\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [af]w &= [an] \\
+ [bb1]y + [bc1]z + [bd1]t + [be1]u + [bf1]w &= [bn1] \\
+ [cc2]z + [cd2]t + [ce2]u + [cf2]w &= [cn2] \\
+ [dd3]t + [de3]u + [df3]w &= [dn3] \\
+ [ee4]u + [ef4]w &= [en4] \\
+ [ff5]w &= [fn5]\,.
\end{aligned}
$$

Zur Controle der Richtigkeit dieser Elimination kann man die Summe der vorstehenden Gleichungen benützen; es wird nämlich der folgenden Gleichung nach Einsetzung der Werthe der Unbekannten innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung genügt werden müssen:

$$\left.\begin{aligned} & [aa]x \\ & +\{[ab]+[bb1]\}y \\ & +\{[ac]+[bc1]+[cc2]\}z \\ & +\{[ad]+[bd1]+[cd2]+[dd3]\}t \\ & +\{[ae]+[be1]+[ce2]+[de3]+[ee4]\}u \\ & +\{[af]+[bf1]+[cf2]+[df3]+[ef4]+[ff5]\}w \end{aligned}\right| \begin{aligned} & =[an]+[bn1]+[cn2] \\ & +[dn3]+[en4]+[fn5]; \end{aligned} \qquad 1)$$

ich ziehe es jedoch vor, die Controle mit Hilfe des weiter unten angesetzten Verfahrens herzustellen, welches zwar etwas mehr Arbeit verursacht, aber dann besondere Vortheile bietet, wenn man die Gewichte der Unbekannten bestimmen will. Vorerst werde ich jedoch die Zahlen des obigen Beispieles hier anführen. Nimmt man das obige Schema zum Muster, so ergeben die Eliminationsgleichungen des vorangehenden Paragraphen die Werthe:

	+ 0.07344	— 1.21719	+ 1.57095	+ 1.26957	— 0.53990
	+ 0.00090	— 0.00252	+ 0.24796	— 0.04276	+ 1.52297
		0.00000	+ 0.00283	— 0.09011	+ 1.28121
			— 0.00003	+ 0.00021	+ 0.82334
				— 0.00002	+ 0.02155
					0.00000
	+ 0.07434	1.21971	+ 1.82171	+ 1.13689	+ 3.10917
	8.87122	0_n08626	0.26048	0.05572	0.49264
	0.61412	0.45199	0.49437	0.11537	0.72003
7_n64514	8.25710	9_n63427	9.76611	9.94035	9.77261

Die in der letzten Reihe stehenden Werthe sind also die Logarithmen der nunmehr ermittelten Unbekannten w, u, t, z, y und x. Hierbei hat man aber zu beachten, dass in Folge des Homogenmachens (vergl. pag. 321) diese Unbekannten mit der oben angenommenen Fehlereinheit durchzumultipliciren sind, und durch die bezüglichen Homogenitätsfactoren zu dividiren wären; ich werde jedoch später auf diesen Umstand nochmals zurückkommen und die entsprechenden Transformationen vornehmen.

Es soll nun jenes Verfahren vorgenommen werden, welches zur unabhängigen Bestimmung einer jeden einzelnen Unbekannten führt; es scheint dasselbe, falls man die Gewichte der Unbekannten bestimmen will, worüber der nächste Paragraph handeln wird, das zweckmässigste zu sein; da ausserdem dieses Verfahren in der That sehr wenig Mehrarbeit verursacht, so möchte ich es stets zur Controle der vorstehend entwickelten Werthe empfehlen, auch wenn man nicht die Gewichte der Unbekannten selbst bestimmen will. Nimmt man die Gleichungen 1), 2), 3), 4), u. 5) (pag. 330, 332, 333) des vorangehenden Paragraphen vor, so gestalten sich dieselben nach einer einfachen Umsetzung:

$$\left.\begin{array}{r}
x + \frac{[ab]}{[aa]}\,y + \frac{[ac]}{[aa]}\,z + \frac{[ad]}{[aa]}\,t + \frac{[ae]}{[aa]}\,u + \frac{[af]}{[aa]}\,w = \frac{[an]}{[aa]} \\
y + \frac{[bc\,1]}{[bb\,1]}\,z + \frac{[bd\,1]}{[bb\,1]}\,t + \frac{[be\,1]}{[bb\,1]}\,u + \frac{[bf\,1]}{[bb\,1]}\,w = \frac{[bn\,1]}{[bb\,1]} \\
z + \frac{[cd\,2]}{[cc\,2]}\,t + \frac{[ce\,2]}{[cc\,2]}\,u + \frac{[cf\,2]}{[cc\,2]}\,w = \frac{[cn\,2]}{[cc\,2]} \\
t + \frac{[de\,3]}{[dd\,3]}\,u + \frac{[df\,3]}{[dd\,3]}\,w = \frac{[dn\,3]}{[dd\,3]} \\
u + \frac{[ef\,4]}{[ee\,4]}\,w = \frac{[en\,4]}{[ee\,4]} \\
w = \frac{[fn\,5]}{[ff\,5]}
\end{array}\right\} \quad 2)$$

Multiplicirt man mit Ausschluss der ersten Gleichung die folgenden der Reihe nach mit den unbestimmten Factoren $A_1, A_2, \ldots A_5$ und addirt dann diese neuen Gleichungen zu der ersten in 2), so kann man diesen unbestimmten Factoren die Bedingung unterlegen, dass nach der Addition der Reihe nach die Coëfficienten der Unbekannten y, z, t, u und w der Null gleich werden; diesen Bedingungen gemäss wird man daher für die Bestimmung dieser Coëfficienten die Gleichungen aufstellen können:

$$\left.\begin{array}{l}
0 = \frac{[ab]}{[aa]} + A_1 \\
0 = \frac{[ac]}{[aa]} + \frac{[bc\,1]}{[bb\,1]}\,A_1 + A_2 \\
0 = \frac{[ad]}{[aa]} + \frac{[bd\,1]}{[bb\,1]}\,A_1 + \frac{[cd\,2]}{[cc\,2]}\,A_2 + A_3 \\
0 = \frac{[ae]}{[aa]} + \frac{[be\,1]}{[bb\,1]}\,A_1 + \frac{[ce\,2]}{[cc\,2]}\,A_2 + \frac{[de\,3]}{[dd\,3]}\,A_3 + A_4 \\
0 = \frac{[af]}{[aa]} + \frac{[bf\,1]}{[bb\,1]}\,A_1 + \frac{[cf\,2]}{[cc\,2]}\,A_2 + \frac{[df\,3]}{[dd\,3]}\,A_3 + \frac{[ef\,4]}{[ee\,4]}\,A_4 + A_5
\end{array}\right\} \quad 3)$$

Diese Gleichungen lassen in der That die successive Bestimmung der Coëfficienten in sehr einfacher Weise durchführen; sind diese einmal ermittelt, so hat die directe Bestimmung von x keine Schwierigkeit, denn man hat offenbar:

$$x = \frac{[an]}{[aa]} + \frac{[bn\,1]}{[bb\,1]}\,A_1 + \frac{[cn\,2]}{[cc\,2]}\,A_2 + \frac{[dn\,3]}{[dd\,3]}\,A_3 + \frac{[en\,4]}{[ee\,4]}\,A_4 + \frac{[fn\,5]}{[ff\,5]}\,A_5\,.$$

Um eine ähnliche Gleichung für die folgende Unbekannte zu erhalten, wird man in den Gleichungen 2) die dritte mit B_2, die vierte mit B_3 u. s. f. multipliciren und dann das Resultat dieser Multiplication zur zweiten Gleichung addiren; legt man den B Coëfficienten wieder die Eigenschaft unter, dass die in dieser Summe auftretenden Factoren der Unbekannten z, t, u und w verschwinden sollen, so müssen dieselben den Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{array}{l}
0 = \frac{[bc\,1]}{[bb\,1]} + B_2 \\
0 = \frac{[bd\,1]}{[bb\,1]} + \frac{[cd\,2]}{[cc\,2]}\,B_2 + B_3 \\
0 = \frac{[be\,1]}{[bb\,1]} + \frac{[ce\,2]}{[cc\,2]}\,B_2 + \frac{[de\,3]}{[dd\,3]}\,B_3 + B_4 \\
0 = \frac{[bf\,1]}{[bb\,1]} + \frac{[cf\,2]}{[cc\,2]}\,B_2 + \frac{[df\,3]}{[dd\,3]}\,B_3 + \frac{[ef\,4]}{[ee\,4]}\,B_4 + B_5
\end{array}\right\} \quad 4)$$

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, erhält man als weitere Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
o &= \frac{[cd2]}{[cc2]} + C_3 \\
o &= \frac{[ce2]}{[cc2]} + \frac{[de3]}{[dd3]}\, C_3 + C_4 \\
o &= \frac{[cf2]}{[cc2]} + \frac{[df3]}{[dd3]}\, C_3 + \frac{[ef4]}{[ee4]}\, C_4 + C_5
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

$$\left.\begin{aligned}
o &= \frac{[de3]}{[dd3]} + D_4 \\
o &= \frac{[df3]}{[dd3]} + \frac{[ef4]}{[ee4]}\, D_4 + D_5
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

$$o = \frac{[ef4]}{[ee4]} + E_5. \quad 7)$$

Hat man sich die bezüglichen Coëfficienten den vorstehenden Gleichungen 3), 4), 5), 6) und 7) gemäss bestimmt, so findet man offenbar für die Unbekannten die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{[an]}{[aa]} + \frac{[bn1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[cn2]}{[cc2]} A_2 + \frac{[dn3]}{[dd3]} A_3 + \frac{[en4]}{[ee4]} A_4 + \frac{[fn5]}{[ff5]} A_5 \\
y &= \frac{[bn1]}{[bb1]} + \frac{[cn2]}{[cc2]} B_2 + \frac{[dn3]}{[dd3]} B_3 + \frac{[en4]}{[ee4]} B_4 + \frac{[fn5]}{[ff5]} B_5 \\
z &= \frac{[cn2]}{[cc2]} + \frac{[dn3]}{[dd3]} C_3 + \frac{[en4]}{[ee4]} C_4 + \frac{[fn5]}{[ff5]} C_5 \\
t &= \frac{[dn3]}{[dd3]} + \frac{[en4]}{[ee4]} D_4 + \frac{[fn5]}{[ff5]} D_5 \\
u &= \frac{[en4]}{[ee4]} + \frac{[fn5]}{[ff5]} E_5 \\
w &= \frac{[fn5]}{[ff5]}
\end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Die Rechnung nach diesen Formeln gestaltet sich ausserordentlich einfach und bequem, wenn man dieselbe in der folgenden Weise ausführt; ich werde wieder zunächst das Rechnungsschema hinschreiben und dann durch den erläuternden Text dasselbe näher ausführen. In die erste Zahlenreihe setze man die Logarithmen der Grössen: $\frac{[ab]}{[aa]}$, $\frac{[ac]}{[aa]}$ .... $\frac{[af]}{[aa]}$ mit umgekehrten Zeichen, in die zweite eine Verticalcolumne einrückend $\log\left(-\frac{[bc1]}{[bb1]}\right) \ldots \log\left(-\frac{[bf1]}{[bb1]}\right)$ u. s. f. Alle diese Logarithmen findet man schon nur mit Abänderung des Zeichens in der ersten Verticalcolumne des Eliminationsschemas (pag. 340) mit *) bezeichnet, und zwar in einer ganz analogen Anordnung, so dass kaum das Hinschreiben dieser ersten Zahlengruppe nöthig wäre; doch ziehe ich es vor, diese kleine Mehrarbeit vorzunehmen, weil sich in dieser Anordnung die weiteren Operationen sehr einfach gestalten. Nun beginnt die Rechnung der A-Coëfficienten; zu diesem Ende schlägt man mit Ausschluss des ersten Logarithmus die Zahlen zu den Logarithmen der ersten Reihe auf, bringt sie in die erste Reihe unter den ersten stärker markirten Horizontalstrich und setzt

1	2	3	4	5
$\log\left(-\frac{[ab]}{[aa]}\right)$	$\log\left(-\frac{[ac]}{[aa]}\right)$ $\log\left(\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}\right)$	$\log\left(-\frac{[ad]}{[aa]}\right)$ $\log\left(-\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}\right)$ $\log\left(-\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}\right)$	$\log\left(\frac{[ae]}{[aa]}\right)$ $\log\left(\frac{[be\cdot1]}{[bb\cdot1]}\right)$ $\log\left(-\frac{[ce\cdot2]}{[cc\cdot2]}\right)$ $\log\left(-\frac{[de\cdot3]}{[dd\cdot3]}\right)$	$\log\left(\frac{[af]}{[aa]}\right)$ $\log\left(-\frac{[bf\cdot1]}{[bb\cdot1]}\right)$ $\log\left(-\frac{[cf\cdot2]}{[cc\cdot2]}\right)$ $\log\left(-\frac{[df\cdot3]}{[dd\cdot3]}\right)$ $\log\left(-\frac{[ef\cdot4]}{[ee\cdot4]}\right)$
	$-\frac{[ac]}{[aa]}$ $-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}\,A_1$	$-\frac{[ad]}{[aa]}$ $-\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}\,A_1$ $-\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}\,A_2$	$-\frac{[ae]}{[aa]}$ $-\frac{[be\cdot1]}{[bb\cdot1]}\,A_1$ $-\frac{[ce\cdot2]}{[cc\cdot2]}\,A_2$ $-\frac{[de\cdot3]}{[dd\cdot3]}\,A_3$	$\frac{[af]}{[aa]}$ $-\frac{[bf\cdot1]}{[bb\cdot1]}\,A_1$ $-\frac{[cf\cdot2]}{[cc\cdot2]}\,A_2$ $-\frac{[df\cdot3]}{[dd\cdot3]}\,A_3$ $-\frac{[ef\cdot4]}{[ee\cdot4]}\,A_4$
$\log A_1$	A_2 $\log A_2$	A_3 $\log A_3$	A_4 $\log A_4$	A_5 $\log A_5$
		$-\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}$ $-\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}\,B_2$	$-\frac{[be\cdot1]}{[bb\cdot1]}$ $-\frac{[ce\cdot2]}{[cc\cdot2]}\,B_2$ $-\frac{[de\cdot3]}{[dd\cdot3]}\,B_3$	$-\frac{[bf\cdot1]}{[bb\cdot1]}$ $-\frac{[cf\cdot2]}{[cc\cdot2]}\,{}_2$ $-\frac{[df\cdot3]}{[dd\cdot3]}\,B_3$ $-\frac{[ef\cdot4]}{[ee\cdot4]}\,B_4$
	$\log B_2$	B_3 $\log B_3$	B_4 $\log B_4$	B_5 $\log B_5$
			$-\frac{[ce\cdot2]}{[cc\cdot2]}$ $-\frac{[de\cdot3]}{[dd\cdot3]}\,C_3$	$-\frac{[cf\cdot2]}{[cc\cdot2]}$ $-\frac{[df\cdot3]}{[dd\cdot3]}\,C_3$ $-\frac{[ef\cdot4]}{[ee\cdot4]}\,C_4$
		$\log C_3$	C_4 $\log C_4$	C_5 $\log C_5$
				$\frac{[df\cdot3]}{[dd\cdot3]}$ $-\frac{[ef\cdot4]}{[ee\cdot4]}\,D_4$
			$\log D_4$	D_5 $\log D_5$
				$\log E_5$

sofort an der entsprechenden Stelle in der Verticalcolumne 1 den Werth von log A_1 an, der schon in der ersten Zeile enthalten ist (es ist $A_1 = - \frac{[ab]}{[aa]}$). Diesen Logarithmus bringt man auf den unteren Rand eines Zettels und hält nun diesen über die Logarithmen der zweiten Reihe und schreibt die so erhaltenen Producte in die zweite Zeile der A-Gruppe. Die Addition der zwei Werthe in der zweiten Verticalcolumne gibt den Werth A_2, zu dem sofort der Logarithmus aufgeschlagen und an entsprechender Stelle eingetragen wird. Diesen Logarithmus nun schreibt man wieder auf den unteren Rand eines Zettels und hält diesen über die Logarithmen der dritten Zeile; die so gebildeten Producte werden nun in die dritte Zeile der A-Gruppe eingetragen. Die drei Werthe der dritten Verticalcolumne ergeben den Werth von A_3. Analog das Verfahren fortsetzend, gelangt man schliesslich bis zum Werthe A_5. Die B, C, D und E-Werthe werden ganz in der gleichen Weise gebildet, nur denkt man sich die Logarithmen der ersten Zeile für die Ermittelung von B, die zwei ersten Zeilen für die Ermittelung von C u. s. f. weggestrichen. Durch dieses einfache Verfahren, dessen Mechanismus man sich bald zu eigen machen wird, werden die erforderlichen Factoren leicht erhalten.

Nun schreibt man sich auf den unteren Rand eines Zettels der Reihe nach die in der zweiten Verticalcolumne des Eliminationsschemas (pag. 340) mit dem Zeichen (') versehenen Logarithmen von $\frac{[an]}{[aa]}$, $\frac{[bn1]}{[bb1]}$ .... $\frac{[fn5]}{[ff5]}$, man erhält so einen Zahlenwerth mehr als Verticalcolumnen in dem vorstehenden Schema sind; hält man nun diesen Zettel so über die Reihe der A-Werthe, dass der Logarithmus von $\frac{[fn5]}{[ff5]}$ über den Logarithmus von A_5 zu stehen kommt, schlägt zu $\frac{[an]}{[aa]}$ die Zahl auf, dann die Zahlen der Producte $A_1 \frac{[bn1]}{[bb1]}$, $A_2 \frac{[cn2]}{[cc2]}$ u. s. f., und bringt diese Werthe in eine Verticalcolumne, die mit x überschrieben ist, so ist die Summe dieser Werthe der Werth der Unbekannten x. Nun rückt man den Zettel über die log B-Reihe, ohne seine Lage gegen die Verticalcolumnen zu ändern und beachtet nur den ersten Werth, der keinen Logarithmus unter sich stehen hat; zu diesem schlägt man wieder den Werth auf und bildet die Producte $B_2 \frac{[cn2]}{[cc2]}$, $B_3 \frac{[dn3]}{[dd3]}$ u. s. f., die man in die mit y überschriebene Verticalcolumne bringt; die Summe dieser Werthe ist die Unbekannte y, und in analoger Weise bilden sich die übrigen Unbekannten.

Das Schema der Rechnung stellt sich wie folgt:

x	y	z	t	u	w
$\frac{a\,n}{a\,a}$	$\frac{b\,n\,1}{b\,b\,1}$	$\frac{c\,n\,2}{c\,c\,2}$	$\frac{d\,n\,3}{d\,d\,3}$	$\frac{e\,n\,4}{e\,e\,4}$	$\frac{f\,n\,5}{f\,f\,5}$
$\frac{b\,n\,1}{b\,b\,1}$ A_1	$\frac{c\,n\,2}{c\,c\,2}$ B_2	$\frac{d\,n\,3}{d\,d\,3}$ C_3	$\frac{e\,n\,4}{e\,e\,4}$ D_4	$\frac{f\,n\,5}{f\,f\,1}$ E_5	
$\frac{c\,n\,2}{c\,c\,2}$ A_2	$\frac{d\,n\,3}{d\,d\,3}$ B_3	$\frac{e\,n\,4}{e\,e\,4}$ C_4	$\frac{f\,n\,5}{f\,f\,5}$ D_5		
$\frac{d\,n\,3}{d\,d\,3}$ A_3	$\frac{e\,n\,4}{e\,e\,4}$ B_4	$\frac{f\,n\,5}{f\,f\,5}$ C_5			
$\frac{e\,n\,4}{e\,e\,4}$ A_4	$\frac{f\,n\,5}{f\,f\,5}$ B_5				
$\frac{f\,n\,5}{f\,f\,5}$ A_5					
x log x	y log y	z log z	t log t	u log u	w log w

Benützt man wieder, um diese Schemen durch Zahlenbeispiele zu erläutern, die im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Eliminationsgleichungen, so stellt sich die Rechnung, wie folgt (vergl. Schema pag. 348):

	1	2	3	4	5
	9.52231	9.62148 8_n74956	9_n56128 9.20511 9_n26575	9.35636 7.94608 8.70009 8_n69159	6_n18306 7.41992 7.33041 6.03937 8_n69708
		+ 0.41829 — 0.01870	— 0.36415 + 0.05338 — 0.07368	+ 0.22717 + 0.00294 + 0.02003 + 0.01890	— 0.00015 + 0.00088 + 0.00086 — 0.00004 — 0.01339
A	9.52231	+ 0.39959 9.60162	— 0.38445 9_n58484	+ 0.26904 9.42981	— 0.01184 8_n07335
			+ 0.16037 + 0.01036	+ 0.00883 — 0.00282 — 0.00839	+ 0.00263 — 0.00012 + 0.00002 + 0.00012
B		8_n74956	+ 0.17073 9.23231	— 0.00238 7_n37658	+ 0.00265 7.42325
				+ 0.05013 + 0.00906	+ 0.00214 — 0.00002 — 0.00295
C			9_n26575	+ 0.05919 8.77225	— 0.00083 6_n91908
					+ 0.00011 + 0.00245
D				8_n69159	+ 0.00256 7.40824
E					8_n69708

Die Bestimmung der Unbekannten aus den A, B, C, D und E-Coefficienten stellt sich wie folgt (vergl. Schema pag. 350):

x	y	z	t	u	w
− 0.10287	+ 0.97338	+ 0.50327	− 0.42990	+ 0.01786	
+ 0.32403	− 0.02827	+ 0.07927	− 0.00088	+ 0.00022	
+ 0.20110	− 0.07340	+ 0.00106	− 0.00001		
+ 0.16528	− 0.00004	0.00000			
+ 0.00480	− 0.00001				
+ 0.00005					
+ 0.59239	+ 0.87166	+ 0.58360	− 0.43079	+ 0.01808	
9.77261	9.94035	9.76612	9_n63427	8.25720	7_n64514

Vergleicht man die hier erhaltenen Werthe der Unbekannten mit den vorher durch die successiven Substitutionen (pag. 345) bestimmten, so wird man eine befriedigende Uebereinstimmung wahrnehmen; der grössere Unterschied im Logarithmus von u erklärt sich aus der Kleinheit der Zahl und beeinflusst in der letzteren in der That kaum die fünfte Stelle. Es ist also ohne grosse Mühe eine scharfe Controle für die Werthe der Unbekannten hergestellt und es kann nun an eine durchgreifende Prüfung der ganzen Rechnung geschritten werden, die man niemals verabsäumen sollte. Es wurde oben (pag. 343) durch die Elimination für die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate ($nn6$) der Werth 0.02563 gefunden; würde man die für die Unbekannten erhaltenen Werthe in die früher gefundenen homogenen Bedingungsgleichungen (pag. 321, 322) einsetzen, so würde man für die übrig bleibenden Fehler erhalten:

$$v_1 = n_1 - (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + e_1 u + f_1 w)$$
$$v_2 = n_2 - (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + e_2 u + f_2 w)$$
$$v_3 = n_3 - (a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t + e_3 u + f_3 w)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

deren Quadratsumme mit der obigen Zahl innerhalb der Unsicherheit der Rechnung stimmen müsste. Man kann aber die Prüfung noch umfassender machen, wenn man auf die ursprünglichen nicht homogenen Bedingungsgleichungen (pag. 320, 321) zurückgeht, wobei man aber zu beachten hat, dass die durch diese letzteren gefundenen Werthe von v mit der Quadratwurzel des Gewichtes, oder was bequemer ist, die Quadrate der Fehler mit dem zugehörigen Gewichte zu multipliciren sind, um jene Quadratsumme zu erhalten, die durch die Elimination erhalten würde. Multiplicirt man daher die oben gefundenen Werthe der Unbekannten mit der Fehlereinheit, deren Logarithmus oben (pag. 321) mit 1.5688 angenommen wurde und dividirt dieselben durch die daselbst angenommenen Homogenitätsfactoren, deren Logarithmen beziehungsweise 0.33893, 4.02489, 0.55422, 0.50920, 0.20387, 0.15635 sind, so sind die Logarithmen der ursprünglichen Unbekannten, alle Grössen in Bogensekunden angesetzt:

$$\log \partial L' = 1.0025$$
$$\log \partial \mu = 7.1842$$
$$\log \partial \Phi = 0.7807$$
$$\log \partial \Psi = 0_n6939$$
$$\log \partial ☊' \sin i' = 9.6220$$
$$\log \partial i' = 9_n0576 .$$

Schreibt man sich auf den unteren Rand eines Papieres die Logarithmen dieser Grössen mit veränderten Zeichen hin und setzt in die erste Zeile des folgenden Schemas die ursprünglichen Fehler n und darunter die Producte der Unbekannten in die diesbezüglichen Coëfficienten (pag. 320, 321), so wird man durch die Summirung der über einander stehenden Werthe zur Kenntniss der übrig bleibenden Fehler in den einzelnen Coordinaten gelangen; man erhält so die folgenden Resultate:

Rectascensionen.

	No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	n	−37″05	−12″73	+10″29	− 9″87	− 0″05	+22″28	+27″09	+17″07	+ 1″69
Correct. v.	$\partial L'$	−20.49	−15.70	− 9.67	−19.68	−17.54	−10.02	− 9.89	−14.71	−21.95
„ „	$\partial \mu$	+32.29	+22.46	+12.60	+ 7.12	+ 3.81	+ 0.84	− 0.43	− 2.58	− 6.99
„ „	$\partial \Phi$	+21.62	− 7.01	−12.98	+21.47	− 4.73	−13.40	− 6.64	+11.39	+14.97
„ „	$\partial \Psi$	+ 3.48	+14.00	− 0.59	+ 0.08	+15.96	+ 0.31	− 9.64	−11.18	+14.65
„ „	$\partial ☊'$	− 0.13	+ 0.08	− 0.11	− 0.12	+ 0.10	− 0.11	+ 0.03	+ 0.07	0.00
„ „	$\partial i'$	0.00	+ 0.03	0.00	+ 0.01	+ 0.02	0.00	− 0.03	+ 0.03	− 0.04
	v	− 0.28	+ 1.13	− 0.46	− 0.99	− 2.43	− 0.10	+ 0.49	+ 0.17	+ 2.32
	v^2	0.08	1.28	0.21	0.98	5.90	0.01	0.24	0.03	5.38

Declinationen.

	No	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	n	−13″43	+ 3″39	− 5″19	− 7″56	− 0″64	− 8″24	− 7″35	+ 4″13	− 1″30
Correct. v.	$\partial L'$	− 8.35	+ 2.97	+ 3.96	− 7.92	+ 1.77	+ 4.11	+ 2.44	− 2.88	− 6.40
„ „	$\partial \mu$	+13.18	− 4.24	− 5.17	+ 2.88	− 0.38	− 0.36	+ 0.09	− 0.51	− 2.02
„ „	$\partial \Phi$	+ 8.87	+ 1.42	+ 5.31	+ 8.67	+ 0.51	+ 5.48	+ 1.73	+ 2.25	+ 4.56
„ „	$\partial \Psi$	+ 1.24	− 2.64	+ 0.15	− 0.13	− 1.61	− 0.21	+ 2.34	− 2.17	+ 4.14
„ „	$\partial ☊'$	+ 0.67	− 0.23	− 0.57	+ 0.66	− 0.20	− 0.58	− 0.36	+ 0.30	+ 0.45
„ „	$\partial i'$	0.00	+ 0.15	− 0.01	− 0.03	+ 0.16	0.00	− 0.12	− 0.15	+ 0.13
	v	+ 2.18	+ 0.82	− 1.52	− 3.43	− 0.39	+ 0.20	− 1.23	+ 0.97	− 0.44
	v^2	4.75	0.67	2.31	11.76	0.15	0.04	1.51	0.94	0.19

addirt man nun diese Fehlerquadrate, nachdem man dieselben mit ihren Gewichten durchmultiplicirt hat, was im vorliegenden Falle wenig Mühe macht, da alle Bedingungsgleichungen das Gewicht 1 haben, mit Ausnahme der Gleichungen No. 3 und 12, denen nur das Gewicht 0.5 zugeschrieben ist, so findet sich:

$$[vv] = 35''17 .$$

Aus der Zahl $[nn6] = 0.02563$ resultirt aber, wenn man dieselbe mit dem Quadrate der angenommenen Fehlereinheit multiplicirt:

$$[nn6] = 35''18$$

was eine befriedigende Uebereinstimmung ist, und eine durchgreifende Controle aller bisherigen Rechnungen abgibt.

§ 3. Bestimmung der Gewichte und der mittleren Fehler der Unbekannten.

Im Falle, dass eine Unbekannte durch directe Beobachtungen bestimmt wurde, war die Auswerthung des Gewichtes des arithmetischen Mittels sehr einfach, indem dasselbe unmittelbar gleich war der Summe der Gewichte der Beobachtungen; viel schwieriger wird aber die Bestimmung der Gewichte in dem nunmehr vorliegenden Falle, wenn durch die Beobachtungen mehre Unbekannte gleichzeitig bestimmt werden.

Seien die Gewichte der Unbekannten der Reihe nach durch P_x, P_y, P_z, ... bezeichnet, ferner sollen die Beobachtungswerthe n_1, n_2, n_3, ... gleiches Gewicht haben. Es ist nämlich oben (pag. 314) gezeigt worden, dass man durch die Multiplication einer jeden Bedingungsgleichung mit der Quadratwurzel des zugehörigen Gewichtes derselben ein System von Beobachtungen von verschiedenen Gewichten auf ein solches mit gleichen Gewichten zurückführen kann; wären also die vorgelegten Beobachtungen von differenter Genauigkeit, so wird vorausgesetzt, dass durch das eben erwähnte Verfahren die Zurückführung auf gleiche Gewichte bewerkstelligt sei.

Die Unbekannte x und ebenso die anderen, werden sich offenbar nach dem linearen Charakter der in Betracht gezogenen Funktionen in eine lineare Abhängigkeit von den Beobachtungsfehlern bringen lassen; man wird daher, ohne vorerst auf die Bedeutung der Coëfficienten näher einzugehen, schreiben dürfen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \ldots \\ y &= \beta_1 n_1 + \beta_2 n_2 + \beta_3 n_3 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Ist ε der mittlere Fehler einer Beobachtung mit der Gewichtseinheit, und sind ε_x, ε_y, ε_z, ... die mittleren Fehler der Unbekannten, so lassen sich zunächst sofort die Relationen aufstellen (vergl. pag. 311):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots} = \varepsilon \sqrt{[\alpha\alpha]} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon \sqrt{[\beta\beta]} \\ &\vdots \\ P_x &= \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_x^2} = \frac{1}{[\alpha\alpha]} \\ P_y &= \frac{1}{[\beta\beta]} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Man hat daher zur Bestimmung des Gewichtes der Unbekannten P_x nur die Bedeutung der Summe $[\alpha\alpha]$ näher zu ermitteln. Hierzu bieten die Normalgleichungen ein geeignetes Mittel; dieselben sind (vergl. pag. 317):

$$\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \ldots &= [a\,n] \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + \ldots &= [b\,n] \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + \ldots &= [c\,n] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Denkt man sich nun ein analoges Gleichungssystem von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\ Q_1 + [ab]\ Q_2 + [ac]\ Q_3 + \ldots = 1 \\ [ab]\ Q_1 + [bb]\ Q_2 + [bc]\ Q_3 + \ldots = 0 \\ [ac]\ Q_1 + [bc]\ Q_2 + [cc]\ Q_3 + \ldots = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}\right\} \quad 3)$$

so erhält man durch Auflösung dieses Systemes die Werthe der Grösse Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots$; addirt man nun die Normalgleichungen, nachdem man dieselben der Reihe nach mit Q_1, Q_2, Q_3 .. durchmultiplicirt hat, so erhält man mit Rücksicht auf die in 3) aufgestellten Bedingungen nach der Addition:

$$x = [an]\ Q_1 + [bn]\ Q_2 + [cn]\ Q_3 + \ldots$$

Löst man nun in dieser Gleichung die Summen auf und ordnet nach den Grössen n, so werden die Coëfficienten der verschiedenen n mit den α-Coëfficienten der Gleichung 1) identisch werden und man wird durch die Gleichsetzung erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = a_1\, Q_1 + b_1\, Q_2 + c_1\, Q_3 + \ldots \\ \alpha_2 = a_2\, Q_1 + b_2\, Q_2 + c_2\, Q_3 + \ldots \\ \alpha_3 = a_3\, Q_1 + b_3\, Q_2 + c_3\, Q_3 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 4)$$

Um nun die geforderte Bestimmung von $[\alpha\alpha]$ zu erhalten, denke man sich vorerst diese Gleichungen links und rechts mit a_1, a_2, a_3 .. multiplicirt und addirt, dann folgt sofort mit Rüchsicht auf die erste Gleichung und 3):

$$\alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \alpha_3\, a_3 + \ldots = [\alpha a] = 1 \quad 5)$$

ebenso wird die Multiplication mit b, c u. s. w. ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2 + \alpha_3\, b_3 + \ldots = [\alpha b] = 0 \\ \alpha_1\, c_1 + \alpha_2\, c_2 + \alpha_3\, c_3 + \ldots = [\alpha c] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 6)$$

weiter gibt aber die Multiplication der Gleichungen 4) mit den zugehörigen α und Addition derselben mit Rücksicht auf die Relationen 5) und 6);

$$[\alpha\alpha] = Q_1 \quad 7)$$

womit also die Bestimmung des reciproken Werthes des Gewichtes von x erreicht ist, da ja die Bestimmung von Q_1 aus den Gleichungen 3) keinen weiteren Schwierigkeiten unterworfen ist. Wollte man in analoger Weise die Bestimmung der Werthe $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ ... durchführen, so würde man nun in den Gleichungen 3) für die erstere Bestimmung in der zweiten Gleichung rechts vom Gleichheitszeichen die Einheit zu setzen haben, für die anderen Gleichungen aber die Null einsetzen, für die Bestimmung von $[\gamma\gamma]$ würde man die dritte Gleichung der Einheit gleich setzen u. s. f. Man gelangt dadurch zu dem Schlusse, dass man den reciproken Werth des Gewichtes einer jeden Unbekannten leicht erhält, wenn man in die Normalgleichungen der Reihe nach rechts vom Gleichheitszeichen für x die erste

Gleichung, für y die zweite Gleichung u. s. f. der Einheit, die übrigen Coëfficienten rechts vom Gleichheitszeichen der Null gleich setzt und die Gleichungen diesen Bedingungen entsprechend μ mal auflöst, wobei μ die Anzahl der Unbekannten vorstellt; der an Stelle der betreffenden Unbekannten auftretende Werth ist der gesuchte. So einfach scheinbar diese Methode ist, so würde dieselbe in der eben hingestellten Form doch recht beschwerlich ausfallen, weil man das Gleichungssystem μ mal aufzulösen hätte; es lassen sich aber Methoden der Rechnung angeben, welche diese Arbeit mit Benützung der bereits berechneten Coëfficienten auf eine höchst unbeträchtliche reduciren.

Dehnt man die folgenden Entwickelungen auf den Fall von 6 Unbekannten aus, so hat man zur Bestimmung des Gewichtes von x nach dem Vorausgehenden in den Normalgleichungen zu setzen:

$$[an] = 1\,,\quad [cn] = 0\,,\quad [en] = 0$$
$$[bn] = 0\,,\quad [dn] = 0\,,\quad [fn] = 0\,;$$

beachtet man, dass nach der vorliegenden Methode der Gewichtsbestimmung die Auswerthung des reciproken Werthes des Gewichtes durch die successive Elimination sich genau so gestaltet, wie die Ermittelung des Werthes von x, so sieht man sofort, dass nur jene Hilfsgrössen Abänderungen erfahren werden, die mit n verbunden erscheinen, die übrigen bleiben unverändert; man wird also zu setzen haben, wenn man die bei der directen Bestimmung der Unbekannten (pag. 346, 347) benützten Hilfsgrössen einführt:

$$\left.\begin{aligned}
&[bn1] = -\frac{[ab]}{[aa]} = A_1\,,\quad [cn2] = -\frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[bc1]}{[bb1]}A_1 = A_2\,,\\
&\qquad\qquad\qquad [dn3] = -\frac{[ad]}{[aa]} - \frac{[bd1]}{[bb1]}A_1 - \frac{[cd2]}{[cc2]}A_2 = A_3\\
&[cn1] = -\frac{[ac]}{[aa]}\,,\quad [dn2] = -\frac{[ad]}{[aa]} - \frac{[bd1]}{[bb1]}A_1\,,\\
&\qquad\qquad\qquad [en3] = -\frac{[ae]}{[aa]} - \frac{[be1]}{[bb1]}A_1 - \frac{[ce2]}{[cc2]}A_2\\
&[dn1] = -\frac{[ad]}{[aa]}\,,\quad [en2] = -\frac{[ae]}{[aa]} - \frac{[be1]}{[bb1]}A_1\,,\\
&\qquad\qquad\qquad [fn3] = -\frac{[af]}{[aa]} - \frac{[bf1]}{[bb1]}A_1 - \frac{[cf2]}{[cc2]}A_2\\
&[en1] = -\frac{[ae]}{[aa]}\,,\quad [fn2] = -\frac{[af]}{[aa]} - \frac{[bf1]}{[bb1]}A_1\,.\\
&[fn1] = -\frac{[af]}{[aa]}\,,\\
&[en4] = -\frac{[ae]}{[aa]} - \frac{[be1]}{[bb1]}A_1 - \frac{[ce2]}{[cc2]}A_2 - \frac{[de3]}{[dd3]}A_3 = A_4\\
&[fn4] = -\frac{[af]}{[aa]} - \frac{[bf1]}{[bb1]}A_1 - \frac{[cf2]}{[cc2]}A_2 - \frac{[df3]}{[dd3]}A_3\\
&[fn5] = -\frac{[af]}{[aa]} - \frac{[bf1]}{[bb1]}A_1 - \frac{[cf2]}{[cc2]}A_2 - \frac{[df3]}{[dd3]}A_3 - \frac{[ef4]}{[ee4]}A_4 = A_5\,.
\end{aligned}\right\}\quad 8$$

Oben (pag. 347) war für die directe Bestimmung von x gefunden worden die Gleichung:

$$x = \frac{[an]}{[aa]} + \frac{[bn1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[cn2]}{[cc2]} A_2 + \frac{[dn3]}{[dd3]} A_3 + \frac{[en4]}{[ee4]} A_4 + \frac{[fn5]}{[ff5]} A_5 .$$

Man hat also in dem vorliegenden Falle gemäss den Gleichungen 8) (pag. 355) in diesen Ausdruck statt $[an]$, $[bn1]$, $[cn2]$, $[dn3]$, $[en4]$, $[fn5]$ beziehungsweise die Werthe 1, A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 zu setzen und erhält also zur Bestimmung des reciproken Werthes des Gewichtes von x die Gleichung:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{1}{[aa]} + \frac{A_1 A_1}{[bb1]} + \frac{A_2 A_2}{[cc2]} + \frac{A_3 A_3}{[dd3]} + \frac{A_4 A_4}{[ee4]} + \frac{A_5 A_5}{[ff5]} . \tag{9}$$

Will man das Gewicht von y bestimmen, so hat man zu setzen:

$$[an] = 0, \quad [bn] = 1, \quad [cn] = 0, \quad [dn] = 0, \quad [en] = 0, \quad [fn] = 0 ,$$

oder was auf dasselbe hinauskommt:

$$[bn1] = 1, \quad [dn1] = 0, \quad [fn1] = 0,$$
$$[cn1] = 0, \quad [en1] = 0,$$

verfährt man nun in ganz ähnlicher Weise wie oben, so wird man leicht finden, dass für die Bestimmung des Gewichtes von y, welches durch P_y bezeichnet ist, resultirt:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{[bb1]} + \frac{B_2 B_2}{[cc2]} + \frac{B_3 B_3}{[dd3]} + \frac{B_4 B_4}{[ee4]} + \frac{B_5 B_5}{[ff5]} .$$

Zur Bestimmung des Gewichtes von z wird man zu setzen haben:

$$[cn2] = 1 \qquad [en2] = 0$$
$$[dn2] = 0, \qquad [fn2] = 0,$$

von t:

$$[dn3] = 1, \qquad [fn3] = 0$$
$$[en3] = 0,$$

von u:

$$[en4] = 1, \qquad [fn4] = 0$$

von w:

$$[fn5] = 1 .$$

Es bestimmen sich also die reciproken Werthe der Gewichte der einzelnen Unbekannten durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{P_x} &= \frac{1}{[aa]} + \frac{A_1 A_1}{[bb1]} + \frac{A_2 A_2}{[cc2]} + \frac{A_3 A_3}{[dd3]} + \frac{A_4 A_4}{[ee4]} + \frac{A_5 A_5}{[ff5]} \\
\frac{1}{P_y} &= \frac{1}{[bb1]} + \frac{B_2 B_2}{[cc2]} + \frac{B_3 B_3}{[dd3]} + \frac{B_4 B_4}{[ee4]} + \frac{B_5 B_5}{[ff5]} \\
\frac{1}{P_z} &= \frac{1}{[cc2]} + \frac{C_3 C_3}{[dd3]} + \frac{C_4 C_4}{[ee4]} + \frac{C_5 C_5}{[ff5]} \\
\frac{1}{P_t} &= \frac{1}{[dd3]} + \frac{D_4 D_4}{[ee4]} + \frac{D_5 D_5}{[ff5]} \\
\frac{1}{P_u} &= \frac{1}{[ee4]} + \frac{E_5 E_5}{[ff5]} \\
\frac{1}{P_w} &= \frac{1}{[ff5]}
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus den Gleichungen 10) erhält man also mit Hilfe der bereits vorhandenen Hilfsgrössen in sehr einfacher Weise die reciproken Werthe der Gewichte, wobei man zu beachten haben wird, dass dies eigentlich jene Werthe sind, deren man zur Bestimmung der mittleren Fehler bedarf, da ja die Quadrate der mittleren Fehler umgekehrt proportional den Gewichten sind. Ausserdem ist es klar, dass von einer Gewichtsbestimmung ganz wohl die Rede sein kann, wenn die Anzahl der Bedingungsgleichungen der Anzahl der Unbekannten gleich ist.

Die Bestimmung der mittleren Fehler der Unbekannten wird also sofort thunlich sein, wenn der mittlere Fehler einer Beobachtung mit dem Gewichte 1 bekannt ist; es sollen nun die zur Bestimmung der letzteren Grösse nöthigen Ableitungen vorgenommen werden, wobei die schon früher berechnete Grösse $[vv] = [nn]$ ihre Verwendung findet.

Es sei der mittlere Fehler einer Beobachtung mit der Gewichtseinheit ε und es wird vorausgesetzt, dass alle Bedingungsgleichungen das gleiche Gewicht haben, was stets dadurch erreicht wird (vergl. pag. 314), dass man vor Beginn der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate alle vorhandenen Bedingungsgleichungen mit der Quadratwurzel des zugehörigen Gewichtes durchmultiplicirt; das Gewicht einer solchen Gleichung soll nun der Einheit gleich sein, also der mittlere Fehler derselben ε; bezeichnet man wieder mit $v_1, v_2, v_3 \ldots$ die Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung nach erfolgter Ausgleichung, mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$ die wirklichen Beobachtungsfehler, sind $x, y, z \ldots$ die durch die Ausgleichungsrechnungen gefundenen Werthe der Unbekannten, $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z \ldots$ die wahren Werthe derselben, so hat man offenbar (vergl. pag. 315) die zwei Gleichungssysteme:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - n_1 = - v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - n_2 = - v_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots - n_3 = - v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 11)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 (x + \delta x) + b_1 (y + \delta y) + c_1 (z + \delta z) + \ldots - n_1 = - \Delta_1 \\ a_2 (x + \delta x) + b_2 (y + \delta y) + c_2 (z + \delta z) + \ldots - n_2 = - \Delta_2 \\ a_3 (x + \delta x) + b_3 (y + \delta y) + c_3 (z + \delta z) + \ldots - n_3 = - \Delta_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 12)$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen 11) der Reihe nach mit $v_1, v_2, v_3 \ldots$ und addirt, so erhält man, da die Relation (vergl. pag. 337) besteht:

$$[av] = [bv] = [cv] = \ldots = 0 ,$$

sofort:

$$[vn] = [vv] \qquad 13)$$

Verfährt man ebenso mit den Gleichungen 12), so findet sich andererseits:

$$[vn] = [v\Delta] . \qquad 14)$$

Die Vereinigung der Resultate der Gleichungen 13) und 14) ergibt:

$$[vv] = [v\Delta] . \qquad 15)$$

Um nun die Summe der thatsächlichen Fehlerquadrate $[\varDelta\varDelta]$ mit der minimalen $[vv]$ mit Hilfe der Fehler der Unbekannten in Verbindung zu bringen, multiplicirt man die Gleichungen 11) und 12) der Reihe nach mit $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ ... und erhält so durch Addition:

$$[a\varDelta]x + [b\varDelta]y + [c\varDelta]z + \ldots - [n\varDelta] = -[v\varDelta] = -[vv]$$
$$[a\varDelta](x + \delta x) + [b\varDelta](y + \delta y) + [c\varDelta](z + \delta z) + \ldots - [n\varDelta] = -[\varDelta\varDelta]$$

Die Subtraction dieser Gleichungen ergibt:

$$[\varDelta\varDelta] = [vv] - [a\varDelta]\,\delta x - [b\varDelta]\,\delta y - [c\varDelta]\,\delta z - \ldots \tag{16}$$

wobei offenbar nach der Idee des mittleren Fehlers zu setzen sein wird:

$$[\varDelta\varDelta] = m\varepsilon\varepsilon\,, \tag{17}$$

wenn m die Anzahl der Bedingungsgleichungen vorstellt. Die Bestimmung von $[\varDelta\varDelta]$ aus der Gleichung 16) hätte keine weitere Schwierigkeit, wenn die Fehler der für die Unbekannten gefundenen Werthe bekannt wären, eine Bestimmung die offenbar unthunlich ist; doch soll sofort gezeigt werden, welche Werthe man diesen Fehlern nach den Principien der Wahrscheinlichkeit beimessen kann. Multiplicirt man die Gleichungen 12) der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3 ... und addirt dieselben so findet sich leicht:

$$\left.\begin{aligned} &[aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots - [an] \\ &+ [aa]\,\delta x + [ab]\,\delta y + [ac]\,\delta z + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} = -[a\varDelta] \tag{18}$$

Nun ist aber die erste Zeile in diesem Ausdrucke der Bestimmung der Normalgleichungen entsprechend der Null gleich, man hat daher, wenn man die analogen Resultate hinschreibt, die die Multiplication mit den b, c .. Coëfficienten ergibt:

$$\left.\begin{aligned} &[aa]\,\delta x + [ab]\,\delta y + [ac]\,\delta z + \ldots + [a\varDelta] = 0 \\ &[ab]\,\delta x + [bb]\,\delta y + [bc]\,\delta z + \ldots + [b\varDelta] = 0 \\ &[ac]\,\delta x + [bc]\,\delta y + [cc]\,\delta z + \ldots + [c\varDelta] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Die Gleichungen 19) sind wie Normalgleichungen zusammengesetzt, nur stehen an Stelle der Unbekannten die Fehler derselben und anstatt n die Grössen $-\varDelta$; es wird daher die Bestimmung dieser Fehler durch die Grössen $-\varDelta$ in derselben Weise vorgenommen werden dürfen, wie die Bestimmung der Unbekannten aus n und man wird deshalb die in der Gleichung 1) pag. 353 auftretenden α, β, γ ... Coëfficienten ohne Abänderung benützen dürfen und die Relationen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= -\{\alpha_1\varDelta_1 + \alpha_2\varDelta_2 + \alpha_3\varDelta_3 + \ldots\} \\ \delta y &= -\{\beta_1\varDelta_1 + \beta_2\varDelta_2 + \beta_3\varDelta_3 + \ldots\} \\ \delta z &= -\{\gamma_1\varDelta_1 + \gamma_2\varDelta_2 + \gamma_3\varDelta_3 + \ldots\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 16) ein, so wird man, wenn man die Summe $[a\varDelta]$ auflöst, für die einzelnen Glieder erhalten:

$$\left.\begin{array}{l}
-[a\Delta]\delta x = (\alpha_1\Delta_1 + \alpha_2\Delta_2 + \alpha_3\Delta_3 + \ldots)(\alpha_1\Delta_1 + \alpha_2\Delta_2 + \alpha_3\Delta_3 + \ldots) \\
-[b\Delta]\delta y = (b_1\Delta_1 + b_2\Delta_2 + b_3\Delta_3 + \ldots)(\beta_1\Delta_1 + \beta_2\Delta_2 + \beta_3\Delta_3 + \ldots) \\
-[c\Delta]\delta z = (c_1\Delta_1 + c_2\Delta_2 + c_3\Delta_3 + \ldots)(\gamma_1\Delta_1 + \gamma_2\Delta_2 + \gamma_3\Delta_3 + \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad 21)$$

Man wird vor Allem behaupten können, dass diese Producte nothwendig positiv sein müssen, denn die Constanten sind so bestimmt, dass $[vv]$ ein Minimum ist; jede von der durch die Normalgleichung erhaltenen Bestimmung der Unbekannten abweichende Bestimmung wird daher diese Fehlerquadratsumme vermehren müssen, woraus unmittelbar mit Berücksichtigung der Gleichung 16) die aufgestellte Behauptung bestätigt wird.

Führt man nun die in 21) angezeigten Multiplicationen durch und beschränkt sich auf die erste Gleichung allein, indem die übrigen in gleicher Weise behandelt werden können, so kann das Resultat dieser Multiplication in der folgenden Weise hingeschrieben werden:

$$-[a\Delta]\delta x = a_1\alpha_1\Delta_1\Delta_1 + a_2\alpha_2\Delta_2\Delta_2 + a_3\alpha_3\Delta_3\Delta_3 + \ldots + \Sigma q(\Delta_p\Delta_r)$$

wobei unter den Zeichen Σ alle jene Producte zusammengefasst gedacht erscheinen, die verschiedenen Fehlern angehören, während die ersteren Glieder die Quadrate dieser Fehler enthalten; setzt man nun für $\Delta_1\Delta_1$, $\Delta_2\Delta_2$, $\Delta_3\Delta_3$ .. ihre mittleren Fehlerquadrate $\varepsilon\varepsilon$ und beachtet, dass nach Gleichung 5) (pag. 354) ist:

$$[a\alpha] = 1,$$

so erhält man:

$$-[a\Delta]\delta x = \varepsilon\varepsilon + \Sigma q(\Delta_p\Delta_r);$$

der erste Theil rechter Hand wird als Quadrat nothwendig positiv sein, also der obigen Forderung, dass $-[a\Delta]\delta x$ positiv ist, genügen; im letzteren Theile wird aber wegen der Combination der verschiedenen Fehler mit einander, und da positive und negative Fehler die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, die angezeigte Summe bald positive bald negative Werthe erhalten, die aber im Allgemeinen gegen das erstere Glied klein sein werden; man darf daher im Durchschnitte annehmen, dass ist

$$-[a\Delta]\delta x = \varepsilon\varepsilon;$$

durch ganz ähnliche Schlüsse erhält man die Relationen:

$$-[b\Delta]\delta y = -[c\Delta]\delta z = \ldots = \varepsilon\varepsilon.$$

Setzt man diese Relationen in die Gleichung 16) ein, so erhält man also, wenn man mit μ die Anzahl der Unbekannten bezeichnet, mit Rücksicht auf 17):

$$m\varepsilon\varepsilon = [vv] + \mu\varepsilon\varepsilon$$

in welcher Gleichung m die Anzahl der Bedingungsgleichungen vorstellt; bestimmt man daraus ε, so findet sich:

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{m-\mu}} \qquad 22)$$

womit die verlangte Bestimmung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit erlangt ist. Die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers nach dieser Formel zeigt, dass

an eine solche nur gedacht werden kann, wenn mehr Bedingungsgleichungen vorhanden sind, als die Anzahl der Unbekannten beträgt. Verbindet man diese so gewonnenen Werthe von ε mit den durch die Gleichung 10 (pag. 356) bestimmten Gewichten, so erhält man die mittleren Fehler der Unbekannten bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_x}} \\ \varepsilon_y &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_y}} \\ \varepsilon_z &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_z}} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

Indem somit die letzte gestellte Aufgabe erledigt erscheint, wird es wieder angemessen erscheinen, die Rechnungsschemen anzugeben und durch ein Beispiel zu erläutern. Zur Berechnung der Formeln 10 wird man sich in das Schema in der unmittelbar ersichtlichen Weise die Logarithmen der Quadrate der bereits ermittelten Hilfsgrössen eintragen, auf den unteren Rand eines Papieres die Complemente der Logarithmen von $[aa]$, $[bb1]$, $[cc2]$, $[dd3]$, $[ee4]$, $[ff5]$ aufschreiben und diese Logarithmen über die A^2 Zeile halten, so dass $\log\frac{1}{[ff5]}$ über $\log A_5^2$ zu stehen kommt; hierbei wird der $\log\frac{1}{[aa]}$ über die Zahlen des Schemas hinausragen; zu diesem letzteren Logarithmus wird man die Zahl aufschlagen und unter dieselbe in eine Vertikalcolumne die übrigen Produkte der Horizontalzeile bringen, die Summe dieser Zahlen ist der reciproke Werth des Gewichtes von x; nun rückt man das Papier vertikal um eine Horizontalzeile herab, schlägt zum ersten nach links vorstehenden Logarithmus die Zahl und die übrigen Produkte auf und bringt alles wieder in eine Vertikalcolumne, die Summe dieser Werthe ist $\frac{1}{P_y}$ u. s. f.; das Schema stellt sich also wie folgt:

	1	2	3	4	5
	$\log A_1^2$	$\log A_2^2$	$\log A_3^2$	$\log A_4^2$	$\log A_5^2$
		$\log B_2^2$	$\log B_3^2$	$\log B_4^2$	$\log B_5^2$
			$\log C_3^2$	$\log C_4^2$	$\log C_5^2$
				$\log D_4^2$	$\log D_5^2$
					$\log E_5^2$
$\frac{1}{[aa]}$	$\frac{1}{[bb1]}$	$\frac{1}{[cc2]}$	$\frac{1}{[dd3]}$	$\frac{1}{[ee4]}$	
$\frac{A_1A_1}{[bb1]}$	$\frac{B_2B_2}{[cc2]}$	$\frac{C_3C_3}{[dd3]}$	$\frac{D_4D_4}{[ee4]}$	$\frac{E_5E_5}{[ff5]}$	
$\frac{A_2A_2}{[cc2]}$	$\frac{B_3B_3}{[dd3]}$	$\frac{C_4C_4}{[ee4]}$	$\frac{D_5D_5}{[ff5]}$		
$\frac{A_3A_3}{[dd3]}$	$\frac{B_4B_4}{[ee4]}$	$\frac{C_5C_5}{[ff5]}$			
$\frac{A_4A_4}{[ee4]}$	$\frac{B_5B_5}{[ff5]}$				
$\frac{A_5A_5}{[ff5]}$					
$1 : P_x$	$1 : P_y$	$1 : P_z$	$1 : P_t$	$1 : P_u$	
$\log(1 : P_x)$	$\log(1 : P_y)$	$\log(1 : P_z)$	$\log(1 : P_t)$	$\log(1 : P_u)$	$\log(1 : P_w)$

Die Fortsetzung des oben gegebenen Rechnungsbeispieles gibt also mit Rücksicht auf das obige Schema:

	9.04462	9.20324 7.49912	9.16968 8.46462 8.53150	8.85962 4.75316 7.54450 7.38318	6.14670 4.84650 3.83816 4.81648 7.39416
+0.19053 +0.08496 +0.05115 +0.05220 +0.01760 +0.00003	+0.76670 +0.00101 +0.01029 +0.00000 +0.00000	+0.32035 +0.01201 +0.00085 +0.00000	+0.35319 +0.00059 +0.00000	+0.24316 +0.00060	
+0.39647 9.5982	+0.77800 9.8910	+0.33321 9.5227	+0.35378 9.5487	+0.24376 9.3870	9.3848

Die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate ist (vergl. pag. 343):

$$[vv] = [nn6] = 0.02563 .$$

Da im vorliegenden Falle $m = 18$ und $\mu = 6$ ist, so findet sich der mittlere Fehler einer Bedingungsgleichung nach der Formel (23) (pag. 360):

$$\log \varepsilon = 8.6047 .$$

Will man diesen mittleren Fehler in Bogensekunden kennen, so wird man dieses so gefundene ε mit der Fehlereinheit, deren Logarithmus oben mit 1.5088 angenommen wurde, zu multipliciren haben und es findet sich also:

$$\varepsilon = \pm 1''712 ;$$

will man nun die Unsicherheit, d. h. den mittleren Fehler der Elemente selbst kennen, so wird man zu beachten haben, dass die vorliegende Auflösung nicht die Unbekannten selbst gibt, sondern Unbekannte, die in einer linearen Relation zu den ersteren stehen; die diesbezüglichen Factoren wurden oben (pag. 321) angenommen (die Coëfficienten sind logarithmisch angesetzt):

$$x = 0.33893\ \partial L' , \quad t = 0.50920\ \partial \Psi$$
$$y = 4.02480\ \partial \mu , \quad u = 0.20387\ \partial \Omega' \sin i'$$
$$z = 0.55422\ \partial \Phi , \quad w = 0.15035\ \partial i'$$

man wird also die Quadratwurzeln der gefundenen Reciproken der Gewichte mit ε zu multipliciren und durch die diesbezüglichen Homogenitätscoëfficienten zu dividiren haben, um die mittleren Fehler der Elemente zu erhalten, und mit Benützung der vorstehenden Zahlen finden:

mittlerer Fehler von $\partial L' = \pm 0''404$
» » » $\partial \mu = \pm 0.000143$
» » » $\partial \Phi = \pm 0.276$
» » » $\partial \Psi = \pm 0.315$
» » $\partial \Omega' \sin i' = \pm 0.529$
» » » $\partial i' = \pm 0.588$.

§ 6. Behandlung der vorgelegten Aufgabe im Falle, dass die Auflösung der Normalgleichungen besonderen Unsicherheiten unterworfen ist.

Die in den vorausgehenden Paragraphen gegebenen Vorschriften bedürfen unter Umständen einer etwas veränderten Behandlung, wenn nämlich die Auflösung der Normalgleichungen besondere Unsicherheiten bietet; man erkennt diese Unsicherheiten, wenn man nicht schon vor Beginn der Lösung von diesem Umstande Kenntniss hat, sofort daran, dass der erste Coëfficient einer oder mehrer Eliminationsgleichungen sehr klein wird; es sind diese Coëfficienten oben mit den Symbolen $[aa]$, $[bb1]$, $[cc2]$, $[dd3]$, ... identificirt worden. Diese Coëfficienten müssen, wie man dies aus ihrer Entstehung sofort ableitet (vergl. pag 331), nothwendig positiv sein, es kann aber in Fällen besonderer Unsicherheit, wo dann der fragliche Coëfficient unter die Grenze der Sicherheit der Rechnung tritt, der paradoxe Fall eintreten, dass dieser Coëfficient thatsächlich negativ gefunden wird. Die Ursache dieser Erscheinung ist oben (pag. 332) erklärt worden, als bedingt durch das nahe proportionale Verhältniss zweier oder mehrer Coëfficientenreihen. Ist der Zusammenhang zwischen den Unbekannten und den Beobachtungen ein völlig linearer, so kann dem eben bemerkten Nachtheile dadurch begegnet werden, dass man die ganze Rechnung auf eine grössere Anzahl von Decimalen, als im Endresultate verlangt werden, anlegt; doch macht diese Ausdehnung der Rechnung auf mehr Decimalen die Arbeit bei den zahlreichen Multiplicationen sehr mühsam und zeitraubend. Bei der Anwendung auf die in dem vorliegenden Werke auftretenden Probleme hat man aber niemals mit solchen linearen Functionen zu thun, so dass das eben in Vorschlag gebrachte Verfahren wenig Aussicht auf Erfolg hätte, denn die in Anwendung gebrachten Differentialquotienten zwischen den Incrementen der Unbekannten und den beobachteten Werthen werden bei so bedeutenden Aenderungen nicht constant angenommen werden dürfen. Man wird aber hieraus die im Allgemeinen zu wenig beachtete Bemerkung ableiten, dass man die Wahl der Unbekannten des Problemes so vorzunehmen hat, dass der Zusammenhang zwischen den Aenderungen derselben und den Beobachtungen ein möglichst linearer wird; hierfür können aber keine allgemeinen Methoden gegeben werden, und man wird von Fall zu Fall für das vorgelegte Problem die entsprechendsten Hilfsmittel einzuführen trachten. So viel kann man aber im Allgemeinen bemerken, dass man durch die Lösung des Problemes unter Voraussetzung der Linearität der Funktionen den gesuchten Resultaten näher kommen wird; trifft diese Annäherung nicht hinreichend zu, so wird die Anwendung der mit Hilfe des zuletzt gewonnenen Resultates neu berechneten Differentialquotienten eine abermalige Verbesserung finden lassen, welches Verfahren fortgesetzt im Allgemeinen eine mehr minder rasche Convergenz zeigen wird. Man wird aber leicht bemerken, dass dieser Vorgang viel an Kürze zu wünschen übrig lassen wird, denn man hat für jede Verbesserung die Rechnungen ganz vom Anfang an neu durchzuführen; die in diesem Werke

angeführten Methoden sind jedoch so gewählt, dass man wohl nur in sehr seltenen Fällen auf dieses beschwerliche Verfahren zurückgeführt wird.

Man wird meist schon bei Beginn der Rechnungen theils durch anderweitig gewonnene Erfahrungen, theils aus theoretischen Betrachtungen wissen können, ob in dem vorgelegten Falle besondere Unsicherheiten in der Lösung des Problemes zu erwarten sind; so wird z. B. die Bestimmung der Bahnelemente eines kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition meist in zwei Elementen eine besondere Unsicherheit hervortreten lassen, aus zwei Oppositionen in einem; die Bestimmung einer Kometenbahn aus den Beobachtungen einer Erscheinung wird im Allgemeinen meist nur eine Unbekannte besonders unsicher erscheinen lassen. Man wird sich hierbei klar zu machen haben, dass diese Unsicherheit, wenn nicht die Wahl der Unbekannten besonders zweckmässig vorgenommen werden kann, sich meist auf die übrigen Unbekannten erstreckt, indem sich diese als Functionen des unsicheren Elementes darstellen lassen; die Bestimmung der übrigen Elemente erscheint sofort sicher, wenn man eine Relation einführt, die die Unsicherheit in dem fraglichen Elemente aufhebt. Bei Bahnbestimmungen werden aber solche, die Unsicherheit behebende Relationen selten genug herbeigeschafft werden können, wenn nicht anderweitige neue, der Zeit nach weit abstehende Beobachtungen herangezogen werden können; doch wird zum Beispiel der Umstand, dass die meisten Kometen nahezu parabolische Bahnen haben, benützt werden können, bei der Lösung des Problemes in diesem Falle $e = 1$ zu setzen; es wird durch diese Specialisirung in den meisten Fällen die Unsicherheit in der Auffindung der Elemente behoben.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen will ich nun noch auf die Methode eingehen, die man im Falle einer besonderen Unsicherheit in der Auflösung der Normalgleichungen anwenden kann, um so weit als thunlich Resultate zu erlangen, die den Principien der Wahrscheinlichkeit gemäss bestimmt sind. Es ist klar, dass, da im Allgemeinen zu dieser Lösung keine neuen theoretischen Bedingungen eingeführt werden können und dürfen, eigentlich das Bestreben nur dahin gerichtet werden muss, die Auflösung der Normalgleichungen derartig einzurichten, dass der Unsicherheit der Rechnung der möglichst geringe Einfluss eingeräumt wird. Ich werde wieder, wie oben, voraussetzen, dass sechs Unbekannte zu bestimmen seien, von denen zwei einer besonderen Unsicherheit unterworfen sind; es wird diese letztere Beschränkung für die vorliegenden Zwecke ausreichend sein und die Zurückführung auf den einfacheren Fall, wo nur eine Unbekannte unsicher bestimmt erscheint, sich leicht machen lassen. Man wird vorerst die Rechnung so anlegen, dass die voraussichtlich mit besonderen Unsicherheiten behafteten zwei Unbekannten als die letzten erscheinen, was meist a priori entschieden werden kann; wenn dies nicht möglich wäre, so wird eine vorläufige Lösung der Normalgleichung die gewünschte Aufklärung geben; ich setze also voraus, dass die Bestimmung der Unbekannten u und w besonderen Unsicherheiten unterworfen ist; es werden demnach in der vollständigen Elimination die Coëfficienten $[ee4]$ und $[ff5]$ ausserordentlich klein. Ich hebe hier nochmals hervor, dass sich diese Unsicherheit gewöhnlich auch

den anderen Unbekannten in verschiedenem Maasse mittheilt. Unter den eben gemachten Voraussetzungen wird also die Bildung der Eliminationsgleichungen bis zur fünften Gleichung (Elimination von u) keine Unsicherheit bieten; man wird deshalb ohne Bedenken nach der bisherigen Methode die folgenden Eliminationsgleichungen bilden können:

$$\left.\begin{array}{r} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [af]w = [an] \\ [bb1]y + [bc1]z + [bd1]t + [be1]u + [bf1]w = [bn1] \\ [cc2]z + [cd2]t + [ce2]u + [cf2]w = [cn2] \\ [dd3]t + [de3]u + [df3]w = [dn3] \end{array}\right\} \quad 1)$$

Diese Eliminationsgleichungen werden aber offenbar die Unbekannten als Funktionen von u und w darstellen lassen, durch successive Substitution oder durch irgend ein zweckmässiges Eliminationsverfahren, indem hier die vier ersten Unbekannten die Formen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} t = (\alpha t) + (\beta t)u + (\gamma t)w \\ z = (\alpha z) + (\beta z)u + (\gamma z)w \\ y = (\alpha y) + (\beta y)u + (\gamma y)w \\ x = (\alpha x) + (\beta x)u + (\gamma x)w \end{array}\right\} \quad 2)$$

wobei jetzt die in runden Klammern stehenden Coëfficienten von Fall zu Fall bekannte Grössen sind. Man wird zu 2) bemerken können, dass, wofern man auf eine Bestimmung der Unbekannten u und w verzichtet, und dieselben der Null gleich setzt, die erste verticale Coëfficientenreihe die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten unter der gemachten Voraussetzung ergibt. Andererseits wird die Grösse der β und γ Coëfffcienten die aus der Unsicherheit der Elemente u und w entstehende Unsicherheit in den anderen Elementen aufweisen, wobei häufig der Fall eintreten wird, dass einer oder mehre dieser Coëfficienten klein werden; man wird daraus den Schluss ableiten dürfen, dass in diesem Falle für das betreffende Element die Unsicherheit von u und w ohne wesentlichen Nachtheil ist. Hat man für u und w in der That die unsichersten Elemente gesetzt, so wird keiner der β und γ Coëfficienten die Einheit überschreiten; sollte dies aber doch der Fall sein, so deutet dieser Umstand darauf hin, dass man dieses Element hätte als letztes wählen sollen, doch wird dies keinen wesentlichen Nachtheil für die Rechnung haben, so lange nicht ein solcher Coëfficient die Einheit um ein Vielfaches überschreitet.

Die Bestimmung dieser in 2) auftretenden Coëfficienten muss sorgfältig controlirt werden, da diese Coëfficienten die Grundlage für alle späteren Rechnungen abgeben. Indem vorausgesetzt ist, dass diese durch die Methode der unmittelbaren Substitution erhalten sind, kann zu deren Controle in sehr übersichtlicher Weise mit Hilfe der bereits oben (pag. 346, 347) eingeführten A, B, C . . . Coëfficienten eine nochmalige Bestimmung erhalten werden; man findet leicht, wenn man beachtet, dass die mit dem Index 5 versehenen Coëfficienten sich der Voraussetzung nach einer sicheren Berechnung entziehen:

$$\left.\begin{aligned}
(\alpha x) &= \frac{[an]}{[aa]} + \frac{[bn1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[cn2]}{[cc2]} A_2 + \frac{[dn3]}{[dd3]} A_3 \\
(\beta x) &= A_4 \\
(\gamma x) &= A_5 + \frac{[cf4]}{[cc4]} A_1 = - \left\{ \frac{[af]}{[aa]} + \frac{[bf1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[cf2]}{[cc2]} A_2 + \frac{[df3]}{[dd3]} A_3 \right\} \\
(\alpha y) &= \frac{[bn1]}{[bb1]} + \frac{[cn2]}{[cc2]} B_2 + \frac{[dn3]}{[dd3]} B_3 \\
(\beta y) &= B_4 \\
(\gamma y) &= - \left\{ \frac{[bf1]}{[bb1]} + \frac{[cf2]}{[cc2]} B_2 + \frac{[df3]}{[dd3]} B_3 \right\} \\
(\alpha z) &= \frac{[cn2]}{[cc2]} + \frac{[dn3]}{[dd3]} C_3 \\
(\beta z) &= C_4 \\
(\gamma z) &= - \left\{ \frac{[cf2]}{[cc2]} + \frac{[df3]}{[dd3]} C_3 \right\} \\
(\alpha t) &= \frac{[dn3]}{[dd3]} \\
(\beta t) &= D_4 \\
(\gamma t) &= - \frac{[df3]}{[dd3]}
\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Substituirt man nun die (in 2) (pag. 364) erhaltenen und durch 3) controlirten Werthe der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen, so erhalten die letzteren die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
(\alpha_1) + (\beta_1)\, u + (\gamma_1)\, w &= n_1 \\
(\alpha_2) + (\beta_2)\, u + (\gamma_2)\, w &= n_2 \\
(\alpha_3) + (\beta_3)\, u + (\gamma_3)\, w &= n_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad & \quad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

in welchen Gleichungen also die neu eingeführten Coëfficienten, deren Bestimmung der Voraussetzung nach durchaus keiner Unsicherheit unterworfen ist, die folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned}
(\alpha_1) &= a_1 (\alpha x) + b_1 (\alpha y) + c_1 (\alpha z) + d_1 (\alpha t) \\
(\alpha_2) &= a_2 (\alpha x) + b_2 (\alpha y) + c_2 (\alpha z) + d_2 (\alpha t) \\
&\vdots \\
(\beta_1) &= a_1 (\beta x) + b_1 (\beta y) + c_1 (\beta z) + d_1 (\beta t) + e_1 \\
(\beta_2) &= a_2 (\beta x) + b_2 (\beta y) + c_2 (\beta z) + d_2 (\beta t) + e_2 \\
&\vdots \\
(\gamma_1) &= a_1 (\gamma x) + b_1 (\gamma y) + c_1 (\gamma z) + d_1 (\gamma t) + f_1 \\
(\gamma_2) &= a_2 (\gamma x) + b_2 (\gamma y) + c_2 (\gamma z) + d_2 (\gamma t) + f_2 \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Setzt man nun überdies in den Gleichungen 4):

$$\left.\begin{aligned}
n_1' &= n_1 - (\alpha_1) \\
n_2' &= n_2 - (\alpha_2) \\
n_3' &= n_3 - (\alpha_3) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

so wird man vorerst zu beachten haben, dass man als Controle der bisherigen Rechnungen (vgl. pag. 337) benützen kann:

$$[n\,n\,4] = [n'\,n'] \;. \qquad 7)$$

Mit Hilfe der Relationen 4) und 6) pag. 365 hat man also den Zusammenhang zwischen den Unbekannten u und w mit den Beobachtungen auf die einfachste und directeste Weise hergestellt, man hat nämlich jetzt die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (\beta_1)\,u + (\gamma_1)\,w = n_1' \\ (\beta_2)\,u + (\gamma_2)\,w = n_2' \\ (\beta_3)\,u + (\gamma_3)\,w = n_3' \\ \;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}\right\} \quad 8)$$

die zur Bestimmung von u und w verwerthet werden können. Es ist also hiermit das anfangs angedeutete Ziel erreicht, die Bestimmung der Unbekannten u und w aus den Beobachtungen selbst durch möglichst wenig Zwischenrechnungen herstellen zu können, und mehr ist, wie schon oben angedeutet wurde, nicht zu leisten. Diese Gleichungen 8) werden einen sehr sicheren Maassstab abgeben, ob die Bestimmung der Unbekannten u und w oder einer derselben überhaupt möglich ist; werden nämlich die Coëfficienten (β) und (γ) alle gleichzeitig so klein, dass dieselben gleich geachtet werden können der Unsicherheit der angewandten Rechnungsmethode, so ist eine Bestimmung beider Unbekannten völlig unthunlich, haben aber diese Coëfficienten eine angemessene Grösse, so kann dennoch die Bestimmung der einen Unbekannten unmöglich sein, wenn die zusammengehörigen (β) und (γ) Coëfficienten nahe proportional sind; dieser Umstand braucht jedoch vorerst hier nicht beachtet zu werden, er tritt ohnehin bei den weiteren Schritten der Auflösung von selbst hervor. Es soll nun vorausgesetzt werden, dass diese Coëfficienten, wie dies wohl in der Regel der Fall sein wird, eine angemessene Grösse haben, welche die unvermeidliche Unsicherheit der Rechnung wesentlich überschreitet. Die Bedingungsgleichungen 8) enthalten zwar keine neuen Bedingungen gegen die ursprünglichen Gleichungen und dürfen dieselben auch nicht enthalten, gewähren aber den Vortheil, dass denselben bereits vier Bedingungen (allgemein $(\mu-2)$ Bedingungen) der Normalgleichungen genügen, daher die noch zu erfüllenden Bedingungen einfacher präcisirt werden können. Es kann hier noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass es sich für die Bequemlichkeit der Rechnung empfiehlt, die Gleichungen 8) ähnlich wie dies mit den ursprünglichen Bedingungsgleichungen geschehen ist, durch Einführung von Homogenitätsfactoren (vergl. pag. 318) umzugestalten; man wird nur schliesslich bei der Bestimmung der Werthe der Unbekannten diese Factoren gehörig zu berücksichtigen haben. Bildet man nun nach den bekannten Regeln aus den Gleichungen 8) die Normalgleichungen, so erhalten dieselben die Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l} [\beta\beta]\,u + [\beta\gamma]\,w = [\beta n'] \\ [\beta\gamma]\,u + [\gamma\gamma]\,w = [\gamma n'] \end{array}\right\} \quad 9)$$

doch wird man nur nöthig haben, die Coëfficenten der ersten Gleichung allein

zu berechnen, da vorerst nur die Absicht vorliegt, u als Funktion von w darzustellen. Es ist klar, dass bis auf eventuell eingeführte Homogenitätsfactoren, die leicht in Rechnung zu ziehen sind, nothwendig nach der Herstellung und den Bedingungen der Gleichungen sein muss:

$$[\beta\beta] = [ee.4], \quad [\beta\gamma] = [ef.4], \quad [\beta n'] = [en.4], \qquad 10)$$

doch wird diese Identität nur theoretisch bestehen, in der Anwendung werden mehr oder minder grosse Unterschiede auftreten, je nach dem Maasse der vorhandenen Unsicherheit in der Lösung der Normalgleichungen; es werden jedoch die aus den Gleichungen 9) resultirenden Werthe den Vorzug verdienen, da dieselben aus einer fast directen Rechnung erlangt sind, und in der That das hier vorgeschlagene modificirte Verfahren angewendet wurde, um eine grössere Sicherheit zu erhalten. Man ist also dahin gelangt, die vorletzte Eliminationsgleichung hinschreiben zu können mit der Ueberzeugung, dass die Coëfficienten im Allgemeinen numerisch nahe richtig festgelegt erscheinen. Setzt man demnach:

$$(\gamma' u) = -\frac{[\beta\gamma]}{[\beta\beta]}, \quad (\alpha' u) = \frac{[\beta n']}{[\beta\beta]}, \qquad 11)$$

so ist die Relation zwischen u und w bestimmt durch:

$$u = (\alpha' u) + (\gamma' u)\, w, \qquad 12)$$

wobei wieder $(\alpha' u)$ der wahrscheinlichste Werth von u sein wird, wenn man w der Null gleich setzt. Die durch diese Substitution erlangte verminderte Summe der Fehlerquadrate wird nach den bekannten Regeln bestimmt sein durch:

$$[n''n''] = [n'n'] - \frac{[\beta n']^2}{[\beta\beta]}; \qquad 13)$$

führt man die Relation 12) in die Gleichungen 2) (pag. 364) ein, so nehmen dieselben die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} u &= (\alpha' u) + (\gamma' u)\, w \\ t &= (\alpha' t) + (\gamma' t)\, w \\ z &= (\alpha' z) + (\gamma' z)\, w \\ y &= (\alpha' y) + (\gamma' y)\, w \\ x &= (\alpha' x) + (\gamma' x)\, w \end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

wobei also allgemein gesetzt ist:

$$(\alpha' E) = (\alpha E) + (\beta E)\,(\alpha' u); \qquad 15)$$

führt man aber 12) in die Gleichungen 8) ein und setzt:

$$\left.\begin{aligned} n_1'' &= n_1' - (\beta_1)\,(\alpha' u) \\ n_2'' &= n_2' - (\beta_2)\,(\alpha' u) \\ n_3'' &= n_3' - (\beta_3)\,(\alpha' u) \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}\right\} \qquad 16)$$

und:

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_1'') &= (\gamma_1) + (\beta_1)\,(\gamma' u) \\ (\gamma_2'') &= (\gamma_2) + (\beta_2)\,(\gamma' u) \\ (\gamma_3'') &= (\gamma_3) + (\beta_3)\,(\gamma' u) \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}\right\} \qquad 17)$$

so erhalten nunmehr die Gleichungen 8) (pag. 366) die Form:

$$\left.\begin{array}{l}(\gamma_1')\, w = n_1'' \\ (\gamma_2')\, w = n_2'' \\ (\gamma_3')\, w = n_3'' \\ \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\} \qquad 18)$$

wobei man sich durch die Relation 13) (pag. 367) eine theilweise Controle für die Richtigkeit der Rechnung verschafft; aus diesen Gleichungen wird die Bestimmung von w nach eventueller Einführung von Homogenitätsfactoren durch:

$$w = \frac{[\gamma' n'']}{[\gamma' \gamma']} \qquad 19)$$

bewirkt. Man wird wieder bemerken, dass theoretisch

$$[\gamma' \gamma'] = [f f 5] \qquad [\gamma' n''] = [f n 5] \qquad 20)$$

sein muss, dass aber bei den vorausgesetzten Verhältnissen wieder eine nahe Uebereinstimmung nicht erwartet werden kann. Die auf das Minimum herabgebrachte Summe der Fehlerquadrate wird sein:

$$[v v] = [n n 6] = [n'' n''] - \frac{[\gamma' n'']^2}{[\gamma' \gamma']} \,. \qquad 21)$$

Ist nun einmal $[v v]$ bekannt, so bestimmt sich nach der Formel 22) (pag. 359) der mittlere Fehler einer Bedingungsgleichung, und da durch 10) (pag. 367) und 20), die für die Rechnung der Hilfsgrössen A_5, B_5, C_5, D_5 und E_5 nöthigen Factoren (pag. 346, 347) mit hinreichender Genauigkeit bekannt sind, (auf eventuell eingeführte Homogenitätsfactoren zu achten), so wird die Rechnung der Gewichte nach der Formel 10) (pag. 356) keine weitere Schwierigkeit haben, und hiermit erscheint das vorgelegte Problem mit einer nach Thunlichkeit maximalen Präcision gelöst. Diese letzteren Bestimmungen werden aber in der Regel in den vorgelegten Fällen nicht vorgenommen werden, da es sich meist darum handelt, neben dem wahrscheinlichsten Elementensysteme jene Grenze zu suchen, bis zu welcher hinaus dieselben abgeändert werden dürfen ohne den Beobachtungen zu widersprechen. Grenzen, die nach den vorgelegten Beobachtungen und der subjectiven Anschauung sehr dehnbar sind.

Die Gleichungen 14) (pag. 367) stellen die Unbekannten als Funktionen der unabhängig Variablen w dar; betrachtet man aber überdiess u in so weit unabhängig variabel, als dasselbe abgeändert werden darf, ohne w zu variiren, so sind die maassgebenden Coefficienten für u in den Gleichungen 2) (pag. 364) enthalten; man wird deshalb sagen können, dass in den folgenden Gleichungen u und w unabhänig variabel sind:

$$\left.\begin{array}{l} t = (\alpha' t) + (\beta t)\, u + (\gamma' t)\, w \\ z = (\alpha' z) + (\beta z)\, u + (\gamma' z)\, w \\ y = (\alpha' y) + (\beta y)\, u + (\gamma' y)\, w \\ x = (\alpha' x) + (\beta x)\, u + (\gamma' x)\, w \,, \end{array}\right\} \qquad 22)$$

wobei aber zu beachten ist, dass wenn man w allein als unabhängig variabel betrachtet, u bestimmt werden muss nach 12) (pag. 367) nämlich:

$$u = (\alpha' u) + (\gamma' u)\, w \,.$$

Unter diesen einschränkenden Voraussetzungen erscheint also in der Folge u als unabhängig variabel. Indem man den nach 19) (pag. 368) bestimmten Werth in die Bedingungsgleichungen 18) einsetzt, gelangt man zur Kenntniss der minimalen Fehler, setzt man also:

$$\left.\begin{aligned} n_1'' - (\gamma_1')\, w &= v_1 \\ n_2'' - (\gamma_2')\, w &= v_2 \\ n_3'' - (\gamma_3')\, w &= v_3 \\ \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

so muss die auf diese Weise gefundene Summe der Fehlerquadrate $[vv]$ mit dem durch 21) (pag. 368) bestimmten Werthe innerhalb der Unsicherheitsgrenzen der Rechnung stimmen, womit eine gute Controle erreicht ist. Man kann nun daran gehen, eine umfassende Controle noch dadurch herzustellen, dass man den durch 19) bestimmten Werth von w in 12) (pag. 367) einführt und dadurch (u) erhält. Die Substitution dieser Werthe in 2) (pag. 364) gibt die übrigen Unbekannten; die so gefundenen Werthe der Unbekannten setzt man in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen ein, und muss die eben angeführten minimalen Fehler v_1, v_2, v_3 ... bestätigt finden.

Den Gleichungen 22) (pag. 368) analog, kann man die übrig bleibenden Fehler als Funktionen von w und u darstellen, beide unter den gemachten Einschränkungen als unabhängig variabel betrachtend; man erhält dann die Fehler, die in den Orten übrig bleiben, bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= n_1'' - \{(\beta_1)\, u + (\gamma_1')\, w\} \\ f_2 &= n_2'' - \{(\beta_2)\, u + (\gamma_2')\, w\} \\ f_3 &= n_3'' - \{(\beta_3)\, u + (\gamma_3')\, w\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

In diesen Ausdrücken wird, wenn man für w den wahrscheinlichsten Werth substituirt und u nach 12) (pag. 367) bestimmt, $u = 0$ zu setzen und f in v zu verwandeln sein; variirt man aber w in $(w + \varDelta w)$, und u in $(u + \varDelta u)$, so erhält man sofort, wenn man diese Werthe in 24) einführt:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= v_1 - \{(\beta_1)\, \varDelta u + (\gamma_1')\, \varDelta w\} \\ f_2 &= v_2 - \{(\beta_2)\, \varDelta u + (\gamma_2')\, \varDelta w\} \\ f_3 &= v_3 - \{(\beta_3)\, \varDelta u + (\gamma_3')\, \varDelta w\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

welche Gleichungen also die Aenderungen der übrig bleibenden Beobachtungsfehler darstellen, wenn man u und w unter den gemachten Einschränkungen willkürlich variirt. Quadrirt und addirt man die vorstehenden Gleichungen, so erhält man:

$$[ff] = [vv] + [\beta\beta]\, \varDelta u^2 + [\gamma'\gamma']\, \varDelta w^2\,, \qquad 26)$$

da nothwendig nach Gleichung 7) (pag. 316)

$$[\beta v] = 0$$
$$[\gamma' v] = 0$$

ist, und nach 17) (pag. 367) wenn man daselbst beiderseits mit dem entsprechenden β multiplicirt und die Relation 11) (pag. 367) beachtet.

$$[\beta\gamma'] = 0$$

wird.

Der Ausdruck 26) zeigt unmittelbar in welcher Weise die Summe der Fehlerquadrate zunimmt, wenn man für u und w Annahmen macht, die von den wahrscheinlichsten Werthen um die Beträge Δu und Δw abweichen. Da nun nach Gleichung 22) (pag. 359) in einem gegebenen Falle der mittlere Fehler ε einer Bedingungsgleichung von der Summe der Fehlerquadrate abhängig erscheint, so wird stets derselbe Werth von ε erhalten, wenn man nur die Quadratsummen gleich macht. Man leitet hieraus den Schluss ab, dass alle jene Systeme die gleiche Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nehmen, für welche die Summe der Quadrate der Fehler f identisch wird; für $\Delta u = \Delta w = 0$ erhält man die minimale Summe. Man kann der Gleichung 26) noch eine andere Gestalt geben, die für die Folge sich bequem erweist. Setzt man nämlich:

$$\left.\begin{aligned} n \sin N &= \Delta u \\ n \cos N &= \Delta w \end{aligned}\right\} \qquad 27)$$

so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$[ff] = [vv] + n^2\{[\beta\beta] + [\gamma'\gamma']\}. \qquad 28)$$

d. h. alle jene Systeme, für die n identisch ist, haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, der Winkel N bleibt völlig willkürlich.

Die vorstehend entwickelten Vorschriften werde ich später bei dem für den Planeten Hilda gewählten Beispiele ausführlich erläutern und verweise demnach in dieser Richtung auf das betreffende Kapitel. Das weiter unten durchgeführte Beispiel für den Kometen I 1860, behandelt den einfacheren Fall, wo nämlich nur die Bestimmung einer Unbekannten einer besonderen Unsicherheit unterworfen ist.

Ableitung der Elemente aus einer beliebig grossen Zahl von Beobachtungen.

A. Bildung der Normalorte.

Mit Rücksicht auf die I pag. 94 gemachten Bemerkungen ist es sofort klar, dass, wenn die Zahl der vollständigen Beobachtungen 3 überschreitet, denselben nur durch ein Elementensystem nach Maassgabe der Beobachtungsfehler genügt werden kann; es stellt sich also die Aufgabe, aus einer beliebig grossen Zahl von Beobachtungen die wahrscheinlichsten Elemente zu ermitteln, und es werden daher jene Principien, die in der Methode der kleinsten Quadrate aufgestellt wurden, hier zur Verwerthung kommen. Es wird aber nicht immer nöthig sein, die daselbst aufgestellten Grundsätze in aller Strenge durchzuführen, wenn nicht die äusserste Genauigkeit verlangt wird, und man wird sich je nach den Umständen Abkürzungen erlauben können. Es werden daher in der Folge sowohl die strengen, als auch die genähert richtigen Methoden zur Erreichung des Zweckes mitgetheilt werden; vor Allem soll aber vorerst die Vereinfachung der Rechnung, die durch die Bildung der Normalorte erlangt wird, näher beleuchtet werden.

Es wird in den folgenden Untersuchungen stets vorausgesetzt, dass genähert richtige Elemente in irgend einer Weise bekannt sind; aus diesen kann man sich den geocentrischen Lauf des Himmelskörpers (Ephemeride) berechnen; vergleicht man die aus dieser Rechnung folgenden Orte mit den Beobachtungen, so ist klar, dass innerhalb gewisser Zeitgrenzen die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Orten in jeder der zwei polaren Coordinaten auf die Form:

$$u = a + bt + ct^2 + dt^3 + \dots$$

gebracht werden können. Die Coëfficienten a, b, c ... werden im Allgemeinen um so kleiner sein, je näher die zu Grunde gelegten Elemente der Wahrheit kommen; ausserdem werden im Allgemeinen die Coëfficienten mit den Potenzen von t rasch kleiner werden. Seien nun n Beobachtungen, die innerhalb des vorgesetzten Zeitraumes liegen, angestellt zur Zeit t_1, t_2, ... t_n; die Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung im Sinne »Beobachtung-Rechnung« angesetzt, seien der Reihe nach u_1, u_2 ... u_n; ist nun T irgend ein bestimmtes Zeitmoment, innerhalb der gesetzten Zeitgrenzen, welches man als Ausgangspunkt der Zeitzählung wählt,

so erhält man vorerst für die Bestimmung der Coëfficienten $a, b, c \ldots$ die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = a + b(t_1 - T) + c(t_1 - T)^2 + \ldots \\ u_2 = a + b(t_2 - T) + c(t_2 - T)^2 + \ldots \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ u_n = a + b(t_n - T) + c(t_n - T)^2 + \ldots \end{array}\right\} \quad 1)$$

aus welchen Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die Coëfficienten $a, b, c \ldots$ bestimmt werden können; sind dieselben bestimmt, so wird der Coëfficient a jene Correction angeben, die man an den für die Zeit T berechneten Ephemeridenort anzubringen hat, um den aus den n Beobachtungen für diese Zeit resultirenden Ort, den Normalort, zu erhalten. An die Gleichungen 1) wird man aber noch mehre Bemerkungen zu knüpfen haben. Es ist zunächst klar, dass man in diesem Systeme allen beobachteten Unterschieden $u_1, u_2 \ldots u_n$ genügen könnte, wenn man nur rechter Hand vom Gleichheitszeichen eine der Anzahl n entsprechende Zahl von zu bestimmenden Coëfficienten einführt; doch wird dieses scheinbar strenge Verfahren zu wesentlichen Ungenauigkeiten führen; es ist aus dem Umstande, dass die Ephemeride verhältnissmässig nahe richtig ist, also selbst für weit ausserhalb der gesetzten Zeitgrenzen liegende Epochen die Beobachtungen noch nahe darstellt, klar, dass die Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ mit den Potenzen von t rasch abnehmen müssen, und um so rascher, je genauer die der Rechnung der Ephemeride zu Grunde gelegten Elemente sind; man wird daher in der Lösung der Gleichungen 1) eine erheblich grössere Genauigkeit erhalten, wenn man von der theoretisch nothwendig stattfindenden Bedingung der Kleinheit der höheren Coëfficienten Gebrauch macht und dieselben der Null gleich setzt, und sich je nach Maassgabe der Umstände höchstens auf die Bestimmung der drei ersten Coëfficienten beschränkt. Es erscheint mir sogar erwünscht, stets so nahe richtige Ephemeriden zu benützen, dass man auch den c-Coëfficienten vernachlässigen kann, in diesem Falle wird sich aber die Rechnung ganz ausserordentlich einfach gestalten lassen; bestimmt man nämlich T_1 so, dass dasselbe dem Mittel der Beobachtungszeiten entspricht, nämlich:

$$T = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\,, \qquad 2)$$

so sieht man sofort ein, dass die Bestimmung des eigentlich nur zur Ermittelung der Ephemeridencorrection für die Zeit T nothwendigen a-Coëffficienten erlangt wird durch:

$$a = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\,, \qquad 3)$$

weil im Mittel, der hier gewählten Bestimmung von T gemäss, der Factor von b verschwindet. Ist die Ephemeride nur einigermaassen zutreffend, so wird man ohne merklichen Fehler für die Zeit T die dem Mittel der Zeiten nächste Epoche der Ephemeride benützen dürfen.

Zu den vorstehenden Betrachtungen kann man noch hinzufügen, dass wenn

die einzelnen Beobachtungen verschiedenes Gewicht, beziehungsweise $g_1, g_2 \ldots g_n$, hätten, die in Betracht kommenden Werthe T und a zu berechnen wären nach:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{g_1 t_1 + g_2 t_2 + \cdots + g_n t_n}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n} \\ a &= \frac{g_1 u_1 + g_2 u_2 + \cdots + g_n u_n}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n} \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Hat aber die Ephemeride nicht die gewünschte Annäherung, so dass man fürchten muss, nicht mit den aus 2) und 3) (pag. 372) resultirenden Näherungen auszureichen, so wird man, was ich für das genaueste halte, sich eine bessere Ephemeride herzustellen trachten, welcher Forderung meist leicht genügt werden kann, oder man wird nach den bei der Methode der kleinsten Quadrate auseinandergesetzten Methoden die Gleichungen 1) (pag. 372) zur Bestimmung der a, b und c Coëfficienten verwenden, oder was am schnellsten zum Ziele führt, wenn auch die Genauigkeit dadurch am meisten leidet, man wird sich die Abweichungen der Beobachtungen von der Rechnung als Ordinaten in ein im entsprechenden Maassstabe ausgeführtes Coordinatensystem eintragen und als Abscissen die Beobachtungszeiten nehmen; eine nach dem Augenmaasse gezogene, diesen festgelegten Punkten möglichst entsprechende Curve von einfachem Zuge wird ebenfalls sehr nahe den Fehler der Ephemeride darstellen; die Ordinate dieser Curve zu einer der Mitte der Beobachtungszeiten nahe gelegenen Abscisse wird also die Correction der Ephemeride für dieses Moment ergeben; ich brauche aber wohl kaum hier hervorzuheben, dass ich das letztere Verfahren nur als einen wenig befriedigenden Nothbehelf betrachte und den zuerst genannten Methoden den Vorzug gebe.

Bei der Anwendung der vorstehenden Methoden kommt es hauptsächlich an auf die Herstellung der Ephemeride und auf die Vergleichung derselben mit den Beobachtungen, und es wird sich empfehlen, hier auf diese Sache näher einzugehen.

Die Ephemeride gibt den Ort des Himmelskörpers für bestimmte Zeitpunkte an, die durch gleiche Zeitabstände getrennt sind: sind diese sehr gross gewählt, so wird die Interpolation wegen der höheren Differenzwerthe schwierig, kann sogar unter Umständen zu ungenauen Resultaten führen; sind die Abstände der Epochen aber wieder sehr eng gewählt, so wird zwar die Interpolation wesentlich erleichtert, man hat aber eine nicht ganz unbeträchtliche Mehrarbeit geleistet, indem mehr Ephemeridenorte gerechnet wurden, als unumgänglich nöthig sind. Hierbei das richtige Maass zu finden, ist im Allgemeinen nicht leicht; die Bemerkung aber, dass die Interpolation anfängt lästig zu werden, falls die zweiten Differenzwerthe ein gewisses Maass überschreiten, gibt in mancher Beziehung die nöthige Leitung und die folgenden Betrachtungen werden eine zwar nicht ganz sichere, aber doch mindestens orientirende Richtschnur geben.

Im Allgemeinen wird man die Betrachtungen zunächst auf die rechtwinkeligen heliocentrischen Coordinaten beschränken können, denn hat man dieselben in für die Interpolation genügend kleinen Intervallen berechnet (diese Rechnung macht die grösste Arbeit bei der Herstellung einer Ephemeride) so wird man, falls

die polaren geocentrischen Coordinaten allzu unregelmässig gingen, durch eventuell wiederholte Interpolation in die Mitte für die letzteren die hinreichend kleinen Intervalle erhalten können. Für die rechtwinkeligen Coordinaten geben aber die bekannten Bewegungsgleichungen (I pag. 10) die Form:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{x}{r^3} ,$$

da man aber x auf die Form $r \cos \psi$ bringen kann, und die zweiten Differentiale ein Maass für die zweiten Differenzwerthe abgeben, so wird man daraus die Bemerkung ableiten können, dass die Differenzen zweiter Ordnung nahezu umgekehrt proportional den zweiten Potenzen der heliocentrischen Entfernung sein werden; man wird also für das Intervall der Ephemeridenepochen T die Form erhalten:

$$J = c\, r^2 , \tag{5}$$

wo c eine Constante ist, die leicht durch die Erfahrung sich bestimmen lässt. Für die Erde würde, wenn nicht der Mond Störungen von sehr kurzer Periode veranlassen würde, eine Rechnung von 3 zu 3 Tagen genügend sein, um die Interpolation der rechtwinkeligen Coordinaten bis auf die siebente Stelle sicher ausführen zu können; daraus leitet man den Schluss ab, dass c etwa gleich 3 gesetzt werden darf, da für die Erde ohne merklichen Fehler für die vorliegenden Zwecke, r der Einheit gleich gesetzt werden kann.

Man wird aus (5) zunächst die Bemerkung ableiten, dass man für Himmelskörper mit mässiger Excentricität (Planeten) wohl das Intervall für alle Theile der Bahn constant annehmen darf; sind aber die Excentricitäten gross, so muss das Intervall variirt werden, und man wird sich zu entscheiden haben, welche Wahl man trifft; man wird demnach in diesem Falle nur immer für gewisse Bahntheile das Intervall constant annehmen dürfen.

Beim Uebergange auf den geocentrischen Ort wäre zu beachten, dass vorerst die Differenzen der Coordinaten des Himmelskörpers und der Erde in Betracht kommen; man wird daher zu berücksichtigen haben, dass bei der Vereinigung der beiden Coordinaten sich die zweiten Differenzwerthe ebenfalls summiren; man wird also in diesem Falle das Intervall im Allgemeinen nicht grösser wählen dürfen als 3 Tage für alle Himmelskörper, für die r grösser als die Einheit wird; man hat also die Bedingungen:

$$r > 1 , \quad J = 3$$
$$r < 1 \quad J = 3\, r^2 .$$

Da man aber stets von den geocentrischen rechtwinkeligen Coordinaten den Uebergang auf die polaren macht, so werden die Aenderungen der polaren Coordinaten im Allgemeinen proportional dem reciproken Werthe der geocentrischen Distanz $\varDelta$ sein; beachtet man, dass überdies mindestens für die eine Coordinate auch eine Multiplication mit $\sec \delta$, wo δ die auf der Fundamentalebene senkrechte polare Coordinate vorstellt, zur Reduction auf's Parallel erforderlich ist, so wird man für die Bestimmung von J für die geocentrischen polaren Coordinaten zunächst erhalten für die zwei Fälle:

$$\left.\begin{aligned} r > 1 \quad J &= 3\,\Delta \cos\delta \\ r < 1 \quad J &= 3r^2\,\Delta \cos\delta\,, \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

wobei J in Tagen ausgedrückt erscheint; man darf aber bei Benützung der Formeln 6 nicht vergessen, dass dieselben nur eine annähernd richtige Leitung geben; man erhält also die folgende Uebersicht für die Bestimmungen von J in Tagen:

	$r > 1$	$r < 1$
heliocentrische rechtw. Coord.	$J = 3r^2$	$J = 3r^2$
geocentrische rechtw. »	$J = 3$	$J = 3r^2$
geocentrische polare »	$J = 3\,\Delta\cos\delta$	$J = 3r^2\,\Delta\cos\delta$.

Der Umstand, dass das Intervall auch von $\cos\delta$ abhängig ist, also im Falle, wo sich der Himmelskörper den Polen des gewählten Coordinatensystems nähert, auf sehr kleine Werthe für J führt, zeigt, dass die Herstellung einer Ephemeride zur Bildung von Normalorten, wenn sich der Himmelskörper dem Pole nähert, auf Schwierigkeiten stosssen kann; man kann sich in solchen Fällen theilweise damit behelfen, dass man auf die Ephemeride mit polaren Coordinaten Verzicht leistet, und unmittelbar für die Zeit die vorgelegten Coordinaten interpolirt und aus diesen erst die polaren berechnet; doch ist dieses Auskunftsmittel keineswegs sehr geeignet, da gerade in diesen Fällen der Fehler der Ephemeride, zerlegt nach den Componenten der polaren Coordinaten, nothwendig rasche Aenderungen zeigen muss, und im Falle der Polpassage in beiden Coordinaten eine völlige Discontinuität eintritt. Man hat daher in ähnlichen Fällen, das Coordinatensystem des Aequators, welches gewöhnlich als Grundlage für die Berechnung der Ephemeride dient, verlassen und dafür das der Ekliptik eingesetzt; man muss aber dieses Verfahren ebenfalls als ein wenig zweckmässiges bezeichnen, indem durch viel leichtere und einfachere Rechnungen radicalere Abhilfe geschafft werden kann; man darf nämlich nicht vergessen, dass die Transformation aller auf den Aequator bezogenen Beobachtungen in Länge und Breite keine ganz geringe Arbeit ist, und dass wegen der verhältnissmässig geringen Entfernung der Pole des Aequators und der Ekliptik (Abstand 23°5) immerhin die Unregelmässigkeit in den polaren Coordinaten nicht ganz behoben erscheint. Das radicale Auskunftsmittel, welches ich in diesem Falle empfehle, ist das folgende: ich lege das neue Coordinatensystem so, dass der Pol desselben in den Frühjahrspunkt zu liegen kommt, die Fundamentalebene geht also durch die Pole des Aequators und ich wähle den Nordpol des Aequators als Ausgangspunkt der Zählung; denkt man sich in denselben die positive x' Achse des neuen Systems gelegt, die y' Achse in den Punkt, dessen Rectascension 90° ist, die positive z' Achse in den Frühjahrspunkt und bezeichnet die Coordinaten des neuen Systems durch Accente, so hat man die Relationen:

$$\begin{aligned} x' &= z \\ y' &= y \\ z' &= x\ . \end{aligned}$$

Es entsteht also dieses neue Coordinatensystem aus dem Aequatorealsystem durch

Drehung des letzteren Systems um 90° um die gemeinsame y Achse. Man kann demnach ohne weitere Transformationen die bereits berechneten geocentrischen Coordinaten benützen und wird, wenn man dieselben für das System des Aequators, mit ξ, η und ζ bezeichnet zur Berechnung der neuen polaren Coordinaten die Relationen haben:

$$\Delta \cos \alpha' \cos \delta' = \zeta$$
$$\Delta \sin \alpha' \cos \delta' = \eta$$
$$\Delta \sin \delta' \quad = \xi\ ;$$

auch die Verwandlung der beobachteten äquatorialen Coordinaten in die des neuen Systems gestaltet sich ganz einfach; man wird haben, wie dies aus der Transformation der Coordinaten unmittelbar ersichtlich ist:

$$\cos \alpha' \cos \delta' = \sin \delta$$
$$\sin \alpha' \cos \delta' = \sin \alpha \cos \delta$$
$$\sin \delta' = \cos \alpha \cos \delta$$

wodurch, da $\cos \delta'$ stets positiv zu nehmen ist, die polaren Coordinaten unzweideutig bestimmt erscheinen.

Hat man also eine Ephemeride in geeigneter Weise hergestellt, so tritt zunächst die Nothwendigkeit ein, die Angaben derselben mit den Beobachtungen zu vergleichen; es wird sich hierbei als nothwendig herausstellen, für gewisse Zeitmomente die Positionen der Ephemeride durch Interpolation zu ermitteln; man wird aber, wenn man mit n den Abstand des Beobachtungsmomentes seiner absoluten Grösse nach von der nächsten Ephemeridenepoche ausgedrückt in Einheiten des Intervalles bezeichnet, durch die bekannten Interpolationsformeln das gewünschte Resultat erlangen; man hat nämlich für die Interpolation nach vorwärts (vergl. über die Bezeichnung pag. 3 ff.):

$$f(a+nw) = f(a) + nf^{\mathrm{I}}(a+\tfrac{1}{2}w) + \frac{n(n-1)}{1.2} f^{\mathrm{II}}(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} f^{\mathrm{III}}(a+\tfrac{1}{2}w) +$$
$$+ \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(a) + \ldots$$

nach rückwärts:

$$f(a-nw) = f(a) - nf^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \frac{n(n-1)}{1.2} f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) +$$
$$+ \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(a) \ldots,$$

so dass man n stets kleiner als $\frac{1}{2}$ wählen kann. Hat man aber sehr zahlreiche Beobachtungen, was wohl nur bei sehr hellen Kometen der Fall ist, für dasselbe Intervall mit der Ephemeride zu vergleichen, dann verlohnt es sich wohl der Mühe, die obigen Formeln nach Potenzen von n zu ordnen und die so gebildeten Coëfficienten statt der Differenzwerthe der Ephemeride beizufügen. Ordnet man die obigen Ausdrücke nach Potenzen von n und führt überdies die arithmetischen Mittel (vergl. pag. 4) der ungeraden Differenzen ein, so erhält man leicht die Form:

$f(a+nw) = f(a) + An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 \ldots$ für die Interpol. nach vorwärts
$f(a-nw) = f(a) - An + Bn^2 - Cn^3 + Dn^4 \ldots$ » » » » rückwärts,

wobei gesetzt ist:

$$A = \frac{1}{1}\left\{f^{\mathrm{I}}(a) - \frac{1}{6}f^{\mathrm{III}}(a) + \frac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a) - \frac{1}{140}f^{\mathrm{VII}}(a) + \ldots\right\}$$

$$B = \frac{1}{2!}\left\{f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a) + \frac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a) - \ldots\right\}$$

$$C = \frac{1}{3!}\left\{f^{\mathrm{III}}(a) - \frac{1}{4}f^{\mathrm{V}}(a) + \frac{7}{120}f^{\mathrm{VII}}(a) - \ldots\right\}$$

$$D = \frac{1}{4!}\left\{f^{\mathrm{IV}}(a) - \frac{1}{6}f^{\mathrm{VI}}(a) + \ldots\right\}$$

$$E = \frac{1}{5!}\left\{f^{\mathrm{V}}(a) - \frac{1}{3}f^{\mathrm{VII}}(a) + \ldots\right\}$$

$$F = \frac{1}{6!}\left\{f^{\mathrm{VI}}(a) - \ldots\right\}$$

$$G = \frac{1}{7!}\left\{f^{\mathrm{VII}}(a) - \ldots\right\}$$

wobei die Formeln in einer weit die Grenzen der gewöhnlichen Anwendung überschreitenden Vollständigkeit angesetzt sind. Man wird beachten, dass man diese Formeln eigentlich angemessener nicht zerfällt in ein System für die Interpolation nach vorwärts und eines für die Interpolation nach rückwärts, sondern sich, indem man n stets kleiner als $\frac{1}{2}$ annimmt, dasselbe im ersten Fall mit dem positiven, im letzteren Falle mit dem negativen Vorzeichen behaftet vorstellt.

Um für einen speciellen Fall n zu bestimmen, hat man unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Ephemeriden die Orte für das wahre Aequinoctium geben, zunächst die auf den Normalmeridian reducirte Beobachtungszeit um die Lichtzeit zu vermindern (vgl. I pag. 71) und für diese so verminderte Zeit den Ephemeridenort zu interpoliren. Die Lichtzeit in Zeitsekunden findet sich nach:

$$\text{Aberrzt} = \overline{2.6971}\,\Delta\,,$$

wo Δ die geocentrische Distanz in Einheiten der Erdbahnhalbachse vorstellt und statt des Coëfficienten der Logarithmus desselben angesetzt ist. Der für diese so corrigirte Zeit aus der Ephemeride entlehnte Ort ist identisch mit dem scheinbaren zur Zeit der Beobachtung und umgekehrt; man erhält nach Ausführung der hier angezeigten Operationen einen unmittelbaren Vergleich des beobachteten und berechneten Ortes, doch ist noch vorher, wenn dies nicht schon geschehen ist, die Beobachtung vom Einflusse der Parallaxe zu befreien (vgl. I pag. 32), da die Ephemeriden geocentrische Orte geben. Indem man so zur Kenntniss des Ephemeridenfehlers gelangt, den man aus dem Unterschiede Beobachtung-Rechnung ableitet, hat man ferner zu beachten, dass der Fehler in Rectascension eigentlich noch mit $\cos\delta$ zu multipliciren ist, um denselben auf den grössten Kreis zu reduciren; man wird aber, sofern der Himmelskörper sich nicht den Polen allzusehr nähert und einen mässigen Bogen in der Declination innerhalb der Zeitgrenzen der zu einem Normalorte verbundenen Beobachtungen zurücklegt, meist von dieser Multiplication Abstand nehmen können. Man hat aber, wenn man diese Correction berücksichtigt, wohl zu beachten, dass man bei der Bildung des Normalortes, indem man die im Mittel resultirende Correction der Ephemeride an den Ephemeridenort anbringt,

diese Quantität vorher durch die Multiplication mit $\sec\delta$ auf das Parallel zurückführen muss.

Die mehrfachen Operationen, die man mit den Daten der Beobachtung vorzunehmen hat, machen es erwünscht, dieselben möglichst übersichtlich zu gestalten; man wird dies am Besten dadurch erreichen, dass man jede Beobachtung auf einen entsprechend aus etwas stärkerem Papiere geschnittenen Zettel herausschreibt, der etwa 0^m20 Breite 0^m15 Höhe hat, und auf denselben alle erforderlichen Bemerkungen und Angaben einträgt. Links oben in die Ecke setzt man den Namen des Himmelskörpers; gehört die Beobachtung einem kleinen Planeten an und ist eine Schätzung seiner Helligkeit (Grösse) vom Beobachter angegeben, so kann dieselbe dort ihren Platz finden. In der Mitte oben setzt man gleichsam als Aufschrift den Namen des Beobachtungsortes, rechts oben in die Ecke kommen die Notizen über die Art der Beobachtung und etwaige Bemerkungen des Beobachters über die Sicherheit derselben; ist diese Beobachtung eine Meridianbeobachtung, so kann man dies durch den Buchstaben *M* bezeichnen, ist dieselbe aber eine differentielle, so wird man, falls dies die Mittheilungen des Beobachters gestatten, anführen die Art des Mikrometers, die beobachteten Differenzen zwischen dem Himmelskörper und dem Vergleichsterne, die Anzahl der Einzelbeobachtungen, die zur Ableitung dieses Resultates gedient haben, und schliesslich die angenommenen mittleren und scheinbaren Positionen des Vergleichsternes nebst Angabe der Quellen, die der Beobachter zur Ableitung der angeführten Positionen benützt hat. An sich wären diese Notizen nicht von Erheblichkeit, wenn man stets sicher sein könnte, dass keine Versehen bei der Reduction der Beobachtungen vorgefallen sind, alle diese Notizen werden sich aber bei der näheren Discussion der Beobachtungen, auf die allerdings hier nicht eingegangen werden kann, sehr nützlich erweisen und allenfalls bei der Vergleichung sich zeigende auffallende Unterschiede oft genug erklären. Jetzt füllt man die erste Zeile des Zettels aus; dieselbe enthält zuerst die Jahreszahl, den Monat und das Datum, unter den Namen des Beobachtungsortes stellt man die mittlere Zeit des Beobachtungsortes (hierbei kann man erwähnen, dass häufig die englischen Beobachter statt der mittleren Ortszeit die mittlere Greenwicher Zeit ansetzen, ein nicht ganz zu lobender Vorgang); dann folgt weiter nach rechts die beobachtete Rectascension und Declination, neben jede dieser Coordinaten setzt man auf 3 und 4 Stellen die allenfalls von den Beobachtern mitgetheilten parallaktischen Factoren; doch sind dieselben von den verschiedenen Beobachtern sehr verschieden mitgetheilt; bald enthalten sie bereits die mittlere Sonnenparallaxe, bald nicht, sind bald in Bogenmaass für Rectascension angesetzt, bald in Zeitmaass, bald stehen die Logarithmen, bald die Zahlen u. s. w. Man wird daher gut thun, sich niemals auf diese Angaben allzusehr zu verlassen und durch directe Nachrechnung die parallaktischen Faktoren (I pag. 52) prüfen, die selbst gewonnenen Resultate, nachdem man sich von deren Richtigkeit überzeugt, an Stelle der von den Beobachtern mitgetheilten Zahlen ansetzen, und die letzteren nur mehr als beiläufige Controlen gelten lassen; man wird sich bald überzeugen, dass in der That selbst bei sehr sorgfältig reducirenden

Beobachtern in diesen Zahlen häufig genug Irrthümer vorhanden sind. Einige Beobachter geben gleich die geocentrischen Orte selbst, und man ist dadurch der Rechnung der Correction für Parallaxe überhoben; doch ziehe ich es vor, diese Correctionen dem Rechner zu überlassen und aus den Händen des Beobachters die reinen Beobachtungsdaten zu erhalten.

Unter die mittlere Ortszeit in die zweite Zeile setzt man die mittlere Zeit des angenommenen Normalmeridians, welche man erhält, wenn man an die Ortzeit die Längendifferenz anbringt bei östlich von dem Hauptmeridiane gelegenen Orten subtractiv, bei westlichen additiv; unter diese Zahl setzt man die wohl meist mit ausreichender Genauigkeit durch lineare Interpolation aus der Ephemeride entlehnte Aberrationszeit, die stets an die obige Zahl subtractiv anzubringen ist; zur Ableitung von n, jenem numerischen Werthe, der zur Interpolation nöthig ist, wird man die in Stunden, Minuten und Secunden angegebene corrigirte Beobachtungszeit in Decimaltheile des Tages mit den bekannten Hilfsmitteln verwandeln. Unter die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen setzt man in die zweite Zeile die für Parallaxe erforderlichen Correctionen und in die dritte Zeile setzt man die aus diesen Correctionen resultirenden geocentrischen Coordinaten; links unten setzt man die Ephemeridencoordinaten der der Beobachtung zunächst gelegenen Epoche an und lässt unter denselben so viel Raum, um die durch die Interpolation gefundenen Reductionen auf die Epoche der Beobachtung anbringen und darunter den resultirenden Ephemeridenort ansetzen zu können; den übrigen Raum des Zettels benützt man für die nöthigen Interpolationsrechnungen, die sich meist durch die Benützung zweckmässig angelegter Hilfstafeln wesentlich erleichtern lassen; rechts unten in die Ecke setzt man die zwischen der Beobachtung und der Rechnung resultirenden Unterschiede im Sinne Beobachtung - Rechnung und setzt also $d\alpha$ eventuell $\cos\delta\, d\alpha$ und $d\delta$ an, und fügt sofort eine Bemerkung bei, wenn die Beobachtung kein Vertrauen verdient.

In dieser Weise gelangt man zur Kenntniss der Fehler der Ephemeriden für jede einzelne Beobachtung und indem man die Beobachtungen in entsprechender Weise, wie es die Umstände gerade gestatten und fordern, gruppirt, gelangt man mit Hilfe der eben besprochenen Methode zur Kenntniss der Normalorte, die sich der Bedeutung der Zahlen der Ephemeride gemäss, auf das wahre Aequinoctium der Zeit des Normalortes beziehen; man wird aber die Normalorte zweckmässig auf gewisse mittlere Aequinoctien beziehen; die hierfür erforderlichen Correctionen für Nutation und Präcession sind ausführlich im ersten Bande (I pag. 88 u. ff.) erläutert worden. Der Nutzen der Einführung der Normalorte ist offenbar darin begründet, dass man, ohne die Genauigkeit des Resultates in irgend einer Weise erheblich zu schädigen, die Zahl der Bedingungsgleichungen wesentlich einschränkt, ein Vortheil der bei der Anwendung die Rechnung ganz wesentlich abkürzt. Gelingt es in einem gegebenen Falle, die Beobachtungen in 3 Normalorte zusammenzufassen, so kann man diesen Orten jene Methoden für die erste Bahnbestimmung zu Grunde legen, die im ersten Bande dieses Werkes auseinandergesetzt sind.

Es soll nun die Bildung eines Normalortes und die Zurückführung desselben auf ein bestimmtes mittleres Aequinoctium durchgeführt werden, wobei aber die sonst auf die verschiedenen Zettel zu vertheilenden Zahlen hier übersichtlich neben einander gesetzt werden müssen; ich entlehne das Beispiel dem Planeten (62) Erato. Es finden sich für diesen Planeten aus dem Jahre 1871 neben anderen die folgenden Beobachtungen, wobei ein dem Namen des Beobachtungsortes zugefügtes *M* anzeigt, dass die Beobachtung im Meridian angestellt ist.

No.	Datum	Beobachtungsort	Ortszeit	Beob. Rectasc.	Beob. Decl.
1	1871 Sept. 12	Leiden *M*	$12^h22^m27^s$	$23^h48^m38^s21$	$-4^\circ\ 3'39''5$
2	» 12	Paris (*M*)	12 22 26	23 48 38.34	-4 3 35.7
3	» 14	Leiden (*M*)	12 13 9	23 47 12.15	-4 14 30.8
4	» 15	Berlin	11 37 1	23 46 30.69	-4 19 37.2
5	» 16	Berlin	11 1 39	23 45 48.39	-4 24 55.6
6	» 22	Greenwich *M*	11 35 49	23 41 21.33	-4 57 14.7 .

Eine aus sehr nahe richtigen Elementen abgeleitete Ephemeride ergab die folgenden wahren Orte:

12^h mittl. B. Zt.	Rectasc.	1. Diff.	2. Diff.	Decl.	1. Diff.	2. Diff.	log Δ	Abrrzt.
1871 Sept. 11	$23^h49^m22^s04$		-0^s43	$-3^\circ57'58''1$		$-1''1$	0.2324	14^m10^s
		-42^s62			$-5'24''5$			
» 12	48 39.42		-0.37	-4 3 22.6		-0.8	0.2318	14 9
		-42.99			-5 25.3			
» 13	47 56.43		-0.33	-4 8 47.9		-0.4	0.2313	14 8
		-43.32			-5 25.7			
» 14	47 13.11		-0.28	-4 14 13.6		$+0.1$	0.2308	14 7
		-43.60			-5 25.6			
» 15	46 29.51		-0.22	-4 19 39.2		$+0.4$	0.2304	14 6
		-43.82			-5 25.2			
» 16	45 45.69		-0.17	-4 25 4.4		$+0.8$	0.2301	14 6
		-43.99			-5 24.4			
» 17	45 1.70		-0.10	-4 30 28.8		$+1.3$	0.2298	14 5
		-44.09			-5 23.1			
» 18	44 17.61		-0.03	-4 35 51.9		$+1.6$	0.2296	14 5
		-44.12			-5 21.5			
» 19	43 33.49		$+0.02$	-4 41 13.4		$+2.0$	0.2294	14 4
		-44.10			-5 19.5			
» 20	42 49.39		$+0.08$	-4 46 32.9		$+2.5$	0.2294	14 4
		-44.02			-5 17.0			
» 21	42 5.37		$+0.13$	-4 51 49.9		$+2.8$	0.2294	14 4
		-43.89			-5 14.2			
» 22	41 21.48		$+0.18$	-4 57 4.1		$+3.2$	0.2295	14 4.

Die folgende Zusammenstellung gibt in der ersten Columne die Nummer der Beobachtung, in der zweiten sind die auf den Normalmeridian bezogenen Zeiten der Beobachtung, in der dritten die zugehörige Aberrationszeit, in der vierten der Abstand von der nächsten Epoche in der Ephemeride angegeben, die fünfte und sechste mit $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ überschriebene Columne gibt die mit Hilfe der ersten und zweiten Differenzen abgeleiteten Bewegungen des Planeten in der Zeit des Abstandes von der nächsten Epoche der Ephemeride an, welche Zahlen an die entsprechenden

Werthe der Ephemeride angebracht, den scheinbaren Ort für die Beobachtungszeit angeben; die siebente und achte Columne geben die Parallaxen, welche mit ihren Zeichen an die beobachteten Werthe anzubringen sind, um geocentrische Orte zu erhalten, endlich geben die zwei letzten Columnen die so gefundenen Unterschiede im Sinne Beobachtung — Rechnung:

						Parall. in		B — R	
	Berl. Zeit	Abrrzt.	Δt	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	α	δ	α	δ
1	$12^h58^m\ 6^s$	14^m9^s	$+\ 13^m\ 9^s$	-1^s31	$-\ 9''9$	0^s00	$+4''3$	$+0^s10$	$-2''7$
2	13 6 40	14 9	+ 52 31	−1.56	−11.9	0.00	+4.1	+0.48	+2.9
3	12 48 48	14 7	+ 34 41	−1.05	− 7.8	0.00	+4.3	+0.09	−5.1
4	11 37 1	14 6	− 37 5	+1.13	+ 8.1	−0.03	+4.3	+0.02	−2.1
5	11 1 39	14 6	$-1^h12\ 27$	+2.21	+16.3	−0.06	+4.3	+0.43	−3.2
6	12 29 24	14 4	+ 15 20	−0.47	− 3.3	0.00	+4.3	+0.32	−1.0

Das Mittel der Correctionen ist in Rectascension $+0^s24$ in Decl. $-2''2$, das Mittel der Zeiten entspricht nahe Sept. 15.5; bei der geringen Zahl der Beobachtungen einerseits und anderseits bei dem nahen Anschlusse der Ephemeride an die Beobachtungen, der sich durch weiter abstehende Beobachtungen bestätigt, wird man wohl mit Recht von der Bestimmung der mit der Zeit und dem Quadrate der Zeit verbundenen Coëfficienten der Ephemeridencorrection abstehen, und die obigen Mittelwerthe einfach an die Angaben der Ephemeride für die betreffende Epoche anbringen; setzt man die so erhaltene Rectascension im Bogenmaasse an, so erhält man den folgenden Normalort:

$$\begin{array}{lcc} & \alpha & \delta \\ \text{1871 Sept. 15.5} & 356^\circ 37' 26''2 & -4^\circ 19' 41''4\,, \end{array}$$

der sich auf das zugehörige wahre Aequinoctium bezieht; die Reduction auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges mit Hilfe der f, g und G Grössen (vergl. I pag. 89) nach den Angaben des Berliner Jahrbuches ergibt, wenn man beachtet, dass die daselbst gegebenen Formeln die Reduction vom mittleren Aequinoctium des Jahresanfanges auf das wahre des Datum liefern, für die verlangte Reduction:

$$\text{in Rectasc. } -17''1 \qquad \text{in Decl. } -7''3\,;$$

will man aber z. B. den Normalort auf das mittlere Aequinoctium 1870.0 beziehen, so findet sich der Einfluss der Präcession (vergl. I pag. 84):

$$\text{in Rectasc. } -46''1 \qquad \text{in Decl. } -20''0$$

und man erhält demnach für den auf das mittl. Aequ. 1870.0 bezogenen Normalort

$$\begin{array}{lcc} & \alpha & \delta \\ \text{1871 Sept. 15.5} & 356^\circ 36' 23''0 & -4^\circ 20' 8''7\,. \end{array}$$

Die neueren Jahrgänge des Berliner Jahrbuches gestatten aber bekanntlich die Reduction eines beliebigen wahren Aequinoctium auf das mittlere des nächstgelegenen Jahrzehntes direct auszuführen.

Da ich in der Folge zur Erläuterung der angeführten Methoden als Beispiel die ausführliche Bearbeitung des Planeten Erato wähle, so führe ich gleich hier die Orte an, die sich aus der ähnlichen Behandlung der Beobachtungen der übrigen Oppositionen ergeben, und setze daneben die auf dasselbe Aequinoctium bezogenen äquatorealen Sonnencoordinaten nach Le Verrier*); die dem Datum in der Klammer nachfolgende Zahl zeigt die Anzahl der zum Normalorte verbundenen Beobachtungen an:

	α	δ	X	Y	Z	mittl. Aequinoct.
1860 Sept. 10.5 (5)	8° 41′ 29″8	+ 0° 30′ 6″2	−1.0024059	+0.0452085	+0.0196157	1860.0
1861 Dec. 28.5 (4)	124 41 40.1	+18 57 53.2	+0.1242279	−0.8948019	−0.3882817	
1863 April 10.5 (1)	184 36 25.5	+ 0 55 11.0	+0.9389739	+0.3224833	+0.1399321	
1871 Sept. 15.5 (6)	356 36 23.0	− 4 20 8.7	−0.9966609	+0.1184494	+0.0513987	1870.0
1873 Jan. 16.5 (5)	110 10 58.2	+21 19 13.8	+0.4457436	−0.8046120	−0.3491156	
1874 März 22.5 (4)	183 28 45.8	+ 1 17 38.5	+0.9965770	+0.0338177	+0.0146734	
1875 Mai 21.5 (4)	235 16 33.9	−16 43 4.2	+0.4985747	+0.8085520	+0.3508195	1880.0
1876 Juli 18.5 (2)	305 9 24.3	−19 14 35.0	−0.4552539	+0.8334188	+0.3616114	
1877 Nov. 24.5 (6)	46 46 34.3	+14 3 47.2	−0.4500626	−0.8054688	−0.3494796	

B. Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit strenger Berücksichtigung der Principien der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 1. Allgemeines.

Verbindet man die Forderungen der Methode der kleinsten Quadrate mit dem hier vorgelegten Probleme, so sieht man sofort, dass man in dem gegebenen Falle die daselbst verlangte lineare Form zwischen den Fehlern und den Unbekannten nur dadurch herstellen kann, dass man als Ausgangspunkt der Untersuchung genäherte richtige Elemente, die man sich stets wird verschaffen können, annimmt, und die Verbesserungen der zu Grunde gelegten Elemente als Unbekannte in das Problem einführt, so dass man diese Incremente als Grössen erster Ordnung (also adäquat den differentiellen Aenderungen) auffassen kann; es wird jede Aenderung in einer beobachteten Coordinate ∂B dargestellt werden können durch:

$$\partial B = a_1 \partial E_1 + a_2 \partial E_2 + a_3 \partial E_3 + a_4 \partial E_4 + a_5 \partial E_5 + a_6 \partial E_6$$

wobei E_1, E_2, ... E_6 die Elemente darstellen und a_1, a_2, ... a_6 die entsprechenden Differentialquotienten, es können unter Umständen noch mehre Glieder ein-

* Die Correction der Le Verrier'schen Nutation um das Glied $+0''128 \sin (\odot - P)$ ist hierbei berücksichtigt, vergleiche hierbei die diesbezügliche Bemerkung in den erläuternden Anhängen der Berliner Jahrbucher.

treten, wenn man z. B. auf Grössen von der Ordnung der Störungen Rücksicht nimmt und etwa Verbesserungen der angewandten störenden Massen auffinden will u. s. w., es wird sich aber in der Form der obigen Gleichungen durch diese Erweiterungen nichts ändern; hierbei könnte noch erwähnt werden, dass eigentlich 7 Elemente in Betracht zu ziehen sind, wenn man die Maasse des betreffenden Körpers und deren Verbesserung aufsuchen wollte; doch würde aus diesen Gleichungen aus leicht ersichtlichen Gründen eine Bestimmung dieses siebenten Elementes mit Sicherheit niemals möglich sein, und ausserdem wird die Masse derjenigen Himmelskörper, die hier in Betracht kommen, so wenig von der Null verschieden sein, dass man ohne Bedenken den Nullwerth für deren Masse substituiren kann; ich werde daher auf diesen Umstand nicht weiter Rücksicht nehmen.

Man erhält für jede vollständige Beobachtung oder für jeden Normalort, da derselbe 2 Coordinaten gibt, 2 Bedingungsgleichungen von der oben aufgestellten Form; überschreitet nun die Anzahl der Bedingungsgleichungen die Zahl der Elemente (in unserem Falle 6), so wird man nach der Methode der kleinsten Quadrate die erforderlichen Incremente der Elemente suchen, um die wahrscheinlichsten Elemente zu erhalten. Um aber diese Rechnungen ausführen zu können, muss die Berechnung der Differentialquotienten ermöglicht werden und es sollen in den folgenden Paragraphen die hierfür nothigen Entwickelungen vorgenommen werden.

---

§ 2. Darstellung der Variationen der Beobachtungen durch die Variationen des Knotens, der Neigung, der Länge in der Bahn und des Radiusvectors.

Die Ausdrücke für die rechtwinkeligen heliocentrischen Coordinaten, denen dasselbe Coordinatensystem zu Grunde liegt, auf welches sich die Elemente beziehen, sind (vergl. I pag. 16):

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y &= r\,(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z &= r \sin u \sin i\,; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

denkt man sich für das Argument der Breite u geschrieben:

$$u = v + (\pi - \Omega)$$

wobei v die wahre Anomalie und π die Länge des Perihels vorstellt, so wird $v + \pi$ die Länge in der Bahn sein; diese Zerlegung erweist sich in der Folge besonders bei Bahnen mit kleinen Neigungen als sehr zweckmässig. Man erhält durch Differentiation der Ausdrücke (1) nach $(v + \pi)$, r, Ω und i leicht:

$$\frac{\partial x}{\partial (v+\pi)} = -r\,(\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i)$$

$$\frac{\partial y}{\partial (v+\pi)} = -r\,(\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i)$$

$$\frac{\partial z}{\partial (v+\pi)} = r \cos u \sin i$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sin u \sin i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = 2\, r \sin \tfrac{1}{2} i^2 \sin (u - \Omega)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Omega} = 2\, r \sin \tfrac{1}{2} i^2 \cos (u - \Omega)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Omega} = - r \cos u \sin i$$

$$\frac{\partial x}{\partial i} = r \sin u \sin \Omega \sin i$$

$$\frac{\partial y}{\partial i} = - r \sin u \cos \Omega \sin i$$

$$\frac{\partial z}{\partial i} = r \sin u \cos i \,.$$

Um die voranstehenden Formeln sofort einfacher zu gestalten, soll als Ausgangspunkt der Zählung in der Fundamentalebene der Punkt Ω gewählt werden; dann ist in den obigen Ausdrücken $\Omega = 0$ zu setzen und man erhält:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial (v+\pi)} &= - r \sin u & \qquad \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos u \\
\frac{\partial y}{\partial (v+\pi)} &= r \cos u \cos i & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin u \cos i \\
\frac{\partial z}{\partial (v+\pi)} &= r \cos u \sin i & \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin u \sin i \\
\frac{\partial x}{\sin i\, \partial \Omega} &= r \sin u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i & \frac{\partial x}{\partial i} &= 0 \\
\frac{\partial y}{\sin i\, \partial \Omega} &= r \cos u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i & \frac{\partial y}{\partial i} &= - r \sin u \sin i \\
\frac{\partial z}{\sin i\, \partial \Omega} &= - r \cos u & \frac{\partial z}{\partial i} &= r \sin u \cos i
\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Um nun die Aenderungen der rechtwinkeligen heliocentrischen Coordinaten auf die geocentrischen polaren zu übertragen, erinnere man sich der (I pag. 31) gegebenen Ausdrücke; man erhält dann mit Rücksicht auf den Ausgangspunkt der Zählung, wenn man mit α und δ die polaren Coordinaten, denen das oben gewählte System zu Grunde liegt, und mit Δ die geocentrische Entfernung bezeichnet:

$$\partial \alpha \cos \delta = - \frac{\sin (\alpha - \Omega)}{\Delta}\, \partial x + \frac{\cos (\alpha - \Omega)}{\Delta}\, \partial y$$

$$\partial \delta = - \frac{\cos (\alpha - \Omega)}{\Delta} \sin \delta\, \partial x - \frac{\sin (\alpha - \Omega)}{\Delta} \sin \delta\, \partial y + \frac{\cos \delta}{\Delta}\, \partial z \,.$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die Variationen aus 2), so erhält man leicht für die Variationen der in der Fundamentalebene gezählten polaren Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial(v+\pi)} &= \frac{r}{\Delta}\{\sin(\alpha-\Omega)\sin u+\cos(\alpha-\Omega)\cos u\cos i\}\\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial r} &= \frac{1}{\Delta}\{-\sin(\alpha-\Omega)\cos u+\cos(\alpha-\Omega)\sin u\cos i\}\\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\sin i\,\partial\Omega} &= \frac{r}{\Delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i\cos(\alpha-\Omega+u)\\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial i} &= -\frac{r}{\Delta}\sin u\cos(\alpha-\Omega)\sin i\,;
\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

für die vertical auf die Fundamentalebene gezählte Coordinate findet sich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial(v+\pi)} &= \frac{r}{\Delta}\{\cos(\alpha-\Omega)\sin u\sin\delta-\sin(\alpha-\Omega)\cos u\cos i\sin\delta+\cos u\sin i\cos\delta\}\\
\frac{\partial\delta}{\partial r} &= \frac{1}{\Delta}\{-\cos(\alpha-\Omega)\cos u\sin\delta-\sin(\alpha-\Omega)\sin u\cos i\sin\delta+\sin u\sin i\cos\delta\}\\
\frac{\partial\delta}{\sin\,\partial\Omega} &= -\frac{r}{\Delta}\{\sin(\alpha-\Omega+u)\sin\delta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i+\cos u\cos\delta\}\\
\frac{\partial\delta}{\partial i} &= \frac{r}{\Delta}\{\sin(\alpha-\Omega)\sin\delta\sin i+\cos\delta\cos i\}\sin u\,.
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Die Einführung einiger Hilfswinkel wird die Berechnung der Variationen nach der Länge in der Bahn und dem Radiusvector wesentlich erleichtern; setzt man nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
A\sin A' &= \cos(\alpha-\Omega)\cos i\,, & m\sin M &= \sin i\,, & B\sin B' &= m\sin(M+\delta)\\
A\cos A' &= \sin(\alpha-\Omega)\,, & m\cos M &= -\sin(\alpha-\Omega)\cos i\,, & B\cos B' &= \cos(\alpha-\Omega)\sin\delta
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial(v+\pi)} &= \frac{r}{\Delta}A\sin(A'+u)\,, & \frac{\partial\delta}{\partial(v+\pi)} &= \frac{r}{\Delta}B\sin(B'+u)\\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial r} &= -\frac{1}{\Delta}A\cos(A'+u)\,, & \frac{\partial\delta}{\partial r} &= -\frac{1}{\Delta}B\cos(B'+u)\,.
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

welche Formen sich in den späteren Rechnungen sehr bequem erweisen werden. Die Variationen nach den Elementen Ω und i haben in den Ausdrücken 3) und 4) bereits hinlänglich bequeme Formen für die Rechnung.

Um den Vortheil der eben angegebenen Formeln zu erweisen, denken wir uns die Variation von $(v+\pi)$ und r nach irgend einem Elemente dargestellt durch:

$$\frac{\partial(v+\pi)}{\partial E} = V\,, \quad \frac{\partial r}{\partial E} = R\,;$$

setzt man nun:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial E} = -\frac{R}{r} = N\sin N'$$
$$V = N\cos N'\,,$$

und beachtet, dass ist:

$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial E} = \left(\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial(v+\pi)}\right)\left(\frac{\partial(v+\pi)}{\partial E}\right)+\left(\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial E}\right)$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial E} = \left(\frac{\partial\delta}{\partial(v+\pi)}\right)\left(\frac{\partial(v+\pi)}{\partial E}\right)+\left(\frac{\partial\delta}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial E}\right)\,.$$

so wird die gemeinsame Form aller Differentialquotienten zwischen den vier Elementen, welche $(v+\pi)$ und r bestimmen, und den beobachteten Orten die folgende sein:

$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial E} = \frac{r}{\Delta}\,A\,N\sin(N' + A' + u)$$

$$-\frac{\partial\delta}{\partial E} = \frac{r}{\Delta}\,A\,N\sin(N' + B' + u_1)\,,$$

welche Form für die logarithmische Rechnung eine sehr bequeme ist.

§ 3. Entwickelung der Differentialquotienten von r und v nach den Elementen in Bahnen mit mässiger Excentricität.

Die vorstehend ermittelten Differentialausdrücke der Coordinaten eines Himmelskörpers sind vorerst nach den Elementen Ω und i entwickelt und ausserdem durch die Variationen der Coordinaten $(v + \pi)$ und r ausgedrückt, welche letzteren Variationen in solche der Elemente umgesetzt werden müssen. Diese Aufgabe muss, um practisch brauchbare Resultate zu erlangen, in zweifacher Weise gelöst werden, je nachdem der kreisförmige oder der parabolische Character der Bahn überwiegt. Indem ich die Lösung der letzteren Aufgabe auf den folgenden Paragraphen verschiebe, soll hier die Entwickelung vorgenommen werden, die in elliptischen Bahnen von mässiger Excentricität Anwendung findet, wobei ich bemerke, dass hierunter keineswegs die Beschränkung auf kleine Excentricitäten zu verstehen ist; so werden beispielsweise die folgenden Formeln bei allen periodischen Kometen mit mässiger Umlaufszeit mit Vortheil benützt werden können.

Die wahre Anomalie v wird in elliptischen Bahnen bestimmt durch die Gleichungen (vergl. I pag. 15 und 46)

$$M_0 + \mu\,t = E - e\sin E\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E\,, \tag{2}$$

wobei die Zeit t in Einheiten des mittleren Sonnentages von derjenigen Epoche an zu zählen ist, für welche die mittlere Anomalie M_0 gilt. Die Variation der ersteren Gleichung gibt unter Anwendung einiger offenkundiger Reductionen:

$$\partial M_0 + t\,\partial\mu = \frac{r}{a}\,\partial E - \sin E\cos\varphi\,\partial\varphi\,;$$

Da aber die Relation besteht:

$$\cos\varphi\sin E = \frac{r}{a}\sin v\,,$$

so wird:

$$\partial E = \frac{a}{r}(\partial M_0 + t\,\partial\mu) + \sin v\,\partial\varphi\,. \tag{3}$$

Denkt man sich die Gleichung 2) logarithmisch geschrieben und bildet dann die Variation derselben, so findet sich leicht:

$$\frac{\partial v}{\sin v} = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\partial E}{\sin E}\,;$$

verbindet man diesen Ausdruck mit 3), so resultirt sofort, wenn man auf die Relation

$$\delta(v+\pi) = \delta v + \delta \pi$$

Rücksicht nimmt, der Ausdruck:

$$\delta(v+\pi) = \delta\pi + \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,(\delta M_0 + t\,\delta\mu) + \frac{\sin v}{\cos\varphi}(2+e\cos v)\,\delta\varphi\,. \qquad 4)$$

Um die Variation des Radiusvector zu finden, differentiire man die Gleichung:

$$r = a(1 - e\cos E);$$

man erhält dadurch:

$$\delta r = \frac{r}{a}\,\delta a + a\sin\varphi\sin E\,\delta E - a\cos E\cos\varphi\,\delta\varphi\,; \qquad 5)$$

nun ist aber:

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\,, \quad \delta\mu = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{a}\,\delta a\,;$$

ersetzt man überdiess δE in 5) durch den Ausdruck in 3) (pag. 386), so findet sich zunächst:

$$\delta r = a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin v\,\delta M_0 + \left(t\,a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin v - \frac{2}{3}\frac{r}{\mu}\right)\delta\mu + a\,(\sin\varphi\sin E\sin v - \cos E\cos\varphi)\,\delta\varphi\,.$$

Der Coëfficient von $\delta\varphi$ lässt sich wesentlich vereinfachen; berücksichtigt man nämlich die Relationen:

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v}\,, \quad \sin E = \frac{\sin v\cos\varphi}{1 + e\cos v}\,,$$

so wird:

$$\frac{\delta r}{\delta\varphi} = \frac{a}{1+e\cos v}\left\{\sin\varphi\cos\varphi\sin v^2 - \cos\varphi\cos v - \sin\varphi\cos\varphi\right\} =$$
$$-\frac{a\cos\varphi\cos v}{1+e\cos v}(1+e\cos v)\,;$$

demgemäss wird man haben:

$$\delta r = a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v\,\delta M_0 + \left(t\cdot a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v - \frac{2}{3}\frac{r}{\mu\sin 1''}\right)\delta\mu - a\cos\varphi\cos v\,\delta\varphi\,, \qquad 6)$$

wobei ich sofort μ mit $\sin 1''$ multiplicirt angesetzt habe, weil μ gewöhnlich in Bogensekunden gegeben wird.

Die Formeln 4) und 6) stellen also die Variationen der Coordinaten $(v+\pi)$ und r durch die Variationen der Elemente π (die Länge des Perihels), M_0 (die mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche), μ (die mittlere tägliche siderische Bewegung) und φ (der Excentricitätswinkel $\sin\varphi = e$) dar, womit das gestellte Problem gelöst erscheint. Doch werden noch weitere Transformationen in dem Falle nöthig, wo sich die Bahn sehr wenig vom Kreise unterscheidet, und in der That werden sich die folgenden Transformationen bei der Anwendung auf alle Planetenbahnen empfehlen, während die Anwendung auf die Bahnen periodischer Kometen kurzer Umlaufszeit die Beibehaltung der obigen Formeln wünschenswerth erscheinen lässt.

Ist nämlich die Bahn sehr nahe kreisförmig, so wird in 4) der Coëfficient von $\delta\pi$ und δM_0 nahe gleich und man wird grosse Aenderungen des einen

Elementes bei entsprechender umgekehrter Aenderung des anderen vornehmen können, ohne dass der Ort in der Bahn sich wesentlich ändert; aus diesem Umstande aber entsteht ein Nachtheil für die Bequemlichkeit und Sicherheit der Rechnung, da die obigen Differentialformeln nur kleine Aenderungen der Elemente voraussetzen. In Etwas wird man diesen Nachtheil beheben, so dass nur grosse Aenderungen das eine Element treffen können, wenn man statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge (L_0) zur Zeit der Epoche einführt; es ist:

$$L_0 = M_0 + \pi \ ,$$

also

$$\partial M_0 = \partial L_0 - \partial \pi \ ,$$

und man erhält demnach für 4) und 6) (pag. 387) die folgenden Formen;

$$\left.\begin{aligned} \partial(v+\pi) &= \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi \left\{\partial L_0 + t\,\partial\mu\right\} + \left\{1 - \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\right\}\partial\pi + \frac{\sin v}{\cos\varphi}\left\{2 + e\cos v\right\}\partial\varphi \\ \partial r &= a\operatorname{tg}\varphi\sin v\,\partial L_0 + \left(t\,.\,a\operatorname{tg}\varphi\sin v - \frac{2}{3}\,\frac{r}{\mu\sin 1''}\right)\partial\mu - a\operatorname{tg}\varphi\sin v\,\partial\pi - \\ &\quad - a\cos\varphi\cos v\,\partial\varphi \ ; \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

diese Form hat indess immer noch den Nachtheil, dass für nahezu kreisförmige Bahnen der Coëfficient von $\partial\pi$ sich der Null nähert, da derselbe von der Ordnung der Excentricität wird, so dass grosse Variationen, die die Grenzen der differentiellen Aenderungen weit überschreiten, in π vorgenommen werden können, ohne den Ort der Bahn wesentlich zu verschieben.

Beachtet man, dass für nahe kreisförmige Bahnen mit Weglassung der Glieder von der Ordnung der Excentricität in die Variation des Elementes geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial(v+\pi)}{\partial\pi} = -2\cos v\sin\varphi \ , \qquad \frac{\partial(v+\pi)}{\partial\varphi} = 2\sin v \ ,$$

so ergibt sich sofort, dass die Einführung der Elemente:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\sin\pi \\ \Psi &= \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\cos\pi \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

für den Kreis jede Unsicherheit schwinden lässt, und dass durch dieselbe ein wesentlich linearer Character der Funktionen erreicht wird.

Um nun diese Elemente, die ich wegen der Gleichförmigkeit mit den übrigen in Bogenmaass angesetzt habe, in die Gleichungen 7) einführen zu können, bedenke man, dass die Differentiation von 8) ergibt:

$$\begin{aligned} \partial\Phi &= \sin\varphi\cos\pi\,\partial\pi + \sin\pi\cos\varphi\,\partial\varphi \\ \partial\Psi &= -\sin\varphi\sin\pi\,\partial\pi + \cos\pi\cos\varphi\,\partial\varphi \ , \end{aligned}$$

wobei die Aenderungen $\partial\pi$ und $\partial\varphi$ ebenfalls in Bogenmaass angenommen sind; daraus bestimmt sich leicht:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi\,\partial\pi &= \cos\pi\,\partial\Phi - \sin\pi\,\partial\Psi \\ \cos\varphi\,\partial\varphi &= \sin\pi\,\partial\Phi + \cos\pi\,\partial\Psi \ . \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

Die Substitution der Ausdrücke 9) in 7) (pag. 388) ergibt:

$$
\left.\begin{aligned}
\partial(v+\pi) &= \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,(\partial L_0 + t\,\partial\mu) + \\
&+ \left\{\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\right)\frac{\cos\pi}{\sin\varphi} + \frac{\sin v}{\cos\varphi^2}(2+e\cos v)\sin\pi\right\}\partial\Phi \\
&+ \left\{-\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\right)\frac{\sin\pi}{\sin\varphi} + \frac{\sin v}{\cos\varphi^2}(2+e\cos v)\cos\pi\right\}\partial\Psi \\
\partial r &= a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v\,\partial L_0 + \left(t\cdot a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin v - \frac{2}{3}\frac{r}{\mu\sin 1''}\right)\partial\mu - \\
&- a\left(\frac{\sin v}{\cos\varphi}\cos\pi + \cos v\sin\pi\right)\partial\Phi \\
&+ a\left(\frac{\sin v}{\cos\varphi}\sin\pi - \cos v\cos\pi\right)\partial\Psi\,.
\end{aligned}\right\} \quad 10)
$$

Diese Formen können, so weit dieselben die Coëfficienten von $\partial\Phi$ und $\partial\Psi$ in dem Ausdrucke für $\partial(v+\pi)$ betreffen, so transformirt werden, dass der Berechnung derselben keine weitere Unsicherheit anhaftet; die analogen Coëfficienten in ∂r sind diesem Nachtheile ohnehin nicht unterworfen.

Man kann schreiben:

$$\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\right)\mathrm{cosec}\,\varphi = \frac{\mathrm{cosec}\,\varphi}{\cos\varphi^2}\left\{1-e^2-\frac{(1+e\cos v)^2}{\cos\varphi}\right\};$$

nun ist aber:

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2+2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = 1+\frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi};$$

man hat also:

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\right)\mathrm{cosec}\,\varphi &= \frac{\mathrm{cosec}\,\varphi}{\cos\varphi^2}\left\{1-e^2-(1+e\cos v)^2-2\left(\frac{p}{r}\right)^2\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi}\right\} \\
&= -\frac{1}{\cos\varphi^2}\left\{\cos v(2+e\cos v)+e\left(1+\left(\frac{p}{r}\right)^2\frac{1}{2\cos\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi^2}\right)\right\};
\end{aligned}
$$

demnach ist:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(v+\pi)}{\partial\Phi} &= -\left\{\cos(v+\pi)\frac{2+e\cos v}{\cos\varphi^2} + \frac{\Psi\sin 1''}{\cos\varphi^2}\left(1+\frac{(1+e\cos v)^2}{2\cos\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi^2}\right)\right\} \\
\frac{\partial(v+\pi)}{\partial\Psi} &= \left\{\sin(v+\pi)\frac{2+e\cos v}{\cos\varphi^2} + \frac{\Phi\sin 1''}{\cos\varphi^2}\left(1+\frac{(1+e\cos v)^2}{2\cos\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi^2}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad 11)
$$

Will man, was nicht gerade nöthig ist, die Ausdrücke für ∂r ähnlich transformiren, so findet sich leicht:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial\Phi} &= -a\left\{\sin(v+\pi) + \frac{\Psi\sin 1''\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}\sin v\right\} \\
\frac{\partial r}{\partial\Psi} &= -a\left\{\cos(v+\pi) - \frac{\Phi\sin 1''\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}\sin v\right\}
\end{aligned}\right\} \quad 12)
$$

Stellt man daher die gewonnenen Resultate zusammen, so erhält man für die Anwendung auf Planetenbahnen:

$$\left.\begin{aligned}
\partial(v+\pi) &= \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,\partial L_0 + \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\cdot t\cdot\partial\mu\, - \\
&\quad - \left\{\cos(v+\pi)\,\frac{2+e\cos v}{\cos\varphi^2} + \frac{\Psi\sin 1''}{\cos\varphi^2}\left(1+\frac{(1+e\cos v)^2}{2\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2}\right)\right\}\partial\Phi \\
&\quad + \left\{\sin(v+\pi)\,\frac{2+e\cos v}{\cos\varphi^2} + \frac{\Phi\sin 1''}{\cos\varphi^2}\left(1+\frac{(1+e\cos v)^2}{2\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2}\right)\right\}\partial\Psi \\
\partial r &= a\operatorname{tg}\varphi\sin v\,\partial L_0 + \left(t\cdot a\operatorname{tg}\varphi\sin v - \frac{2}{3}\,\frac{r}{\mu\sin 1''}\right)\partial\mu\, - \\
&\quad - a\left\{\sin(v+\pi) + \frac{\Psi\sin 1''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}\sin v\right\}\partial\Phi \\
&\quad - a\left\{\cos(v+\pi) - \frac{\Phi\sin 1''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}\sin v\right\}\partial\Psi\,.
\end{aligned}\right\}\quad 13)$$

Für die Bahnen der periodischen Kometen wird man aber die Formeln 4) und 6) (pag. 387) unverändert anwenden, also haben:

$$\left.\begin{aligned}
\partial(v+\pi) &= \partial\pi + \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,\partial M_0 + \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\, t\cdot\partial\mu + \frac{\sin v}{\cos\varphi}(2+e\cos v)\,\partial\varphi \\
\partial r &= a\operatorname{tg}\varphi\sin v\,\partial M_0 + \left(t\cdot a\operatorname{tg}\varphi\sin v - \frac{2}{3}\,\frac{r}{\mu\sin 1''}\right)\partial\mu - a\cos\varphi\cos v\,\partial\varphi\,.
\end{aligned}\right\}\quad 14)$$

Um endlich die Differentialquotienten dem oben (§ 2 pag. 385) angegebenen Kunstgriffe entsprechend zu verwerthen, hat man für jeden Ort zu rechnen:

Bei Planetenbahnen:

$$\left.\begin{aligned}
A\sin A' &= \cos(\alpha-\Omega)\cos i \\
A\cos A' &= \sin(\alpha-\Omega) \\
m\sin M &= \sin i \\
m\cos M &= -\sin(\alpha-\Omega)\cos i \\
B\sin B' &= m\sin(M+\delta) \\
B\cos B' &= \cos(\alpha-\Omega)\sin\delta \\
u &= v+\omega
\end{aligned}\right\}\quad \text{I)}$$

dann weiter:

$$\left.\begin{aligned}
F\sin F' &= -\frac{a}{r}\operatorname{tg}\varphi\sin v \\
F\cos F' &= \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi \\
G\sin G' &= t\cdot F\sin F' + \frac{2}{3\mu\sin 1''} \\
G\cos G' &= t\cdot F\cos F' \\
\frac{\Psi\sin 1''\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi} = l\,,\quad \frac{\Psi\sin 1''}{\cos\varphi^2} &= n\,,\quad \frac{2+\sin\varphi\cos v}{\cos\varphi^2} = d \\
\frac{\Phi\sin 1''\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi} = m\,,\quad \frac{\Phi\sin 1''}{\cos\varphi^2} &= q\,,\quad 1+\frac{(1+\sin\varphi\cos v)^2}{2\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2} = f \\
H\sin H' &= \frac{a}{r}\{\sin(v+\pi) + l\sin v\} \\
H\cos H' &= -\{d\cos(v+\pi) + nf\} \\
K\sin K' &= \frac{a}{r}\{\cos(v+\pi) - m\sin v\} \\
K\cos K' &= \{d\sin(v+\pi) + qf\}
\end{aligned}\right\}\quad \text{II)}$$

wobei t in mittleren Sonnentagen von der Zeit der Epoche an zu zählen ist. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial L_0} &= \frac{r}{\varDelta} A F \sin(F' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial L_0} &= \frac{r}{\varDelta} B F \sin(F' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\mu} &= \frac{r}{\varDelta} A G \sin(G' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial\mu} &= \frac{r}{\varDelta} B G \sin(G' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\Phi} &= \frac{r}{\varDelta} A H \sin(H' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial\Phi} &= \frac{r}{\varDelta} B H \sin(H' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\pi} &= \frac{r}{\varDelta} A K \sin(K' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial\pi} &= \frac{r}{\varDelta} B K \sin(K' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\sin i\,\partial\Omega} &= \frac{r}{\varDelta} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \cos(\alpha - \Omega + u) \\
\frac{\partial\delta}{\sin i\,\partial\Omega} &= -\frac{r}{\varDelta}\left\{\sin(\alpha - \Omega + u)\sin\delta \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i + \cos u \cos\delta\right\} \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial i} &= -\frac{r}{\varDelta} \sin u \cos(\alpha - \Omega)\sin i \\
\frac{\partial\delta}{\partial i} &= \frac{r}{\varDelta}\left\{\sin(\alpha - \Omega)\sin\delta\sin i + \cos\delta\cos i\right\}\sin u\,.
\end{aligned}\right\} \text{III)}$$

Bei Bahnen periodischer Kometen kurzer Umlaufszeit:

Die Formeln I) werden ungeändert benützt und ebenso die Bestimmung von F, F' und G, G'; dagegen hat man zu setzen:

$$\left.\begin{aligned}
P \sin P' &= \frac{a}{r} \cos\varphi \cos v \\
P \cos P' &= \frac{\sin v}{\cos\varphi}(2 + e\cos v)
\end{aligned}\right\} \text{II)}$$

dann wird:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial M_0} &= \frac{r}{\varDelta} A F \sin(F' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial M_0} &= \frac{r}{\varDelta} B F \sin(F' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\mu} &= \frac{r}{\varDelta} A G \sin(G' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial\mu} &= \frac{r}{\varDelta} B G \sin(G' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\varphi} &= \frac{r}{\varDelta} A P \sin(P' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial\varphi} &= \frac{r}{\varDelta} B P \sin(P' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\pi} &= \frac{r}{\varDelta} A \sin(A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial\pi} &= \frac{r}{\varDelta} B \sin(B' + u)
\end{aligned}\right\} \text{III)}$$

Die Formeln für $\partial\Omega$ und ∂i bleiben ungeändert.

Werden die Neigungen gegen die Fundamentalebene verschwindend klein, so wird man mit den obigen Formeln für $\delta\Omega$ nicht ausreichen, man wird ähnlich wie in der Störungsrechnung (pag. 223) die Elemente

$$\sin i \sin \Omega \quad \text{und} \quad \sin i \cos \Omega$$

einführen; doch gehe ich auf diese Formeln hier nicht näher ein, weil man von denselben wohl niemals Gebrauch machen wird.

Die vorstehend entwickelten Formeln bedürfen noch zweier Zusätze; man erhält, wenn man von den Formeln für Planetenbahnen Gebrauch macht, nicht die Elemente π und e, sondern die dieselben ersetzenden Grössen Φ und Ψ; man muss daher den Einfluss kennen, den die Aenderungen der letzteren Grössen auf die ersteren ausüben; hierbei wird es aber nicht zweckmässig sein, sich auf die differentiellen Verhältnisse zu beschränken, da eben die Aenderungen von Φ und Ψ in π durch die im Allgemeinen geringe Excentricität dividirt erscheinen. Die strengen Formeln ergeben sich leicht auf folgendem Wege. Es ist:

$$e \sin \pi = e_0 \sin \pi_0 + \delta\Phi$$
$$e \cos \pi = e_0 \cos \pi_0 + \delta\Psi\,,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\left.\begin{aligned} e \sin(\pi - \pi_0) &= \delta\Phi \cos \pi_0 - \delta\Psi \sin \pi_0 \\ e \cos(\pi - \pi_0) &= e_0 + \delta\Phi \sin \pi_0 + \delta\Psi \cos \pi_0\,; \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

setzt man daher:

$$\left.\begin{aligned} \delta\Phi &= n \sin N \\ \delta\Psi &= n \cos N\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

so ist:

$$\operatorname{tang}(\pi - \pi_0) = \operatorname{tang}\delta\pi = \frac{n \sin(N - \pi_0)}{e_0 + n \cos(N - \pi_0)}\,,$$

welche Formel der strenge Ausdruck der gesuchten Aenderung ist. Die Grösse n erscheint hierbei im Bogenmaasse; macht man daher von der bekannten Reihenentwickelung (vergl. I. pag. 28) Gebrauch und setzt:

$$\frac{n}{\sin \varphi_0} = p\,, \quad \text{V)}$$

so ist:

$$\delta\pi = p \sin(N - \pi_0) + \tfrac{1}{2} p^2 \sin 1'' \sin 2(N - \pi_0) + \tfrac{1}{3} p^3 (\sin 1'')^2 \sin 3(N - \pi_0) + \dots \quad \text{VI)}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 15) beziehungsweise mit $\sin \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)$ und $\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)$ und addirt, so erhält man leicht:

$$e - e_0 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\pi + \pi_0)}{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)}\,\delta\Phi + \frac{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)}{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)}\,\delta\Psi\,.$$

oder mit Einführung des Werthes N:

$$e - e_0 = \frac{n \cos\{N - \frac{1}{2}(\pi + \pi_0)\}}{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)} = \delta e \quad \text{VII)}$$

Um aber ∂e auf q zu übertragen, kann man consequenter Weise sich auf die ersten Potenzen von ∂e beschränken und man hat dann:

$$\partial q = \frac{\Delta e}{\cos q_0} . \qquad \text{VIII}$$

Ein weiterer Zusatz resultirt daraus, dass die gefundenen Aenderungen sich auf äquatoreale Elemente beziehen und eine Uebertragung auf die Aenderungen der ekliptikalen Elemente erwünscht ist. Zu diesem Zwecke wird es angemessen sein, zunächst die diesbezüglichen Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie zu entwickeln.

Geht man von den beiden Gleichungen aus:

$$\sin a \sin C = \sin c \sin A$$

$$\cos a \sin C = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c$$

und differentiirt nach allen Grössen, so erhält man, da

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = - \cos C$$

ist,

$$-\sin C \sin a \cdot da + \cos a \cos C\, dC = -\cos C\, dB - (\sin B \sin A - \cos A \cos B \cos c)\, dA$$
$$- \sin A \cos B \sin c\, dc .$$

$$\sin C \cos a\, da + \sin a \cos C\, dC = \sin c \cos A\, dA + \sin A \cos c\, dc .$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $-\sin a$, die zweite mit $\cos a$ und addirt, so wird, wenn man beachtet, dass

$$\sin A (\cos B \sin c \sin a + \cos c \cos a) = \sin A \cos b$$

ist, jetzt:

$$\sin C\, da = \sin a \cos C\, dB + \cos b \sin A\, dc$$
$$+ dA \{ \sin B \sin A \sin a - \cos A \cos B \cos c \sin a + \cos A \sin c \cos a \} .$$

Der letzte Coëfficient ist aber $\sin b$; denn setzt man im ersten Gliede:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A ,$$

und im zweiten Gliede:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \cos c \sin b \cos A ,$$

so wird derselbe geschrieben werden können:

$$\sin b - \sin b \cos A^2 + \cos A \sin c (\cos a - \cos b \cos c) + \cos A^2 \cos c^2 \sin b ;$$

beachtet man noch die Relation:

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A ,$$

so erhellt unmittelbar die eben aufgestellte Behauptung.

Man hat also:

$$\sin C\, d a = \sin a \cos C\, d B + \sin b\, d A + \sin A \cos b\, d c ,$$

eine Formel, die man selten angeführt findet.

Andererseits resultirt aus der Formel:

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C$$

durch Differentiation:

$$-\sin A\, d A = (\cos B \sin C \cos a + \sin B \cos C)\, d B$$
$$+ (\sin B \cos C \cos a + \cos B \sin C)\, d C$$
$$- \sin B \sin C \sin a\, d a .$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\cos B \sin C \cos a + \sin B \cos C &= \sin A \cos c \\ \sin B \cos C \cos a + \cos B \sin C &= \sin A \cos b \\ \sin B \sin a &= \sin A \sin b \ ,\end{aligned}$$

somit

$$d A = - \cos c \, d B - \cos b \, d C + \sin b \sin C \, d a \ .$$

Betrachtet man nun das sphärische Dreieck zwischen der Ekliptik, dem Aequator und der Bahnlage, wobei der Bogen zwischen dem Aequator und der Ekliptik, welcher durch die Uebertragung der ekliptikalen Elemente auf den Aequator (vergl. I. pag. 9 ff.) bekannt ist, mit σ bezeichnet werden möge, setzt im Falle der Anwendung der ersten Formeln:

$$\begin{aligned} a &= \Omega & A &= 180 - i' \\ b &= \sigma & B &= \varepsilon \\ c &= \Omega' & C &= i \end{aligned}$$

im zweiten Falle:

$$\begin{aligned} a &= \sigma & A &= \varepsilon \\ b &= \Omega & B &= 180 - i' \\ c &= \Omega' & C &= i \ , \end{aligned}$$

und beachtet, dass die Variation von ε der Null gleich zu setzen ist, so erhält man die folgenden Formeln, denen ich sogleich auch die aus den zweiten Differentialformeln folgende Variation von i beigefügt habe, die sich ergibt, wenn man:

$$\begin{aligned} a &= \Omega' & A &= i \\ b &= \sigma & B &= \varepsilon \\ c &= \Omega & C &= 180 - i' \end{aligned}$$

setzt

$$\begin{aligned}\sin i \, d \Omega &= \cos \sigma \sin i' \, d \Omega' - \sin \sigma \, d i' \\ \sin i \, d \sigma &= \sin \varepsilon \cos \Omega \, d \Omega' - \sin \sigma \cos i \, d i' \\ d i &= \sin \sigma \sin i' \, d \Omega' + \cos \sigma \, d i' \ .\end{aligned}$$

Diese Formeln lassen sich noch zweckmässig transformiren.

Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned}\sin i' \, d \Omega' &= p \sin P \\ d i' &= p \cos P \ ,\end{aligned}$$

so erscheint im ersten Ausdrucke jene Grösse, die durch die obigen Formeln als Unbekannte erhalten wird und es ist:

$$\begin{aligned} d \Omega &= \frac{p}{\sin i} \sin (P - \sigma) \\ d i &= p \cos (P - \sigma) \ ; \end{aligned}$$

beachtet man, dass nach einer Fundamentalrelation der sphärischen Trigonometrie, wenn man das Dreieck zwischen der Bahn, der Ekliptik und dem Aequator betrachtet, die Gleichung gilt:

$$\sin\varepsilon \cos\Omega = -\cos i'' \sin i + \sin i'' \cos i \cos\sigma\,,$$

so erhält der Ausdruck für $d\sigma$ die Form:

$$d\sigma = \operatorname{cotg} i \cdot p \sin(P - \sigma) - \cos i'' d\Omega'\,.$$

Zu Folge der Relationen $\omega = \pi - \Omega = \omega' - \sigma = \pi' - \Omega' - \sigma$ wird jetzt:

$$d\pi = d\pi' - d\Omega' - d\sigma + d\Omega\,.$$

Man hat also:

$$d\pi = d\pi' - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} i'' d\Omega' + p \sin(P - \sigma) \left\{\frac{1}{\sin i} - \frac{1}{\operatorname{tg} i}\right\}$$

oder

$$d\pi = d\pi' + p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \sin(P - \sigma) - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i'' (\sin i'' d\Omega')\,.$$

Hierzu kommt noch, da:

$$L = \pi + M$$
$$L' = \pi' + M$$

ist, die weitere Relation:

$$L = L' + \pi - \pi'$$

woraus

$$dL = dL' + p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \sin(P - \sigma) - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i'' (\sin i'' d\Omega')$$

folgt.

Die gesammten Formeln für diese Uebertragung sind demnach die folgenden, wenn man wieder die Differentiation durch Variation ersetzt:

$$\left.\begin{aligned}
p \sin P &= \sin i'' \partial\Omega' \\
p \cos P &= \partial i'' \\
\partial i &= p \cos(P - \sigma) \\
\partial\Omega &= \frac{p}{\sin i} \sin(P - \sigma) \\
\Delta\pi &= p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \sin(P - \sigma) - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i'' (\sin i'' \partial\Omega') \\
\partial\pi &= \partial\pi' + \Delta\pi \\
\partial L &= \partial L' + \Delta\pi\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{IX}$$

Will man aber, was vielleicht weniger bequem ist, Alles durch $\sin i'' d\Omega'$ und di'' ausgedrückt erhalten, so hätte man zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\partial i &= \cos\sigma\, \partial i'' + \sin\sigma (\sin i'' \partial\Omega') \\
\partial\Omega &= -\frac{\sin\sigma}{\sin i} \partial i'' + \frac{\cos\sigma}{\sin i} (\sin i'' \partial\Omega') \\
\Delta\pi &= -\sin\sigma \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i\, \partial i'' + (\cos\sigma \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i'') (\sin i'' \partial\Omega') \\
\partial\pi &= \partial\pi' + \Delta\pi \\
\partial L &= \partial L' + \Delta\pi\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{X)}$$

---

§ 4. Entwickelung der Differentialquotienten von r und v nach den Elementen in nahezu parabolischen Bahnen.

Die im vorstehenden Paragraphen für die Ellipse entwickelten Differentialquotienten von r und v nach den Elementen sind für parabolische und hyperbolische Bahnen nicht anwendbar und werden selbst in Ellipsen, die sich wenig von der Parabel unterscheiden, bei der Rechnung höchst beschwerlich und unsicher. Der zuerst hervorgehobene Nachtheil der Beschränkung lässt sich aber durch eine geeignete Wahl der willkürlichen Constanten (Elemente) umgehen, und es werden leicht Formeln erlangt werden, die reell bleiben für jede Kegelschnittsgattung; ich werde diese Formeln aus den obigen für die Ellipse hergestellten Relationen ableiten, was gestattet ist, da die für die Ellipse gefundenen Formen sich von jenen für die Hyperbel nur dadurch unterscheiden, dass gewisse Grössen in der letzteren imaginär werden; da aber die Imaginären denselben Rechnungsoperationen, wie die Reellen, unterworfen werden dürfen, im Endresultate aber das Imaginäre eliminirt erscheint, so führt der eingeschlagene Vorgang auf richtige Resultate. Es war oben (pag. 387) gefunden worden:

$$\left.\begin{aligned} \partial v &= \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,\partial M_0 + t\,\partial\mu + (2+\sin\varphi\cos v)\frac{\sin v}{\cos\varphi}\,\partial\varphi \\ \partial r &= a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin v\,\partial M_0 + \left(t\cdot a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin v - \frac{2r}{3\mu}\right)\partial\mu - a\cos\varphi\cos v\,\partial\varphi \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Führt man statt der Elemente M_0, μ und φ die Elemente T (die Zeit des Periheldurchganges), q (der Perihelabstand) und e (die Excentricität) ein, so hat man zunächst:

$$M_0 = (t-T)\,\mu\,, \qquad a = \frac{q}{1-e}\,, \qquad \partial\mu = -\tfrac{3}{2}k\,\frac{\partial a}{a^{\frac{5}{2}}}$$

$$\partial M_0 = -\mu\,\partial T\,, \qquad \partial a = \frac{\partial q}{1-e} + \frac{q}{(1-e)^2}\,\partial e\,,\ \partial e = \cos\varphi\,\partial\varphi\,.$$

$$\mu_0 = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad p = q(1+e)\,.$$

Transformirt man mit Hilfe dieser Relationen die Ausdrücke (1), so erhält man nach einigen leicht ersichtlichen Umsetzungen die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \partial v &= -\frac{k\sqrt{q(1+e)}}{r^2}\,\partial T - \tfrac{3}{2}\,\frac{(t-T)k}{r^2}\sqrt{\frac{1+e}{q}}\,\partial q \\ &\quad + \left\{\left[1+\frac{q(1+e)}{r}\right]\sin v - \tfrac{3}{2}\,\frac{(t-T)k}{r^2}(1+e)^{\frac{3}{2}}\sqrt{q}\right\}\frac{\partial e}{1-e^2} \\ \partial r &= -\frac{k\,e\sin v}{\sqrt{q(1+e)}}\,\partial T + \left\{\frac{r}{q} - \tfrac{3}{2}\,\frac{(t-T)k}{q^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{e\sin v}{\sqrt{1+e}}\right\}\partial q \\ &\quad + \left\{r - q\cos v - \tfrac{3}{2}\,\frac{(t-T)k\,e\sin v}{\sqrt{q(1+e)}}\right\}\frac{\partial e}{1-e} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Das Formelsystem (2) erscheint nunmehr von der Gattung des Kegelschnittes unabhängig und würde in der That in jeder Beziehung sehr vortheilhaft sein, wenn nicht gerade in jenen Fällen, in denen man diese Formeln in Anwendung zieht, die

Bahnen einen nahezu parabolischen Charakter hätten, da sich in diesem Falle e nur wenig von der Einheit unterscheiden kann, so erhalten die Differentialquotienten von $\frac{dv}{de}$ und $\frac{dr}{de}$ wegen des Nenners $1-e$ eine für die numerische Anwendung sehr unsichere Form, für die Parabel selbst bleiben diese Differentialquotienten durch die obigen Ausdrücke völlig unbestimmt, weil dieselben nothwendig die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ erhalten müssen. Man wird also im Falle der Parabel nothwendig die Relationen haben:

$$r - q\cos v = \tfrac{3}{2}\,\frac{(t-T)\,k\,e\sin v}{\sqrt{q}\,(1+e)}$$

$$\left[1 + \frac{q(1+e)}{r}\right]\sin v = \tfrac{3}{2}\,\frac{(t-T)\,k}{r^2}\,(1+e)^{\frac{3}{2}}\sqrt{q}$$

wobei natürlich e der Einheit gleich gesetzt werden muss: thut man dies, so wird sich zunächst durch die erstere Relation der Coëfficient von $\frac{\partial r}{\partial q}$ für die Parabel wesentlich vereinfachen lassen; man erhält nach einigen leichten Substitutionen sofort:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \cos v \qquad (3)$$

wodurch der etwas complicirtere Coëfficient von $\frac{\partial r}{\partial q}$ eine sehr einfache Gestalt im Specialfalle der Parabel annimmt. Der Coëfficient von $\frac{\partial v}{\partial q}$ ist in den Formeln (2) in einer für die logarithmische Rechnung bequemen und sicheren Form enthalten, man kann aber für die Parabel mit Rücksicht auf die obige 2. Relation ($e = 1$ gesetzt) denselben auch die Form geben:

$$\frac{\partial v}{\partial q} = -\left(1 + \frac{\cos v}{2}\right)\frac{\sin v}{q} \qquad (4)$$

welcher Ausdruck für die Parabel bei der Anwendung von Additionslogarithmen vielleicht noch bequemer erscheint, als der obige in (2) enthaltene Ausdruck.

Die für die Parabel hier näher ausgeführten Andeutungen geben deutlich den Weg an, den man bei der weiteren Verwerthung der Formeln (2) für die Rechnung einschlagen muss. Die erste Aufgabe wird demnach sein, die Differentialquotienten von ∂e von ihrer unbestimmten Form zu befreien und die zweite, unter Beibehaltung der für $\frac{\partial r}{\partial q}$ für die Parabel gefundenen Form die Correction für die von der Parabel abweichenden Bahnen zu suchen; eine ähnliche Transformation der Formel (4) würde bei der ohnehin so bequemen strengen Form keine Vortheile bieten.

Die erstere Aufgabe ist in völliger Strenge, so weit mir bekannt, noch nicht gelöst worden, den Fall der Parabel ausgenommen; man hat sich begnügt mit mehr oder minder genauen Annäherungen; da aber die Abschätzung der dadurch begangenen Fehler einigermaassen schwierig ist, so habe ich unter zu Grundelegung des Gauss'schen Verfahrens zur Bestimmung der wahren Anomalie in sehr excentrischen Bahnen (I pag. 60 ff.) strenge Ausdrücke entwickelt, und hiermit die der Lösung der

Aufgabe entgegenstehenden Hindernisse definitiv beseitigt; die hierfür nöthigen Hilfstafeln hat Herr F. K. Ginzel auf mein Ersuchen berechnet und dieselben sind in der angehängten Tafelsammlung als Tafel XVI aufgenommen.

Ich nehme vorerst die Entwickelung des Ausdruckes $\frac{dr}{de}$ vor und beziehe mich durchaus auf die Formeln und Bezeichnungen, die im ersten Bande des vorliegenden Werkes pag. 60 u. ff. bei der Auseinandersetzung der Gauss'schen Methode bewiesen und angewendet wurden. Setzt man:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v^2 \tag{5}$$

so wird sein:

$$r = \frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v\,(1+\theta)}$$

und hiermit wird das erste Glied im Klammerausdrucke für $\frac{dr}{de}$ sich schreiben lassen:

$$\left(1 + \frac{q(1+e)}{r}\right)\sin v = \sin v + (1+e)(1+\theta)\cos\tfrac{1}{2}v^2\sin v \tag{6}$$

Für die Bestimmung des zweiten Theiles ziehe ich die folgenden am citirten Orte entwickelten Relationen heran. es ist:

$$\frac{k(t-T)}{2Bq^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1+9e}{5}} = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}w + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}w^3$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v = \delta\, C\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}w = \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}}\; C\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}w$$

man erhält also für den zweiten Theil ohne Rücksicht auf das negative Vorzeichen:

$$3(1+e)\frac{B}{C}\cos\tfrac{1}{2}v^4(1+\theta)^2\left\{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^3}{\delta^2C^2}\right\}$$

oder:

$$\sin v\,\frac{1+e}{2}\cdot\frac{B}{\delta^2C^3}(1+\theta)^2 + \sin v\cos\tfrac{1}{2}v^2\left\{\tfrac{3}{2}(1+e)\frac{B}{C}(1+\theta)^2 - \frac{1+e}{2}\,\frac{B}{\delta^2C^3}(1+\theta)^2\right\} \tag{7}$$

Vereinigt man nun die Resultate aus 6) und 7), so erhält man mit Rücksicht auf 2) sofort:

$$\frac{dr}{de} = \sin v\left\{\frac{1 - \frac{(1+e)B}{2\delta^2C^3}(1+\theta)^2}{(1-e)(1+e)} + \frac{\cos\frac{1}{2}v^2}{1-e}\left[(1+\theta) + \frac{B(1+\theta)^2}{2\delta^2C^3} - \frac{3}{2}\frac{B}{C}(1+\theta)^2\right]\right\} \tag{8}$$

Dieser Ausdruck kann als Ausgangspunkt für Reihenentwickelungen dienen, die nach steigenden Potenzen von θ fortschreiten. wobei zu beachten ist. dass θ eine Grösse von der Ordnung $(1-e)$ ist.

Die Reihen für $\frac{B}{C}(1+\theta)^2$ und $\frac{B}{C^3}(1+\theta)^2$ können mit Rücksicht auf die I pag. 61 u. ff. gemachten Entwickelungen leicht genug aufgestellt werden; es ist nämlich daselbst gesetzt worden:

$$A = \frac{15\alpha-\beta}{9\alpha+\beta}\,,\quad B = \frac{9\alpha+\beta}{20\sqrt{A}}\,,\quad \frac{1}{C^2} = \frac{A}{\theta}$$

und die Reihen für diese Ausdrücke sind:

$$15(\alpha-\beta) = 20\sqrt{\theta}\left\{\theta - \frac{6}{5}\theta^2 + \frac{9}{7}\theta^3 - \frac{12}{9}\theta^4 + \ldots\right\}$$

$$9\alpha+\beta = 20\sqrt{\theta}\left\{1 - \frac{6}{15}\theta + \frac{7}{25}\theta^2 - \frac{8}{35}\theta^3 + \ldots\right\}$$

in welche Reihen das Fortschreitungsgesetz klar ist. Die Verwerthung dieser Ausdrücke für den vorgelegten Zweck ergibt leicht:

$$\frac{B}{C} = \frac{9\alpha+\beta}{20\sqrt{\theta}}, \quad \frac{B}{C^3} = \frac{(9\alpha+\beta)A}{20\theta\sqrt{\theta}} = \frac{15(\alpha-\beta)}{20\theta\sqrt{\theta}}$$

es ist also:

$$\frac{B}{C} = 1 - \frac{6}{15}\theta + \frac{7}{25}\theta^2 - \frac{8}{35}\theta^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(n+5)\theta^n}{5(2n+1)} \tag{9}$$

$$\frac{B}{C^3} = 1 - \frac{6}{5}\theta + \frac{9}{7}\theta^2 - \frac{12}{9}\theta^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{3(n+1)\theta^n}{2n+3} \tag{10}$$

Multiplicirt man nun die eben hingeschriebenen Ausdrücke mit $(1+\theta)^2$, so findet sich leicht:

$$\frac{B}{C}(1+\theta)^2 = 1 + \frac{8}{5}\theta + \frac{36}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \tag{11}$$

und

$$\frac{B}{C^3}(1+\theta)^2 = 1 - 12\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = 1 + 12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \tag{12}$$

Hiermit sind also jene Reihenentwickelungen gegeben, deren man zur weiteren Umgestaltung des Ausdruckes 8) bedarf; in demselben wird man aber noch weiter einführen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\delta^2} &= \frac{1+9e}{5(1+e)} = 1 - \frac{4(1-e)}{5(1+e)}\\ \frac{1+e}{2\delta^2} &= \frac{1+9e}{10} = 1 - \frac{9}{10}(1-e)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Mit Rücksicht auf 12) und 13) wird man in dem ersten Gliede in der Klammer des Ausdruckes 8) schreiben dürfen:

$$\begin{aligned}\frac{1+e}{2\delta^2}\frac{B}{C^3}(1+\theta)^2 = 1 - 12\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\\ - \frac{9}{10}(1-e)\left\{1 + 12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

in diesem Ausdruck kann aber zu Folge 5) pag. 398 gesetzt werden:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1-e}{1+e}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

Wegen

$$\frac{1}{1+e} = \frac{1}{2} + \frac{1-e}{2(1+e)}$$

ist

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1-e}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\left\{\frac{1}{15}-\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{-(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right\} -$$

$$-\frac{1-e}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}$$

Subtrahirt man den Ausdruck (14) mit Rücksicht auf die eben gemachten Transformationen von der Einheit, so wird erhalten:

$$\left.\begin{aligned}1-\frac{1+e}{2\delta^2}\frac{B}{C^3}(1+\theta)^2 = {} & \tfrac{2}{3}(1-e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\left\{1-15\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right\}+\\ & +\tfrac{9}{10}(1-e)+\tfrac{24}{5}(1-e)\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

dividirt man nun diesen Ausdruck durch $(1-e)(1+e)$, so wird das erste Glied des Klammerausdruckes (8), welches ich der Kürze halber mit (I) bezeichne, geschrieben werden dürfen:

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{I}) = \frac{1}{1+e}\Bigg\{\frac{9}{10}+\frac{24}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}-\\ -\tfrac{2}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\left(1-15\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right)\Bigg\}\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Das zweite Glied des Ausdruckes (8) kann in ähnlicher Weise transformirt werden: es ist, wenn man die eben angewendeten Principien auf die 3 Glieder des zweiten Ausdruckes in (8) anwendet und die Glieder einzeln hinschreibt:

$$1+\theta = 1+\theta$$

$$\frac{B(1+\theta)^2}{2\delta^2C^3} = \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\theta-6\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} -$$

$$-\tfrac{2}{3}\frac{1-e}{1+e}\left\{1+12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}\right\}$$

$$-\tfrac{3}{2}\frac{B}{C}(1+\theta)^2 = -\tfrac{3}{2}-\tfrac{12}{5}\theta-\tfrac{54}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}$$

die Addition ergibt rechter Hand:

$$-\theta\left\{1+\tfrac{24}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n(7n+3)\theta^{n-1}}{(4n^2-9)(4n^2-1)}\right\}-\tfrac{2}{3}\frac{1-e}{1+e}\left\{1+12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}\right\}$$

führt man nun für θ den Werth $\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v$ ein, so wird das zweite Glied in (8) geschrieben werden dürfen:

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{II}) = -\frac{\cos\frac{1}{2}v^2}{1+e}\Bigg\{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\left\{1+\tfrac{24}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n(7n+3)\theta^{n-1}}{(4n^2-9)(4n^2-1)}\right\}+\\ +\tfrac{2}{3}\left\{1+12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}\right\}\Bigg\}\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Denkt man sich $\frac{\partial v}{\partial e}$ geschrieben in der Form:

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\sin v \cos\frac{1}{2}v^2}{2(1+e)} \left\{ \frac{2(1+e)\,\mathrm{I}}{\cos\frac{1}{2}v^2} + \frac{2(1+e)\,\mathrm{II}}{\cos\frac{1}{2}v^2} \right\}$$

so wird man 16) und 17) mit $\frac{2(1+e)}{\cos\frac{1}{2}v^2}$ zu multipliciren haben; in 17) kürzt sich dann der gemeinschaftliche Factor $\cos\frac{1}{2}v^2$ im Zähler und Nenner ab, in 16) denkt man sich die Multiplicationen mit dem identischen Werthe $2(1+e)(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2)$ durchgeführt; man erhält so vorerst:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\sin v \cos\frac{1}{2}v^2}{2(1+e)} \Bigg\{ & \tfrac{9}{5} + \tfrac{48}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} - \tfrac{4}{5} - \tfrac{48}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \\ & - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\Bigg[2 + \tfrac{48}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n(7n+3)\theta^{n-1}}{(4n^2-9)(4n^2-1)} - \tfrac{9}{5} - \tfrac{48}{5}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} + \\ & \qquad + \tfrac{4}{5} - 12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\Bigg] \\ & - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4\Bigg[\tfrac{4}{5} - 12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Vereinigt man nun die einzelnen numerischen Werthe und Reihen und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} E_2^v &= -\left\{1 + 12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}\right\} \\ E_1^v &= -\left\{\tfrac{4}{5} - 12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right\}\end{aligned}\right\} \quad 18)$$

so wird die schliessliche Berechnung des gesuchten Differentialquotienten enthalten sein in:

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\sin v \cos\frac{1}{2}v^2}{2(1+e)}\left\{1 + E_2^v \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 + E_1^v \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4\right\} \quad 19)$$

in welchem Ausdrucke die Coëfficienten E_2^v und E_1^v leicht in Tafeln mit dem Argumente θ gebracht werden können und für die Parabel beziehungsweise die Werthe -1 und $-\frac{4}{5}$ annehmen. Ehe ich jedoch daran gehe, die Construction und den Gebrauch der hierfür erforderlichen Tafeln zu erläutern, will ich die Entwickelungen für $\frac{\partial r}{\partial e}$ vornehmen. Es wird nicht nöthig sein, hierbei von dem in 2) enthaltenen Ausdrucke auszugehen, da durch die Differentiation der Relation:

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e\cos v}$$

sich ergibt:

$$\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{q}{1+e\cos v}\left\{1 - \frac{(1+e)\cos v}{1+e\cos v}\right\} + e\,\frac{q(1+e)\sin v}{(1+e\cos v)^2}\,\frac{\partial v}{\partial e}$$

oder

$$\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{r^2\sin v}{q(1+e)}\left\{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + e(1+e)\frac{\partial v}{\partial e}\right\} \quad 20)$$

so dass mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln die Berechnung von $\frac{\partial r}{\partial e}$ keine

Schwierigkeiten mehr hat. Da sich aber für diesen Differentialquotienten eine dem Ausdrucke 19) pag. 401) ähnliche Form herstellen lässt, deren Berechnung durch geeignet construirte Hilfstafeln sehr erleichtert werden kann, so werde ich zuerst die diesbezüglichen Transformationen vornehmen. Substituirt man in 20) (pag. 401) die Werthe nach 18) und 19) pag. 401), nachdem man in 20) $\frac{\sin r \cos\frac{1}{2} r^2}{2}$ als gemeinschaftlichen Factor herausgehoben hat, wobei ist:

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} r}{\sin r \cos\frac{1}{2} r^2} = (1 + \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2} r^2)^2 ,$$

so erhält man leicht:

$$\frac{dr}{de} = \frac{r^2 \sin r^2 \cos\frac{1}{2} r^2}{2q(1+e)} \left\{ 1 + \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} r^2}{1+e} \left[2 - e - 12\,e \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} r^4}{1+e} \left[1 - \tfrac{4}{5} e + 12\,e \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] \right\}$$

Es ist aber:

$$\frac{2-e}{1+e} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\,\frac{1-e}{1+e} , \quad \frac{e}{1+e} = \tfrac{1}{2} - \frac{1-e}{2(1+e)} , \quad \frac{1-\frac{4}{5}e}{1+e} = \tfrac{1}{10} + \tfrac{9}{10}\,\frac{1-e}{1+e} ,$$

damit wird, wenn hier statt r geschrieben wird $\frac{q}{\cos\frac{1}{2} r^2 (1+\theta)}$ (vergl. I pag. 61):

$$\frac{dr}{de} = \frac{r \sin r^2}{2(1+e)(1+\theta)} \left\{ 1 + \tfrac{3}{2}\,\theta + 6 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2} r^2 \left[1 + \tfrac{9}{5}\,\theta - 12 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} - 12 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] \qquad 21)$$

$$\left. + \tfrac{1}{10}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2} r^4 \left[1 + 60 \sum \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] \right\} .$$

Nun ist aber nach 11) pag. 300):

$$6 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} = \tfrac{5}{6} \left\{ \frac{B}{C} (1+\theta)^2 - 1 - \tfrac{8}{5}\,\theta \right\} ,$$

es ist also:

$$\frac{1}{1+\theta} \left\{ 1 + \tfrac{3}{2}\,\theta + 6 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right\} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6}\,\frac{B}{C}\,(1+\theta) ,$$

man erhält also durch 9) pag. 300) für den von $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} r$ freien Coëfficienten des Klammerausdruckes 21) für $\frac{dr}{de}$, den ich mit I bezeichnen will:

$$\frac{I}{1+\theta} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n (n+5)\,\theta^n}{5(2n+1)} + \tfrac{5}{6} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n (n+5)\,\theta^{n+1}}{5(2n+1)} ,$$

oder:

$$\frac{I}{1+\theta} = 1 - \tfrac{3}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{4n^2-1} . \qquad 22)$$

Für den Coëfficienten von $\frac{1}{2}$ tg $\frac{1}{2}$ v^2 im Ausdrucke 21) (pag. 402), der mit (II) bezeichnet werden soll, ergibt sich:

$$\frac{(II)}{1+\theta} = \frac{1}{1+\theta}\left(1 + \tfrac{2}{5}\theta - \tfrac{4}{5}\theta - 12\sum_{n=3}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} - 12\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right)$$

oder:

$$\frac{(II)}{1+\theta} = 1 \,. \tag{23}$$

Schreibt man für den Coëfficienten von $\frac{1}{16}$ tg $\frac{1}{2}$ v^4 in 21) (pag. 402) das Symbol (III), so wird man haben:

$$\frac{(III)}{1+\theta} = \frac{1}{1+\theta}\left\{1 + 60\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch die folgende, leicht zu verificirende Relation umgestalten, es ist:

$$(1+\theta)^2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n(n+1)\theta^n}{(2n+5)} = \frac{1}{5} - 12\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \,,$$

es wird also zunächst sein:

$$1 + 60\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = 1 - 60\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \,,$$

also mit Rücksicht auf die obige Relation erhält man:

$$\frac{(III)}{1+\theta} = 5(1+\theta)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n(n+1)\theta^n}{2n+5} \,,$$

oder nach einer leichten Reduction:

$$\frac{(III)}{1+\theta} = 1 + 15\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n+3)(2n+5)} \,. \tag{24}$$

Setzt man also:

$$\left.\begin{aligned} E_0^r &= 2 - 3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{4n^2-1} \\ E_1^r &= \tfrac{1}{5} + 3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\theta^n}{(2n+3)(2n+5)} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

so erhält man mit Rücksicht auf 22), 23) und 24):

$$\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{r\sin v^2}{4(1+e)}\left\{E_0^r + \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,v^2 + E_1^r\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,v^4\right\} \,, \tag{26}$$

in welchem Ausdrucke die Coëfficienten E_0^r und E_1^r leicht mit dem Argumente θ in Tafeln gebracht werden können und in der Tafel XVI aufgenommen sind.

Was die Construction dieser Tafel anlangt, so beachte man, dass sich die in 18) (pag. 401) und 25) aufgestellten Reihen mit Hilfe zweier Reihen darstellen lassen; setzt man nämlich:

$$S = 12\left\{\frac{1}{105}\theta - \frac{1}{315}\theta^2 + \frac{1}{693}\theta^3 - \frac{1}{1287}\theta^4 + \ldots + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}\theta^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right\}$$

$$\sigma = 3\left\{\frac{1}{35}\theta - \frac{1}{63}\theta^2 + \frac{1}{99}\theta^3 - \frac{1}{143}\theta^4 + \ldots + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}\theta^n}{(2n+3)(2n+5)}\right\} .$$

so wird sein:

$$E_2' = -1 - \tfrac{4}{5}\theta + \theta S$$
$$E_1' = -\tfrac{4}{5} + S$$
$$E_0' = 2 + \theta - \tfrac{1}{5}\theta^2 + \sigma\theta^2$$
$$E_{-1}' = \tfrac{1}{5} - \sigma .$$

nach welchen Formeln die Tafel XVI berechnet ist. Sie gibt mit dem Argumente

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v^2$$

die Werthe $\log E_2'$, $\log E_1'$, $\log E_0'$ und $\log E_{-1}'$ auf fünf Decimalen für jeden Tausendtheil des Argumentes, was wohl für die Fälle der Anwendung der vorstehenden Formeln stets ausreichen wird. Die letzte Stelle wird selten um mehr als eine halbe Einheit fehlerhaft sein, da Herr F. K. Ginzel, der auf mein Ersuchen diese Tafel berechnet hat, die Rechnung sorgfältig 7stellig durchführte. Das Argument θ selbst ist innerhalb der Grenzen -0.4 und $+0.4$ angenommen, was wohl stets ausreichen wird; sollte jemals die Ausdehnung der Tafel nicht ausreichen, so kann man immer mit Sicherheit die diesbezüglichen Formeln in 2) (pag. 396) anwenden, doch nehme ich auf diesen Umstand bei der unten folgenden Zusammenstellung keine Rücksicht, da mit Ausschluss der periodischen Kometen von kurzer Umlaufszeit, für welche diese Differentialquotienten nach den Elementen, zweckmässiger nach den Formeln für mässige Excentricitäten berechnet werden, kein Komet in solcher Sonnenferne unseren optischen Hilfsmitteln erreichbar ist, wo die Grenzen der vorliegenden Tafel überschritten werden.

Vergleicht man den Ausdruck 26) (pag. 403) mit der entsprechenden Formel in 2) (pag. 396), so resultirt sofort:

$$r - q\cos v = \frac{3}{2}\frac{k(t-T)e\sin v}{\sqrt{q(1+e)}} + (1-e)\frac{\partial r}{\partial e} .$$

ersetzt man nun dieser Relation gemäss den Factor $\frac{3}{2}\frac{(t-T)k}{q^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{e\sin v}{\sqrt{1+e}}$ in $\frac{\partial r}{\partial q}$, so erhält man sofort:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \cos v + \frac{1-e}{q}\left(\frac{\partial r}{\partial e}\right) . \qquad 27)$$

welche Formel viel bequemer ist, als die ursprüngliche in 2) (pag. 396) enthaltene, in der Voraussetzung, wie dies wohl in diesen Fällen stets eintreten wird, dass die hierfür nöthige Berechnung von $\frac{\partial r}{\partial e}$ aus anderen Gründen vorgenommen werden muss.

Die Bestimmung von $\frac{\partial r}{\partial q}$ durch ähnliche Ausdrücke bietet keine wesentlichen Vortheile gegen die ohnehin bequeme logarithmische Form des Coëfficienten in 2) (pag. 396), weshalb ich es unterlasse, diese Form hier anzuführen.

In Bezug auf die Differentialquotienten von q kann noch bemerkt werden, dass es im Allgemeinen etwas bequemer erscheint, als Element $\log q$ einzuführen; es ist aber:

$$\partial \log q = \mathrm{Mod}\,\frac{\partial q}{q}\,.$$

es wird also sein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \log q} &= \frac{1}{\mathrm{Mod}}\left\{q\cos v + (1-e)\left(\frac{\partial r}{\partial e}\right)\right\} \\ \frac{\partial v}{\partial \log q} &= -\frac{3}{2}\,\frac{(t-T)\,k}{\mathrm{Mod}\,r^2}\,\sqrt{q\,(1+e)}\;. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Mit Rücksicht auf die in den vorstehenden Paragraphen aufgenommenen Entwickelungen gestalten sich daher die Formeln zur Berechnung der Differentialquotienten für Kometenbahnen wie folgt, wobei zu achten ist, dass sich die Coordinaten α und δ auf dieselbe Fundamentalebene beziehen müssen, auf welche die Grössen ☊, i und u bezogen sind:

$$\left.\begin{aligned} A\sin A' &= \cos(\alpha-☊)\cos i \\ A\cos A' &= \sin(\alpha-☊) \\ m\sin M &= \sin i \\ m\cos M &= -\sin(\alpha-☊)\cos i \\ B\sin B' &= m\sin(M+\delta) \\ B\cos B' &= \cos(\alpha-☊)\sin\delta \\ u &= v+\omega \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

weiter ist:

$$\left.\begin{aligned} F\sin F' &= \frac{k\,e\sin v}{r\sqrt{p}}\;{}^{*)} \\ F\cos F' &= -\frac{k\sqrt{p}}{r^2}\;; \\ G\sin G' &= -\frac{\sin v^2}{4(1+e)}\left\{E_0^v + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 + E_1^v\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4\right\} \\ G\cos G' &= \frac{\sin v\cos\frac{1}{2}v^2}{2(1+e)}\left\{1 + E_2^v\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 + E_4^v\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4\right\} \\ H\sin H' &= -\frac{1}{\mathrm{Mod}}\left\{\frac{q}{r}\cos v - (1+e)\,G\sin G'\right\} \\ H\cos H' &= -\gamma\,\frac{t-T}{r^2}\sqrt{p}\;. \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{II}$$

wobei zu setzen ist:

$$\begin{aligned} p &= q\,(1+e) \\ \log k &= 8.23558-10 \\ \log(-\gamma) &= 8_n77389-10 \\ \log\left(-\frac{1}{\mathrm{Mod}}\right) &= 0_n36222\;. \end{aligned}$$

---

*) Für die Parabel wird offenbar $F' = 180° - \frac{1}{2}v$.

und hiermit ∂T in Einheiten des mittleren Sonnentages erhalten wird; mit dem Argumente

$$\theta = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^2$$

sind aus der Tafel XVI $\log E_2^r$, $\log E_1^r$, $\log E_0^r$ und $\log E_1^r$ zu entlehnen.

Dann ist

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial T} &= \frac{r}{\Delta} A F \sin(F' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial T} &= \frac{r}{\Delta} B F \sin(F' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial e} &= \frac{r}{\Delta} A G \sin(G' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial e} &= \frac{r}{\Delta} B G \sin(G' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial \log q} &= \frac{r}{\Delta} A H \sin(H' + A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial \log q} &= \frac{r}{\Delta} B H \sin(H' + B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial \pi} &= \frac{r}{\Delta} A \sin(A' + u) \\
\frac{\partial\delta}{\partial \pi} &= \frac{r}{\Delta} B \sin(B' + u) \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\sin i\,\partial\Omega}{}^{*} &= \frac{r}{\Delta} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \cos(\alpha - \Omega + u) \\
\frac{\partial\delta}{\sin i\,\partial\Omega}{}^{*} &= -\frac{r}{\Delta}\left\{\sin(\alpha - \Omega + u) \sin\delta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i + \cos u \cos\delta\right\} \\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial i} &= -\frac{r}{\Delta} \sin u \cos(\alpha - \Omega) \sin i \\
\frac{\partial\delta}{\partial i} &= \frac{r}{\Delta}\left\{\sin(\alpha - \Omega) \sin\delta \sin i + \cos\delta \cos i\right\} \sin u\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{IIIa}$$

wobei noch zu bemerken ist, dass für die ersten drei Elemente der Radius als Einheit gilt, während die letzteren drei Elemente schon im Bogenmaasse verstanden werden; es müssen deshalb die für die drei ersteren Elemente gefundenen Correctionen mit $\sin 1''$ multiplicirt werden, wenn die Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung, wie es wohl gewöhnlich der Fall ist, in Bogensecunden angesetzt werden.

Die eben hingeschriebenen Formeln werden aber einer theilweisen Transformation bedürfen, wenn die Neigung der Kometenbahn nahe 180^0 gegen die gewählte Fundamentalebene ist, denn in diesem Falle wird jede Aenderung von π durch die doppelte Aenderung von Ω im verkehrten Sinne nahezu aufgehoben; führt man daher das Element:

$$\Lambda = \pi - 2\,\Omega$$

ein, so wird anstatt $\partial\pi$ in der Differentialformel zu setzen sein:

$$\partial\pi = \partial\Lambda + 2\,\partial\Omega\,.$$

---

* Für retrograde Kometen wird man mit Vortheil die Formeln IIIb benutzen.

Nach den Formeln 3) und 4) (pag. 385) wird man haben:

$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\pi} = \frac{r}{\varDelta}\left\{\sin(\alpha-\Omega)\sin u + \cos(\alpha-\Omega)\cos u\cos i\right\}$$
$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\Omega} = 2\frac{r}{\varDelta}\sin\tfrac{1}{2}i^2\cos(\alpha-\Omega+u)$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\pi} = \frac{r}{\varDelta}\left\{\cos(\alpha-\Omega)\sin u\sin\delta - \sin(\alpha-\Omega)\cos u\cos i\sin\delta + \cos u\sin i\cos\delta\right\}$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\Omega} = -\frac{r}{\varDelta}\left\{2\sin(\alpha-\Omega+u)\sin\delta\sin\tfrac{1}{2}i^2 + \cos u\cos\delta\sin i\right\},$$

addirt man die zusammengehörigen Formeln, nachdem man die Differentialquotienten nach π mit 2 multiplicirt hat, so erhält man nach einigen leichten und offenkundigen Reductionen sofort:

$$\Lambda = \pi - 2\Omega$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\Lambda} &= \frac{r}{\varDelta}A\sin(A'+u)\\
\frac{\partial\delta}{\partial\Lambda} &= \frac{r}{\varDelta}B\sin(B'+u)\\
\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\sin i\,\partial\Omega} &= \frac{r}{\varDelta}\cos(\alpha-\Omega-u)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}i\\
\frac{\partial\delta}{\sin i\,\partial\Omega} &= \frac{r}{\varDelta}\left\{\cos u\cos\delta - \sin(\alpha-\Omega-u)\sin\delta\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}i\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad \text{IIIb}$$

welche Ausdrücke in den vorstehenden Formeln IIIa an die Stelle von $\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\pi}$, $\frac{\partial\delta}{\partial\pi}$, $\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\sin i\,\partial\Omega}$ und $\frac{\partial\delta}{\partial i}$ zu treten haben, wenn sich die Neigungen gegen die Fundamentalebene wenig von 180° unterscheiden. Man wird dieselben aber stets mit Vortheil anwenden, wenn die Neigung der Kometen grösser als 90° also die Bewegung retrograd ist. Würden aber die Neigungen fast völlig mit 180° zusammenfallen, so würden natürlich auch diese Formeln nicht ausreichen, und man hätte ähnlich wie bei der Störungsrechnung (pag. 223) die Elemente $\sin i\sin\Omega$ und $\sin i\cos\Omega$ einzuführen; doch gehe ich auf diese Formeln hier nicht näher ein, weil man dieselben wohl niemals in Anwendung ziehen wird.

Es ist klar, dass man von vorstehenden Formeln ebenfalls Gebrauch machen wird, wenn man sich nur die Ermittelung parabolischer Elemente vorsetzt; man wird nur die von den Grössen G und G' abhängigen Grössen nicht zu berechnen brauchen. Stellt sich im Verlaufe der Rechnung heraus, dass die Parabel den Beobachtungen nicht völlig genügt, so wird man die Berechnung dieser Grössen nachtragen, unter der Voraussetzung $e = 1$; man wird so in den meisten Fällen mit genügender Genauigkeit die elliptischen oder hyperbolischen Elemente des betreffenden Himmelskörpers erlangen. Diese Methode würde nur in jenen Fällen ungenauere Resultate liefern, wenn die Abweichung von der Parabel sehr beträchtlich ist; im letzteren Falle wird man wohl stets, vor Beginn solcher definitiven Ausgleichungen, von diesem Umstande Kenntniss haben und in der Lage sein, genügende Annäherungen für die Elemente sich anderweitig zu beschaffen; auch wird

im Falle einer nicht allzu bedeutenden Abweichung von der Parabel die wiederholte Auflösung der Bedingungsgleichungen mit den Werthen der ersten Annäherung das Ziel meist erreichen lassen, falls die erste Auflösung keine genügende Uebereinstimmung zwischen den Resultaten der directen Rechnung und der aus den Differentialquotienten abgeleiteten Darstellung der Orte ergeben würde.

§ 5. Die Differentialquotienten mit Rücksicht auf die Störungen.

Die in den vorstehenden Formeln auftretenden Coëfficienten müssen in etwas verschiedener Weise gewählt werden, wenn man die Störungsrechnung nach verschiedenen Methoden durchgeführt hat; erlaubt man sich aber, die Producte der Incremente der Elemente in die Störungen zu übergehen, so gestaltet sich die Lösung dadurch sehr einfach, dass man die nahe richtige Voraussetzung machen darf, dass die Störungswerthe in beiden Elementensystemen identisch gefunden werden. Es sollen dem entsprechend die verschiedenen Methoden der Störungsrechnung für die vorliegenden Aufgaben vorgenommen werden.

Vergleicht man die Form der heliocentrischen Coordinaten, die in § 11) (pag. 383) als Ausgangspunkt für die Ermittelung der Differentialquotienten gedient haben, mit der folgenden Form, die Encke's Methode der Störungsrechnung gibt:

$$x = r_0 (\cos u_0 \cos \Omega_0 - \sin u_0 \sin \Omega_0 \cos i_0) + \xi$$
$$y = r_0 (\cos u_0 \sin \Omega_0 + \sin u_0 \cos \Omega_0 \cos i_0) + \eta$$
$$z = r_0 \sin u_0 \sin i_0 + \zeta$$

und beachtet, dass der Voraussetzung nach ξ, η und ζ constant sind, so leitet man leicht die Bemerkung ab, dass die Variationen der heliocentrischen Coordinaten in diesem Falle dadurch erhalten werden, dass man in den früher entwickelten Formeln durchaus die ungestörten Grössen einführt. Der Uebergang auf die geocentrischen Orte durch die Formeln:

$$\cos \delta \, \partial \alpha = - \frac{\sin (\alpha - \partial)}{\Delta} \partial x + \frac{\cos (\alpha - \partial)}{\Delta} \partial y$$
$$\partial \delta = - \frac{\cos (\alpha - \partial)}{\Delta} \sin \delta \, \partial x - \frac{\sin (\alpha - \partial)}{\Delta} \sin \delta \, \partial y + \frac{\cos \delta}{\Delta} \partial z$$

erfordert aber für die Berechnung der Coëfficienten der Variationen der Coordinaten, wie man sich leicht überzeugt, die thatsächlichen geocentrischen Coordinaten, die man sofort dadurch erhält, dass man für α und δ die beobachteten Coordinaten, für die geocentrische Entfernung Δ aber die mit Rücksicht auf die Störungen erlangten Werthe einsetzt, Werthe, die ohnedies schon stets durch anderweitige Rechnungen bekannt sind. Es ist klar, dass man von den gemachten Vorschriften, ohne mehr als die Eingangs als zulässig betrachtete Vernachlässigung der Producte der Störungen in die Incremente der Elemente zu übergehen, abweichen kann und

untermischt die mit Rücksicht oder ohne Rücksicht auf Störungen erhaltenen Werthe als Grundlage für die Berechnung der Differentialquotienten benützen kann; doch wird die Befolgung der obigen Vorschriften den Vortheil bieten, dass man in dem vorgelegten Falle die Variationen der geocentrischen Orte durch die Variationen der Elemente strenge ausgedrückt erhält, wenn man die Störungswerthe als unabhängig von den letzteren betrachtet. Von diesem Gesichtspunkte aus ist auch das Folgende zu betrachten.

Bei Hansen-Tietjen's Methode hat man für die heliocentrischen Coordinaten die Form:

$$x = (r)(1+\nu)\{\cos(V+\omega_0+\Delta\omega)\cos\Omega_0 - \sin(V+\omega_0+\Delta\omega)\sin\Omega_0\cos i_0\} + z\cos a$$
$$y = (r)(1+\nu)\{\cos(V+\omega_0+\Delta\omega)\sin\Omega_0 + \sin(V+\omega_0+\Delta\omega)\cos\Omega_0\cos i_0\} + z\cos b$$
$$z = (r)(1+\nu)\sin u_0\sin i_0 + z\cos c\;;$$

gestattet man sich die Variationen der Grössen $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ in die stets kleine Störung der verticalen Coordinate zu vernachlässigen, so hat man in den Formeln 1) pag. 383) nach der Vergleichung zu setzen:

statt v den Werth V
» r » » (r)
» u » » $(V+\omega_0+\Delta\omega)$.

Mit Rücksicht auf den Uebergang auf die geocentrischen Coordinaten wird man daher für diese Methode die Bemerkung ableiten, dass bei der Berechnung der Differentialquotienten durchaus die Coëfficienten der eben gemachten Identification zufolge zu bestimmen sind, dass für α und δ die beobachteten Grössen, für Δ die geocentrische Distanz mit Rücksicht auf Störungen zu substituiren ist, dass aber in dem allen Quotienten gemeinsamen Factor $\frac{r}{\Delta}$ für r der Werth: $r_1 = (r)(1+\nu)$ einzusetzen ist (die zweiten Potenzen von z übergehend), da nach der Differentiation der obigen Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen der gemeinsame Factor $(1+\nu)$ auftritt.

Endlich sind bei der Methode der Variation der Constanten durchaus jene Werthe für die in den Differentialformeln auftretenden Grössen zu substituiren, die sich aus den für die Zeit des Ortes osculirenden Elementen, die man ohnehin zur Darstellung der Orte gebraucht, ergeben.

Erreichen aber die Störungen halbwegs grosse Werthe, so werden die hier angegebenen Formeln auf arge Widersprüche führen, die sich dahin aussprechen lassen, dass dieselben Incremente der Elemente zur Zeit der Ausgangsepoche verschiedene Aenderungen in denselben Orten bei Anwendung verschiedener Methoden der Störungsrechnung bedingen werden, da die nach den obigen Vorschriften entwickelten Differentialformeln für die verschiedenen Störungsmethoden nicht identisch gefunden werden können. Diese Unterschiede hängen innig mit der bei der Störungsrechnung bereits erörterten Frage zusammen, was zu thun ist, wenn man die Störungsrechnung nach der Variation der Coordinaten mit etwas veränderten

Elementen fortsetzen will. Macht man wie dort die Voraussetzung, dass die Elemente hinreichend genau sind zur Darstellung der Kräfte, so wird man zu dem Schlusse gelangen, dass die nach der Variation der Constanten entwickelten Werthe für die Differentialformeln jene sind, die voraussichtlich der Wahrheit am nächsten kommen; man sieht hieraus, dass durch diese Betrachtungen ein neuer wesentlicher Vorzug für die Methode der Variation der Constanten resultirt. Es wird also als das Richtigste erscheinen, für jeden Ort osculirende Elemente abzuleiten und aus diesen die Differentialformeln abzuleiten; dies würde aber auf sehr weitläufige Rechnungen führen und es wird im Allgemeinen vorzuziehen sein, auf diese Unterschiede nicht weiter Rücksicht zu nehmen und sich an die obigen Vorschriften zu halten.

§ 6. Beispiele.

Es sollen nun die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Methoden zur Ableitung der wahrscheinlichsten Bahnelemente einer Planeten und einer Kometenbahn verwerthet werden, und ich wähle als erstes Beispiel den Planeten Erato, für den die der Rechnung zu Grunde zu legenden Daten nahe vollständig in den vorangehenden Abschnitten als Beispiele aufgenommen sind. Die Normalorte und die Sonnencoordinaten finden sich auf pag. 382, die Störungswerthe auf pag. 196 ff.

Zunächst wurden aus den Störungstafeln mit Hilfe der bei den mechanischen Quadraturen pag. 35, 39, 53, 55 entwickelten Formeln die Störungswerthe für die Zeiten der Normalorte gebildet; es fand sich so:

	ΔM	$\Delta\omega$	$\log(1+\nu)$	z
1860 Sept. 19.5	$+3°12'52''96$	$-39'\ 0''95$	9.998 9782	$+0.000\ 6033$
1861 Dec. 28.5	$+2\ \ 8\ 23.59$	$-36\ 49.97$	0.005 2451	$-0.001\ 0723$
1863 Apr. 10.5	$+0\ 36\ \ 7.19$	$-33\ 23.14$	0.001 7959	$-0.000\ 7677$
1871 Sept. 15.5	$+1\ \ 1\ 47.42$	$-\ 8\ 18.00$	0.000 6861	$+0.000\ 0705$
1873 Jan. 16.5	$+0\ 21\ \ 8.44$	$-\ 5\ 27.49$	0.001 7985	$-0.000\ 2138$
1874 März 22.5	$+0\ \ 0\ 52.69$	$-\ 1\ 21.89$	0.000 2260	$-0.000\ 0614$
1875 Mai 21.5	$-0\ \ 0\ \ 1.85$	$-\ 0\ 20.41$	0.000 0088	$-0.000\ 0136$
1876 Juli 18.5	$+0\ \ 2\ 19.35$	$-\ 4\ 21.39$	9.999 5890	$-0.000\ 1117$
1877 Nov. 24.5	$+0\ 32\ \ 4.26$	$-13\ \ 9.48$	9.997 9572	$-0.000\ 0183$

Der Ausgleichung zu Grunde gelegt wurden die folgenden genähert richtigen Elemente der Erato, welche auch für die Ermittelung der Störungswerthe gedient haben:

(62) Erato

Epoche und Osculation 1874 Dec. 26.0 mittl. Berl. Zeit.

Mittl. Aeq. 1870.0.

$$L = 219^\circ\ 8'\ 6''8$$
$$M = 180\ 40'48.9$$
$$\pi = 38\ 27\ 17.9$$
$$\Omega = 125\ 42\ 39.7$$
$$i = 2\ 12\ 23.0$$
$$\varphi = 9\ 59\ 14.9$$
$$\mu = 640''89605$$
$$\log a = 0.405\ 4703\ .$$

Da man noch der auf das mittlere Aequ. 1860.0 und 1880.0 bezogenen Elemente bedarf, so wurde nach den diesbezüglichen Formeln (I pag. 81) der Einfluss der Präcession gerechnet und für die nöthigen Reductionen gefunden:

	1860.0	1880.0
$\Delta L = \Delta \pi$	$-\ 8'22''45$	$+\ 8'22''47$
$\Delta \Omega$	$-\ 6'50''69$	$+\ 6'50''72$
Δi	$+\ 3''24$	$-\ 3''24$.

Damit fand sich nach den Ausdrücken (13) (pag. 162):

	1860	1870	1880
ω_0	272°43′ 6″44	272°44′38″20	272°46′ 9″95
A	215 37 1.51	215 43 52.21	215 50 42.97
B	126 20 54.17	126 27 39.46	126 34 24.86
C	121 13 19.66	121 20 35.84	121 27 52.16
sin a	9.999 7869	9.999 7877	9.999 7884
sin b	9.966 6719	9.966 6852	9.966 6985
sin c	9.578 0699	9.577 9845	9.577 8993
cos a	8.495 84	8.495 04	8.494 24
cos b	9_n576 58	9_n576 50	9_n576 42
cos c	9.966 42	9.966 44	9.966 45

Hierbei wurde die mittlere Schiefe der Ekliptik nach Le Verrier angenommen und zwar:

	ε
1860	23°27′27″07
1870	22.31
1880	17.55 ;

hierauf wurden die Störungen in der verticalen Coordinate (vergl. pag. 410) z mit den entsprechenden Cosinusfunctionen multiplicirt und die für die drei Coordinaten gefundenen Correctionen mit den Sonnencoordinaten verbunden, wodurch in den ferneren Rechnungen die auf der Bahnebene verticalen Störungscomponenten die

einfachste Berücksichtigung finden; die so veränderten Sonnencordinaten nebst der Anzahl der Tage, die von der Zeit der Epoche an verflossen sind, finden sich in der folgenden Zusammenstellung:

	t	$X + z\cos a$	$Y + z\cos b$	$Z + z\cos c$
1860 Sept. 19.5	— 5210.5	— 1.002 3870	+ 0.044 9809	+ 0.020 1741
1861 Dec. 28.5	— 4715.5	+ 0.124 1943	— 0.894 3974	— 0.389 2742
1863 Apr. 10.5	— 4277.5	+ 0.938 9499	+ 0.322 7729	+ 0.139 2215
1871 Sept. 15.5	— 1197.5	— 0.996 6587	+ 0.118 4228	+ 0.051 4640
1873 Jan. 16.5	— 708.5	+ 0.445 7369	— 0.804 5314	— 0.349 3135
1874 März 22.5	— 278.5	+ 0.996 5751	+ 0.033 8400	+ 0.014 6166
1875 Mai 21.5	+ 146.5	+ 0.498 5743	+ 0.808 5571	+ 0.350 8069
1876 Juli 18.5	+ 570.5	— 0.455 2574	+ 0.833 4609	+ 0.361 5080
1877 Nov. 24.5	+ 1064.5	— 0.450 0632	— 0.805 4019	— 0.349 4965

Leitet man nun mit Hilfe der Formeln 14 pag. 162 die heliocentrischen Coordinaten nach den obigen Elementen ab und verbindet dieselben mit den entsprechenden Sonnencoordinaten, so finden sich die folgenden Unterschiede zwischen den Beobachtungen und den berechneten Orten:

	Beobachtung-Rechnung	
	$\cos\delta\,\delta\alpha$	$\delta\delta$
1860 Sept. 19.5	— 37″05	— 13″43
1861 Dec. 28.5	— 12.73	+ 3.39
1863 Apr. 10.5	+ 10.29	— 5.19
1871 Sept. 15.5	— 9.87	— 7.56
1873 Jan. 16.5	— 0.05	— 0.04
1874 März 22.5	+ 22.28	— 8.24
1875 Mai 21.5	+ 27.09	— 7.35
1876 Juli 18.5	+ 17.07	+ 4.13
1877 Nov. 24.5	+ 1.69	— 1.30

welche dazu benützt werden können, um diejenigen Verbesserungen zu finden, die man an die obigen Elemente anzubringen hat, um die wahrscheinlichsten zu finden. Zur Herstellung der Relationen zwischen den Aenderungen der Elemente und den geocentrischen Orten wurden die auf pag. 390 ff. zusammengestellten Formeln benützt und mit Rücksicht auf die pag. 409 gemachten Bemerkungen stellt sich die Rechnung, bei welcher in Bezug auf den Aequator $\Omega = 4^\circ 44' 18''$, $i' = 22^\circ 14' 28''$ und $\omega' = 33^\circ 56' 26''$ angenommen wurde, und die ich hier übrigens der Kürze halber nur für den ersten Normalort mittheile, wie folgt:

Aus I pag. 390 folgt:

$\alpha - \Omega$	$3^\circ 56' 42''$	$\sin i' = m \sin M$	9.57807	$\sin\delta$	7.94229
$\cos(\alpha - \Omega)$	9.99897		9.99394	$B \sin B'$	9.57741
$A\cos A' = \sin(\alpha - \Omega)$	8.83758	$m\cos M$	$8_n 80400$		9.99988

	9.99880	M	99°33′0″	$B\cos B'$	7.94120
$A\sin A'$	9.96539	$M+\delta$	100° 3′6″	B'	88°40′34″
A'	85°44′20″	$\sin(M+\delta)$	9.99328	$\log B$	9.57753
$\log A$	9.96659	m	9.58413	u'	359°40′52″

Aus II (pag. 390) resultirt:

$-a:(r)$	0_n07180	$\cos V$	9.92050	$-d\cos(V+x)$	0_n34286
$\sin V$	9_n71314	$e\cos V$	+0.14444	$-nf$	9_n36753
$(a^2:(r))^2$	0.14372	$2+e\cos V$	0.33131	Add.	0.04369
$F\sin F'$	9.06076	$\log d$	0.34157	$d\sin(V+x)$	9.29155
	9.99848	$1+e\cos V$	0.05860	qf	9.27103
$F\cos F'$	0.13709	$(1+e\cos V)^2$	0.11720	Add.	0.31141
F'	4°47′42″	$f-1$	9.82610	$H\sin H'$	8.98493
$\log F$	0.13861	$\log f$	0.22273		9_n99966
$\log t$	3_n71688	$V+x$	5°4′40″	$H\cos H'$	0_n38055
$tF\sin F'$	2_n77764	$\sin(V+x)$	8.94698	H'	177°43′43″
Add	9.80752	$l\sin V$	7_n82271	$\log H$	0.38689
$G\sin G'$	2_n58516	Add.	9.96609	$K\sin K'$	0.07246
	9_n99937	$\cos(V+x)$	9.99829		9.97838
$G\cos G'$	3_n85397	$-m\sin V$	7.72021	$K\cos K'$	9.58244
G'	183°4′57″	Add.	0.00231	K'	72°4′10″
$\log G$	3.85460	$H\sin H'\frac{(r)}{a}$	8.01307	$\log K$	0.09408.
		$K\sin K'\frac{(r)}{a}$	0.00060		

Weiter findet sich:

(r)	0.42260
Δ	0.21875
$(r):\Delta$	0.20385
$A'+u'$	85°25′12″
$B'+u'$	88°21′26
$(r)A:\Delta$	0.17044
$(r)B:\Delta$	9.78138

Die Rechnung nach III (pag. 391) stellt sich wie folgt:

$F'+A'+u$	90°12′54″	$G'+A'+u$	268°30′9″	$H'+A'+u$	263°8′55″	$K'+A'+u$	157°29′22″
$\sin(F'+A'+u)$	0.00000	$\sin(G'+A'+u)$	9_n99985	$\sin(H'+A'+u)$	9_n99689	$\sin(K'+A'+u)$	9.58303
$(r)AF:\Delta$	0.30905	$(r)AG:\Delta$	4.02504	$(r)AH:\Delta$	0.55733	$(r)AK:\Delta$	0.26452
$\cos\delta\,\partial\alpha:dL'$	0.30905	$\cos\delta\,\partial\alpha:\partial\mu$	4_n02489	$\cos\delta\,\partial\alpha:\partial\Phi$	0_n55422	$\cos\delta\,\partial\alpha:\partial\Psi$	9.84755
$F'+B'+u$	93° 9′ 8″	$G'+B'+u$	271°26′23″	$H'+B'+u$	266°5′ 9″	$K'+B'+u$	160°25′36″
$\sin(F'+B'+u)$	9.99934	$\sin(G'+B'+u)$	9_n99986	$\sin(H'+B'+u)$	9_n99890	$\sin(K'+B'+u)$	9.52506
$(r)BF:\Delta$	9.91999	$(r)BG:\Delta$	3.63598	$(r)BH:\Delta$	0.16827	$(r)BK:\Delta$	9.87546
$\partial\delta=dL'$	9.91933	$\partial\delta:\partial\mu$	3_n63584	$\partial\delta:\partial\Phi$	0_n16726	$\partial\delta:\partial\Psi$	9.40052

$\alpha - \Omega' + u'$	$5^\circ 37' 31''$
$\cos(\alpha - \Omega' + u')$	9.99913
$(r) \operatorname{tg} \frac{1}{2} i'' : \Delta$	9.49735
$\cos\delta\, \partial\alpha : \sin i''\, \partial\Omega$	9.49648
$\sin(\alpha - \Omega' + u')$	8.80103
$\sin\delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} i''$	7.23579
$\cos u'$	9.99999
$\cos\delta$	9.99998
I	6.03682
II	9.99997
Add.	0.00005
$\{\ldots\}$	$0_n 00002$
$\partial\delta : \sin i''\, \partial\Omega'$	$0_n 20387$

$\sin u'$	$7_n 74565$
$\cos(\alpha - \Omega') \sin i''$	9.57704
$\cos\delta\, \partial\alpha : \partial i''$	7.52054
$\sin(\alpha - \Omega') \sin i''$	8.41565
$\sin\delta$	7.94229
Add.	0.00011
$\cos\delta \cos i''$	9.96640
I	6.35794
$\{\ldots\}$	9.96651
$(r) \sin u' : \Delta$	$7_n 94950$
$\partial\delta : \partial i''$	$7_n 91601$

Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung kann man das Verfahren einschlagen, dass man mit variirten Elementen die Darstellung der Orte sucht und nachsieht, ob die auf diese Weise gefundenen Aenderungen in den Orten mit den aus den Differentialformeln folgenden innerhalb der Unsicherheit der Rechnung stimmen, doch darf man die Aenderungen nicht allzu gross nehmen, weil sonst der Einfluss der Glieder zweiter Ordnung zu nachtheilig wird.

Behandelt man in ähnlicher Weise die übrigen Orte, so erhält man die auf pag. 320 ff. bereits angeführten Bedingungsgleichungen. An dem citirten Orte wird sofort die Ableitung der Normalgleichungen aus denselben vorgenommen und pag. 343 die Herstellung der Eliminationsgleichungen erläutert; pag. 345 findet sich die Bestimmung der Unbekannten aus den letzteren durch successive Substitution, pag. 350, 351 dieselbe Bestimmung unabhängig für jede Unbekannte durchgeführt. pag. 352 ist die Darstellung der Orte nach den Differentialformeln hergestellt; man wird stets als Controle für die Richtigkeit der Rechnung diese Darstellung auch durch die directe Rechnung prüfen. Auf pag. 352 finden sich die Correctionen der Elemente logarithmisch in Bogensekunden verstanden:

$$\log \partial L' = 1.0025 \qquad \log \partial \Psi = 0_n 6939$$
$$\log \partial \mu = 7.4842 \qquad \log \sin i'' \,\partial \Omega' = 9.6220$$
$$\log \partial \Phi = 0.7807 \qquad \log \partial i'' = 0_n 0576\ .$$

Um zunächst die Elementenänderungen von Φ und Ψ in solche von π' und φ zu übertragen, wird man sich der Formeln IV), VII) und VIII) (pag. 392, 393) bedienen und finden:

$$\pi' - \pi_0' = +\ 44''99$$
$$\varphi - \varphi_0 = -\ \ 0''07\ .$$

Die Ausgangselemente selbst sind auf die Ekliptik bezogen, während sich die hier gefundenen Verbesserungen auf äquatoreale Elemente beziehen; zu der hier nöthigen Transformation wird man die Formel IX) pag. 305 heranziehen und finden, wenn man nun alle Correctionen zusammenbringt:

$$\delta L = + \quad 9''98$$
$$\delta \pi = + \ 14.91$$
$$\delta \Omega = - \quad 3.12$$
$$\delta i = + \quad 0.42$$
$$\delta \varphi = - \quad 0.07$$
$$\delta \mu = + \quad 0.003049$$

und die verbesserten Elemente der Erato werden sein:

(62) Erato

Epoche und Oscul. 1874 Dec. 26.0 mittl. Berl. Zeit

mittl. Aequ. 1870.0.

$$L = 219^{0}\ 8'16''78$$
$$M = 180\ 40\ 13.97$$
$$\pi = 38\ 28\ \ 2.81$$
$$\Omega = 125\ 42\ 36.58$$
$$i = 2\ 12\ 24.32$$
$$\varphi = 9\ 59\ 14.83$$
$$\mu = 640''899099$$
$$\log a = 0.4954779\ .$$

Rechnet man nun nach diesen Elementen die Darstellung der Orte mit Rücksicht auf die obigen Störungswerthe, so erhält man die folgenden Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung, denen ich jene auf pag. 352 durch die Differentialformeln erhaltenen beisetze; die Uebereinstimmung beider Resultate innerhalb der Unsicherheit einer siebenstelligen Rechnung gibt eine höchst befriedigende Controle. Es findet sich:

	directe Rechnung		Differentialformeln	
	$\cos\delta\,\delta\alpha$	$\delta\delta$	$\cos\delta\,\delta\alpha$	$\delta\delta$
1.	− 0''27	+ 2''18	− 0''28	+ 2.18
2.	+ 1.14	+ 0.82	+ 1.13	+ 0.82
3.	− 0.58	− 1.49	− 0.40	− 1.52
4.	− 1.09	− 3.47	− 0.99	− 3.43
5.	− 2.31	− 0.32	− 2.43	− 0.39
6.	− 0.15	+ 0.22	− 0.10	+ 0.20
7.	+ 0.37	− 1.23	+ 0.49	− 1.23
8.	+ 0.04	+ 0.91	+ 0.17	+ 0.97
9.	+ 2.20	− 0.42	+ 2.32	− 0.44 .

Schliesslich wäre noch erwähnen, dass auf pag. 301 die Gewichte und die mittleren Fehler der Unbekannten abgeleitet sind; es ist an der betreffenden Stelle gefunden worden:

$$\delta L' = \pm\ 0''494 \qquad \delta\Psi = \pm\ 0''315$$
$$\delta\mu = \pm\ 0.000143 \qquad \delta\Omega' \sin i'' = \pm\ 0.529$$
$$\delta\Phi = \pm\ 0.270 \qquad \delta i'' = \pm\ 0.588\ .$$

Zunächst wird man die Unsicherheit der Elemente π' und q mit Hilfe der Formeln 9) pag. 388 ableiten. Dieselben ergeben:

$$\partial \pi' = \frac{\cos \pi'}{\sin q}\,\partial \Phi - \frac{\sin \pi'}{\sin q}\,\partial \Psi$$

$$\partial q = \frac{\sin \pi'}{\cos q}\,\partial \Phi + \frac{\cos \pi'}{\cos q}\,\partial \Psi ,$$

mit Rücksicht auf die bei der Methode der kleinsten Quadrate auseinandergesetzten Principien wird man, wenn man durch E den mittleren Fehler vorstellt und durch den Index das Element, auf das er sich bezieht, bezeichnet erhalten:

$$E(\pi') = \pm \sqrt{\left(\frac{\cos \pi'}{\sin q}\,E(\Phi)\right)^2 + \left(\frac{\sin \pi'}{\sin q}\,E(\Psi)\right)^2}$$

$$E(q) = \pm \sqrt{\left(\frac{\sin \pi'}{\cos q}\,E(\Phi)\right)^2 + \left(\frac{\cos \pi'}{\cos q}\,E(\Psi)\right)^2}$$

und unter den Annahmen $\pi' = 38^0 49'6$ und $q = 9^0 59'2$ wird folgen:

$$E(\pi') = \pm\, 1''683$$
$$E(q) = \pm\, 0.305 \; .$$

Aehnlich wird man aus den Formeln X) pag. 395 erhalten ($i = 2^0 12'4$, $i' = 22^0 14'2$, $\sigma = 121^0 20'6$):

$$E(i) = \pm \sqrt{(\cos\sigma\, E(i'))^2 + (\sin\sigma\, E(\Omega')\sin i')^2}$$

$$E(\Omega) = \pm \sqrt{\left(\frac{\sin\sigma}{\sin i}\,E(i')\right)^2 + \left(\frac{\cos\sigma}{\sin i}\,E(\Omega')\sin i'\right)^2}$$

$$E(\pi) = \pm \sqrt{E(\pi')^2 + (\sin\sigma\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} i\, E(i'))^2 + \{(\cos\sigma\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} i - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} i')\, E(\Omega')\sin i'\}^2}$$

$$E(L) = \pm \sqrt{E(L')^2 + (\sin\sigma\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} i\, E(i'))^2 + \{(\cos\sigma\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} i - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} i')\, E(\Omega')\sin i'\}^2}$$

nach Einführung der obigen numerischen Werthe:

$$E(L) = \pm\; 0''506$$
$$E(\mu) = \pm\; 0.000143$$
$$E(\pi) = \pm\; 1.687$$
$$E(q) = \pm\; 0.305$$
$$E(\Omega) = \pm\; 14.873$$
$$E(i) = \pm\; 0.546 \; .$$

Um die für die periodischen Cometen in Vorschlag gebrachten Formeln zu erläutern, will ich dieselben auf einen Ort des Winnecke'schen Cometen (III, 1819) anwenden; für den auf den mittleren Aequator 1880.0 bezogenen Ort des Cometen hat man:

1875 Febr. 9.5 mittl. Berl. Zeit $\alpha = 270^0 38'1$ $\quad \delta = -10^0 16'2$;

die aus den Elementen zu entlehnenden Grössen sind:

$\Omega' =$	$29^0 17'7$	$v =$	$-17^0 43'3$
$i' =$	$21\;50.0$	$\log r =$	9.9837
$\omega' =$	$249\;35.0$	$\log \varDelta =$	0.1340
$q =$	$47\;49.1$	$\log a =$	0.5053
$\mu =$	$619''61$	$\log t =$	3.7874

wobei also wieder, wie im früheren Beispiele der Aequator als Fundamentalebene und für die Zeit t als Ausgangsepoche 1858 Mai 1.0 angenommen ist. Nach den Formeln I) (pag. 390) erhält man:

$\alpha - \Omega'$	$247^\circ 20'4$	$m \sin M$	9.5704
$\sin\delta$	$9_n 1474$		9.9625
$\cos(\alpha - \Omega')$	$9_n 5858$	$m \cos M$	9.9328
$\cos i''$	9.9677	M	$23^\circ 28'0$
$\sin(\alpha - \Omega')$	$9_n 9651$	$M + \delta$	7 11 8
$A \sin A'$	$9_n 5535$	$\sin(M + \delta)$	9.0979
— —	$9_n 9696$	m	9.9703
$A \cos A'$	$9_n 9651$	$B \sin B'$	9.0682
A'	$201^\circ 11'3$		9.8663
$\log A$	9.9955	$B \cos B'$	9.0332
u'	$201^\circ 51'7$	B'	$47^\circ 18'1$
$A' + u'$	$13^\circ 3'0$	$\log B$	9.2019
$B' + u'$	249 10 1	$r : \Delta$	9.8497
$A r : \Delta$	9.8452	$\cos r$	9.8278
$B r : \Delta$	9.0516	$\sin r$	$9_n 8002$

nach II) (pag. 390, 391) wird sich finden:

$\cos\varphi \cos r$	9.6548	$t F \sin F''$	4.2210	$\sin\varphi \cos r$	9.0070
$a : r$	0.5216	$2 : 3\mu \sin 1''$	2.3402	$2 + \sin\varphi \cos r$	0.3977
$-\operatorname{tg}\varphi \sin r$	9.9120	Add.	0.0058	$\sin r \sec\varphi$	$9_n 0422$
$a^2 : r^2$	1.0432	$G \sin G'$	4.2268	$P \sin P'$	0.1704
$F \sin F'$	0.4336		9.9721		$9_n 9435$
	9.9727	$G \cos G'$	4.0576	$P \cos P'$	$0_n 4399$
$F \cos F'$	0.8702	G'	$20^\circ 20'8$	P'	$151^\circ 24'3$
F''	$20^\circ 5'0$	$\log G$	4.0855	$\log P$	0.4964 .
$\log F$	0.8975				

aus III) (pag. 391) erhält man, wenn man die analogen Operationen für die 4 Elemente neben einander durchführt (die angesetzte Bezeichnung ist demnach für die 4 verschiedenen Columnen entsprechend verändert zu denken):

	M_0	μ	φ	e'
$F'' + A' + u'$	$93^\circ 8'9$	$93^\circ 23'8$	$194^\circ 27'3$	$13^\circ 3'0$
$\sin(F'' + A' + u')$	9.9504	9.9514	$9_n 3973$	9.8342
$r A F : \Delta$	0.7427	4.5307	0.3416	9.8452
$\cos\delta\, \partial\alpha : \partial M_0$	0.6931	4.4821	$9_n 7389$	9.6704
$F'' + B' + u'$	$269^\circ 16'0$	$269^\circ 30'9$	$40^\circ 34'1$	$249^\circ 10'1$
$\sin(F'' + B' + u')$	$0_n 0000$	$0_n 0000$	9.8132	$9_n 9706$
$r A F : \Delta$	9.9491	3.7371	0.5480	9.0516
$\partial\delta : \partial M_0$	$9_n 9491$	$3_n 7371$	9.3612	$9_n 0222$

für $\partial\Omega'$ und $\partial i''$ erhält man aus III pag. 391:

$\alpha - \Omega' + u'$	$89^0 12'1$	$\sin u'$	9_n5709
$\cos(\alpha - \Omega' + u')$	8.1441	$-\cos(\alpha - \Omega')\sin i''$	9.1562
$r\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}i'' : \Delta$	9.1350	$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial i''$	8_n5768
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial\Omega'\sin i''$	7.2791	$\sin(\alpha - \Omega')\sin i''$	9_n5355
$\sin(\alpha - \Omega' + u')$	0.0000	$\sin\delta$	9_n4474
$\sin\delta\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}i''$	8_n7327	Add.	0.0445
$\cos u'$	9_n9670	$\cos\delta\cos i''$	9.9500
$\cos\delta$	9.9823	I	8.9829
I	8_n7327	$\{\ldots\}$	9.9945
II	9_n9499	$r'\sin u' : \Delta$	9_n4206
Add.	0.0256	$\partial\delta : \partial i''$	9_n4151
$\{\ldots\}$	9.9755		
$\partial\delta : \partial\Omega'\sin i''$	9.8252		

man hat also zwischen den Variationen der Elemente und den Variationen der geocentrischen Orte die folgenden Relationen, deren Coëfficienten logarithmisch zu verstehen sind:

$$\cos\delta\,\partial\alpha = 0.6931\;\partial M_0 + 4.4821\;\partial\mu_0 + 9_n7389\;\partial\varphi + 9.6794\;\partial\pi' + 7.2791\;\sin i''\,\partial\Omega' + 8_n5768\;\partial i''$$
$$\partial\delta = 9_n9491\;\partial M_0 + 3_n7371\;\partial\mu_0 + 9.3612\;\partial\varphi + 9_n0222\;\partial\pi' + 9.8252\;\sin i''\,\partial\Omega' + 9_n4151\;\partial i''$$

Um die Richtigkeit dieser Formeln zu prüfen, kann man sich durch willkürliche Variation der Elemente und directe Rechnung aus denselben eine zweckmässige Controle verschaffen. Setzt man nämlich:

$$\partial M = -\;60''$$
$$\partial\mu = +\;0''01$$
$$\partial\varphi = -\;300''$$
$$\partial\pi' = -\;40''$$
$$\partial\Omega'\sin i'' = +\;100''$$
$$\partial i'' = +\;100''$$

so erhält man durch eine directe 6stellige Rechnung als Variationen der geocentrischen Orte die Werthe:

$$\cos\delta\,\partial\alpha = +\;149''1 \qquad \partial\delta = -\;25''4$$

die Substitution der obigen Variationen in die früher ermittelte Relation ergibt hierfür:

$$\cos\delta\,\partial\alpha = +\;149''2 \qquad \partial\delta = -\;25''0$$

was in Anbetracht, dass die Rechnung nur 6stellig geführt wurde, eine mehr als genügende Uebereinstimmung ist.

Um nun endlich ein Beispiel für die Anwendung der Formeln, die für mehr parabolische Bahnen gelten, vorzuführen, wähle ich hierfür die Bahnbestimmung des Cometen I 1866, und werde das Beispiel ausführlich hier mittheilen, weil es Gelegenheit bietet, jenen bei der Methode der kleinsten Quadrate aufgeführten Fall (pag. 362 ff.), wo die Bestimmung einer Unbekannten mit einer besonderen Unsicher-

heit behaftet ist, näher zu erläutern. Als Grundlagen der Rechnung wurden die folgenden Normalorte und Sonnencoordinaten angenommen, die sich auf den mittleren Aequator 1866.0 beziehen:

	mittl. Berl. Zeit	α	δ	X	Y	Z
1.	1865 Dec. 22.5	333°18′17″3	+59°41′14″9	+0.0206905	—0.9010836	—0.3913801
2.	» 27.0	348.16 3.2	+26 58 14.3	+0.0992222	—0.8974048	—0.3893961
3.	1866 Jan. 4.0	352 58 28.8	+ 7 12 57.5	+0.2369292	—0.8753931	—0.3798464
4.	» 9.0	354 1 40.8	+ 2 21 55.0	+0.3207984	—0.8527856	—0.3700335
5.	» 15.0	354 45 57.7	— 1 5 42.3	+0.4181360	—0.8169047	—0.3544614
6.	» 22.0	355 18 6.2	— 3 37 25.5	+0.5256975	—0.7634815	—0.3312834
7.	Febr. 5.0	355 59 26.5	— 6 35 35.4	+0.7152903	—0.6229677	—0.2703121

Als genähert richtige Elemente, deren Verbesserungen gesucht werden sollen, wurden die folgenden äquatorealen Elemente angenommen:

$T =$ 1866 Januar 11.171697 mittl. Berl. Zeit

$$\left.\begin{aligned} \pi' &= 342^\circ 28' 24'' 88 \\ \Omega' &= 202\ 54\ 49.06 \\ i' &= 143\ 19\ 36.10 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Aequ. } 1866.0\,.$$

$$\log q = 9.9896805$$

$$e = 0.9053669$$

Rechnet man in der bekannten Weise die Fehler, welche diese Elemente in den obigen Normalorten übrig lassen, so finden sich dieselben im Sinne Beobachtung — Rechnung, wie folgt:

	$\cos\delta\,\partial\alpha$	$\partial\delta$	v	$\log r$	$\log \Delta$	$\log (t-T)$
1.	—2″02	+0.76	—20°46′26″	0.01239	9.30736	$1_n 20384$
2.	+4.55	+2.27	—20 56 14	0.00352	9.48685	$1_n 18103$
3.	—0.23	—0.84	—10 3 42	9.99287	9.70731	$0_n 85562$
4.	—1.02	+1.40	— 3 3 37	9.98997	9.88562	$0_n 33680$
5.	—0.58	—2.04	+ 5 23 23	9.99059	6.99336	0.58301
6.	—2.16	—0.06	+15 5 54	9.99686	0.08850	1.03456
7.	+0.64	+0.58	+33 8 45	0.02463	0.21886	1.39495

ausserdem habe ich die aus diesen Elementen für die Zeiten der Normalorte resultirenden wahren Anomalien (v), Radiusvectoren (r), geocentrischen Distanzen (Δ) und die seit der Perihelpassage verflossene Zeit ($t - T$) in mittleren Sonnentagen genähert angesetzt, weil die Kenntniss dieser Grössen bei der Berechnung der Differentialquotienten nöthig ist; die Rechnung nach den Formeln I) (pag. 405) stellt sich wie folgt:

	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha - \lambda'$	130°23′28″	145°21′14″	150° 3′40″	151° 6′52″	151°51′ 9″	152°23′17″	153° 4′37″
$\sin \delta$	9.93615	9.65661	9.09903	8.61564	8_n28130	8_n80075	9_n06001
$\cos (\alpha - \lambda')$	9_n81158	9_n91523	9_n93780	9_n94230	9_n94534	9_n94749	9_n95018
$\sin (\alpha - \lambda')$	9.88175	9.75474	9.69817	9.68400	9.67370	9.66603	9.65590
	9.91699	9.87943	9.90970	9.91588	9.92007	9.92305	9.92679
$A \sin A'$	9.71578	9.81943	9.84200	9.84650	9.84954	9.85169	9.85438
A'	34°18′32″	49°15′ 5″	54°19′ 7″	55°28′40″	56°17′40″	56°53′24″	57°39′34″
$\log A$	9.96476	9.94000	9.93230	9.93062	9.92947	9.92864	9.92759
$m \sin M$	9.77616	9.77616	9.77616	9.77616	9.77616	9.77616	9.77616
	9.85433	9.90028	9.91944	9.92373	9.92673	9.92890	9.93168
$m \cos M$	9.78595	9.65894	9.60237	9.58820	9.57790	9.57023	9.56010
M	44°21′15″	52°38′25″	56°10′10″	57° 1′44″	57°38′46″	58° 6′ 6″	58°41′54″
$M + \delta$	104 2 30	79 36 39	63 23 7	59 23 39	56 33 4	54 28 41	52 6 19
$\sin (M + \delta)$	9.98683	9.99282	9.95136	9.93485	9.92136	9.91057	9.89716
m	9.93162	9.87588	9.85672	9.85243	9.84943	9.84726	9.84448
$B \sin B'$	9.91845	9.86870	9.80808	9.78728	9.77079	9.75783	9.74164
	9.91848	9.95070	9.99386	9.99925	9.99982	9.99793	9.99265
$B \cos B'$	9_n74773	9_n57184	9_n03083	8_n55794	8.22604	8.74824	9.01019
B'	124° 1′ 4″	116°47′ 8″	99°36′40″	93°22′30″	88°21′49″	84°24′48″	79°29′10″
$\log B$	9.99997	9.91800	9.81422	9.78803	9.77097	9.75990	9.74899
u'	112°47′10″	118°37′22″	129°29′54″	136°29′59″	144°56′59″	154°39′30″	172°42′21″

aus II pag. 405 findet sich:

	1	2	3	4	5	6	7
$\sin r$	9_n65366	9_n55309	9_n24231	8_n72743	8.97281	9.41577	9.73781
r	0.01239	0.00352	9.99287	9.98997	9.99059	9.99686	0.02403
$\cos r$	9.95075	9.97934	9.99327	9.99938	9.99808	9.98475	9.92287
$\sin r : r$	9_n64127	9_n54957	9_n24944	8_n73746	8.98222	9.41891	9.71318
r^2	0.02478	0.00704	9.98574	9.97994	9.98118	9.99372	0.04926
$F \sin F'$	7_n09885	7_n00715	7_n30702	6_n70504	7.03080	7.47040	7.77076
	9_n98922	9_n99343	9_n99840	9_n99986	9_n99957	9_n99659	9_n98343
$F \cos F'$	8_n34562	8_n36330	8_n38406	8_n39046	8_n38922	8_n37668	8_n32114
F'	192°12′36″	180°56′35″	184°46′50″	181°27′ 5″	177°26′20″	172°49′40″	164°16′24″
$\log F$	8.35640	8.36993	8.38617	8.39060	8.38965	8.38009	8.33771
$\mathrm{tg}\, \frac{1}{2} r$	9_n37056	9_n20063	8_n94463	8_n42073	8.67274	9.12230	9.47363
$\mathrm{tg}\, \frac{1}{2} r^2$	8.75312	8.53326	7.88926	6.85346	7.34548	8.24400	8.94720
θ	+0.00281	+0.00170	+0.00038	+0.00004	+0.00011	+0.00087	+0.00440
$\mathrm{tg}\, \frac{1}{2} r^4$	7.50624	7.06652	5.77852	3.70692	4.69096	6.48920	7.89452
E_1'	9.30051	9.30071	9.30096	9.30102	9.30101	9.30086	9.30021
E_0'	+2.00281	+2.00170	+2.00038	+2.00004	+2.00011	+2.00087	+2.00440

	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2$	+0.05664	+0.03414	+0.00775	+0.00071	+0.00222	+0.01756	+0.08856
$E_1{}^r\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^4$	+0.00064	+0.00023	+0.00001	0.00000	0.00000	+0.00006	+0.00157
$\{\ldots\}$	+2.06009	+2.03607	+2.00814	+2.00075	+2.00233	+2.01849	+2.09453
$\log\{\ldots\}$	0.31389	0.30879	0.30279	0.30119	0.30153	0.30503	0.32109
$\sin v^2$	9.30732	9.10618	8.48462	7.45486	7.94562	8.83154	9.47562
$E_2{}^r$	0_n00097	0_n00059	0_n00013	0_n00001	0_n00004	0_n00030	0_n00153
$E_4{}^r$	9_n90291	9_n90299	9_n90307	9_n90309	9_n90308	9_n90304	9_n90282
$1+E_2{}^r\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2$	+0.94323	+0.96581	+0.99225	+0.99929	+0.99778	+0.98242	+0.91112
$E_4{}^r\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^4$	−0.00257	−0.00093	−0.00005	0.00000	0.00000	−0.00025	−0.00627
$\log\{\ldots\}$	9.97343	9.98447	9.99600	9.99969	9.99903	9.99219	9.95657
$\cos\frac{1}{2}v^2$	9.97607	9.98542	9.99665	9.99969	9.99904	9.99244	9.96315
$\sin v : 2\sqrt{1+e}$	9_n07266	8_n97209	8_n66131	8_n14643	8.30181	8.83477	9.15681
$G\sin G'$	8_n73918	8_n53294	7_n90538	6_n87402	7_n36512	8_n25454	8_n91468
	9_n94787	9_n90927	9_n99321	9_n99938	9.99807	9.98416	9.91567
$G\cos G'$	9_n02216	8_n94198	8_n65456	8_n14581	8.38988	8.81940	9.07653
G'	207°31′46″	201°18′ 3″	190° 6′ 7″	183° 3′41″	−5°23′46″	−15°14′8″	−34°33′15″
$\log G$	9.07429	8.97271	8.66135	8.14643	8.30181	8.83494	9.16086

	1	2	3	4	5	6	7
$\cos v : r$	9.93836	9.96682	0.00040	0.00941	0.00749	9.98789	9.89824
$q\cos v : r$	9.92804	9.95656	9.99668	9.99969	9.99717	9.97757	9.88792
$-\sqrt{1-e}\ G\sin G'$	7.71522	7.50948	6.88142	5.85006	6.34116	7.23058	7.89072
Add.	0.00265	0.00155	0.00034	0.00003	0.00010	0.00078	0.00435
$\log\{\ldots\}$	9.93069	9.95805	9.99042	9.99912	9.99727	9.97835	9.89227
$(t-T) : r^2$	1_n26906	1_n17399	0_n86988	0_n35686	0.60183	1.04084	1.34569
$H\sin H'$	0_n29291	0_n32027	0_n35264	0_n36134	0_n35040	0_n34057	0_n25449
	9_n89951	9_n93729	9_n98508	9_n99861	9_n99569	9_n96686	9_n84053
$H\cos H'$	0.17777	0.08270	9.77850	9.20557	9_n51054	9_n91055	0_n25440
H'	−52°30′27″	−59°56′36″	−75°4′9″	−85°24′51″	201°56′27″	247°52′55″	225°0′22″
$\log H$	0.39340	0.38208	0.36756	0.36273	0.36380	0.37377	0.40496

Bei der Anwendung des Formelsystems III_a pag. 406 wurden jene Abänderungen in Rechnung gezogen, die in der Formel III_b pag. 407 enthalten sind, da der Comet sich in Bezug auf die gewählte Fundamentalebene als retrograd erweist, es wird also statt $\mathcal{A}'$ das Element $\mathcal{A}'$ eingeführt; die Rechnung stellt sich wie folgt:

	1	2	3	4	5	6	7
$A'+u'$	147° 5′42″	167°52′27″	183°19′ 1″	191°58′30″	201°14′39″	211°32′54″	230°21′55″
$B'+u'$	236 48 14	235 24 36	229 6 34	229 52 29	233 18 48	239 4 18	252 11 31
$Ar : \varDelta$	0.66079	0.45667	0.15786	0.03407	9.92670	9.83700	9.73336
$Br : \varDelta$	0.70500	0.43467	0.03078	9.89238	9.76820	9.66826	9.55476

	1	2	3	4	5	6	7
$A' + F' + u'$	330°18'18"	357°49' 2"	8°35'51"	13°25'44"	18°40'59"	24°22'34"	34°38'19"
$\sin(A' + F' + u')$	9_n53800	8_n58078	9.17461	9.36594	9.50560	9.61566	9.75466
$F A r : \Delta$	9.02610	8.82660	8.54403	8.42557	8.31635	8.21709	8.07107
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial T$	8_n50428	7_n40738	7.71864	7.79151	7.82195	7.83275	7.82573
$B' + F' + u'$	69°30'50"	65°21' 5"	53°53'24"	51°19'34"	50°45' 8"	51°53'58"	56°27'55"
$\sin(B' + F' + u')$	9.97163	9.95851	9.90735	9.89249	9.88898	9.89594	9.92093
$F B r : \Delta$	9.06140	8.80460	8.42595	8.28298	8.15785	8.04835	7.89247
$\partial\delta : \partial T$	9.03303	8.76311	8.33330	8.17547	8.04683	7.94429	7.81340
$A' + G' + u'$	354°37'28"	9°10'30"	13°55' 8"	15° 2'20"	195°50'53"	196°18'46"	195°48'10"
$\sin(A' + G' + u')$	8_n97166	9.20263	9.38120	9.41409	9_n43630	9_n44852	9_n43509
$G A r : \Delta$	9.74408	9.42938	8.81921	8.18140	8.31851	8.67194	8.89422
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial e$	8_n71574	8.63201	8.20041	7.59549	7_n75481	8_n12046	8_n32931
$B' + G' + u'$	84°20' 0"	76°42'33"	59°12'41"	52°56'10"	227°55' 2"	223°50'10"	217°37'46"
$\sin(B' + G' + u')$	9.99787	9.98821	9.93402	9.90198	9_n87050	9_n84048	9_n78572
$G B r : \Delta$	9.77929	9.40738	8.70113	8.03881	8.16001	8.50320	8.71562
$\partial\delta : \partial e$	9.77716	9.39559	8.63515	7.94079	8_n03051	8_n34368	8_n50134
$A' + H' + u'$	94°35'15"	107°55'51"	108°44'52"	106°33'48"	103°11' 6"	99°25'49"	95°22'17"
$\sin(A' + H' + u')$	9.99861	9.97838	9.97633	9.98159	9.98840	9.99409	9.99809
$H A r : \Delta$	1.06319	0.83965	0.52542	0.39770	0.29050	0.21077	0.13832
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial\log q$	1.06180	0.81803	0.50175	0.37929	0.27890	0.20486	0.13641
$B' + H' + u'$	184°17'47"	175°27'54"	154° 2'25"	144°27'38"	135°15'15"	126°57'13"	117°11'53"
$\sin(B' + H' + u')$	8_n87458	8.89800	9.64122	9.76438	9.84755	9.90261	9.94912
$H B r : \Delta$	1.09840	0.81765	0.40734	0.25511	0.13200	0.04203	9.95972
$\partial\delta : \partial\log q$	9_n97298	9.71565	0.04856	0.01949	9.97955	9.94464	9.90884
$\sin(A' + u')$	9.73499	9.32234	8_n82327	9_n31708	9_n55912	9_n71868	9_n88656
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial A'$	0.40478	0.77001	8_n98113	9_n35205	9_n48582	9_n55568	9_n61992
$\sin(B' + u')$	9_n02262	9_n91552	9_n87850	9_n88346	9_n90413	9_n93339	9_n97868
$\partial\delta : \partial A$	0_n62762	0_n35019	0_n01828	9_n77584	9_n67233	9_n60165	9_n53344
$\alpha - \Omega' - u'$	17°36'18"	26°43'52"	20°33'40"	14°36'53"	6°54'10"	357°43'47"	340°22'16"
$\cos(\alpha - \Omega' - u')$	9.97917	9.95092	9.97141	9.98572	9.99684	9.99966	9.97400
$r \operatorname{cotg} \frac{1}{2} i' : \Delta$	0.22542	0.03706	9.74595	9.62474	9.51762	9.42875	9.32616
$\cos\delta\,\partial\alpha : \sin i'\,\partial\Omega'$	0.20459	9.98798	9.71739	9.61046	9.51446	9.42841	9.30016
$\cos u'$	9_n58804	9_n68037	9_n80349	9_n86056	9_n91310	9_n95606	9_n99647
$\cos\delta$	9.70305	9.95000	9.99655	9.99963	9.99902	9.99913	9.99712
$\sin(\alpha - \Omega' - u')$	9.48060	9.65302	9.54560	9.40194	9.07985	8_n59784	9_n52624
$\sin\delta \operatorname{cotg} \frac{1}{2} i'$	9.45654	9.17700	8.61942	8.13003	7_n80169	8_n32114	8_n58040

	1	2	3	4	5	6	7
log I	9_n29109	9_n63037	9_n80004	9_n86019	9_n91302	9_n95519	9_n99359
log (— II)	8_n93720	8_n83002	8_n16502	7_n53797	6.88154	6_n91808	8_n10664
Add.	0.15918	0.06384	0.00995	0.00206	9.99960	0.00040	0.00560
log {...}	9_n45027	9_n69421	9_n80999	9_n86225	9_n91262	9_n95559	9_n99919
$\partial\delta : \sin i' \partial \Omega'$	0_n15530	0_n21088	0_n03555	9_n96660	9_n90985	9_n86395	9_n80496
$\sin u'$	9.96471	9.94339	9.88742	9.83781	9.75913	9.63146	9.10368
$\cos(\alpha - \Omega') \sin i'$	9_n58774	9_n69139	9_n71396	9_n71846	9_n72150	9_n72365	9_n72634
$\cos\delta \, \partial\alpha : \partial i'$	0.25748	0.15145	9.82694	9.66662	9.47786	9.20347	8.63579
$\sin\delta \sin(\alpha - \Omega')$	9.81799	9.41135	8.79720	8.20964	7_n95500	8_n40678	8_n71591
log I	9.59406	9.18751	8.57336	8.07580	7_n73116	8_n24204	8_n49207
log II	9_n60725	9_n85120	9_n99075	9_n99383	9_n99412	9_n99333	9_n99132
Add.	8.18007	9.80463	9.07007	9.99350	0.00201	0.00039	0.01660
log {...}	8_n08313	9_n74883	9_n87982	9_n80733	9_n90703	9_n91272	9_n91702
$r \sin u : \Delta$	0.66074	0.16000	0.11208	9.94216	9.75636	9.53082	8.99415
$\partial\delta : \partial i'$	8_n75287	0_n20880	0_n00280	9_n83949	9_n96339	9_n45254	8_n82737

Bei der Ausgleichung wird allen Normalorten das gleiche Gewicht gegeben, man kann also sofort daran gehen, nach den bei der Methode der kleinsten Quadrate angeführten Vorschriften (pag. 318) die Coëfficienten homogen zu machen und man wird als neue Unbekannte ansetzen (Coefficienten logarithmisch):

$$\left.\begin{aligned} x &= 0.25748 \; \partial i' \\ y &= 0.21088 \; \sin i' \partial \Omega' \\ z &= 0.62762 \; \partial \Delta' \\ t &= 1.06180 \; \partial \log q \\ u &= 9.03303 \; \partial T \\ w &= 9.77710 \; \partial e \\ \text{log Fehlereinheit} &= 0.6580 \,. \end{aligned}\right\} \quad \alpha$$

Hier ist schon die Anordnung der Unbekannten so gewählt, dass die mit besonderer Unsicherheit zu bestimmende Excentricität als die letzte erscheint. Die logarithmisch angesetzten, homogen gemachten Bedingungsgleichungen sind also:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
9_n6474 = 0.0000\,x & + \; 9.9937\,y & + \; 9.7772\,z & + \; 0.0000\,t & + \; 9_n5312\,u & + \; 8_n9386\,w \\
0.0000 = 9.8940 & 9.7771 & 9.1514 & 9.7562 & 8_n3743 & 8.8548 \\
8_n7037 = 9.5695 & 9.5065 & 8_n3535 & 9.4399 & 8.6856 & 8.4232 \\
9_n3506 = 9.4031 & 9.3996 & 8_n7244 & 9.3175 & 8.7585 & 7.8183 \\
9_n1054 = 9.2204 & 9.3036 & 8_n8582 & 9.2171 & 8.7889 & 7_n9776 \\
9_n6765 = 9.0000 & 9.2175 & 8_n9281 & 9.1431 & 8.7997 & 8_n3433 \\
9.1482 = 8.3783 & 9.0893 & 8_n9023 & 9.0740 & 8.7027 & 8_n5521 \\
9.2228 = 8_n4954 & 9_n9444 & 0_n0000 & 8_n9112 & 0.0000 & 0.0000 \\
9.6980 = 9_n9514 & 0_n0000 & 9_n7226 & 8.6538 & 9.7301 & 9.6184
\end{array}\right\} \quad \beta$$

9_n2663	9_n7353x +	9_n8217y +	9_n2907z +	$8.9868t$ +	$9.3003u$ +	$8.8580w$
9.4881 =	9_n5820	9_n7557	9_n1482	8.9577	9.1424	8.1636
9_n0510 =	9_n4059	9_n6090	9_n0417	8.9177	9.0138	8_n2533
8_n1202 =	9_n1951	9_n0531	8_n9740	8.8828	8.9113	8_n5665
9.1054 =	8_n5609	9_n5941	8_n9058	8.8470	8.7804	8_n7242

Die Bildung der Normalgleichungen aus diesen Coëfficienten ist ausführlich bei der Methode der kleinsten Quadrate (pag. 327 ff. behandelt. Entlehnt man nun dieser Rechnung die für die Bildung der Eliminationsgleichungen nothwendigen Grössen, und bildet die Controlgrössen $[as]$, $[bs]$ etc. (vergl. pag. 317) so gestaltet sich die Elimination nach den früher (pag. 339 ff.) gegebenen Vorschriften wie folgt, wobei jedoch mit Rücksicht auf die im § 6 der Methode der kleinsten Quadrate (pag. 303 ff. gemachte Bemerkung die Elimination nur bis zur vorletzten Unbekannten durchgeführt wurde:

x	y	z	t	u	w	v	s	Proben
+ 3.1865 0.50331	+ 3.4049 0.53211	+ 1.3742 0.13805	+ 1.4853 0.17182	— 1.0222 0_n00954	— 0.4592 9_n66200	— 0.1590 9_n20141	+ 7.8105 0.89268	E
0.02880	+ 4.7297 + 3.6384	+ 2.3616 + 1.4684	+ 1.3453 + 1.5871	— 2.0300 — 1.0923	— 1.3478 — 0.4907	— 0.5159 — 0.1699	+ 7.9478 + 8.3460	
	+ 1.0913 0.03794	+ 0.8932 9.95095	— 0.2418 9_n38346	— 0.9377 9_n97206	— 0.8571 9_n93303	— 0.3460 9_n53908	— 0.3982 9_n60010	— 0.3981 E
9.63474		+ 1.7681 + 0.5926	+ 0.6311 + 0.6406	— 1.5927 — 0.4408	— 1.2625 — 0.1980	— 0.4725 — 0.0686	+ 2.8073 + 3.3684	
9.91301		+ 1.1755 + 0.7311	— 0.0095 — 0.1979	— 1.1519 — 0.7675	— 1.0645 — 0.7015	0.4039 0.2832	0.5611 — 0.3259	
		+ 0.4444 9.64777	+ 0.1884 9.27508	— 0.3844 9_n58478	— 0.3630 9_n55991	— 0.1207 9_n08171	— 0.2352 9_n37144	— 0.2353 E
9.66851			+ 1.5484 + 0.6924	— 0.3078 — 0.4765	— 0.1085 — 0.2140	— 0.0143 — 0.0741	+ 4.5795 + 3.6407	
9_n34552			+ 0.8560 + 0.0536	+ 0.1687 + 0.2078	+ 0.1055 + 0.1899	+ 0.0598 + 0.0767	+ 0.9388 + 0.0882	
9.62731			+ 0.8024 + 0.0799	— 0.0391 — 0.1630	— 0.0844 — 0.1539	— 0.0169 — 0.0512	+ 0.8506 — 0.0997	
			+ 0.7225 9.85884	+ 0.1239 9.09307	+ 0.0695 8.84198	+ 0.0343 8.53529	+ 0.9503 9.97786	+ 0.9502 E
9_n50623				+ 1.5016 + 0.3279	+ 1.2568 + 0.1473	+ 0.4841 + 0.0510	— 1.7102 — 2.5056	
9_n93412				+ 1.1737 + 0.8057	+ 1.1095 + 0.7365	+ 0.4331 + 0.2973	+ 0.7954 + 0.3422	
9_n93701				+ 0.3680 + 0.3325	+ 0.3730 + 0.3140	+ 0.1358 + 0.1044	+ 0.4532 + 0.2034	
9.23423				+ 0.0355 + 0.0212	+ 0.0590 + 0.0119	+ 0.0314 + 0.0059	+ 0.2498 + 0.1630	
				+ 0.0143 8.15534	+ 0.0471 8.67302	+ 0.0255 8.40654	+ 0.0868	+ 0.0869 E

Um zu zeigen, dass in der That die Bestimmung der letzten Unbekannten mit einem einigermaassen genügenden Grade der Annäherung aus diesen Gleichungen nicht möglich ist, will ich des Beispieles halber die Elimination vollenden, man erhält so, das Schema fortsetzend:

	+ 1.1978	+ 0.4811
9_n15869	+ 0.0662	+ 0.0229
	+ 1.1316	+ 0.4582
9_n89509	+ 0.6732	+ 0.2718
	+ 0.4584	+ 0.1864
9_n91214	+ 0.2965	+ 0.0986
	+ 0.1619	+ 0.0878
8.98314	+ 0.0067	+ 0.0033
	+ 0.1552	+ 0.0845
0.51768	+ 0.1551	+ 0.0840
	+ 0.0001	+ 0.0005

so dass in der That der für die Bestimmung der letzten Unbekannten nothwendige Coëfficient weit innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Rechnung liegt und wohl auch in ähnlichen Fällen der theoretischen Ableitung entgegen (pag. 331) negativ gefunden wird.

Bestimmt man die Summe der Fehlerquadrate nach den bekannten Formeln (pag. 337, 338), die übrig bleiben, wenn man von der letzten Unbekannten absieht, so erhält man:

$$nn5 = 1.9368 \,. \qquad (\gamma)$$

Aus der letzten Eliminationsgleichung folgt aber (logarithmische Coëfficienten):

$$u = 0.25120 + 0_n51768\, w$$

da der Coëfficient von w grösser als die Einheit wird, so lehrt dieser Umstand (vergl. pag. 364), dass es in der That zweckmässiger gewesen wäre, als letzte Unbekannte u anzusetzen, doch ist dieser Factor hinreichend klein, so dass ein wesentlicher Nachtheil für die Rechnung daraus nicht entstehen kann. Substituirt man nun diesen Werth von u der Reihe nach in die einzelnen Eliminationsgleichungen (vergl. pag. 424), so erhält man alle Unbekannten als Functionen von w ausgedrückt; man findet so, indem wieder alle Coëfficienten logarithmisch verstanden werden:

$$\left.\begin{aligned} u &= 0.25120 + 0_n51768\, w \\ t &= 9_n41207 + 9.67085\, w \\ z &= 0.14004 + 0_n34848\, w \\ y &= 8.44778 + 9_n06030\, w \\ x &= 8.23547 + 8_n66312\, w \end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

Die erste Columne rechts vom Gleichheitszeichen gibt also die wahrscheinlichsten Correctionen der Elemente, wenn man $w = 0$ setzt; substituirt man dem-

nach die Werthe von δ (pag. 425) in die Gleichungen β (pag. 423) und schafft die von w unabhängigen Correctionen auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man als neue Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von w sofort (Coëfficienten nicht logarithmisch):

Rectascensionen.	Declinationen.	
$-0.4510 = +0.0061\,w$,	$-0.2318 = +0.0016\,w$	
$+0.9636 = -0.0042\,w$,	$+0.3240 = +0.0012\,w$	
$-0.0502 = -0.0079\,w$,	$-0.2180 = -0.0027\,w$	
$-0.2111 = -0.0071\,w$,	$+0.3004 = -0.0031\,w$	ε)
$-0.1035 = -0.0046\,w$,	$-0.4396 = -0.0026\,w$	
$-0.4406 = +0.0007\,w$,	$+0.0064 = -0.0006\,w$	
$+0.1926 = +0.0195\,w$,	$+0.1609 = +0.0077\,w$	

Die Grössen links vom Gleichheitszeichen stellen also die minimalen Fehler dar, wenn man $w = 0$ setzt; die Summe dieser Fehlerquadrate muss daher mit dem oben gefundenen Werthe γ) (pag. 425) von $[nn5]$ stimmen, in der That ist:

$$[n'n'] = 1.9368\,,$$

so dass die Uebereinstimmung zufällig vollkommen ist; man sieht aus den Gleichungen ε) sofort, dass die Bestimmung von w sehr unsicher ausfallen muss, da alle Coëfficienten dieser Unbekannten klein sind, doch übersteigen die meisten weit die Unsicherheit der Rechnung; vergleicht man also dieses Resultat mit dem der obigen Elimination, so sieht man sofort ein, dass die Zurückführung des Zusammenhanges der unsicheren Unbekannten mit den Beobachtungen auf die einfachste Form in der That ganz wesentliche Vortheile bringt.

Führt man nun wieder, um die Rechnung einfacher zu gestalten (logarithmisch):

$$w' = 8.2900\,w$$

ein, so erhält man durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate w' bestimmt durch:

$$w' = \frac{[a'n']}{[a'a']}\,;$$

es ist aber:

$$[a'n'] = +0.0551$$
$$[a'a'] = +1.7278\,,$$

$$\text{also}\ \log w' = 8.5038$$
$$\log w = 0.2138\,.$$

substituirt man diesen Werth von w in die Gleichungen δ) (pag. 425), so resultirten aus denselben die Werthe der Unbekannten, die mit Rücksicht auf die in α) (pag. 423) eingeführten Homogenitätsfactoren und unter Beachtung des Umstandes, dass die Unbekannten $\delta \log q$, δT und δe zunächst im Bogenmaasse erscheinen, also durch die

Multiplication mit dem Sinus einer Bogensekunde auf Einheiten des Radius zurückgeführt werden müssen, in die Aenderungen der Elemente leicht umgesetzt werden können:

$\log w = 0.2138$	$\partial e = +0.0000603$	
$\log u = 0_n5570$	$\partial T = \quad 0.000737$	
$\log t = 9.7062$	$\partial \log q = +0.0000010$	
$\log z = 0_n3560$	$\partial \Delta' = -2''43$	$\Big\}\ \partial \pi' = \quad 3''93$
$\log y = 9_n2041$	$\partial \Omega' = -0\ 75$	
$\log x = 8_n7643$	$\partial i' = -0.15$.	

Substituirt man den oben gefundenen Werth von w in die Gleichungen ε verwandelt alles in Bogenmaass und führt überdies statt w die Unbekannte ∂e ein, so erhält man nach den Differentialformeln die folgende Darstellung der Orte, wobei aber für das wahrscheinlichste System $\partial e = 0$ zu setzen ist:

		$\cos\delta\, d\alpha$		$d\delta$	
1865 Dec.	22.5	$-2''10 - 0''75\ 10^3\ \partial e$	,	$-1''07 - 0''20\ 10^3\ \partial e$	
»	27.0	$+4.42 + 0.52$ »	.	$+1.47 - 0.15$ »	
1866 Jan.	4.0	$-0.17 + 0.98$ »	,	$-0\ 97 + 0.33$ »	
»	9.0	$-0.91 + 0.88$ »	,	$+1.39 + 0.38$ »	ζ
»	15.0	$-0.44 + 0.57$ »	,	$-1.98 + 0.32$ »	
»	22.0	$-2.01 - 0.09$ »	,	$+0.03 + 0.07$ »	
Febr.	5.0	$+0.73 - 2.41$ »	,	$+0.67 - 0.95$ »	

Die verbesserten Elemente selbst werden erhalten durch die Hinzufügung der Correctionen:

☄ I. 1866

$T =$ 1866 Januar 11.170960 mittl. Berl. Zeit.

$$\left.\begin{aligned} \pi' &= 342^\circ 28' 20''05 \\ \Omega' &= 202^\circ 54' 48''31 \\ i' &= 143^\circ 19' 35''95 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Aequat. 1866.0}$$

$$\log q = 9.9896815$$

$$e = 0.9054272\ .$$

Rechnet man aus diesen Elementen die Darstellung der Orte direct, so findet man eine völlige Uebereinstimmung mit den Werthen in ζ innerhalb der Unsicherheit der siebenstelligen Rechnung; würden aber die erforderlichen Correctionen der Elemente wesentlich grösser sein als in dem vorliegenden Falle, so könnten leicht ganz erhebliche Differenzen zwischen den Resultaten der directen Rechnung und jenen der Differentialformeln auftreten: man würde in einem solchen Falle die Auflösung der Normalgleichungen zu wiederholen haben; hierbei wird es aber, wenn nicht die zu Grunde gelegten Elemente allzu fehlerhaft waren, nur nöthig sein, die mit n verbundenen Coëfficienten, also $[an]$, $[bn]$ ... $[fn]$ neu zu rechnen, und demnach bei der Auflösung der Normalgleichungen nur die vorletzte Columne, die die n-Werthe enthält, abzuändern. Für die Werthe von n müssen natürlich die Resultate der directen Vergleichung der verbesserten Elemente mit den Normalorten

zu Grunde gelegt werden. Die Gleichungen 2 (pag. 427) zeigen, dass man wohl δe innerhalb der Grenzen $\pm$ 0.003 abändern darf, ohne gerade mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerathen; jede Aenderung von δe bewirkt aber nach den Gleichungen δ (pag. 425) eine Aenderung von q, man erhält aus diesen die diesbezügliche Relation:

$$\delta \log q = 8.3862\, \delta e\ ,$$

also sind die in $\delta \log q$ bewirkten Aenderungen $\pm$ 0.000 0730, wenn man δe um $\pm$ 0.003 abändert. Die grosse Achse und die Umlaufszeit in siderischen Jahren bestimmt sich nach:

$$a = \frac{q}{1-e} \qquad\qquad U = a^{\frac{3}{2}}$$

ist also nach den obigen Elementen:

$$\log a = 1.0139152$$
$$U = 33.17973 \text{ sid. Jahre.}$$

Macht man aber von den obigen als möglich bezeichneten Aenderungen Gebrauch, so findet man für:

$$\begin{array}{rlrl} de & = +\ 0.003 & de & = -\ 0.003 \\ d\log q & = +\ 0.000\ 0730 & d\log q & = -\ 0.0000730 \\ \log a & = 1.0279880 & \log a & = 1.0002797 \\ U & = 34.83 & U & = 31.65\ , \end{array}$$

d. h. die Umlaufszeit kann zwischen den Grenzen 31.65 und 34.83 Jahren angenommen werden, ohne mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerathen.

§ 7. Bestimmung der Bahnelemente eines kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition.

Die Anwendung der in dem vorausgehenden Paragraphen entwickelten Methoden auf die Bestimmung der Bahnelemente eines kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition scheint auf den ersten Blick keinen theoretischen Schwierigkeiten unterworfen zu sein, doch wird man sich derselben sofort bewusst werden, wenn man erwägt, dass die Bahnelemente in dem vorliegenden Falle niemals mit einem hohen Grade von Genauigkeit bestimmt werden können, da der von den Planeten innerhalb des Zeitraumes der vorhandenen Beobachtungen zurückgelegte heliocentrische Bogen ein mässiger sein wird; man wird deshalb in der Lage sein, die Elemente der Planeten innerhalb verhältnissmässig weiter Grenzen zu variiren, ohne auf eine gute Darstellung der Beobachtungen verzichten zu müssen. Sind aber die an die Elemente anzubringenden Incremente gross, so wird man nicht erwarten dürfen, dass der Zusammenhang derselben mit den Beobachtungen ein linearer bleibt; genügen aber die Bedingungsgleichungen nicht völlig diesen Bedingungen,

so wird jede auf diese Voraussetzung begründete Lösung mit Fehlern behaftet sein, die unter Umständen ganz beträchtlich sein können. Der durch die Methode der kleinsten Quadrate gestellten Forderung des linearen Zusammenhanges wird man aber in verchiedener Weise durch entsprechende Wahl der willkürlichen Constanten des Problemes genügen können, und in der That lässt sich für den vorliegenden Fall eine Wahl derselben treffen, die in viel höherem Maasse der gestellten Forderung entspricht, als die in den vorstehenden Methoden eingeführten Elemente. Man gelangt dadurch zu einer Lösung der vorgelegten Aufgabe, die eine sonst mehrfach zu wiederholende Aufstellung der Bedingungsgleichungen in kurzer und sicherer Weise umgeht, und um so werthvoller wird wenn man sich nicht begnügt die wahrscheinlichsten Elemente allein zu bestimmen, sondern auch jene Elemente aufsucht, die die Eigenschaft haben, noch in erträglicher Weise sich den Beobachtungen anzuschliessen, eine Untersuchung, die insbesonders bei in Verlust gerathenen Planeten oft von grosser Bedeutung sein kann.

Es lässt sich nach I pag. 108 jede heliocentrische Coordinate x, y, z innerhalb mässiger Zeitgrenzen mit Vortheil als Funktion der Ausgangscoordinaten x_0, y_0, z_0 und deren Geschwindigkeiten $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ darstellen; nämlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= a x_0 + b\,\frac{dx_0}{dt} \\ y &= a y_0 + b\,\frac{dy_0}{dt} \\ z &= a z_0 + b\,\frac{dz_0}{dt}\,. \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

wo a und b für jede der drei Coordinaten identische Funktionen der Ausgangscoordinaten, Geschwindigkeiten und der Zwischenzeit τ sind: in der ersten Annäherung kann aber $a = 1$ und $b = \tau$ gesetzt werden, woraus man den Schluss ziehen kann, dass die Variationen der Coordinaten und der Geschwindigkeiten für die Ausgangsepoche im Allgemeinen einen geringen Einfluss auf a und b zeigen werden. Hierbei wird die Zeit von der Epoche der Ausgangscoordinaten gezählt gedacht, ausgedrückt in Einheiten des mittleren Sonnentages multiplicirt in die Constante des Sonnensystems k, man hat also die ebenfalls am citirten Orte angeführten Relationen:

$$k\,t = \tau\,, \quad k\,d\,t = d\,\tau\,.$$

Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{dx_0}{d\tau} = \xi_0\,, \quad \frac{dy_0}{d\tau} = \eta_0\,, \quad \frac{dz_0}{d\tau} = \zeta_0\,. \quad 2)$$

so wird man statt 1) zu schreiben haben:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,x_0 + b\,\xi_0 \\ y &= a\,y_0 + b\,\eta_0 \\ z &= a\,z_0 + b\,\zeta_0\,. \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Setzt man:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r_0^2\,.$$

also:

$$x_0\,\xi_0 + y_0\,\eta_0 + z_0\,\zeta_0 = r_0\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right), \tag{4}$$

so hat man für a und b nach I pag. 109 die Reihen:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 - \tfrac{1}{2}\frac{\tau^2}{r_0^3} + \tfrac{1}{2}\frac{\tau^3}{r_0^4}\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right) + \left\{\frac{1}{r_0^6} - \frac{12}{r_0^5}\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right)^2 + \frac{3}{r_0^4}\left(\frac{d^2 r_0}{d\,\tau^2}\right)\right\}\frac{\tau^4}{24} + \ldots \\ b &= \tau - \tfrac{1}{6}\frac{\tau^3}{r_0^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\tau^4}{r_0^4}\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

welche wohl stets innerhalb der hier in Aussicht genommenen Ausdehnung ausreichen werden. Zur Berechnung von $\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right)$ kann man wohl die Relation 4) benützen, kürzer wird sich aber die Rechnung gestalten (vergl. pag. 89), wenn man berechnet:

$$\frac{d\,r_0}{d\,\tau} = \frac{\sin\varphi_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}}, \tag{6}$$

wo also φ_0, p_0 der Excentricitätswinkel und der Parameter der Ausgangselemente ist und die aus den letzteren folgende wahre Anomalie zur Zeit der Ausgangsepoche durch v_0 bezeichnet wird. Die nochmalige Differentiation nach der Zeit gibt in Verbindung mit der bekannten Relation (vergl. I pag. 45):

$$r^2\,d\,v = \sqrt{p}\;k\,d\,t,$$

$$\frac{d^2 r_0}{d\,\tau^2} = \frac{\sin\varphi_0 \cos v_0}{r_0^2} \tag{7}$$

Durch die Gleichungen 6) und 7) werden also die in den Gleichungen 5) auftretenden Differentialquotienten leicht berechnet werden können. Setzt man also:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= -\frac{1}{2\,r_0^3} \\ A_3 &= \frac{1}{2\,r_0^4}\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right) = \frac{1}{2\,r_0^5}\left(r_0\,\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right) \\ A_4 &= \frac{1}{24\,r_0^5}\left\{\frac{1}{r_0} + 3\,r_0\left(\frac{d^2 r_0}{d\,\tau}\right) - 12\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right)^2\right\}\ \text{*)} \\ B_3 &= -\frac{1}{6\,r_0^3} \\ B_4 &= \frac{1}{4\,r_0^4}\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right) = \frac{1}{4\,r_0^5}\left(r_0\,\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

so sind die in 8) bestimmten Coefficienten in einem gegebenen Falle bestimmte numerische Constanten und man hat zur Berechnung von a und b die bequemen Formen:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 + A_2\,\tau^2 + A_3\,\tau^3 + A_4\,\tau^4 + \ldots \\ b &= \tau\,(1 + B_3\,\tau^2 + B_4\,\tau^3 + \ldots)\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Es sollen nun als die sechs Constanten des Problemes (Elemente) die Grössen x_0, y_0, z_0, ξ_0, η_0 und ζ_0 gewählt werden, ohne noch vorerst über die Lage des

---

*) A_4 kann noch berechnet werden nach $\frac{1}{8\,r_0^5}\,g^2 - \frac{5}{8\,r_0^5}\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right)^2 - \frac{1}{12\,r_0^6}$, welche Transformation sich leicht aus den folgenden Entwickelungen ergibt (vgl. Gleichung 14).

Coordinatensystemes, ausser der Bedingung, dass der Anfangspunkt in den Sonnenmittelpunkt gelegt ist, weitere Bestimmungen zu treffen. Es wird sich also mit Rücksicht auf die Gleichung 3) pag. 429) jede Variation einer heliocentrischen Coordinate als Variation der obigen Elemente darstellen lassen und man erhält, indem man die Ermittelung der Variationen der Grössen a und b vorerst symbolisch darstellt und deren Entwickelung auf später vorbehält, das folgende System:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{\partial x}{\partial x_0} = a + x_0\left(\frac{\partial a}{\partial x_0}\right) + \xi_0\left(\frac{\partial b}{\partial x_0}\right), & \frac{\partial x}{\partial \xi_0} = b + x_0\left(\frac{\partial a}{\partial \xi_0}\right) + \xi_0\left(\frac{\partial b}{\partial \xi_0}\right) \\
\frac{\partial x}{\partial y_0} = x_0\left(\frac{\partial a}{\partial y_0}\right) + \xi_0\left(\frac{\partial b}{\partial y_0}\right), & \frac{\partial x}{\partial \eta_0} = x_0\left(\frac{\partial a}{\partial \eta_0}\right) + \xi_0\left(\frac{\partial b}{\partial \eta_0}\right) \\
\frac{\partial x}{\partial z_0} = x_0\left(\frac{\partial a}{\partial z_0}\right) + \xi_0\left(\frac{\partial b}{\partial z_0}\right), & \frac{\partial x}{\partial \zeta_0} = x_0\left(\frac{\partial a}{\partial \zeta_0}\right) + \xi_0\left(\frac{\partial b}{\partial \zeta_0}\right) \\
\frac{\partial y}{\partial x_0} = y_0\left(\frac{\partial a}{\partial x_0}\right) + \eta_0\left(\frac{\partial b}{\partial x_0}\right), & \frac{\partial y}{\partial \xi_0} = y_0\left(\frac{\partial a}{\partial \xi_0}\right) + \eta_0\left(\frac{\partial b}{\partial \xi_0}\right) \\
\frac{\partial y}{\partial y_0} = a + y_0\left(\frac{\partial a}{\partial y_0}\right) + \eta_0\left(\frac{\partial b}{\partial y_0}\right), & \frac{\partial y}{\partial \eta_0} = b + y_0\left(\frac{\partial a}{\partial \eta_0}\right) + \eta_0\left(\frac{\partial b}{\partial \eta_0}\right) \\
\frac{\partial y}{\partial z_0} = y_0\left(\frac{\partial a}{\partial z_0}\right) + \eta_0\left(\frac{\partial b}{\partial z_0}\right), & \frac{\partial y}{\partial \zeta_0} = y_0\left(\frac{\partial a}{\partial \zeta_0}\right) + \eta_0\left(\frac{\partial b}{\partial \zeta_0}\right) \\
\frac{\partial z}{\partial x_0} = z_0\left(\frac{\partial a}{\partial x_0}\right) + \zeta_0\left(\frac{\partial b}{\partial x_0}\right), & \frac{\partial z}{\partial \xi_0} = z_0\left(\frac{\partial a}{\partial \xi_0}\right) + \zeta_0\left(\frac{\partial b}{\partial \xi_0}\right) \\
\frac{\partial z}{\partial y_0} = z_0\left(\frac{\partial a}{\partial y_0}\right) + \zeta_0\left(\frac{\partial b}{\partial y_0}\right), & \frac{\partial z}{\partial \eta_0} = z_0\left(\frac{\partial a}{\partial \eta_0}\right) + \zeta_0\left(\frac{\partial b}{\partial \eta_0}\right) \\
\frac{\partial z}{\partial z_0} = a + z_0\left(\frac{\partial a}{\partial z_0}\right) + \zeta_0\left(\frac{\partial b}{\partial z_0}\right), & \frac{\partial z}{\partial \zeta_0} = b + z_0\left(\frac{\partial a}{\partial \zeta_0}\right) + \zeta_0\left(\frac{\partial b}{\partial \zeta_0}\right)
\end{array}\right\} \quad 10)$$

Die nächste Aufgabe wird nun darin bestehen, die Bedeutung der symbolisch angezeigten Differentialquotienten näher zu entwickeln. Beachtet man die Ausdrücke 5 (pag. 430), so sieht man sofort, dass die Differentiation nach jeder Coordinate und deren Geschwindigkeit völlig analoge Ausdrücke ergeben muss; da die angeführten Ausdrücke die Coordinaten und Geschwindigkeiten nur in r_0 und deren Derivationen enthalten, die selbst völlig symmetrisch in Bezug auf die letzteren gebaut sind. Es wird also die Durchführung der Differentiation nach x_0 und ξ_0 allein genügen, um die analogen Formen für die Derivationen von y_0, η_0, z_0 und ζ_0 hinschreiben zu können; und auch diese Operationen lassen sich wesentlich vereinfachen, wenn man die folgenden Bemerkungen beachtet.

Zunächst wird man berücksichtigen, das ist:

$$\frac{\partial r_0}{\partial x_0} = \frac{x_0}{r_0}, \qquad \frac{\partial r_0}{\partial \xi_0} = 0 . \qquad 11)$$

setzt man weiter:

$$\left(r_0 \frac{\partial r_0}{d t}\right) = h' ,$$

so ist offenbar nach 4) (pag. 430):

$$\frac{\partial h'}{d x_0} = \xi_0 , \qquad \frac{\partial h'}{d \xi_0} = x_0 . \qquad 12)$$

Um für die zweiten Differentialquotienten von r_0 die entsprechenden Differentiationen ausführen zu können, werde ich die bei der Hansen-Tietjen'schen Methode (pag. 142) der Störungsrechnung aufgestellte Gleichung heranziehen; dieselbe wurde an der citirten Stelle gefunden:

$$\frac{d^2(r)}{dt^2} - (r)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k^2 (r)}{r^3} = (r) \Sigma R - (r) \Sigma w \; ;$$

bemerkt man, dass für die ungestörte Bewegung der Ausdruck rechter Hand verschwindet und (r) mit r und $\frac{dl}{dt}$ mit $\frac{dr}{dt}$ identificirt werden darf, so wird geschrieben werden können:

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} = r_0 \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{r_0^2} \, .$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit, dividirt durch das Quadrat der Constante des Sonnensystems, sei durch g^2 bezeichnet, so wird g^2 leicht (vergl. I pag. 44) berechnet werden können nach:

$$g^2 = \frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_0} \; ; \qquad (13)$$

es ist aber überdiess:

$$g^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = \left(r_0 \frac{d r_0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right)^2 ,$$

man wird also haben:

$$r_0^2 \frac{d^2 r_0}{d\tau^2} = r_0 \, g^2 - r_0 \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right)^2 - 1 \, .$$

Führt man diese Relation in A_1 (8) pag. 430) ein, so findet sich:

$$A_1 = \frac{1}{24 r_0^6} \Big\{ -2 - 15 r_0 \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right)^2 + 3 r_0 \, g^2 \Big\} = - \frac{1}{12 r_0^6} - \frac{5}{8 r_0^7} h'^2 + \frac{1}{8 r_0^5} g^2 . \qquad (14)$$

wobei ist:

$$\frac{\partial g}{d x_0} = 0 \qquad g \frac{\partial g}{\partial \xi_0} = \xi_0 \; ; \qquad (15)$$

es wird also:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial A_2}{\partial x_0} &= \frac{3}{2} \frac{x_0}{r_0^5} \, , \qquad \frac{\partial A_2}{\partial \xi_0} = 0 \\
\frac{\partial A_3}{\partial x_0} &= - \frac{5 x_0}{2 r_0^6} \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right) + \frac{\xi_0}{2 r_0^5} \, , \qquad \frac{\partial A^3}{\partial \xi_0} = \frac{x_0}{2 r_0^5} \\
\frac{\partial A_4}{\partial x_0} &= \Big\{ \frac{1}{2 r_0^5} + \frac{35}{8 r_0^7} \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right)^2 - \frac{5}{8 r_0^7} g^2 \Big\} \xi_0 - \frac{5}{4 r_0^6} \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right) x_0 \\
\frac{\partial A_4}{\partial \xi_0} &= - \frac{5 x_0}{4 r_0^6} \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right) + \frac{\xi_0}{4 r_0^5} \\
\frac{\partial B_3}{\partial x_0} &= \frac{x_0}{2 r_0^5} \, , \qquad \frac{\partial B_3}{\partial \xi_0} = 0 \\
\frac{\partial B_4}{\partial x_0} &= - \frac{5 x_0}{4 r_0^6} \left(\frac{d r_0}{d\tau}\right) + \frac{\xi_0}{4 r_0^5} \, , \qquad \frac{\partial B_4}{\partial \xi_0} = \frac{x_0}{4 r_0^5}
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

es ist aber offenbar nach (9) (pag. 430):

$$\frac{\partial a}{\partial x_0} = \frac{\partial A_2}{\partial x_0}\tau^2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_0}\tau^3 + \frac{\partial A_4}{\partial x_0}\tau^4$$
$$\frac{\partial a}{\partial \xi_0} = \frac{\partial A_2}{\partial \xi_0}\tau^2 + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_0}\tau^3 + \frac{\partial A_4}{\partial \xi_0}\tau^4$$
$$\frac{\partial b}{\partial x_0} = \frac{\partial B_3}{\partial x_0}\tau^3 + \frac{\partial B_4}{\partial x_0}\tau^4$$
$$\frac{\partial b}{\partial \xi_0} = \frac{\partial B_3}{\partial \xi_0}\tau^3 + \frac{\partial B_4}{\partial \xi_0}\tau^4 .$$

Substituirt man nun in diese Ausdrücke die in (16) (pag. 432) gefundenen Differentialquotienten und setzt abkürzend:

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{\tau^2}{r_0^5}\left\{1 - \frac{5}{3}\frac{\tau}{r_0}\left(\frac{d r_0}{d t}\right) + \frac{\tau^2}{12 r_0^2}\left[\frac{4}{r_0} + 35\left(\frac{d r_0}{d t}\right)^2 - 5 g^2\right]\right\}$$
$$\beta = \frac{1}{2}\frac{\tau^3}{r_0^5}\left\{1 - \frac{5}{2}\frac{\tau}{r_0}\left(\frac{d r_0}{d t}\right)\right\}$$
$$\gamma = \frac{1}{4}\frac{\tau^4}{r_0^5}$$

welchen Ausdrücken man auch die folgende Gestalt geben kann:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_2\,\tau^2\{1 + \alpha_3\,\tau + \alpha_4\,\tau^2\}\\
\beta &= \beta_3\,\tau^3\{1 + \beta_4\,\tau\}\\
\gamma &= \gamma_4\,\tau^4\\
\alpha_2 &= \frac{3}{2 r_0^5}\\
\alpha_3 &= -\frac{5}{3 r_0}\left(\frac{d r_0}{d t}\right)\\
\alpha_4 &= \frac{1}{12 r_0^2}\left\{\frac{4}{r_0} + 35\left(\frac{d r_0}{d t}\right)^2 - 5 g^2\right\}\\
\beta_3 &= \frac{1}{2 r_0^5}\\
\beta_4 &= -\frac{5}{2 r_0}\left(\frac{d r_0}{d t}\right)\\
\gamma_4 &= \frac{1}{4 r_0^5}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

so findet sich leicht:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x_0} &= \alpha\,x_0 + \beta\,\xi_0\,, & \frac{\partial b}{\partial x_0} &= \frac{\partial a}{\partial \xi_0} = \beta\,x_0 + \gamma\,\xi_0\,, & \frac{\partial b}{\partial \xi_0} &= \gamma\,x_0\\
\frac{\partial a}{\partial y_0} &= \alpha\,y_0 + \beta\,\eta_0\,, & \frac{\partial b}{\partial y_0} &= \frac{\partial a}{\partial \eta_0} = \beta\,y_0 + \gamma\,\eta_0\,, & \frac{\partial b}{\partial \eta_0} &= \gamma\,y_0\\
\frac{\partial a}{\partial z_0} &= \alpha\,z_0 + \beta\,\zeta_0\,, & \frac{\partial b}{\partial z_0} &= \frac{\partial a}{\partial \zeta_0} = \beta\,z_0 + \gamma\,\zeta_0\,, & \frac{\partial b}{\partial \zeta_0} &= \gamma\,z_0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Es ist somit die Möglichkeit geboten, die Variationen der rechtwinkeligen heliocentrischen Coordinaten für Zeiten, die nicht zu weit von der Ausgangsepoche abstehen, durch die Variationen der Coordinaten und Geschwindigkeiten zur Zeit der Ausgangsepoche darzustellen. Die Beschränkung, dass die Zwischenzeiten nicht zu gross sind, kommt für kleine Planeten, die nur in einer Opposition beobachtet wurden, nicht weiter in Betracht, da in der That für diese die obigen Formeln eine

stets ausreichende Genauigkeit liefern werden, um so mehr, wenn man als Ausgangsepoche einen Zeitpunkt annimmt, der nahe mit der Mitte der Zeiten der Normalorte zusammenfällt. Uebrigens kann man im Falle grosser Zwischenzeiten die von Kühnert Astr. Nachr. No. 2266 entwickelten geschlossenen Ausdrücke benützen.

Die Variationen der heliocentrischen rechtwinkeligen Coordinaten können leicht in Variationen der geocentrischen polaren Coordinaten übertragen werden (vergl. I pag. 31) durch:

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta\,\partial\lambda &= -\frac{\sin\lambda}{\Delta}\,\partial x + \frac{\cos\lambda}{\Delta}\,\partial y \\ \partial\beta &= -\frac{\cos\lambda\sin\beta}{\Delta}\,\partial x - \frac{\sin\lambda\sin\beta}{\Delta}\,\partial y + \frac{\cos\beta}{\Delta}\,\partial z\,, \end{aligned}\right\} \quad 19)$$

in welchen Ausdrücken Δ die geocentrische Entfernung darstellt, λ und β die geocentrischen polaren Coordinaten vorstellen und an welche blos die Bedingung geknüpft ist, dass sie sich auf dasselbe Coordinatensystem beziehen, auf welches die Variationen der Coordinaten bezogen sind. Da aber das letztere bezüglich der Richtungen der Achsen völlig willkürlich war, so wird es zweckmässig erscheinen für die Lage derselben eine solche Wahl zu treffen, dass sich einerseits die Rechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate möglichst einfach gestalten und andererseits, was noch wesentlicher ist, die Unsicherheit in den Elementen so weit als thunlich auf zwei Elemente zurückgedrängt wird; es sollen für diese letzteren Elemente die Grössen x_0 und ξ_0 gewählt werden.

Da sich die scheinbare Bahn eines kleinen Planeten in einer Opposition nie allzuweit von einem grössten Kreise entfernt, so wird man zweckmässig den grössten Kreis als Fundamentalebene wählen, der sich den beobachteten Orten möglichst nahe anschliesst, und als Anfangspunkt der Zählung in diesem grössten Kreise jenen Punkt annehmen, der die Quadratsumme der Entfernungen der Orte von demselben zu einem Minimum macht. Da aber die Lage des Coordinatensystemes nur näherungsweise diesen Bedingungen zu entsprechen braucht, so wird es genügen, ein nahe richtiges Verfahren einzuschlagen. Die hierfür anzuwendenden Formeln werden sich sehr leicht ergeben, wenn man die Sinus aller auftretenden kleinen Bogen mit den Bogen, die Cosinus mit der Einheit vertauscht. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ und $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$ die Rectascensionen und Declinationen der n zu Grunde gelegten Beobachtungen, so bestimmt man zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{n}\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n) \\ \delta_m &= \frac{1}{n}\,(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots \delta_n) \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

und rechnet:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_1 - \alpha_m)\cos\delta_m\,, & y_1 &= \delta_1 - \delta_m \\ x_2 &= (\alpha_2 - \alpha_m)\cos\delta_m\,, & y_2 &= \delta_2 - \delta_m \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n &= (\alpha_n - \alpha_m)\cos\delta_m\,, & y_n &= \delta_n - \delta_m \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

so wird α_m und δ_m nahe jenem Punkte der Fundamentalebene entsprechen, der als Ausgangspunkt der Zählung den obigen Bedingungen zufolge gewählt werden

kann. Bezeichnet man mit ε den Winkel, den der gesuchte grösste Kreis mit dem durch den Punkt (α_m, δ_m) gehenden Parallelkreise einschliesst, so wird der Abstand des Normalortes von diesem grössten Kreise (y') innerhalb der gestatteten Annäherungen dargestellt werden durch:

$$y' = y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon ,$$

eine solche Gleichung wird jeder Normalort geben; quadrirt man und addirt, so erhält man:

$$\Sigma (y'_a)^2 = \Sigma (y_a \cos \varepsilon)^2 + \Sigma (x_a \sin \varepsilon)^2 - \Sigma (x_a\, y_a \sin 2\varepsilon) . \qquad 22)$$

wobei sich das Summenzeichen auf den Index a von x und y bezieht und den Gleichungen 21) entsprechend der Reihe nach für a die Indices 1, 2 ... n einzusetzen sind.

Statt der Relation 22) kann noch geschrieben werden:

$$\Sigma (y'_a)^2 = \tfrac{1}{2} \Sigma (y_a)^2 + \Sigma (x_a)^2 + \tfrac{1}{2} \cos 2\varepsilon \{ \Sigma (y_a)^2 - \Sigma (x_a)^2 \} - \sin 2\varepsilon\, \Sigma (x_a\, y_a) .$$

Soll nun $\Sigma (y'_a)^2$ ein Minimum werden, so erhält man, da rechter Hand vom Gleichheitszeichen nur ε variabel ist, sofort zur Bestimmung von 2ε die Gleichung:

$$0 = \{ \Sigma (x_a)^2 - \Sigma (y_a)^2 \} \sin 2\varepsilon - 2 \Sigma (y_a x_a) \cos 2\varepsilon ,$$

daher

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2 \Sigma (x_a y_a)}{\Sigma (x_a)^2 - \Sigma (y_a)^2} . \qquad 23)$$

Diese Gleichung gibt für 2ε zwei um 180° verschiedene Winkel, von denen die eine Bestimmung dem hier geforderten Minimum, die andere dem Maximum entspricht; man wird meist leicht auf den ersten Blick entscheiden können, welchen Quadranten man zu wählen hat, jedenfalls wird man also denselben so zu bestimmen haben, dass der Ausdruck:

$$\{ \Sigma (x_a)^2 - \Sigma (y_a)^2 \} \cos 2\varepsilon + 2 \Sigma (x_a y_a) \sin 2\varepsilon$$

positiv wird. Diese Bedingung kann man aber einfach dadurch ausdrücken, dass man sagt, dass $\cos 2\varepsilon$ das Zeichen des Nenners von 23), $\sin 2\varepsilon$ das Zeichen des Zählers erhält; denn dividirt man etwa den letzteren Ausdruck durch den Coëfficienten von $\cos 2\varepsilon$, und ersetzt in dem Ausdrucke den so entstandenen Coëfficienten durch die Relation 23), so erhält man den Schluss, dass $\cos 2\varepsilon + \operatorname{tg} 2\varepsilon \sin 2\varepsilon = \sec 2\varepsilon$ das Zeichen des Nenners von 23) haben muss.

Ist einmal ε bestimmt, so folgt leicht aus dem in Betracht kommenden rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke für die Rectascension des aufsteigenden Knotens Π und die Neigung des Aequators J, die stets kleiner als 90° angenommen werden darf:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} J \sin (\alpha_m - \Pi) &= \operatorname{tg} \delta_m \\ \operatorname{tg} J \cos (\alpha_m - \Pi) &= \operatorname{tg} \varepsilon \sec \delta_m \end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

Für den Abstand (Δ) des Ausgangspunktes der Zählung in diesem grössten Kreise vom aufsteigenden Knoten wird man aus demselben sphärischen Dreiecke haben:

$$\operatorname{tg} \Delta = \operatorname{tg} (\alpha_m - \Pi) \sec J . \qquad 25)$$

Es wird zunächst das Bedürfniss hervortreten, die Beobachtungen α, δ und die rechtwinkeligen äquatorealen Coordinaten der Sonne X, Y und Z auf dieses neue Coordinatensystem zu beziehen; man wird hierfür leicht aus den Gleichungen für die Transformation der Coordinaten finden, wenn man mit λ und β die polaren Coordinaten des Normalortes, mit (X), (Y) und (Z) die auf dieses Coordinatensystem bezogenen rechtwinkeligen Coordinaten der Sonne bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta\cos(\lambda+\Delta) &= \cos\delta\cos(\alpha-\Pi) \\ \cos\beta\sin(\lambda+\Delta) &= \cos\delta\sin(\alpha-\Pi)\cos J+\sin\delta\sin J \\ \sin\beta &= -\cos\delta\sin(\alpha-\Pi)\sin J+\sin\delta\cos J \end{aligned}\right\} \quad 26)$$

$$\left.\begin{aligned} n\sin N &= \sin\Delta\cos J\;, & m\sin M &= \sin\Delta \\ n\cos N &= \cos\Delta\;, & m\cos M &= \cos\Delta\cos J \end{aligned}\right\} \quad 27)$$

$$\left.\begin{aligned} (X) &= n\cos(N+\Pi)\cdot X+n\sin(N+\Pi)\cdot Y+\sin\Delta\sin J\cdot Z \\ (Y) &= -m\sin(M+\Pi)\cdot X+m\cos(M+\Pi)\cdot Y+\cos\Delta\cos J\cdot Z \\ (Z) &= \sin\Pi\sin J\cdot X-\cos\Pi\sin J\cdot Y+\cos J\cdot Z\;. \end{aligned}\right\} \quad 28)$$

Schliesslich wird man die der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente, die ebenfalls auf den Aequator bezogen angenommen werden, auf dieses Coordinatensystem zu übertragen haben. Sei Ω', i', ω' beziehungsweise der Knoten, die Neigung und der Abstand des Perihels vom Knoten bezogen auf den Aequator; (Ω), (i) und (ω) die analogen Grössen in Bezug auf das neue Coordinatensystem, so wird man haben:

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(i)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Pi)\sin\tfrac{1}{2}(i'+J) \\ \sin\tfrac{1}{2}(i)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Pi)\sin\tfrac{1}{2}(i'-J) \\ \cos\tfrac{1}{2}(i)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Pi)\cos\tfrac{1}{2}(i'+J) \\ \cos\tfrac{1}{2}(i)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Pi)\cos\tfrac{1}{2}(i'-J) \\ (\omega) &= \omega'-\sigma' \\ (\Omega) &= \sigma-\Delta\;. \end{aligned}\right\} \quad 29)$$

Zur Berechnung der heliocentrischen Coordinaten hat man dann:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin a\sin(A'+v) \\ y &= r\sin b\sin(B'+v) \\ z &= r\sin c\sin(C'+v)\;. \end{aligned}\right\} \quad 30)$$

wobei gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin a\sin A &= \cos(\Omega)\;, & \sin b\sin B &= \sin(\Omega) \\ \sin a\cos A &= -\cos(i)\sin(\Omega)\;, & \sin b\cos B &= \cos(\Omega)\cos(i) \\ A' &= A+(\omega)\;, & C' &= (\omega) \\ B' &= B+(\omega)\;, & \sin c &= \sin(i)\;. \end{aligned}\right\} \quad 31)$$

und zur Berechnung der geocentrischen Coordinaten wird sein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\cos\lambda\cos\beta &= x+(X) \\ \Delta\sin\lambda\cos\beta &= y+(Y) \\ \Delta\sin\beta &= z+(Z) \end{aligned}\right\} \quad 32)$$

Man wird durch Anwendung vorstehender Formeln zur Kenntniss der Fehler gelangen, die das der Untersuchung zu Grunde gelegte Elementensystem in den Beobachtungen übrig lässt, wobei der Strenge halber für die Fehler in λ, $\cos\beta\,\partial\lambda$ zu setzen sein wird, wenngleich sich $\cos\beta$ der getroffenen Wahl des Coordinatensystems wegen nicht wesentlich von der Einheit unterscheiden kann.

Um nun alle Bedingungsgleichungen aufstellen zu können, wird es nöthig sein, die Formeln hinzuschreiben, welche die Bestimmung der Grössen x_0, y_0, z_0, ξ_0, η_0 und ζ_0 für die gewählte Ausgangsepoche gestatten. Für die Berechnung der Coordinaten sind die nöthigen Formeln bereits oben angeführt; für die Berechnung der Geschwindigkeiten wird man haben (vergl. pag. 95):

$$\left.\begin{aligned}
\gamma \sin \Gamma &= \sin e_0 \\
\gamma \cos \Gamma &= \cos e_0 + \sin \varphi_0 \\
\xi_0 &= \frac{\gamma}{\sqrt{p_0}} \sin a \cos(A' + \Gamma) \\
\eta_0 &= \frac{\gamma}{\sqrt{p_0}} \sin b \cos(B' + \Gamma) \\
\zeta_0 &= \frac{\gamma}{\sqrt{p_0}} \sin c \cos(C' + \Gamma)
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Hiermit sind alle Hilfsmittel zusammengestellt, um die Bedingungsgleichungen zwischen den gewählten Elementen (Coordinaten und Geschwindigkeiten) und den geocentrischen Orten herzustellen; die Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate wird also die wahrscheinlichsten Werthe für diese Elemente finden lassen; es seien dieselben x_1, y_1, z_1, ξ_1, η_1 und ζ_1. Um aus diesen Werthen die Elemente in der gewöhnlichen Form herzustellen, eine Form, die für die Bestimmung der Coordinaten für eine beliebige Zeit nöthig wird, muss man den Uebergang auf die gewöhnlichen Elemente nach den folgenden Formeln ausführen (vergl. pag. 103), die den früher gegebenen Ausdrücken für den Uebergang auf osculirende Elemente bei Encke's Methode der Störungsrechnung völlig entsprechen:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{p} \cos(i) &= x_1 \eta_1 - y_1 \xi_1 \\
\sqrt{p} \sin(i) \sin(\Omega) &= y_1 \zeta_1 - z_1 \eta_1 \\
\sqrt{p} \sin(i) \cos(\Omega) &= x_1 \zeta_1 - z_1 \xi_1 \\
r \cos u &= x_1 \cos(\Omega) + y_1 \sin(\Omega) \\
r \sin u &= -x_1 \sin(\Omega) \cos(i) + y_1 \cos(\Omega) \cos(i) + z_1 \sin(i) \\
\sin\varphi \sin v &= \frac{\sqrt{p}}{r} \{ x_1 \xi_1 + y_1 \eta_1 + z_1 \zeta_1 \} \\
\sin\varphi \cos v &= \frac{p}{r} - 1 \\
\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} E &= \mathrm{cotg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)\, \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} v \\
M &= E - \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} \sin E \\
(\omega) &= u - v\,, \qquad a = p \sec\varphi^2 \\
(\pi) &= (\omega) + (\Omega)\,, \qquad \mu = k'' a^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Um schliesslich die gefundenen Elemente auf die Fundamentalebene des Aequators zu übertragen, dienen die folgenden Gleichungen:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma &= \Delta + (\Omega) \\
\cos \tfrac{1}{2} i' \sin \tfrac{1}{2} (\Omega' - \Pi + \sigma') &= \sin \tfrac{1}{2} \sigma \cos \tfrac{1}{2} \{(i) - J\} \\
\cos \tfrac{1}{2} i' \cos \tfrac{1}{2} (\Omega' - \Pi + \sigma') &= \cos \tfrac{1}{2} \sigma \cos \tfrac{1}{2} \{(i) + J\} \\
\sin \tfrac{1}{2} i' \sin \tfrac{1}{2} (\Omega' - \Pi - \sigma') &= \sin \tfrac{1}{2} \sigma \sin \tfrac{1}{2} \{(i) - J\} \\
\sin \tfrac{1}{2} i' \cos \tfrac{1}{2} (\Omega' - \Pi - \sigma') &= \cos \tfrac{1}{2} \sigma \sin \tfrac{1}{2} \{(i) + J\} \\
\omega' &= (\omega) + \sigma' \, .
\end{aligned}
\right\} \quad 35)
$$

Ich nehme Umgang von einer für die Anwendung geordneten Zusammenstellung der Formeln, indem das folgende Beispiel die sichere Leitung bei der Rechnung gewähren wird; das Beispiel entlehne ich dem Planeten [illegible] Hilda. Es wurden nach den Rechnungen des Herrn Kühnert, Assistenten bei der k. k. Gradmessung, die folgenden Normalorte und zugehörigen Sonnencoordinaten, die sich auf den mittleren Aequator 1875.0 beziehen, angenommen:

	mittl. Berl. Zeit	α	δ	log X	log Y	log Z
1.	1875 Nov. 4.500000	45° 2′16″06	+17°26′31″59	$9_n8661938$	$9_n7853712$	$9_n4227537$
2.	» 22.517315	42 11 21.04	+16 15 23.54	$9_n6894747$	$9_n8957301$	$9_n5331075$
3.	Dec. 19.441571	39 15 53.49	+14 51 49.38	$8_n6085560$	$9_n9550137$	$9_n5923907$
4.	» 30.335914	38 49 59.06	+14 33 3.84	9.1743212	$9_n9501404$	$9_n5875199$

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, die Lage des zu wählenden Coordinatensystemes zu bestimmen, hierzu genügt aber eine genäherte Rechnung; nach 20) (pag. 434) erhielt man für α_m und δ_m:

$$\alpha_m = 41^{\circ}19'9 \qquad \delta_m = + 15^{\circ}46'7 \, .$$

nach 21) (pag. 434) wurde erhalten, wenn man als Einheit die Bogenminute einführt und sich mit der Mitnahme der Zehntheile derselben begnügt:

$$
\begin{aligned}
\log x_1 &= 2.3305 & \log y_1 &= 1.9991 \\
\text{»} \; x_2 &= 1.6951 & \text{»} \; y_2 &= 1.4579 \\
\text{»} \; x_3 &= 2_n0767 & \text{»} \; y_3 &= 1_n7396 \\
\text{»} \; x_4 &= 2_n1591 & \text{»} \; y_4 &= 1_n8669
\end{aligned}
$$

darnach ist:

$$
\begin{aligned}
\Sigma (x_a)^2 &= + \, 8.331 \\
\Sigma (y_a)^2 &= + \, 1.921 \\
\Sigma (x_a y_a) &= + \, 3.995
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung des Winkels ε nach 23) (pag. 435) stellt sich unter Beachtung der Regel, dass der Sinus von 2ε das Zeichen von $\Sigma(x_a y_a)$ erhält, wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\log 2 \, \Sigma (x_a y_a) &= 0.9025 \\
\log \{ \Sigma (x_a)^2 - \Sigma (y_a)^2 \} &= 0.8009 \\
2\varepsilon &= 51^{\circ}15'4 \\
\varepsilon &= 25^{\circ}37.7
\end{aligned}
$$

Für J, Π und Δ wird nach 24) und 25) (pag. 435) zu rechnen sein:

$\operatorname{tg}\varepsilon =$	9.6810	$\Pi =$	$11^0 47'2$
$\operatorname{tg} J \sin(\alpha_m - \Pi) =$	9.4511	$J =$	$29^0 49'0$
	9.9395	$\cos J =$	9.9384
$\operatorname{tg} J \cos(\alpha_m - \Pi) =$	9.6977	$\operatorname{tg}(\alpha_m - \Pi) =$	9.7534
$(\alpha_m - \Pi) =$	$29^0 32'7$	$\Delta =$	$33^0 8'9$

Hiermit erscheint die Lage des zu wählenden Coordinatensystems bestimmt und von nun ab ist die Rechnung absolut streng zu führen, wobei also die für Π, J und Δ gefundenen Werthe als völlig genau gegeben zu betrachten sind. Man wird zunächst mit Hilfe der Formeln 26) (pag. 436) die Normalorte auf dieses Coordinatensystem übertragen und, indem man annimmt,

$\cos J$	9.9383300	$\cos \Delta$	9.9228592	$\sin \Pi$	9.3102009
$\sin J$	9.6965541	$\sin \Delta$	9.7378352	$\cos \Pi$	9.9907440

erhalten:

	1	2	3	4
$\alpha - \Pi$	$33^0 15' 4''00$	$30^0 24' 9''01$	$27^0 28' 41''40$	$27^0 2' 47''06$
$\cos(\alpha - \Pi)$	9.9223493	9.9357548	9.9480150	9.9497015
$\cos\delta$	9.9795577	9.9822793	9.9852192	9.9858413
$\sin(\alpha - \Pi)$	9.7390259	9.7042120	9.6640879	9.6577364
$\cos\delta \sin(\alpha - \Pi)$	9.7185836	9.6864913	9.6493071	9.6435777
$\sin\delta$	9.4767477	9.4470628	9.4091226	9.4000936
$\cos\delta \sin(\alpha - \Pi)\cos J$	9.6569136	9.6248213	9.5876371	9.5819077
$\sin\delta \sin J$	9.1733018	9.1436169	9.1056767	9.0966477
Add.	0.1233252	0.1239215	0.1237340	0.1229183
$-\cos\delta \sin(\alpha - \Pi)\sin J$	$9_n 4151377$	$9_n 3830454$	$9_n 3458612$	$9_n 3401318$
$\sin\delta \cos J$	9.4150777	9.3853928	9.3474526	9.3384236
Add.	3.8595...	2.26602..	2.43522..	2.40438..
$\cos\beta \sin(\lambda + \Delta)$	9.7802388	9.7487428	9.7113711	9.7048266
	9.9019069	9.9180345	9.9332343	9.9355429
$\cos\beta \cos(\lambda + \Delta)$	9.9019070	9.9180341	9.9332342	9.9355428
$\sin\beta$	$5_n 5556...$	7.11703..	6.91064..	$6_n 93404..$
$\lambda + \Delta$	$37^0 4' 38''01$	$34^0 6' 19''27$	$30^0 57' 46''52$	$30^0 27' 0''37$
λ	3 55 44.01	0 57 25.27	—2 11 7.48	—2 41 53.63
β	— 7.41	+ 4 30.05	+ 2 47.91	— 2 57.20

nach 27) (pag. 436) wird sein:

$n \sin N$	9.6761652	$m \sin M$	9.7378352
	9.9395356		9.9025181
$n \cos N$	9.9228592	$m \cos M$	9.8011892
N	$29^0 32' 15''19$	M	$36^0 58' 13''08$
$\log n$	9.9833236	$\log m$	9.9586711

Die Berechnung der constanten Coëfficienten in 28 (pag. 436) wird:

$N + II$	$11^0 19' 27'' 10$	$M + II$	$48^0 45' 25'' 08$
$\sin (N + II)$	9.8107530	$\sin (M + II)$	9.8761716
$\cos (N + II)$	9.8756313	$\cos (M + II)$	9.8190530

damit findet sich weiter:

$$n \cos (N + II) = (x' x) = 9.8589540$$
$$n \sin (N + II) = (x' y) = 9.8030775$$
$$\sin \Delta \sin J = (x' z) = 9.4313893$$
$$- \sin (M + II) = (y' x) = 9_n 8348427$$
$$m \cos (M + II) = (y' y) = 9.7777241$$
$$\cos \Delta \sin J = (y' z) = 9.6194133$$
$$\sin II \sin J = (z' x) = 9.0067550$$
$$- \cos II \sin J = (z' y) = 9_n 6872990$$
$$\cos J = (z' z) = 9.9383300$$

man erhält also für die Transformation der Coordinaten:

	1	2	3	4
$(x' y) X$	− 0.5310662	− 0.3535327	− 0.0293434	+ 0.1079633
$(x' y) Y$	− 0.3876579	− 0.4998131	− 0.5729163	− 0.5665235
$(x' z) Z$	− 0.0719686	− 0.0927891	− 0.1063604	− 0.1051742
(X)	− 0.9906927	− 0.9461349	− 0.7086201	− 0.5637344
$(y' x) X$	+ 0.5023848	+ 0.3344394	+ 0.0277587	− 0.1021325
$(y' y) Y$	− 0.3656750	− 0.4714701	− 0.5404280	− 0.5343977
$(z' z) Z$	− 0.1101963	− 0.1420760	− 0.1628561	− 0.1610398
(Y)	+ 0.0265135	− 0.2791067	− 0.6755254	− 0.7975690
$(z' x) X$	− 0.0746361	− 0.0496855	− 0.0041230	+ 0.0151732
$(z' y) Y$	+ 0.2969410	+ 0.3828504	+ 0.4388466	+ 0.4339497
$(z' z) Z$	− 0.2296591	− 0.2960994	− 0.3394070	− 0.3356216
(Z)	− 0.0073542	+ 0.0370655	+ 0.0953157	+ 0.1135013

Stellt man also die bis jetzt gewonnenen Resultate zusammen, so erhält man als Grundlage für die weiteren Rechnungen:

mittl. Berl. Zeit	λ	β	X	Y	(Z)
1. Nov. 4.500000	$+3^0 55' 44'' 01$	$0' 7'' 41$	−0.9906927	+0.0265135	−0.0073542
2. „ 22.517315	+0 57 25.27	+4 30.05	−0.9461349	−0.2791067	+0.0370655
3. Dec. 10.441574	−2 11 7.48	+2 47.01	−0.7086201	−0.6755254	+0.0953157
4. „ 30.335011	2 41 53.63	2 57.20	0.5637344	−0.7975690	+0.1135013

Als Ausgangselemente wurden angenommen;

(153) Hilda

Epoche 1875 Dec. 2.0 mittl. Berl. Zeit.

$$
\left.\begin{array}{rl}
M = & 107^\circ 45' 18''66 \\
\omega' = & 283\ 48\ 18.52 \\
\Omega' = & 341\ 50\ 37.72 \\
i' = & 19\ \ 6\ 23.94 \\
\varphi = & 9\ 23\ 15.50 \\
\mu = & 451''9050
\end{array}\right.
$$

(ω', Ω', i': mittl. Aequator 1875.0)

Die Uebertragung der die Bahnlage bestimmenden Elemente auf das obige Coordinatensystem ist nach 29 (pag. 436) auszuführen; die Rechnung hierfür gestaltet sich wie folgt:

$\frac{1}{2}\, i''$	$9^\circ 33' 11''07$	$\sin \frac{1}{2}(i'' + J)$	9.6170887
$\frac{1}{2}\, J$	14 54 30.00	$\sin \frac{1}{2}(\Omega' - H)$	9.4121872
$\frac{1}{2}(i'' + J)$	24 27 41.07	$\cos \frac{1}{2}(i'' + J)$	9.9591552
$\frac{1}{2}(i'' - J)$	−5 21 18.03	$\sin \frac{1}{2}(i'' - J)$	$8_n9700050$
$\Omega' - H$	330 3 25.72	$\cos \frac{1}{2}(\Omega' - H)$	$9_n9850017$
$\frac{1}{2}(\Omega' - H)$	165 1 42.86	$\cos \frac{1}{2}(i'' - J)$	9.9981004

$\sin \frac{1}{2}(i) \sin \frac{1}{2}(\sigma + \sigma')$	9.0292759	$\cos \frac{1}{2}(i) \sin \frac{1}{2}(\sigma - \sigma')$	9.3713424
	9.8834598		$9_n9873943$
$\sin \frac{1}{2}(i) \cos \frac{1}{2}(\sigma + \sigma')$	8.9550067	$\cos \frac{1}{2}(i) \cos \frac{1}{2}(\sigma - \sigma')$	$9_n9831021$
$\frac{1}{2}(\sigma + \sigma')$	$49^\circ 52' 31''45$	$\frac{1}{2}(\sigma - \sigma')$	$106^\circ 15' 42''85$
$\sin \frac{1}{2}(i)$	9.1458161	$\cos \frac{1}{2}(i)$	9.9957078
$\frac{1}{2}(i)$	$8^\circ\ 2' 31''31$	σ	$216^\circ\ 8' 14.30$
(i)	$16\ \ 5'\ 2''02$	(Ω)	182 59 20.30
ω'	301 57 40.80	(ω)	58 20 52.20
$-\sigma'$	116 23 11.40	(π)	$241^\circ 20' 12''50$

Um nun die Darstellung der obigen Orte nach diesen Elementen zu finden, rechnet man nach 31 (pag. 436) die Hilfsgrössen:

$\sin(\Omega)$	$8_n7172022$	$\sin c$	9.4425540
$\cos(i)$	9.9820584	C'	$58^\circ 20' 52''30$
$\cos(\Omega)$	$9_n9994088$	$\sin b \sin B$	$8_n7172022$
	$9_n9994541$		$9_n9993597$
$\sin a \cos A$	8.6998606	$\sin b \cos B$	$9_n9820672$
A	$272^\circ 52' 19''82$	B	$183^\circ\ 6' 37''81$
$\sin a$	9.9999547	$\sin b$	9.9827075
A'	$331^\circ 13' 12''02$	B'	$241^\circ 27' 30''01$

Die Rechnung gestaltet sich nach (30) und (32) (pag. 436) für die vier Normalorte wie folgt:

	1	2	3	4
M	104°18′11″27	106°33′53″30	109°56′40″59	111°18′13″80
E	112 51 41.48	115 1 57.54	118 10 56.49	119 27 0.85
$\sin E$	9.9643102	9.9571602	9.9451972	9.9399100
$\cos E$	9_n5902947	9_n6264786	9_n6711990	9_n6916715
Add.	0.1519766	0.1416026	0.1288431	0.1244243
$\cos E - e$	9_n7422713	9_n7680812	9_n8030421	9_n8160958
$r \sin v$	0.5550943	0.5479443	0.5359813	0.5306941
	9.9317164	9.9223192	9.9071117	9.9005512
$r \cos v$	0_n3380110	0_n3647209	0_n3996818	0_n4127355
v	121°17′40″25	123°15′25″84	126° 9′11″43	127°18′46″43
$\log r$	0.6233779	0.6256251	0.6288696	0.6301429
$A' + v$	92°30′52″27	94°28′37″86	97°22′23″45	98°31′58″45
$B' + v$	2 45 10.26	1 42 55.85	7 36 41.44	8 46 16.44
$C' + v$	179 38 32.45	181 36 18.04	184 30 3.63	185 39 38.63
$r \sin a$	0.6233326	0.6255798	0.6288243	0.6300976
$\sin (A' + v)$	9.9995810	9.9986727	9.9963941	9.9951659
x	+4.1967606	+4.2007135	+4.2190864	+4.2195243
X	−0.9906927	−0.9461349	−0.7086201	−0.5637344
$r \sin b$	0.6060854	0.6083326	0.6115771	0.6128504
$\sin (B' + v)$	8.6814928	8.9149160	9.1220701	9.1832404
y	+0.1030002	+0.3336173	+0.5415607	+0.6253034
Y	+0.0265135	−0.2791067	−0.6755254	−0.7975690
$r \sin c$	0.0659319	0.0681791	0.0714236	0.0726969
$\sin (C' + v)$	7.7953361	8_n4472986	8_n8947404	8_n9940431
z	+0.0072655	−0.0327701	−0.0925047	−0.1166111
Z	−0.0073542	+0.0370655	+0.0953157	+0.1135013
$\Delta \sin \lambda \cos \beta$	9.3432386	8.7364809	9_n1269904	9_n2361986
	9.9989761	9.9999304	9.9996840	9.9995184
$\Delta \cos \lambda \cos \beta$	0.5059727	0.5136041	0.5453648	0.5629812
$\Delta \sin \beta$	5_n94792..	7.63300..	7.44886..	7_n49273..
$\Delta \cos \beta$	0.5069966	0.5137547	0.5456808	0.5634628
λ	3°55′58″20	0°57′24″86	−2°11′ 7″56	−2°41′52″28
β	− 0 5.69	+ 4 31.44	+ 2 45.05	− 2 55.27
$\log \Delta$	0.50700	0.51375	0.54568	0.56346
$\cos \beta\, \delta \lambda$	− 14″19	+ 0″41	+ 0″08	− 1″35
$\delta \beta$	− 1.72	− 1.30	+ 2.86	− 1.93

Um nun die Differentialquotienten zur Ausgleichung der Elemente entwickeln zu können, wird man sich vorerst über die Ausgangsepoche zu entscheiden haben;

da das Datum 1876 Dec. 2.0 der Zeit nach nahe in die Mitte fällt, so wähle ich diesen Zeitpunkt hierfür und es wird sich daher als nächste Aufgabe stellen, für diese Epoche die Coordinaten nach 30) und 32) (pag. 436) und die Geschwindigkeiten nach 33) (pag. 437) zu berechnen; man erhält darnach:

M_0	$107^\circ 45' 18''66$	$\cos v_0$	$9_n 7507149$
E_0	116 8 40.80	Add.	0.148 4870
$\sin E_0$	9.953 1237	$\gamma \sin \Gamma$	9.917 1243
$\cos E_0$	$9_n 644$ 0830		9.954 2484
Add.	0.136 7757	$\gamma \cos \Gamma$	$9_n 602$ 2279
$\cos E_0 - e$	$9_n 780$ 8587	Γ	$115^\circ 50' 25''24$
$r_0 \sin v_0$	0.543 9078	$\log \gamma$	9.962 8759
	9.917 1243	$\sqrt{p_0}$	0.292 4642
$r_0 \cos v_0$	0.377 4984	$\gamma' = \gamma : \sqrt{p_0}$	9.670 4117
v_0	$124^\circ 16' 55''52$	$A' + \Gamma$	$87^\circ\ 3' 37''26$
$\log r_0$	0.626 7835	$B' + \Gamma$	357 17 55.25
$A' + v_0$	$95^\circ 30'\ 7''54$	$C' + \Gamma$	174 11 17.44
$B' + v_0$	5 44 25.53	$\cos (A' + \Gamma)$	8.709 9824
$C' + v_0$	182 37 47.72	$\gamma' \sin a$	9.670 3664
$\sin (A' + v_0)$	9.997 9944	$\cos (B' + \Gamma)$	9.999 5171
$r \sin a$	0.626 7382	$\gamma' \sin b$	9.653 1192
$\sin (B' + v_0)$	9.000 0946	$\cos (C' + \Gamma)$	$9_n 997$ 7619
$r \sin b$	0.609 4910	$\gamma' \sin c$	9.112 9657
$\sin (C' + v_0)$	$8_n 661$ 6678		
$r \sin c$	0.069 3375		
x_0	+4.214 3692	$\dot{\xi}_0$	+0.024 0076
y_0	+0.406 9918	$\dot{\eta}_0$	+0.449 4033
z_0	−0.053 8276	$\dot{\zeta}_0$	−0.129 0410

Jetzt kann an die Berechnung der Differentialquotienten geschritten werden, für welche eine fünfstellige Rechnung mehr als ausreichend ist. Zunächst findet sich nach 6) (pag. 430) und 13) (pag. 432):

$\sin v_0 \sin \varphi$	9.12961	$2 : r_0$	9.67425
$\sqrt{p_0}$	0.29246	$1 : a$	9.40336
$\log (d r_0 : d \tau)$	8.83715	Subtr.	9.93747
$\log (d r_0 : d \tau)^2$	7.67430	$\log g^2$	9.34083 ;

ferner erhält man nach 8) (pag. 430) mit Rücksicht auf 7) (pag. 430) oder was bequemer ist, durch Anwendung der in der Anmerkung angeführten Form, wobei für die Berechnung von A_1 die Zahlen in Einheiten der zehnten Decimale angesetzt sind:

$1 : r_0$	9.37322	$\log g^2 : r_0^5$	6.20691
$1 : r_0^2$	8.74643	$\log \left(\frac{dr_0}{d\tau}\right)^2 : r_0^5$	4.54038
$1 : r_0^3$	8.11965	(1)	+201290

$1 : r_0^4$	7.49287		(2)	—21690
$1 : r_0^5$	6.86608		(3)	—144583
$1 : r_0^6$	6.23930		A_4	+35017
$\log A_2$	7_n81862		$\log A_4$	4.54428
$\log A_3$	6.02899			
$\log B_3$	7_n34150			
$\log B_4$	5.72796			

nach (17) pag 433, fand sich:

$\log \alpha_2$	7.04217		$\log \beta_3$	6.56505
$\log \alpha_3$	8_n43222		$\log \beta_4$	8_n60831
$\frac{4}{r_0}$	9.07528		$\log \gamma_4$	6.26202
$35 \left(\frac{dr_0}{d\tau}\right)^2$	9.21837			
Add.	0.07004			
	0.04532			
$5\,g^2$	0.03980			
Subtr.	8.10700			
$\log \alpha_4$	8.13680			

Mit Hilfe dieser Zahlen stellt sich nun die Rechnung von a und b nach (9) pag. 430 und von α, β und γ nach (17) pag. 433) wie folgt, wenn man beachtet, dass $\tau = k\,t$ und $\log k = 8.23558$ anzunehmen ist.

	1	2	3	4
t	—27.50000	—9.48269	+17.44157	+28.33591
$\log t$	1_n43933	0_n97693	1.24159	1.45234
$\log \tau$	9_n67491	9_n21251	9.47717	9.68792
$\log \tau^2$	9.34982	8.42502	8.95434	9.37584
$\log \tau^3$	9_n02473	7_n63753	8.43151	9.06376
$\log \tau^4$	8.69964	6.85004	7.90868	8.75168
$A_2\,\tau^2$	— 0.00147	—0.00018	—0.00059	—0.00156
$A_3\,\tau^3$	— 1	0	0	+ 1
$A_4\,\tau^4$	0	0	0	0
a	+ 0.99852	+0.99982	+0.99941	+0.99845
$B_3\,\tau^2$	— 0.00049	—0.00006	—0.00020	—0.00052
$B_4\,\tau^3$	— 1	0	0	+ 1
$\log \{\ldots\ldots\}$	9.99978	9.99998	9.99991	9.99978
$\log b$	9_n67469	9_n21249	9.47708	9.68770

	1	2	3	4
$\alpha_3 \tau$	+0.01280	+0.00441	−0.00812	−0.01319
$\alpha_1 \tau^2$	+1	0	+1	+1
$\log \{\ldots.\}$	0.00553	0.00191	9.99646	9.99424
$\alpha_2 \tau^2$	6.39199	5.46719	5.99651	6.41801
$\log \alpha$	6.39752	5.46910	5.99297	6.41225
$\log (1 + \beta_4 \tau)$	0.00826	0.00286	9.99468	9.99132
$\beta_3 \tau^3$	5_n58978	4_n20258	4.99656	5.62881
$\log \beta$	5_n59804	4_n20544	4.99124	5.62013
$\log \gamma$	4.96366	3.11406	4.17270	5.01570 .

Nun werden die Differentialquotienten von a und b nach den gewählten Elementen nach 18) (pag. 433) zu entwickeln sein; schreibt man sich für die folgende Rechnung die Logarithmen der Coordinaten und Geschwindigkeiten für die 4 Orte auf den unteren Rand eines Zettels, so erhält man leicht:

	1	2	3	4	
αx_0	7.02225	6.09383	6.61770	7.03698	
$\beta \xi_0$	3_n97839	2_n58579	3.37159	4.00048	
Add.	9.99961	9.99987	0.00025	0.00041	
$\partial a : \partial x_0$	7.02186	6.09370	6.61795	7.03739	
αy_0	6.00711	5.07869	5.60256	6.02184	
$\beta \eta_0$	5_n25068	3_n85808	4.64388	5.27277	
Add.	9.91634	9.97305	0.04532	0.07123	
$\partial a : \partial y_0$	5.92345	5.05174	5.64788	6.09307	
αz_0	5_n12853	4_n20011	4_n72398	5_n14326	
$\beta \zeta_0$	4.70877	3.31617	4_n10197	4_n73086	
Add.	9.79211	9.93920	0.09299	0.14205	
$\partial a : \partial z_0$	4_n92064	4_n13931	4_n81697	5_n28531	
βx_0	6_n22277	4_n83017	5.61597	6.24486	
$\gamma \xi_0$	3.34401	1.49441	2.55305	3.39605	
Add.	9.99943	9.99980	0.00038	0.00062	
$\partial b : \partial x_0$	6_n22220	4_n82997	5.61635	6.24548	$\partial a : \partial \xi_0$
βy_0	5_n20763	3_n81503	4.60083	5.22972	
$\gamma \eta_0$	4.61630	2.76670	3.82534	4.66834	
Add.	9.87142	9.95930	0.06733	0.10536	
$\partial b : \partial y_0$	5_n07905	3_n77433	4.66816	5.33508	$\partial a : \partial \eta_0$
βz_0	4.32905	2.93645	3_n72225	4_n35114	
$\gamma \zeta_0$	4_n07439	2_n22479	3_n28343	4_n12643	
Add.	9.90171	9.90621	0.13484	0.20305	
$\partial b : \partial z_0$	3.97610	2.84266	3_n85709	4_n55419	$\partial a : \partial \zeta_0$

	1	2	3	4
$\partial b : \partial \xi_0$	5.58839	3.73879	4.79743	5.64043
$\partial b : \partial \eta_0$	4.57325	2.72365	3.78229	4.62529
$\partial b : \partial \zeta_0$	3_n69467	1_n84507	2_n90371	3_n74671 .

Indem man nun die hier bestimmten Differentialquotienten zur Erleichterung der folgenden Rechnungen auf den unteren Rand eines Zettels schreibt, erhält man die Aenderungen der Coordinaten durch die Variationen der Elemente nach 10) (pag. 431) durch die folgenden Zahlen:

	1	2	3	4
$x_0 (\partial a : \partial x_0)$	+0.00143	+0.00052	+0.00175	+0.00459
$\xi_0 (\partial b : \partial x_0)$	0	0	0	0
$\partial x : \partial x_0$	+1.00295	+1.00034	+1.00116	+1.00304
$\log \partial x : \partial x_0$	0.00128	0.00015	0.00050	0.00132
$x_0 (\partial a : \partial y_0)$	6.54818	5.67047	6.27261	6.71780
$\xi_0 (\partial b : \partial y_0)$	3_n45940	2_n15468	3.04851	3.71543
Add.	9.99964	9.99987	0.00026	0.00043
$\log (\partial x : \partial y_0)$	6.54782	5.67034	6.27287	6.71823
$x_0 (\partial a : \partial z_0)$	5_n54537	4_n76404	5_n44170	5_n91004
$\xi_0 (\partial b : \partial z_0)$	2.35645	1.22301	2_n23744	2_n93454
Add.	9.99972	9.99988	0.00027	0.00046
$\log \partial x : \partial z_0$	5_n54509	4_n76392	5_n44197	5_n91050
$x_0 (\partial a : \partial \xi_0)$	−0.00070	−0.00003	+0.00017	+0.00074
$\xi_0 (\partial b : \partial \xi_0)$	0	0	0	0
$\partial x : \partial \xi_0$	−0.47351	−0.16314	+0.30014	+0.48793
$\log \partial x : \partial \xi_0$	9_n67533	9_n21256	9.47733	9.68836
$x_0 (\partial a : \partial \eta_0)$	5_n70378	4_n39906	5.29289	5.95981
$\xi_0 (\partial b : \partial \eta_0)$	2.95360	1.10400	2.16264	3.00564
Add.	9.99923	9.99978	0.00032	0.00048
$\log \partial x : \partial \eta_0$	5_n70301	4_n39884	5.29321	5.96029
$x_0 (\partial a : \partial \zeta_0)$	4.60083	3.46739	4_n48182	5_n17892
$\xi_0 (\partial b : \partial \zeta_0)$	2_n07502	0_n22542	1_n28406	2_n12706
Add.	9.99870	9.99975	0.00028	0.00039
$\log \partial x : \partial \zeta_0$	4.59953	3.46714	4_n48210	5_n17931
$y_0 (\partial a : \partial x_0)$	6.63145	5.70329	6.22754	6.64698
$\eta_0 (\partial b : \partial x_0)$	5_n87484	4_n48261	5.26899	5.89812
Add.	9.91638	9.97305	0.04533	0.07125
$\log \partial y : \partial x_0$	6.54783	5.67634	6.27287	6.71823

	1	2	3	4
$y_0\,(\partial a : \partial y_0)$	+0.00003	0.00000	+0.00002	+0.00005
$\eta_0\,(\partial b : \partial y_0)$	−0.00001	0.00000	0.00000	+0.00001
$\log\,(\partial y : \partial y_0)$	9.99937	9.99992	9.99975	9.99935
$y_0\,(\partial a : \partial z_0)$	4_n53023	3_n74890	4_n42656	4_n89490
$\eta_0\,(\partial b : \partial z_0)$	3.62874	2.49530	3_n50973	4_n20683
Add.	9.94178	9.97508	0.04965	0.08102
$\log\,(\partial y : \partial z_0)$	4_n47201	3_n72398	4_n47621	4_n97592
$y_0\,(\partial a : \partial \xi_0)$	5_n83179	4_n43956	5.22594	5.85507
$\eta_0\,(\partial b : \partial \xi_0)$	5.24103	3.39143	4.45007	5.29307
Add.	9.87123	9.95927	0.06727	0.10522
$\log\,(\partial y : \partial \xi_0)$	5_n70302	4_n39883	5.29321	5.96029
$y_0\,(\partial a : \partial \eta_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	+0.00001
$\eta_0\,(\partial b : \partial \eta_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\log\,(\partial y : \partial \eta_0)$	9_n67469	9_n21249	9.47708	9.68771
$y_0\,(\partial a : \partial \zeta_0)$	3.58569	2.45225	3_n46668	4_n16378
$\eta_0\,(\partial b : \partial \zeta_0)$	3_n34731	1_n49771	2_n55635	3_n39935
Add.	9.86411	9.94888	0.05035	0.06893
$\log\,(\partial y : \partial \zeta_0)$	3.21142	2.40113	3_n51703	4_n23271
$z_0\,(\partial a : \partial x_0)$	5_n75287	4_n82471	5_n34896	5_n76840
$\zeta_0\,(\partial b : \partial x_0)$	5.33293	3.94070	4_n72708	5_n35621
Add.	9.79222	9.93921	0.09302	0.14210
$\log\,(\partial z : \partial x_0)$	5_n54509	4_n76392	5_n44198	5_n91050
$z_0\,(\partial a : \partial y_0)$	4_n65446	3_n78275	4_n37889	4_n82408
$\zeta_0\,(\partial b : \partial y_0)$	4.18978	2.88506	3_n77889	4_n44581
Add.	9.81755	9.94123	0.09732	0.15184
$\log\,(\partial z : \partial y_0)$	4_n47201	3_n72398	4_n47621	4_n97592
$z_0\,(\partial a : \partial z_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\zeta_0\,(\partial b : \partial z_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\log\,(\partial z : \partial z_0)$	9.99936	9.99992	9.99974	9.99932
$z_0\,(\partial a : \partial \xi_0)$	4.95321	3.56098	4_n34736	4_n97649
$\zeta_0\,(\partial b : \partial \xi_0)$	4_n69912	2_n84952	3_n90816	4_n75116
Add.	9.90043	9.90616	0.13473	0.20282
$\log\,(\partial z : \partial \xi_0)$	4.59955	3.46714	4_n48209	5_n17931
$z_0\,(\partial b : \partial \eta_0)$	3.81006	2.50534	3_n39917	4_n06609
$\zeta_0\,(\partial b : \partial \eta_0)$	3_n68398	1_n83438	2_n89302	3_n73602
Add.	9.52743	9.89580	0.11786	0.16663
$\log\,(\partial z : \partial \eta_0)$	3.21141	2.40114	3_n51703	4_n23272

	1	2	3	4
$\zeta_0\,(\partial a : \partial \zeta_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\zeta_0\,(\partial b : \partial \zeta_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\log\,(\partial z : \partial \zeta_0)$	9_n67469	9_n21249	9.47708	9.68770

Nun ermittelt man die in 19) (pag. 434) auftretenden Coëfficienten und findet:

	1	2	3	4
$\sin\lambda$	8.83581	8.22278	8_n58131	8_n67279
$\sin\beta$	5_n55560	7.11703	6.91061	6_n93404
$\cos\lambda$	9.99898	9.99994	9.99968	9.99952
$\cos\beta$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\cos\lambda\,\sin\beta$	5_n55458	7.11697	6.91032	6_n93356
$\sin\lambda\,\sin\beta$	4_n39141	5.33981	5_n49195	5.60683
Δ	0.50700	0.51375	0.54568	0.56346
$\cos\beta\,\partial\lambda : \partial x$	8_n32881	7_n70903	8.03563	8.10933
$\cos\beta\,\partial\lambda : \partial y$	9.49198	9.48619	9.45400	9.43606
$\partial\beta : \partial x$	5.04758	6_n60322	6_n36464	6.37010
$\partial\beta : \partial y$	3.88441	4_n82606	4.94627	5_n04337
$\partial\beta : \partial z$	9.49300	9.48625	9.45432	9.43654

Ersetzt man nun ∂x durch:

$$\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)\partial x_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)\partial y_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\partial z_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_0}\right)\partial \xi_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_0}\right)\partial \eta_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_0}\right)\partial \zeta_0$$

und analog ∂y und ∂z, und vereinigt die zu der gleichen Variation in 10) (pag. 431) ermittelten Coëfficienten, so hat man schliesslich noch die folgende Operation durchzuführen, wobei man die früher ermittelten Differentialquotienten auf den unteren Rand eines Papieres schreiben wird; die nöthigen Multiplicationen werden dann durch entsprechendes Rücken des Zettels sehr übersichtlich durchgeführt werden können:

	1	2	3	4
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial x)\,(\partial x : \partial x_0)$	8_n33009	7_n70918	8.03613	8.11065
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial y)\,(\partial y : \partial x_0)$	0.03981	5.16253	5.72687	6.15429
Add.	9.99777	9.99877	0.00212	0.00477
$\cos\beta\,\partial\lambda : \partial x_0$	8_n3279	7_n7079	8.0383	8.1154
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial x)\,(\partial x : \partial y_0)$	4_n87663	3_n38537	4.30850	4.82756
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial y)\,(\partial y : \partial y_0)$	9.49137	9.48611	9.45375	9.43541
Add.	9.99999	0.00000	0.00000	9.99999
$\cos\beta\,\partial\lambda : \partial y_0$	9.4914	9.4861	9.4537	9.4354
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial x)\,(\partial x : \partial z_0)$	3.87390	2.47295	3_n47760	4_n01983
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial y)\,(\partial y : \partial z_0)$	3_n90399	3_n21017	3_n93021	4_n41198
Add.	9.36272	9.91215	0.13120	0.14779
$\cos\beta\,\partial\lambda : \partial z_0$	3_n2306	3_n1223	4_n0614	4_n5598

	1	2	3	4
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial x)\ (\partial x : \partial\xi_0)$	8.00414	6.92159	7.51296	7.79769
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial y)\ (\partial y : \partial\xi_0)$	5_n19500	3_n88502	4.74721	5.39635
Add.	9.99933	9.99960	0.00074	0.00172
$\cos\beta\,\partial\lambda : \partial\xi_0$	8.0035	6.9212	7.5137	7.7994
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial x)\ (\partial x : \partial\eta_0)$	4.03182	2.10787	3.32884	4.06962
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial y)\ (\partial y : \partial\eta_0)$	9_n16667	8_n69868	8.93108	9.12377
Add.	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\cos\beta\,\partial\lambda : \partial\eta_0$	9_n1667	8_n6987	8.9311	9.1238
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial x)\ (\partial x : \partial\zeta_0)$	2_n92834	1_n17617	2_n51773	3_n28864
$(\cos\beta\,\partial\lambda : \partial y)\ (\partial y : \partial\zeta_0)$	2.70340	1.88732	2_n97103	3_n66877
Add.	9.83160	9.90608	0.13102	0.15133
$\cos\beta\,\partial\lambda : \partial\zeta_0$	2_n5350	1.7934	3_n1020	3_n8201
$(\partial\beta : \partial x)\ (\partial x : \partial x_0)$	5.04886	6_n60337	6_n36514	6.37142
$(\partial\beta : \partial y)\ (\partial y : \partial x_0)$	0.43224	0_n50240	1.21914	1_n76160
$(\partial\beta : \partial z)\ (\partial z : \partial x_0)$	5_n03809	4_n25017	4_n89630	5_n34704
Add.	0.00001	0.00000	0.00000	9.99999
{I + II}	5.04887	6_n60337	6_n36514	6.37141
Add.	8.40020	0.00192	0.01451	9.95687
$\partial\beta : \partial x_0$	3.4383	6_n6053	6_n3796	6.3283
$(\partial\beta : \partial x)\ (\partial x : \partial y_0)$	1.59540	2_n27956	2_n63751	3.08833
$(\partial\beta : \partial y)\ (\partial y : \partial y_0)$	3.88378	4_n82598	4.94602	5_n04272
$(\partial\beta : \partial z)\ (\partial z : \partial y_0)$	3_n96501	3_n21023	3_n93053	4_n41246
Add.	0.00223	0.00123	9.99786	9.99515
{I + II}	3.88601	4_n82721	4.94388	5_n03787
Add.	9.29994	0.01037	9.95570	0.09234
$\partial\beta : \partial y_0$	3_n1859	4_n8376	4.8996	5_n1302
$(\partial\beta : \partial x)\ (\partial x : \partial z_0)$	0_n59267	1.36714	1.80661	2_n28061
$(\partial\beta : \partial y)\ (\partial y : \partial z_0)$	8_n35642 *)	8.55004	9_n42248	0.01929
$(\partial\beta : \partial z)\ (\partial z : \partial z_0)$	9.49236	9.48617	9.45406	9.43586
Add.	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\partial\beta : \partial z_0$	9.4924	9.4862	9.4541	9.4359
$(\partial\beta : \partial x)\ (\partial x : \partial\xi_0)$	4_n72291	5.81578	5_n84197	6.05846
$(\partial\beta : \partial y)\ (\partial y : \partial\xi_0)$	9_n58743	9.22489	0.23948	1_n00366
$(\partial\beta : \partial z)\ (\partial z : \partial\xi_0)$	4.09255	2.95339	3_n93641	4_n61585
Add.	9.88410	0.00060	0.00536	9.98404
$\partial\beta : \partial\xi_0$	4_n6070	5.8164	5_n8473	6.0425

*) Der Strich über der Charakteristik zeigt an, dass dieselbe um 20 Einheiten zu vermindern ist, während die übrigen nur um 10 Einheiten vermindert verstanden sind.

	1	2	3	4
$(\partial\beta : \partial x)(\partial x : \partial\eta_0)$	0_n75059	1.00206	1_n65785	2.33039
$(\partial\beta : \partial y)(\partial y : \partial\eta_0)$	3_n55910	4.03855	4.42335	4_n73108
$(\partial\beta : \partial z)(\partial z : \partial\eta_0)$	2.70141	1.88739	2_n97135	3_n66926
Add.	0.00067	0.00040	9.99925	9.99827
{I + II}	3_n55977	4.03895	4.42260	4_n72935
Add.	9.93474	0.00305	9.98436	0.03626
$\partial\beta : \partial\eta_0$	3_n4945	4.0420	4.4070	4_n7656
$(\partial\beta : \partial x)(\partial x : \partial\zeta_0)$	9.64711	0.07036	0.84674	1_n54941
$(\partial\beta : \partial y)(\partial y : \partial\zeta_0)$	7.09583	7_n22719	8_n16330	9.27608
$(\partial\beta : \partial z)(\partial z : \partial\zeta_0)$	9_n16769	8_n69874	8.93140	9.12424
$\partial\beta : \partial\zeta_0$	9_n1677	8_n6987	8.9314	9.1242 .

Hiermit ist die Rechnung der Differentialquotienten beendet; sie fordert zwar etwas mehr Mühe, als die bei den früheren Methoden entwickelten Ausdrücke, doch macht sich die Rechnung wegen der zahlreichen kleinen Coëfficienten sehr schnell und einfach; letztere veranlassen es auch, dass eine ganz wesentliche Vereinfachung bei der Bildung der Normalgleichungen eintritt, welcher Vortheil die etwas mühsamere Rechnung der obigen Coëfficienten mehr als aufwiegt. Von der Richtigkeit der entwickelten Differentialformeln kann man sich leicht durch willkürliche Variation der Elemente und Vergleichung der Resultate der directen Rechnung und der oben hingestellten Differentialformeln überzeugen.

Um diese Control-Rechnungen möglichst einfach zu gestalten, wird man x_0, y_0, z_0, ξ_0, η_0 und ζ_0 willkürlich variiren und zwar um solche Beträge, dass wenn man den grössten Coëfficienten der eben ermittelten Differentialquotienten einer jeden Unbekannten heraushebt, das Product dieses Coëfficienten in die zugehörige willkürliche Variation für alle 6 Grössen nahe gleichwerthig wird, und ausserdem darauf achten, dass man diese Variationen weder zu klein noch zu gross wählt; meistens wird es genügen, dieselben so zu wählen, dass das Product aus dieser Variation mit dem zugehörigen grössten Coëfficienten in dem geocentrischen Orte eine Aenderung von 20—30″ bedingt. Indem man nun den Werth von r_0, $\frac{d\,r_0}{d\,\tau}$ und g nach

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$r_0\left(\frac{d\,r_0}{d\,\tau}\right) = x_0\,\xi_0 + y_0\,\eta_0 + z_0\,\zeta_0$$

$$g^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2$$

ermittelt, hat die Berechnung der A- und B-Coëfficienten aus 8) (pag. 430) keine Schwierigkeit; bestimmt man nach 9) (pag. 430) für die in Betracht kommenden Orte die a- und b-Coëfficienten und rechnet nach 3) (pag. 429) die geocentrischen Coordinaten, so werden dieselben leicht mit Rücksicht auf 32) (pag. 436) die geocentrischen polaren finden lassen. Die durch diese Rechnung erhaltenen Aenderungen in den geocentrischen Orten müssen innerhalb der Unsicherheit der Rechnung mit den durch die obigen Differentialquotienten gefundenen stimmen.

Sammelt man alle gewonnenen Coëfficienten und setzt auch die früher in den Orten gefundenen Fehler an, so erhält man die folgenden logarithmisch angesetzten Bedingungsgleichungen, in welchen die aus dem ersten Orte resultirenden zwei Gleichungen mit der Präcision $\sqrt{3}$ durchmultiplicirt erscheinen; es wurde nämlich dem ersten Orte als Normalort das Gewicht 3 ertheilt.

Längen

$$1_n3906 = 8_n5665\,\partial x_0 + 9.7300\,\partial y_0 + 3_n4752\,\partial z_0 + 8.2421\,\partial \xi_0 + 0_n4053\,\partial \eta_0 + 2_n7736\,\partial \zeta_0$$

$9.6128 = 7_n7070$	9.4861	3_n1223	6.0212	8_n6987	1.7934
$8.9031 = 8.0383$	9.4537	4_n0614	7.5137	8.9311	3_n1020
$0_n1303 = 8.1154$	9.4354	4_n5598	7.7994	9.1238	3_n8201

Breiten

$$0_n4741 = 3.6769\,\partial x_0 + 3_n4245\,\partial y_0 + 9.7310\,\partial z_0 + 4_n8456\,\partial \xi_0 + 3_n7331\,\partial \eta_0 + 9_n4063\,\partial \zeta_0$$

$0_n1430 = 6_n6053$	4_n8376	9.4862	5.8164	4.0420	8_n6987
$0.4564 = 6_n3796$	4.8996	9.4541	5_n8473	4.4070	8.9314
$0_n2856 = 6.3283$	5_n1302	9.4359	6.0425	4_n7056	$9.1242.$

Vor Allem wird man diese Coëfficienten dadurch für die Methode der kleinsten Quadrate vorbereiten, dass man dieselben durch Einführung anderer Unbekannten möglichst homogen (pag. 318) macht. Setzt man also:

$$a = 8.5665\,\partial x_0 \;. \qquad d = 8.2421\,\partial \xi_0$$
$$b = 9.7300\,\partial y_0 \;. \qquad e = 9.4053\,\partial \eta_0$$
$$c = 9.7310\,\partial z_0 \;. \qquad f = 0.4063\,\partial \zeta_0$$
$$\log \text{Fehlereinheit} = 1.3906\;,$$

so erhält man zur Bildung der Normalgleichungen das folgende Schema (vergl. pag. 319), in welchem bereits die Prüfungscoëfficienten s ihre Aufnahme gefunden haben:

log Coëff.	a	0_n0000	9_n1414	9.4718	9.5489	5.1104	8_n0388	7_n8131	7.7618
»	b	0.0000	9.7561	9.7237	9.7054	3_n0945	5_n1070	5.1696	5_n4002
»	c	3_n7442	3_n3913	4_n3304	4_n8288	0.0000	9.7552	9.7231	9.7049
»	d	0.0000	8.6791	9.2716	9.5573	6_n6035	7.5743	7_n6052	7.8004
»	e	0_n0000	9_n2934	9.5258	9.7185	4_n3278	4.6367	5.0017	5_n3603
»	f	3_n3673	2.3871	3_n6957	4_n4138	0_n0000	9_n2924	9.5251	9.7179
»	n	0_n0000	8.2222	7.5125	8_n7397	9_n0835	8_n7524	9.0058	8_n8950
»	s	0_n0000	9.4768	0.1307	0.2279	9_n0850	9.4904	9.9865	$9.9835.$

Ehe ich an die Bildung der Normalgleichungen gehe, will ich noch bemerken, dass die Fehler oben in Bogensekunden angesetzt sind, während der Natur der Sache nach die Correctionen der Coordinaten und Geschwindigkeiten in Einheiten des Radius verstanden werden; will man demnach die aus den folgenden Auflösungen gefundenen Werthe der Unbekannten unmittelbar zur Bestimmung der Correctionen der Elemente verwerthen, so muss man ausserdem, dass man jede Unbekannte durch den Homogenitätsfactor dividirt, und dieselbe mit der oben ange-

nommenen Fehlereinheit multiplicirt, noch mit dem Sinus einer Bogensekunde multipliciren; man wird also für diesen Uebergang haben (logarithmisch):

$$(\partial x_0) = 7.5097\ a$$
$$(\partial y_0) = 6.3462\ b$$
$$(\partial z_0) = 6.3452\ c$$
$$(\partial \xi_0) = 7.8341\ d$$
$$(\partial \eta_0) = 6.6709\ e$$
$$(\partial \zeta_0) = 6.6699\ f$$

welche Coëfficienten ich als Uebertragungs-Coëfficienten bezeichnen will.

Ich setze die Bildung der Normalgleichungen hier vollständig an, um die grossen Vortheile anschaulich zu machen, welche diese Methode in der Anwendung gewährt; etwa die Hälfte der Coëfficienten verschwindet. Man erhält so:

aa	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	*af*	*an*	*as*	*bb*	*bc*	*bd*
+1.0000	−1.0000		0	−1.0000	+1.0000	0	+1.0000	+1.0000	+1.0000	0	+1 0000
+0.0191	−0.0790	0	−0.0066	+0.0272	0	−0.0023	−0.0415	+0.3252	0	+0.0272
+0.0878	+0.1568	0	+0.0554	+0.0994	0	+0.0010	+0.4004	+0 2801	0	+0.0989
+0.1253	+0.1796	0	+0.1277	+0.1851	0	−0.0194	+0.5981	+0.2575	0	+0.1831
0,0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+ 1	0	−0,0062	0	0	+0.0021	+ 6	− 34	0	0	0
0	0	−0,0034	0	0	−0.0022	− 8	− 63	0	0	0
0	0	+0.0029	0	0	+0.0030	− 5	+ 56	0	0	0
+1.2323	−0.7426	−0 0067	−0.8235	+1.3117	+0.0029	+0.9786	+1.9529	+1.8628	0	+1.3092

be	*bf*	*bn*	*bs*	*cc*	*cd*	*ce*	*cf*	*cn*	*cs*	*dd*	*de*
−1 0000	0	−1.0000	−1.0000	0	0	0	0	0	0	+1.0000	−1.0000
−0.1121	0	+0.0095	+0.1710	0	0	0	0	0	0	+0.0023	−0.0094
+0.1776	0	+0.0017	+0.7152	0	0	0	0	0	0	+0.0349	+0 0627
+0 2654	0	−0.0279	+0 8576	0	0	0	0	0	0	+0.1302	+0.1887
0	0	0	0	+1 0000	−0.0004	0	−1.0000	−.01212	−0.1216	0	0
0	0	0	0	+0.3239	+0.0021	0	−0.1116	−0.0322	+0.1760	0	0
0	0	0	0	+0 2794	−0.0021	0	+0.1771	+0.0615	+0.5124	0	0
0	0	0	0	+0.2569	+0.0032	0	+0.2648	−0.0398	+0.4880	0	0
−0.6691	0	−1.0167	+0.7438	+1.8602	+0.0028	0	−0.6697	−0.1317	+1.0548	+1.1674	−0.7580

df	*dn*	*ds*	*ee*	*ef*	*en*	*es*	*ff*	*fn*	*fs*	*nn*
0	−1.0000	−1.0000	+1.0000	0	+1.0000	+1.0000	0	0	0	+1.0000
0	+ 8	+0.0142	+0.0386	0	−0.0033	−0.0589	0	0	0	+0.0003
0	+ 6	+0.2525	+0.1126	0	+0.0011	+0.4534	0	0	0	0.0000
0	−0.0198	+0.6099	+0.2735	0	−0.0287	+0.8838	0	0	0	+0.0030
+0.0004	0	0	0	0	0	0	+1.0000	+0.1212	+0.1216	+0.0147
−0.0007	− 2	+ 12	0	0	0	0	+0.0384	+0.0111	−0.0606	+0.0032
−0 0013	− 5	− 39	0	0	0	0	+0.1123	+0.0390	+0.3248	+0.0135
+0.0033	− 5	+ 61	0	0	0	0	+0.2728	−0 0410	+0.5028	+0.0062
+0.0017	−1 0196	−0 1200	+1.4247	0	+0.9691	+2.2783	+1.4235	+0.1303	+0.8886	+1.0409

Ordnet man nun die Unbekannten nach der Reihe b, c, e, f, a und d, so gestaltet sich die Elimination bis f inclusive fortgeführt, wie folgt (vergl. pag. 340):

	b	c	e	f	a	d	n	s
	+1.8628	0.0000	—0.6691	0.0000	—0.7426	+1.3092	—1.0167	+0.7436
E.	0.27016	— ∞	9_n82549	— ∞	9_n87075	0.11701	0_n00719	9.87134
		+1.8602	0.0000	—0.6697	—0.0067	+0.0028	—0.1317	+1.0549
		0	0	0	0	0	0	0
		+1.8602	0.0000	—0.6697	—0.0067	+0.0028	—0.1317	+1.0549
E.		0.26956	— ∞	9_n82588	7_n82607	7.44716	9_n11959	0.02321
			+1.4247	0.0000	+1.3117	—0.7580	+0.9691	+2.2784
			+0.24034	0	+0.26674	—0.47027	+0.36519	—0.26710
			+1.18436	0.00000	+1.04496	—0.28773	+0.60391	+2.54550
			0	0	0	0	0	0
			+1.18436	0.00000	+1.04496	—0.28773	+0.60391	+2.54550
E.			0.07348	— ∞	0.01910	9_n45898	9.78098	0.40577
				+1.4235	+0.0029	+0.0017	+0.1303	+0.8887
				0	0	0	0	0
				+1.4235	+0.0029	+0.0017	+0.1303	+0.8887
[nn 1]	0.4860			+0.24110	+0.00241	—0.00101	+0.04741	—0.37978
[nn 2]	0.4767			+1.18240	+0.00049	+0.00271	+0.08289	+1.26848
[nn 3]	0.1688			0	0	0	0	0
[nn 4]	0.1630			+1.18240	+0.0049	+0.00271	+0.08289	+1.26849
E.				6.07276	6.69020	7.43297	8.91850	0.10329.

Man wird bemerken, dass auch die Auflösung der Normalgleichungen wegen der kleinen Coëfficienten sehr merklich erleichtert erscheint. Würde es sich in diesem Falle nur um die Ermittelung der wahrscheinlichsten Elemente allein handeln, und sollte hier nicht ein Beispiel durchgeführt werden, wo zwei Unbekannte einer besonderen Unsicherheit unterworfen sind, so könnte die Elimination zu Ende geführt werden, ohne allzugrosse Unsicherheit. Diesen Vortheil verdankt man nur der zweckmässigen Wahl der Elemente.

Bestimmt man sich aus der letzten mit E bezeichneten Gleichung die Unbekannte f als Function von a, d und den Beobachtungsfehlern, so erhält man sofort (logarithmisch):

$$f = 8.84574 + 6_n61744\,a + 7_n36021\,d\,;$$

führt man diesen Werth in der vorletzten obigen Gleichung E ein, so findet man leicht:

$$e = 9.70750 + 9_n94562\,a + 9.38550\,d$$

und so weiter durch Rücksubstitution:

$$c = 8_n65858 + 7.53798\,a + 7_n36693\,d$$
$$b = 9_n55948 + 8.91239\,a + 9_n78927\,d\,;$$

mit Rücksicht auf die Uebertragungscoëfficienten (pag. 452) erhält man als Relationen zwischen den Elementen (logarithmisch):

$$\left.\begin{aligned}\partial\zeta_0 &= 5.5156 + 5_n7776\,\partial x_0 + 6_n1960\,\partial\xi_0\\ \partial\eta_0 &= 6.3784 + 9_n1068\,\partial x_0 + 8.2223\,\partial\xi_0\\ \partial z_0 &= 5_n0038 + 6.3735\,\partial x_0 + 5_n8780\,\partial\xi_0\\ \partial y_0 &= 5_n9057 + 7.7489\,\partial x_0 + 8_n3014\,\partial\xi_0\end{aligned}\right\}\quad A_1)$$

Hiermit sind die Formen 2) (pag. 364) erlangt. Um nun den Uebergang auf 4) (pag. 365) zu machen, hat man diese Relationen in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen einzusetzen, und man wird, um Alles in Bogensekunden zu erhalten, die obigen Coëfficienten vor deren Substitution durch sin 1″ dividiren; ausserdem habe ich, um den Zusammenhang zwischen den Elementen und den Orten möglichst klar zu legen, die zwei Gleichungen für den ersten Ort ohne Berücksichtigung ihres Gewichtes benützt; man erhält so die neuen Bedingungsgleichungen, indem man die von ∂x_0 und $\partial\xi_0$ freien Glieder mit den Fehlern in den Orten verbindet:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\\ -\,1''807 &= -\,157''5\,\partial x_0 + 293''9\,\partial\xi_0\\ +\,7.957 &= +\,619.5 \quad » \quad -\,1264.4 \quad »\\ +\,0.593 &= +\,330.0 \quad » \quad -\,200.8 \quad »\\ -\,3.382 &= -\,502.2 \quad » \quad +\,632.4 \quad »\\ &\beta\\ -\,0.078 &= +\,17.04\,\partial x_0 - 0.01\,\partial\xi_0\\ -\,0.415 &= -\,67.61 \quad » \quad +\,10.40 \quad »\\ +\,2.875 &= -\,36.70 \quad » \quad -\,21.73 \quad »\\ -\,2.262 &= +\,55.71 \quad » \quad +\,14.22 \quad »\end{aligned}\right\}\quad A_2)$$

welche Gleichungen nun die Form der Gleichungen 8) (pag. 366) haben.

Hier findet nun die in 7) (pag. 360) angezeigte Prüfung statt. Bildet man die Summe der Fehlerquadrate (also von n') und addirt dieselben, nachdem man die für den ersten Ort geltenden Quadrate, dem Gewichte entsprechend, mit 3 multiplicirt hat, so erhält man:

$$[n'n'] = 98''4\,;$$

oben fand sich $[nn4] = 0.1630$, was in Verbindung mit der Fehlereinheit ergibt:

$$[nn4] = 98''5$$

in guter Uebereinstimmung mit dem obigen Werthe. Uebrigens erscheinen die Coëfficienten von ∂x_0 und $\partial\xi_0$ durch die Controle nicht geprüft und müssen besonders revidirt werden. Die obigen Gleichungen können nun zur Bestimmung von ∂x_0 und $\partial\xi_0$ verwerthet werden, da in der That die Coëfficienten der beiden Unbekannten nicht allzu klein sind (vergl. pag. 366); gibt man wieder dem ersten Orte das Gewicht 3 und macht die Coëfficienten homogen durch:

$$2.7920\,\partial x_0 = p$$
$$3.1019\,\partial\xi_0 = q$$
$$\log \text{Fehlereinheit} = 0.9007$$

so erhält man (logarithmisch):

$$\begin{array}{lll} 9_n5949 = 9_n6439\,p & + 9.6049\,q \\ 0.0000 = 0.0000 & 0_n0000 \\ 8.8724 = 9.7277 & 9_n2137 \\ 9_n6285 = 9_n9089 & 9.6991 \\ 8_n2300 = 8.6780 & 7_n0957 \\ 8_n7173 = 9_n0380 & 7.9151 \\ 9.5579 = 8_n7727 & 8_n2352 \\ 9_n4538 = 8.9540 & 8.0510\,. \end{array}$$

aus welchen Gleichungen sich die folgenden Eliminationsgleichungen ergeben:

$$\left.\begin{array}{r} +\,2.1625\,p - 1.6692\,q = +\,1.5157 \\ +\,0.1511\,q = -\,0.2231\,. \end{array}\right\} \qquad (a)$$

Die Summe der Fehlerquadrate beträgt in der hier gewählten Einheit 1.5555. Aus der ersteren Gleichung allein leitet man ab (logarithmisch):

$$p = 9.8456 + 9.8875\,q\,,$$

oder mit Rücksicht auf die oben eingeführten Homogenitätsfactoren (logarithmisch):

$$\delta x_0 = 7.9543 + 0.1974\,\delta\xi_0\,^{*)}. \qquad (B)$$

Der eben gefundene Werth für p wäre in die obigen Gleichungen einzuführen, worauf man leicht die Formen 18) (pag. 368) erhalten würde, doch ist die Auflösung in dem vorliegenden Falle aus den letzteren Eliminationsgleichungen für die Bestimmung der Unbekannten hinreichend sicher; man erhält so:

$$\log q = 0_n1693$$

oder

$$\log \delta\xi_0 = 7_n9681\,. \qquad (C)$$

Die Summe der Fehlerquadrate geht herab auf:

$$[nn6] = 0.1638\,,$$

oder mit Rücksicht auf die oben eingeführte Fehlereinheit:

$$[nn6] = 10''4\,.$$

Substituirt man den Werth von (C) in (B) und (A), so erhält man die wahrscheinlichsten Correctionen der angewandten Elemente, und zwar:

$$\begin{aligned} \delta x_0 &= -\,0.005\,6375 \\ \delta y_0 &= +\,0.000\,0739 \\ \delta z_0 &= -\,0.000\,0107 \\ \delta \xi_0 &= -\,0.009\,2920 \\ \delta \eta_0 &= +\,0.000\,8050 \\ \delta \zeta_0 &= +\,0.000\,0346. \end{aligned}$$

---

*) Da der Coëfficient von $\delta\xi_0$ grösser als die Einheit ist, so kann man daraus den Schluss ziehen, dass es etwas zweckmässiger gewesen wäre, δx_0 als die letzte Unbekannte zu wählen.

Die Einführung dieser Correctionen in die Bedingungsgleichungen ergibt als übrigbleibende minimale Fehler:

	$\cos\beta\,\partial\lambda$	$\partial\beta$	Gewicht	
1	+ 0″04	+ 0″01	3	*D*)
2	— 0.30	— 0.70	1	
3	+ 0.54	+ 2.47	1	
4	— 0.34	— 1.82	1	

Die Summe der Fehlerquadrate ist in der That 10″4, wodurch eine sehr gute Controle erreicht ist.

Bringt man die hier gefundenen Correctionen an die oben (pag. 443) ermittelten Ausgangswerthe an, so erhält man:

$$x_1 = +\,4.208\ 7317\,, \qquad \xi_1 = +\,0.014\ 7156$$
$$y_1 = +\,0.407\ 0657\,, \qquad \eta_1 = +\,0.450\ 2083$$
$$z_1 = -\,0.053\ 8383\,, \qquad \zeta_1 = -\,0.129\ 0064\,;$$

aus diesen Coordinaten und Geschwindigkeiten sind die osculirenden Elemente nach 34) (pag. 437) abzuleiten; die Rechnung stellt sich wie folgt:

$\log x_1$	0.624 1513
$\log y_1$	9.609 6645
$\log z_1$	8_n731 0913
$\log \xi_1$	8.167 7780
$\log \eta_1$	9.653 4135
$\log \zeta_1$	9_n110 6113
$x_1\,\eta_1$	0.277 5648
$y_1\,\xi_1$	7.777 4425
Subtr.	0.001 3752
$y_1\,\zeta_1$	8_n720 2758
$z_1\,\eta_1$	8_n384 5048
Subtr.	0.208 8634
$x_1\,\zeta_1$	9_n734 7626
$z_1\,\xi_1$	6_n898 8693
Subtr.	0.000 6341
$x_1\,\xi_1$	8.791 9293
$y_1\,\eta_1$	9.263 0780
Add.	0.126 4396
{I + II}	9.389 5176
$z_1\,\zeta_1$	7.841 7026
Add.	0.012 1308
$\sin\varphi\,\sin v\,\frac{r}{\sqrt{p}}$	9.401 6484

$\sqrt{p}\,\sin(i)\,\sin(\Omega)$	8_n451 4142
	9_n999 4101
$\sqrt{p}\,\sin i\,\cos(\Omega)$	6_n734 1285
$\sqrt{p}\,\sin(i)$	9.734 7184
$\sqrt{p}\,\cos(i)$	0.276 1896
$\sqrt{p}$	0.293 4265
p	0.586 8530
i	16° 2′10″04
(Ω)	182 59 7 71
$\cos(\Omega)$	9_n999 4101
$\sin(\Omega)$	8_n716 6940
$\cos(i)$	9.982 7631
$\sin(i)$	9.441 2918
$\cos(\Omega)\cos(i)$	9_n982 1732
$-\sin(\Omega)\cos(i)$	8.699 4571
$y_1\cos(\Omega)\cos(i)$	9_n591 8377
$-x_1\sin(\Omega)\cos(i)$	9.323 6084
Add.	0.336 5119
{I + II}	9_n255 3258
$z_1\sin(i)$	8_n172 3831
Add.	0.034 4739
$x_1\cos(\Omega)$	0_n623 5614
$y_1\sin(\Omega)$	8_n326 3585
Add.	0.002 1852

$r \sin u$	$9_n 289\ 7997$	$\sin \varphi \sin v$	9.068 8665
	$9_n 999\ 5382$		9.905 3147
$r \cos u$	$0_n 625\ 7466$	$\sin \varphi \cos v$	$8_n 937\ 6909$
u	$182°38'29''78$	v	$126°28'32''70$
r	0.626 2084	$\sin \varphi$	9.163 5518
$r : p$	9.960 6446	φ	$8°22'46''59$
$\sqrt{p} : r$	9.667 2181	$45° + \frac{1}{2}\varphi$	$49°11'23.29$
$\frac{1}{2} v$	$63°14'16.35$	ω	$56°9'57''08$
$\text{tg} \frac{1}{2} v$	0.297 3051	π	$239°9'\ 4''79$
$\text{cotg}\ (45° + \frac{1}{2}\varphi)$	9.936 2560	$\cos \varphi^2$	9.990 6774
$\frac{1}{2} E$	$59°42'48''86$	a	0.596 1756
E	119 25 37.73	$\sqrt{a}$	0.298 0878
$\sin E$	9.940 0086	$a^{\frac{3}{2}}$	0.894 2634
$\sin \varphi : \sin 1''$	4.477 9769	$\log \mu$	2.655 7432
$e'' \sin E$	$7°16'20''96$	μ	$452''6299$
M	$112°\ 9'16''77$		

womit die Rechnung der Elemente vollendet erscheint. Ueberträgt man weiter die Elemente nach 35) (pag. 438) auf den Aequator als Fundamentalebene, und diese nach den im ersten Bande des Lehrbuches angegebenen Formeln (I pag. 11) auf die Ekliptik, so finden sich die wahrscheinlichsten Elemente in der gewöhnlichen Form:

(153) Hilda.

Epoche 1875 Dec. 2.0 mittl. Berl. Zeit.

mittleres Aequinoctium 1875.0

L	$34°58'54''95$
M	112 9 16.77
π	282 49 38.18
Ω	228 20 0.73
i	7 48 0.22
φ	8 22 46.59
μ	$452''6299$
$\log a$	0.596 1756 .

Rechnet man nun aus diesen Elementen die Darstellung der Orte bezogen auf das früher gewählte Coordinatensystem, so ergibt die directe siebenstellige Rechnung hierfür:

		$\cos\beta\,\partial\lambda$	$\partial\beta$
1875 Nov.	4	$+ 0''09$	0.00
»	22	$- 0.32$	$- 0.71$
Dec.	19	$+ 0.57$	$+ 2.55$
»	30	$- 0.31$	$- 1.82$,

welche Werthe mit den in D (pag. 456) angesetzten in befriedigender Weise stimmen, so dass die bisherigen Rechnungen einer sehr scharfen Controle unterzogen erscheinen.

Wenn es sich blos darum handelt, die wahrscheinlichsten Elemente für einen kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition zu erhalten, so erscheinen hiermit die Rechnungen vollendet; es knüpft sich aber häufig genug auch die Frage an diese Bestimmungen, innerhalb welcher Grenzen man die Elemente variiren darf, ohne den Beobachtungen geradezu zu widersprechen, und zur Erledigung dieser Frage eignet sich die hier aufgestellte Methode im besonderen Maasse, da in der That der Zusammenhang zwischen den Variationen der Elemente und den Aenderungen in den geocentrischen Orten, innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen ein fast völlig linearer ist.

Wir nehmen zu diesem Ende die Gleichung B) (pag. 455) vor und substituiren dieselbe einerseits in A_1) und A_2); denkt man sich dann unter $\partial\xi$ die Variation des wahrscheinlichsten Werthes von ξ_0, so ist es klar, dass man in den Gleichungen A_1 und B) (pag. 454, 455) für die constanten Coëfficienten Null zu setzen hat, wenn man unter $\partial\zeta$, $\partial\eta$, ∂z, ∂y und ∂x die Variationen der wahrscheinlichsten Elemente verstehen soll, bedingt durch die Variationen von $\partial\xi$ und ebenso hat man linker Hand in A_2) statt der dort angesetzten Fehler die aus D) (pag. 456) resultirenden einzufügen; man findet dann logarithmisch:

$$\partial x = 0.1074\,\partial\xi$$
$$\partial y = 8_n0484\,\partial\xi$$
$$\partial z = 6.4725\,\partial\xi$$
$$\partial\eta = 9_n2666\,\partial\xi$$
$$\partial\zeta = 6_n4001\,\partial\xi\,.$$

Beachtet man, dass die übrig bleibenden Fehler in D) (pag. 456) identisch sind mit v_1, v_2 ... der Formel 25) (pag. 369) und bezeichnet man mit f_1, f_2 ... die Fehler, welche übrig bleiben, wenn man den wahrscheinlichsten Werth von ξ um den Betrag $\partial\xi$ variirt, so erhält man aus der Substitution in B) leicht:

$$f_1 = +\,0''04 - 15''8\,\partial\xi\,, \qquad f_5 = +\,0''01 - 25''9\,\partial\xi$$
$$f_2 = -\,0.30 + 288.4\,\partial\xi\,, \qquad f_6 = -\,0.70 + 90.1\,\partial\xi$$
$$f_3 = +\,0.54 - 314.5\,\partial\xi\,, \qquad f_7 = +\,2.47 + 79.5\,\partial\xi$$
$$f_4 = -\,0.34 + 158''8\,\partial\xi\,, \qquad f_8 = -\,1.82 - 102.0\,\partial\xi\,.$$

Bedenkt man überdiess, dass der wahrscheinlichste Werth von x ebenfalls stark variirt werden kann, ohne den Beobachtungen zu widersprechen, und versteht man unter ∂x die Variation unter der Einschränkung, dass $\partial\xi = 0$ gesetzt ist (pag. 368), so kann man zu diesem Zwecke unmittelbar die Coëfficienten von ∂x_0 aus A_1) und A_2) hinschreiben, wobei nur zu beachten ist, dass man in den letzteren das Zeichen wegen der Umsetzung auf die andere Seite des Gleichheitszeichens zu ändern hat und erhält so (logarithmisch):

$$\left.\begin{aligned}
\partial x &= 0.1074\,\partial\xi \\
\partial y &= 7.7489\,\partial x + 8_n0484\,\partial\xi \\
\partial z &= 6.3735\,\partial x + 6.4725\,\partial\xi \\
\partial y &= 9_n1068\,\partial x + 9_n2666\,\partial\xi \\
\partial\zeta &= 5_n7770\,\partial x + 6_n4001\,\partial\xi\,.
\end{aligned}\right\} \quad E)$$

und ausserdem für die Fehler in den Orten:

$$\begin{array}{ll} \cos\beta\,\delta\lambda & \delta\beta \\ f_1 = +0''04 + 157''5\,\delta x - 45''8\,\delta\xi\,, & f_5 = +0''01 - 17''0\,\delta x - 25''9\,\delta\xi \\ f_2 = -0\ 30 - 619.5\,\delta x + 288.4\,\delta\xi\,, & f_6 = -0.70 + 67.5\,\delta x + 96.1\,\delta\xi \\ f_3 = +0\ 54 - 330.9\,\delta x + 314.5\,\delta\xi\,, & f_7 = +2.47 + 36.7\,\delta x + 79.5\,\delta\xi \\ f_4 = -0.34 + 502.2\,\delta x + 158.8\,\delta\xi\,, & f_8 = -1.82 - 55.7\,\delta x - 102.0\,\delta\xi \end{array} \quad F)$$

womit also die durch die Gleichung 25) (pag. 369) verlangte Form hergestellt erscheint. Die Relation 26) (pag. 369) ergibt also mit diesen Zahlen:

$$[ff] = 10''4 + \overline{5.9190}\,\delta x^2 + \overline{5.3830}\,\delta\xi^2\,, \qquad G)$$

wobei die Coëfficienten logarithmisch verstanden und in Bogensekunden angesetzt sind; sie sind also in der That nichts anderes als die entsprechenden Quadratsummen der in F) enthaltenen Zahlen, wobei jedoch die aus den Gleichungen resultirenden Werthe von f_1 und f_5 dem Gewichte entsprechend mit 3 multiplicirt wurden. Die Ermittelung dieser Coëfficienten kann aber viel einfacher aus den Zahlen der Gleichung α (pag. 455) erhalten werden, denn der Coëfficient von p in der ersten Gleichung ist einfach mit dem Quadrate des Homogenitätsfactors (der Logarithmus des Factors ist daselbst angenommen 2.7920) zu multipliciren und gibt den obigen Coëfficienten von δx^2, ebenso ist der Factor von q in der zweiten Gleichung zu behandeln (log Factor 3.1010), der dann den Factor von $\delta\xi^2$ finden lässt; es wird der Controle halber erwünscht sein, die Coëfficienten der Gleichung G) auf beiden Wegen zu ermitteln.

Man wird vorerst sich über die Grenzen, über die man bei der Bestimmung der Grenzelemente wohl nicht hinauszugehen braucht, zu einigen haben; eine Ansicht der Gleichungen F) zeigt wohl, dass ein Werth von $[ff]$, der etwa bei 100″ liegt, keine grosse Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nehmen kann; es wird also eine Vergrösserung der minimalen Fehlerquadrate (10″4) um 89″6 wenig wahrscheinlich sein; um aber mit einer fast an die Gewissheit grenzenden Wahrscheinlichkeit die äussersten Grenzelemente zu erhalten, wollen wir die Vermehrung um den vierfachen Betrag als noch möglich in Betracht ziehen, daher $[ff]$ die Form geben:

$$[ff] = 10''4 + 358''4\,n^2\,. \qquad H)$$

für $n = \frac{1}{2}$, wird also die Summe der Fehlerquadrate 100″, für $n = 1$ erreicht dieselbe den Werth 368″8. Setzt man nach 27) (pag. 370):

$$\sqrt{358.4}\;n \sin N = \overline{2.9595}\;dx$$
$$\sqrt{358.4}\;n \cos N = \overline{2.6915}\;d\xi\,,$$

also:

$$\left.\begin{array}{l} n \sin N = \overline{1.0823}\;dx\,. \\ n \cos N = \overline{1.4143}\;d\xi \end{array}\right\} \quad J)$$

und führt statt der beiden Unbekannten $d\xi$ und dx die Unbekannten n und N der Gleichung J) entsprechend ein, so ist die Summe der Fehlerquadrate nach G) (pag. 459):

$$[ff] = 10''4 + 358''4\, n^2 .$$

Für gleiche Werthe von n wird demnach die Summe der Fehlerquadrate den gleichen Werth erhalten, also, da die wahrscheinlichen Fehler der Unbekannten nur von der Fehlerquadratsumme abhängig sind Systeme, von gleicher Wahrscheinlichkeit (vergl. pag. 370) für jeden beliebigen Werth des Winkels N ergeben. Nach den obigen Betrachtungen kann man wohl als die obere Grenze für n die Einheit annehmen, da für diesen Werth die Darstellung der Beobachtungen ganz unbefriedigend ist; der Werth $n = 0$ führt auf das wahrscheinlichste System. Indem für den Winkel N die Peripherie in 8 Theile getheilt wurde und für n einmal der Werth $\frac{1}{2}$ und dann 1 substituirt wurde, erhielt man aus E) (pag. 458) 16 verschiedene Systeme der Coordinaten und Geschwindigkeiten, aus denen nach 34) (pag. 437) die Elemente abgeleitet wurden. Es seien die für 8 Punkte der Peripherie ermittelten Werthe einer Funktion bezeichnet durch Y_0, $Y_1 \ldots Y_7$, so wird es ein leichtes sein, dieselben numerisch in eine periodische Funktion zu verwandeln; man erhält 5 Cosinus-Coëfficienten und 3 Sinus-Coëfficienten, die der vorgelegten Funktion die Gestalt geben:

$$E = c_0 + c_1 \cos N + c_2 \cos 2N + c_3 \cos 3N + c_4 \cos 4N$$
$$+ s_1 \sin N + s_2 \sin 2N + s_3 \sin 3N.$$

Seien durch die obigen Y-Funktionen die acht Incremente dargestellt, die unter einer bestimmten Annahme für n (hier entweder 0.5 oder 1.0) irgend ein Element gegen den wahrscheinlichsten Werth erfährt, wenn N der Reihe nach die Werthe 0, 45°, 90° ... 315° annimmt, und bezeichnet weiter symbolisch:

$$(0.4) = Y_0 + Y_4 \qquad \left(\tfrac{0}{4}\right) = Y_0 - Y_4$$
$$(1.5) = Y_1 + Y_5 \qquad \left(\tfrac{1}{5}\right) = Y_1 - Y_5$$
$$(2.6) = Y_2 + Y_6 \qquad \left(\tfrac{2}{6}\right) = Y_2 - Y_6$$
$$(3.7) = Y_3 + Y_7 \qquad \left(\tfrac{3}{7}\right) = Y_3 - Y_7$$

dann ist offenbar:

$$4(c_0 + c_4) = (0.4) + (2.6), \quad 2(c_1 + c_3) = \left(\tfrac{0}{4}\right), \quad 2(s_1 + s_3) = \left\{\left(\tfrac{1}{5}\right) + \left(\tfrac{3}{7}\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$4(c_0 - c_4) = (1.5) + (3.7), \quad 2(c_1 - c_3) = \left\{\left(\tfrac{1}{5}\right) - \left(\tfrac{3}{7}\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2(s_1 - s_3) = \left(\tfrac{2}{6}\right)$$
$$4c_2 = (0.4) - (2.6), \qquad 4s_2 = (1.5) - (3.7).$$

Die Anlage der Rechnung stellt sich also wie folgt:

Y_0 Y_4	Y_2 Y_6	Y_1 Y_5	Y_3 Y_7	
(0.4) (2.6)	(1.5) (3.7)	$\binom{1}{5}$ $\binom{3}{7}$	$\binom{1}{5} - \binom{3}{7}$ $\binom{1}{5} + \binom{3}{7}$	$\log\left\{\binom{1}{5} - \binom{3}{7}\right\}$ $\log\left\{\binom{1}{5} + \binom{3}{7}\right\}$
(0.4) + (2.6)		$\binom{0}{4}$	$\left\{\binom{1}{5} + \binom{3}{7}\right\}\frac{1}{\sqrt{2}}$	
(1.5) + (3.7)		$\left\{\binom{1}{5} - \binom{3}{7}\right\}\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\binom{2}{6}$	
$8c_0$ $8c_4$	$+c_2$ $+s_2$	$+c_1$ $+c_3$	$+s_1$ $+s_3$	

Man erhält so für $n = \frac{1}{2}$ und indem man statt (π) und φ die einen lineareren Charakter aufweisenden Elemente:

$$(\Phi) = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\sin(\pi)$$

$$(\Psi) = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\cos(\pi)$$

einführt, die folgenden Zahlen nach (34) pag. 437:

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x	+4.2390745	+4.2377345	+4.2191222	+4.1946232	+4.1783888	+4.1799288	+4.1983412	+4.2228401
y	+0.4068504	+0.4069546	+0.4071240	+0.4072591	+0.4072810	+0.4071767	+0.4070074	+0.4068722
z	−0.0538326	−0.0538325	−0.0538358	−0.0538406	−0.0538440	−0.0538441	−0.0538407	−0.0538360
ξ	+0.0339747	+0.0283338	+0.0147156	+0.0010973	−0.0045435	+0.0010973	+0.0147156	+0.0283338
η	+0.4466499	+0.4467525	+0.4488795	+0.4517848	+0.4537666	+0.4536640	+0.4515371	+0.4486317
ζ	−0.1290112	−0.1290102	−0.1290070	−0.1290033	−0.1290015	−0.1290025	−0.1290058	−0.1290094
(Ω)	182°59′14″18	182°59′15″05	182°59′11″63	182°59′ 5″86	182°59′ 1″14	182°59′ 0″25	182°59′ 3″77	182°59′ 9″53
(i)	16°11′33″52	16°10′43″86	16° 4′52″71	15°57′31″34	15°52′57″12	15°53′44″97	15°59′28″20	16° 6′51″33
(π)	242°15′ 7″95	240°53′17″39	238°10′34″54	234°56′13″02	233°50′48″53	236°34′ 2″51	240° 8′24″19	242° 5′37″13
φ	10°32′38″65	9°57′14″70	8°27′ 5″74	6°55′38″73	6°15′19″24	6°48′58″73	8°18′37″47	9.51′43″85
(Φ)	−33404″31	−31150″50	−25758″31	−20363″16	−18146″89	−20430″18	−25854″90	−31220″53
(Ψ)	−17573″22	−17346″58	−15985″61	−14291″86	−13258″76	−13487″90	−14843″19	−16534″85
(L)	346°43′28″34	348° 4′37″82	351°19′17″69	354°32′ 4″49	355°50′34″51	354°30′12″91	351°17′25″34	348° 3′50″71
μ	449″6879	450″8328	452″7368	453″6152	453″6484	453″4862	452″5279	450″6672

Daraus resultirt:

$$n = \tfrac{1}{2}$$

$$(L) = 351^\circ 18' 21'' 56 - 40'' 08 - 16414'' 08 \cos N - 40'' 05 \cos 2N + 1'' 00 \cos 3N - 0'' 00 \cos 4N$$
$$+ \quad 56.14 \sin N - 16.12 \sin 2N - 0.03 \sin 3N$$

$$(\Phi) = -25866'' 53 + 15'' 44 - 7628'' 80 \cos N + 15'' 50 \cos 2N + 0'' 09 \cos 3N - 0'' 01 \cos 4N$$
$$+ \quad 48.36 \sin N + 0.76 \sin 2N + 0.07 \sin 3N$$

$$(\Psi) = -15413'' 51 - 1'' 74 - 2157'' 25 \cos N - 0'' 79 \cos 2N + 0'' 02 \cos 3N + 0'' 05 \cos 4N$$
$$- \quad 571.23 \sin N - 1.94 \sin 2N - 0.01 \sin 3N$$

$$
\begin{aligned}
100\mu\ \ & 45262''99 - 17''96 - 198''03\cos N - 48''21\cos 2N + 0''01\cos 3N - 0''01\cos 4N \\
& \qquad + 10.43\sin N + 0.91\sin 2N - 0.01\sin 3N \\
\Omega &= 182^{0}59'7''71 - 0.03 + 6''52\cos N - 0''02\cos 2N - 0''00\cos 3N - 0''00\cos 4N \\
& \qquad + 3.93\sin N - 0.02\sin 2N \\
i &= 16^{0}2'10''04 + 2''84 + 558''21\cos N + 2''43\cos 2N - 0''01\cos 3N - 0''00\cos 4N \\
& \qquad + 162.25\sin N + 1.54\sin 2N + 0.00\sin 3N
\end{aligned}
$$

Führt man nun dieselben Rechnungen aus unter der Annahme $n = 1$, so findet sich in ganz ähnlicher Weise:

$$n = 1$$

$$
\begin{aligned}
L &= 351^{0}18'21''56 - 160''21 - 32810''44\cos N - 159''94\cos 2N + 7''96\cos 3N + 0''08\cos 4N \\
& \qquad + 112.11\sin N - 64.42\sin 2N - 0.25\sin 3N \\
\Phi &= 35806''53 + 61''70 - 15255''83\cos N + 62''00\cos 2N + 0''65\cos 3N - 0''00\cos 4N \\
& \qquad - 97.16\sin N + 3.05\sin 2N + 0.58\sin 3N \\
\Psi &= - 15413''51 + 6''98 - 4314''03\cos N - 3''02\cos 2N + 0''12\cos 3N + 0''01\cos 4N \\
& \qquad - 1142.36\sin N - 7.77\sin 2N + 0.17\sin 3N \\
100\mu &= 45262''99 - 191''66 - 305''66\cos N - 192''68\cos 2N + 0''22\cos 3N + 0''06\cos 4N \\
& \qquad + 20.82\sin N + 3.69\sin 2N - 0.11\sin 3N \\
\Omega &= 182^{0}59'7''71 - 0''12 + 13''05\cos N - 0''08\cos 2N - 0''00\cos 3N + 0''00\cos 4N \\
& \qquad + 7.87\sin N - 0.09\sin 2N + 0.01\sin 3N \\
i_{,} &= 16^{0}2'10''04 + 11''47 + 1116''65\cos N + 9''74\cos 2N + 0''05\cos 3N + 0''00\cos 4N \\
& \qquad + 324.58\sin N + 6.18\sin 2N + 0.07\sin 3N\,.
\end{aligned}
$$

Rechnet man mit irgend einem dieser äussersten Grenzsysteme die Darstellung der Orte direct siebenstellig, so wird man durchaus eine befriedigende Uebereinstimmung mit der aus den Differentialformeln abgeleiteten aus J und $F_{,}$ (pag. 459) erhalten, welche die Unsicherheit der siebenstelligen Rechnung kaum überschreitet; man leitet daraus den Schluss ab, dass in der That die hier getroffene Wahl der Elemente den Forderungen der Methode der kleinsten Quadrate (linearer Zusammenhang) in fast unerwartet befriedigendem Maasse entspricht.

Bedenkt man, dass die obigen Formen für die Elemente nichts anderes sind, als die empirische Entwickelung derselben nach den Potenzen von $n\sin N$ und $n\cos N$, so wird man sofort einsehen, dass die mit geraden Vielfachen von N verbundenen Coëfficienten nur gerade Potenzen von n, die mit ungeraden verbundenen nur ungerade enthalten können; die niedrigste Potenz von n kann aber nicht kleiner sein, als der Factor von N. Mit Hilfe dieser Bemerkungen sieht man daher sofort ein, dass man den Elementen demnach die folgende Form ertheilen kann:

(153) Hilda.

Epoche 1875 Dec. 2.0 mittl. Berl. Zeit.

$$
\begin{aligned}
L = 351^{0}18'21''56 & + (-160''38\,n^2 + 0''17\,n^4) && + (-32834''08\,n + 23''04\,n^3)\cos N \\
& + (+112''34\,n - 0''23\,n^3)\sin N && + (-160''20\,n^2 + 0''32\,n^4)\cos 2N \\
& + (-64''46\,n^2 + 0''08\,n^4)\sin 2N && + 7''96\,n^3\cos 3N \\
& - 0''25\,n^3\sin 3N && + 0''08\,n^4\cos 4N
\end{aligned}
$$

$$(\Phi) = -25806''53 + (+61''77\,n^2 - 0''07\,n^4) + (-15258''20\,n + 2''37\,n^3)\cos N$$
$$+ (+96''59\,n + 0''57\,n^3)\sin N + (+62''01\,n^2 - 0''01\,n^4)\cos 2N$$
$$+ (+3''06\,n^2 - 0''01\,n^4)\sin 2N + 0''05\,n^3 \cos 3N$$
$$+ 0''58\,n^3 \sin 3N + 0''00\,n^4 \cos 4N$$

$$(\Psi) = -15413''51 + (-6''93\,n^2 - 0''05\,n^4) + (-4314''65\,n + 0''62\,n^3)\cos N$$
$$+ (-1142''51\,n + 0''15\,n^3)\sin N + (-3''23\,n^2 + 0''21\,n^4)\cos 2N$$
$$+ (-7''77\,n^2 + 0''00\,n^4)\sin 2N + 0''12\,n^3 \cos 3N$$
$$+ 0''17\,n^3 \sin 3N + 0''01\,n^4 \cos 4N$$

$$100\,\mu = 45262''99 + (-191''80\,n^2 + 0''23\,n^4) + (-396''19\,n + 0''53\,n^3)\cos N$$
$$+ (+20''87\,n - 0''05\,n^3)\sin N + (-192''89\,n^2 + 0''21\,n^4)\cos 2N$$
$$+ (+3''65\,n^2 + 0''04\,n^4)\sin 2N + 0''22\,n^3 \cos 3N$$
$$- 0''11\,n^3 \sin 3N + 0''06\,n^4 \cos 4N$$

$$(\Omega) = 182^0 59' 7''71 + (-0''14\,n^2 + 0''02\,n^4) + (+13''05\,n + 0''00\,n^3)\cos N$$
$$+ (+7''86\,n + 0''01\,n^3)\sin N + (-0''08\,n^2 + 0''00\,n^4)\cos 2N$$
$$+ (-0''09\,n^2 + 0''00\,n^4)\sin 2N + 0''00\,n^3 \cos 3N$$
$$+ 0''01\,n^3 \sin 3N + 0''00\,n^4 \cos 4N$$

$$(i) = 16^0 2' 10''04 + (+11''33\,n^2 + 0''14\,n^4) + (+1116''34\,n + 0''31\,n^3)\cos N$$
$$+ (+324''47\,n + 0''11\,n^3)\sin N + (+9''73\,n^2 + 0''01\,n^4)\cos 2N$$
$$+ (+6''15\,n^2 + 0''03\,n^4)\sin 2N + 0''05\,n^3 \cos 3N$$
$$+ 0''07\,n^3 \sin 3N + 0''00\,n^4 \cos 4N\,.$$

Die Summe der Fehlerquadrate ist nach H (pag. 459):

$$[ff] = 10''4 + 358''4\,n^2\,,$$

die Darstellung der Orte nach J und F (pag. 459):

$\cos\beta\,\delta\lambda$

1875 Nov. 4	+ 0.04	— 1''76 $n \cos N$	+ 3''27 $n \sin N$
» 22	— 0.30	+ 11.11 $n \cos N$	— 12.87 $n \sin N$
Dec. 19	+ 0.54	— 12.12 $n \cos N$	— 6.88 $n \sin N$
» 30	— 0.34	+ 6.12 $n \cos N$	+ 10.44 $n \sin N$

$\delta\beta$

1875 Nov. 4	+ 0''01	— 1''00 $n \cos N$	— 0''35 $n \sin N$
» 22	— 0.70	+ 3.70 $n \cos N$	+ 1.41 $n \sin N$
Dec. 19	+ 2.47	+ 3.06 $n \cos N$	+ 0.76 $n \sin N$
» 30	— 1.82	— 3.93 $n \cos N$	— 1.16 $n \sin N$,

wobei zu bemerken ist, dass bei dem eminent linearen Charakter der eingeführten Funktionen die Uebereinstimmung in einer der siebenstelligen Rechnung nahe adäquaten Genauigkeit bis $n = 1$ hervortreten muss; für ein gleiches n erhält man bei beliebiger Wahl von N Systeme gleicher Wahrscheinlichkeit, für $n = 0$ das wahrscheinlichste System.

C. Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit genäherter Berücksichtigung der Principien der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 1. Die Lambert'sche Gleichung.

Bevor ich an die Lösung der in diesem Abschnitte gestellten Aufgaben schreite, muss ich vorerst mehre Entwickelungen ausführen, die für die folgenden Ableitungen nöthig sein werden, und vor Allem nehme ich die Lambert'sche Gleichung vor, die eine sehr merkwürdige und wichtige Relation aufstellt, welche zwischen der Sehne s, den umschliessenden Radienvectoren r und r', und der grossen Halbachse a einerseits und der Zwischenzeit $(t'-t)$ andererseits besteht und von der ein Specialfall ($a=\infty$) bereits im ersten Bande (Euler'sche Gleichung I pag. 101) erhalten wurde.

Lässt man die XY-Ebene eines Coordinatensystemes mit der Bahnebene zusammenfallen und verlegt den Anfangspunkt desselben in den Sonnenmittelpunkt, so ist der Abstand zweier Punkte s, deren Coordinaten x, y, und x' y' sind, bestimmt durch:

$$s^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 \; . \qquad 1)$$

Legt man nun die positive Achse in die Richtung des Perihels und gehören die beiden in Betracht gezogenen Punkte einer bestimmten Bahn an, so kann man auch setzen:

$$x = r\cos v \;, \quad x' = r'\cos v'$$
$$y = r\sin v \;, \quad y' = r'\sin v' \;,$$

wo v und v' die zugehörigen wahren Anomalien vorstellen. Ich werde von nun ab die Entwickelungen mit Relationen durchführen, die für die Ellipse reell sind, für die Hyperbel aber imaginäre Beziehungen geben; da im Schlussresultate das Imaginäre eliminirt erscheint, so hat man unmittelbar der Rechnung zugängliche Resultate erhalten, die für alle Kegelschnitte gleichmässige Giltigkeit haben, da man mit dem Imaginären bekanntlich alle Operationen mit derselben Berechtigung durchführen kann, wie mit den reellen Grössen.

Es ist nach I pag. 48:

$$r\cos v = a(\cos E - e) \;, \quad r\sin v = a\cos\varphi \sin E \;,$$

wo E die excentrische Anomalie, $e=\sin\varphi$ die Excentricität vorstellt; man hat also für 1):

$$s^2 = a^2(\cos E' - \cos E)^2 + a^2\cos\varphi^2(\sin E' - \sin E)^2 \; .$$

Setzt man also (wie I pag. 218):

$$g = \tfrac{1}{2}(E'-E) \;, \quad G = \tfrac{1}{2}(E'+E) \;,$$

so erhält man sofort:

$$s^2 = 4a^2\sin g^2(1 - e^2\cos G^2) \; . \qquad 2)$$

Führt man nun mittelst der Relation

$$e\cos G = \cos h$$

den Hilfswinkel h ein, so kann man an denselben die willkürliche, aber zulässige Bestimmung knüpfen, dass derselbe stets im ersten oder zweiten Quadranten zu nehmen ist, was mit der Bedingung zusammenfällt, dass $\sin h$ stets positiv wird; die Gleichung 2) (pag. 464) erhält dadurch die einfachere Gestalt:

$$s = 2a \sin g \sin h \,, \tag{3}$$

in welcher Gleichung s stets positiv angenommen ist; das Product $a \sin g$ hat auch in der That dieses Zeichen. Für die Radienvectoren (I pag. 48) kann weiter gesetzt werden:

$$(r + r') = a(1 - \cos E) + a(1 - \cos E') = 2a(1 - \cos g \cos h) \,; \tag{4}$$

setzt man noch überdiess:

$$\left.\begin{aligned} h - g &= \delta \\ h + g &= \varepsilon \,, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

so gehen die Gleichungen 3) und 4) über in:

$$\begin{aligned} s &= -a \cos \varepsilon + a \cos \delta \\ r + r' &= \quad 2a - a \cos \delta - a \cos \varepsilon \,, \end{aligned}$$

und es wird demnach:

$$\left.\begin{aligned} r + r' + s &= 2a(1 - \cos \varepsilon) = 4a \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \\ r + r' - s &= 2a(1 - \cos \delta) = 4a \sin \tfrac{1}{2} \delta^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 &= \frac{r + r' + s}{4a} \\ \sin \tfrac{1}{2} \delta^2 &= \frac{r + r' - s}{4a} \,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Zählt man die mittlere Anomalie M von der Zeit des Perihels aus, so bestehen bekanntlich, wenn die Masse vernachlässigt wird, die Relationen:

$$M = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} \,, \quad M' = \frac{kt'}{a^{\frac{3}{2}}} \,,$$

und es wird somit:

$$\frac{k(t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = M' - M = E' - e \sin E' - E + e \sin E \,,$$

oder:

$$\frac{k(t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2 \sin g \cos h = 2g - \sin \varepsilon + \sin \delta \tag{8}$$

also schliesslich:

$$k(t' - t) = a^{\frac{3}{2}} \{ (\varepsilon - \sin \varepsilon) - (\delta - \sin \delta) \} . \tag{9}$$

Die Gleichung 9) in Verbindung mit den Gleichungen 7) enthält die Lösung des vorgelegten Problemes; da aber die Bestimmung von δ und ε aus den Gleichungen 7) wegen der quadratischen Form derselben in doppelter Weise vorgenommen werden kann, je nachdem man das positive oder das negative Zeichen wählt, so könnte auf den ersten Blick eine vierfache Lösung möglich erscheinen. Allein nach 5) ist ε durch die Summe zweier Bogen bestimmt, die einerseits durch die Voraussetzung über h, andererseits in Folge der Annahme, dass der Himmelskörper nicht mehr als einen Umlauf vollendet hat, niemals grösser als 180° angenommen

werden darf. Es wird also $\frac{1}{2}\varepsilon$ stets im ersten oder zweiten Quadranten liegen und demnach für $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ stets der positive Werth angenommen werden dürfen; allerdings bleibt die Bestimmung von h insoweit zweifelhaft, dass noch zu unterscheiden ist, ob man den Bogen h oder $180-h$ wählen soll, und in der That bedingt dieser Umstand eine doppelte Lösung, die übrigens für die hier folgenden Entwickelungen, bei welchen der Werth $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ unmittelbar Verwendung findet, ohne Bedeutung ist.

Man hat weiter nach (I pag. 48):

$$\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v = \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E\,, \qquad \sqrt{r'}\sin\tfrac{1}{2}v' = \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E'$$
$$\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v = \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E\,, \qquad \sqrt{r'}\cos\tfrac{1}{2}v' = \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E'\,,$$

woraus durch entsprechende Multiplication und Addition folgt:

$$\sqrt{rr'}\cos\tfrac{1}{2}(v'-v) = a\cos\tfrac{1}{2}(E'-E) - ae\cos\tfrac{1}{2}(E'+E) = a(\cos g - \cos h)\,,$$

oder weiters unmittelbar die Gleichung:

$$\sqrt{rr'}\cos\tfrac{1}{2}(v'-v) = 2a\sin\tfrac{1}{2}\delta\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \qquad (10)$$

resultirt.

Da die bisherigen Entwickelungen der Bedeutung der Buchstaben nach für die Ellipse gelten, also a positiv ist, da ferner $\sqrt{rr'}$ stets positiv vorausgesetzt wird und den obigen Bemerkungen gemäss auch für $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ das positive Vorzeichen in Anspruch genommen wird, so resultirt aus der Gleichung (10), dass $\sin\frac{1}{2}\delta$ stets mit $\cos\frac{1}{2}(v'-v)$ dasselbe Vorzeichen haben muss, d. h. $\sin\frac{1}{2}\delta$ ist positiv zu nehmen, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner als 180° ist, dagegen negativ, wenn dieselbe zwischen die Grenzen 180° und 360° fällt.

So vorbereitet soll die Gleichung (9) (pag. 465) durch Reihenentwickelungen der Rechnung zugänglicher gemacht werden; denn da in den hier in Betracht kommenden Fällen ε und δ fast nothwendig mässig grosse Bogen sein werden, so wird die Bestimmung des Ueberschusses des Bogens über den Sinus in der hier hingeschriebenen Form ohne weitere Hilfsmittel, als die gewöhnlichen Logarithmentafeln, ziemlich misslich werden.

Um nun diesen Ueberschuss zu ermitteln, so soll derselbe in eine Reihe entwickelt werden, die entsprechend den Ausdrücken in (7) (pag. 465) nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ und $\sin\frac{1}{2}\delta$ geordnet sein soll; naturgemäss gestalten sich die Entwickelungen für beide Bogen ganz gleichmässig; ich werde die Entwickelung deshalb allgemein für den Bogen χ durchführen.

Es ist:

$$\sin\chi = 2\sin\tfrac{1}{2}\chi\cos\tfrac{1}{2}\chi = 2\sin\tfrac{1}{2}\chi\sqrt{1-\sin\tfrac{1}{2}\chi^2}\,;$$

setzt man also zur Abkürzung:

$$\sigma = \sin\tfrac{1}{2}\chi\,. \qquad (11)$$

so gibt die Entwickelung von $\sin\chi$ nach Potenzen von σ:

$$\sin\chi = 2\sigma\left\{1 - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1.1}{2.4}\sigma^4 - \ldots\right\} = 2\sigma - \sigma^3 - \sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{4.6\ldots 2n}\sigma^{2n+1}\,; \qquad (12)$$

andererseits gibt die bekannte Reihe für $arc\sin x$:

$$arc \sin x = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \ldots$$

Diese Reihe gilt nur, wenn $\sin x$ kleiner als die Einheit, somit der Bogen im ersten Quadranten zu nehmen ist; daraus resultirt, dass die unten folgenden Reihen nur mit der einen Lösung übereinkommen, wo $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$ (vergl. oben pag. 466) im ersten Quadranten genommen wurde. Es ist also:

$$\frac{1}{2} \chi = \sigma + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sigma^3 + \frac{1}{5} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sigma^5 + \ldots$$

oder

$$\chi = 2\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{4 \cdot 6 \ldots 2n} \sigma^{2n+1}; \qquad 13)$$

die Verbindung der Gleichungen 12) und 13) gibt also:

$$\chi - \sin \chi = \frac{4}{3} \sigma^3 + 4 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n-2} \sigma^{2n+1}; \qquad 14)$$

führt man diese Relation in 9) (pag. 465) ein und beachtet, dass nach 7) (pag. 465):

$$\sin \frac{1}{2} \varepsilon = + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r + r' + s}{a}}$$

$$\sin \frac{1}{2} \delta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r + r' - s}{a}}$$

zu setzen ist, wo das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere, wenn dieselbe grösser als 180° ist, so folgt sofort die Lambert'sche Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} k(t' - t) &= \frac{1}{6} \left\{ (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} \left\{ \frac{(r + r' + s)^{\frac{5}{2}}}{a} \mp \frac{(r + r' - s)^{\frac{5}{2}}}{a} \right\} + \\ &+ \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^5} \left\{ \frac{(r + r' + s)^{\frac{7}{2}}}{a^2} \mp \frac{(r + r' - s)^{\frac{7}{2}}}{a^2} \right\} + \\ &+ \frac{1}{9} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2^7} \left\{ \frac{(r + r' + s)^{\frac{9}{2}}}{a^3} \mp \frac{(r + r' - s)^{\frac{9}{2}}}{a^3} \right\} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

in welcher Gleichung für jeden Kegelschnitt alle Zahlen reell bleiben; für die Ellipse wird $\frac{1}{a}$ positiv, für die Hyperbel negativ, für die Parabel Null.

Es würde höchst unbequem sein, diese Reihe von Fall zu Fall direct zu berechnen, besonders wenn der grossen Halbachse a kein allzu bedeutender Werth zukömmt; man kann die Rechnung indess leicht bequemer gestalten; setzt man nämlich:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r + r' + s}{4a} = S, \qquad \frac{r + r' - s}{4a} = D \\ &Q_s = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} S + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} S^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} S^3 + \ldots \right\}, \\ &Q_d = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} D + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} D^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} D^3 + \ldots \right\} \end{aligned}\right\} \qquad 16)$$

so geht die Gleichung 15) (pag. 467) über in:

$$k(t'-t) = (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} Q_s \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} Q_d. \qquad 17)$$

Da die Reihen für Q_s und Q_d vollkommen gleich gebaut sind, so wird sich leicht eine Tafel rechnen lassen, aus welcher man, mit dem Argumente S oder D eingehend, den Werth von Q_s und Q_d sofort erhält. Es ist klar, dass sich die Ausdrücke für Q_s und Q_d auch in geschlossener Form darstellen lassen; man hat nämlich unter Berücksichtigung der früher gegebenen Relationen:

$$Q_s = \frac{\varepsilon - \sin\varepsilon}{8\sin\frac{1}{2}\varepsilon^3}\,, \qquad Q_d = \frac{\delta - \sin\delta}{8\sin\frac{1}{2}\delta^3}\,,$$

welche Gleichungen eine interessante Beziehung auf die von Gauss aufgestellte Gleichung (I pag. 191) enthalten.

Herr F. K. Ginzel hat die Logarithmen der Q-Funktionen nach der oben gegebenen Reihe mit dem Argumente $A = \frac{r+r'\pm s}{4a}$ sorgfältig neunstellig berechnet und in eine Tafel gebracht; diese Tafel findet sich auf sieben Stellen abgekürzt als Tafel XVII diesem Werke angehängt; dieselbe gibt mit dem Argumente $\frac{r+r'+s}{4a}$ den Logarithmus von Q_s, und mit dem Argumente $\frac{r+r'-s}{4a}$ den Logarithmus von Q_d für jeden Tausendtheil des Argumentes. Die Grenzen des Argumentes sind -0.25 und 0.25 und zwar gehören die negativen Argumente der Hyperbel, die positiven der Parabel an. Die Grenzen der Tafel werden wohl selbst für die Bahnen der Kometen von kurzer Umlaufszeit kaum jemals überschritten werden.

Zu der Gleichung 17) ist zu bemerken, dass dieselbe bei kurzen Zwischenzeiten sich für die Rechnung unbequem gestaltet (vergl. I pag. 101 § 4); doch würde es bei dem seltenen Gebrauche, den man bei sehr kurzen Zwischenzeiten von diesen Formeln machen wird, kaum der Mühe lohnen, entsprechende Reihenentwickelungen vorzunehmen und die für solche Fälle nöthigen ziemlich ausgedehnten Hilfstafeln zu construiren; doch soll hier ein Näherungsausdruck aufgestellt werden, welcher sich bei grossen Werthen von a für die Rechnung recht bequem gestaltet und blos Grössen vernachlässigt von der Ordnung: »dritte Potenz der Sehne in die zweiten und höheren Potenzen des reciproken Werthes der grossen Achse«; derselbe ist also unabhängig von der Annahme, dass s klein ist, wird aber, da man von diesem Ausdrucke nur Gebrauch machen wird, wenn s einen mässigen Werth hat, selbst bei nicht ganz grossen Werthen von a eine sehr befriedigende Annäherung gewähren. Entwickelt man, um diesen Ausdruck zu erhalten, die Lambert'sche Gleichung 15) (pag. 467), indem man naturgemäss nur das obere Zeichen berücksichtigt, nach Potenzen von:

$$\beta = \frac{s}{r+r'}\,, \qquad 18)$$

so erhält man leicht die folgenden Reihen, bei welchen ich, um das Gesetz des Fortschreitens leichter kenntlich zu machen, jeden einzelnen Factor mit dem Vorzeichen eingeführt habe.

$$k(t'-t) = \tfrac{1}{2}(r+r')^{\frac{3}{2}}\beta\left\{1 + \frac{1.-1}{4.6}\beta^2 + \frac{1.-1.-3.-5}{4.6.8.10}\beta^4 + \ldots\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}\frac{(r+r')^{\frac{5}{2}}}{a}\beta\left\{1 + \frac{3.+1}{4.6}\beta^2 + \frac{3.+1.-1.-3}{4.6.8.10}\beta^4 + \ldots\right\} +$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^5}\frac{(r+r')^{\frac{7}{2}}}{a}\beta\left\{1 + \frac{5.+3}{4.6}\beta^2 + \frac{5.+3.+1.-1}{4.6.8.10}\beta^4 + \ldots\right\} +$$
$$+ \ldots .$$

Ordnet man nach Potenzen von β und setzt der Kürze halber:

$$\gamma = \frac{r+r'}{4a} \tag{19}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{2k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} &= \beta\left\{1 + \tfrac{1}{2}\gamma + \frac{1.3}{2.4}\gamma^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\gamma^3 + \ldots\right\} \\ &- \frac{1}{4.6}\beta^3\left\{1 - \tfrac{3}{2}\gamma - \frac{45}{8}\gamma^2 - \ldots\right\} \\ &- \frac{1.3.5}{4.6.8.10}\beta^5\left\{1 - \frac{3}{10}\gamma + \ldots\right\} \\ &- \frac{1.3.5.7.9}{4.6.8.10.12.14}\beta^7\left\{1 - \ldots\right\}\end{aligned} \tag{20}$$

Man wird leicht bemerken, dass der Coëfficient von β mit $(1-\gamma)^{-\frac{1}{2}}$ identisch ist; setzt man für β den Werth aus 18) ein, so kann man, nachdem man beiderseits mit $(1-\gamma)^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt hat, statt der Gleichung 20) nahe richtig schreiben:

$$2k(t'-t)\left(\frac{1-\gamma}{r+r'}\right)^{\frac{3}{2}} = s\left(\frac{1-\gamma}{r+r'}\right) - \frac{1}{4.6}s^3\left(\frac{1-\gamma}{r+r'}\right)^3 - \frac{1.3.5}{4.6.8.10}s^5\left(\frac{1-\gamma}{r+r'}\right)^5 - \ldots \tag{21}$$

hierbei ist also der Coëfficient von β in der Gleichung 20) vollständig berücksichtigt; für den Coëfficienten von β^3 findet das mit γ multiplicirte Glied noch Berücksichtigung, während in demselben die höheren Potenzen von γ schon andere Coëfficienten erhalten; für die übrigen Potenzen, von β^5 angefangen, finden nur die von γ freien Glieder vollständige Berücksichtigung. Der Ausdruck 21) schliesst sich also dem wahren Werthe innerhalb der oben bezeichneten Vernachlässigungen an. Für die Parabel ist $\gamma = 0$, man hat daher für dieselbe den Ausdruck:

$$\frac{2k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \frac{s}{r+r'} - \frac{1}{4.6}\left(\frac{s}{r+r'}\right)^3 - \frac{1.3.5}{4.6.8.10}\left(\frac{s}{r+r'}\right)^5 - \ldots \tag{22}$$

so dass beide Formelsysteme identisch werden, wenn man nur anstatt $(r+r')$ in der letzten Formel $\frac{r+r'}{1-\gamma}$ setzt. Eine Reihe von der Form 22) ist, wie dies Encke gezeigt hat (vergl. I pag. 101), summirbar, und von demselben in eine Tafel gebracht worden, die mit dem Argumente:

$$\eta = \frac{2k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}}$$

und mit Hilfe der μ-Tafel (Band I Tafel VIII pag. 334) für s den Werth gibt:

$$s = \frac{2k(t'-t)}{\sqrt{r+r'}}\mu .$$

Man wird also die von Encke gegebenen Hilfsmittel hier ohne Weiteres benützen dürfen und nur zu setzen haben:

$$\left.\begin{aligned} \rho + \rho' &= \frac{r + r'}{1 - \frac{r + r'}{4a}} \\ \eta &= \frac{2k(t' - t)}{(\rho + \rho')^{\frac{3}{2}}} \\ s &= \frac{2k(t' - t)}{\sqrt{\rho + \rho'}}\,\mu \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

womit also mit meist hinreichender Näherung die Berechnung der Sehne aus der Lambert'schen Gleichung mit Bequemlichkeit möglich ist. Der Ausdruck wird in jenen Fällen, wo gleichzeitig s und $\frac{1}{a}$ klein sind, sehr genaue Werthe geben.

Man könnte durch Einführung weiterer Transformationen, ohne allzusehr an Bequemlichkeit der Rechnung zu verlieren, die Formeln 23) noch mehr an die strengen Werthe annähern, doch wird in jenen Fällen, wo die Formeln 23) nicht mehr ausreichen sollten, stets die Benützung der Formel 17) hinreichend bequem und sicher sein. Wir wollen diese Formeln durch ein Beispiel erläutern. Es sei $a = 100$, $r = 0.8950000$, $r' = 0.9050000$, $s = 0.10000000$; dann findet sich nach 17) (pag. 468) nach einer strengen 9stelligen Rechnung:

$$\log 2k(t' - t) = 9.1285602\,.$$

Es stellt sich nun die Rechnung nach 23) wie folgt:

$$\begin{aligned} r + r' &= 0.2552725 \\ \log\left(1 - \frac{r + r'}{4a}\right) &= 9.9980413 \\ \rho + \rho' &= 0.2572312 \\ \sqrt{\rho + \rho'} &= 0.1286156 \\ (\rho + \rho')^{\frac{3}{2}} &= 0.3858468 \\ \eta &= 0.055300 \\ \mu &= 0.0000554 \quad \text{(Tafel VIII des ersten Bandes)} \\ 2k(t' - t) : \sqrt{\rho + \rho'} &= 8.9999446 \\ \log s &= 9.0000000\,. \end{aligned}$$

Die Uebereinstimmung mit der ursprünglichen Annahme ist somit eine vollständige.

Die Lambert'sche Gleichung wird in der Folge noch eine wesentliche Verwendung darin finden, dass, wenn die Radienvectoren, die Sehne und die Zwischenzeit gegeben sind, dieselbe zur Bestimmung der grossen Achse verwerthet werden kann; es stellt sich nämlich als höchst zweckmässig heraus, bei nahezu parabolischen Bahnen dieses Element zuerst zu bestimmen; in diesem Falle wird auch die Convergenz der Reihe eine so bedeutende sein, dass man mit den vier ersten Gliedern derselben ausreicht; setzt man der Kürze halber die nunmehr völlig bekannten Grössen:

$$\left.\begin{aligned}
80\left\{k(t'-t)-\tfrac{1}{6}\left[(r+r'+s)^{\frac{3}{2}}\mp(r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}&=A\\
\left\{(r+r'+s)^{\frac{5}{2}}\mp(r+r'-s)^{\frac{5}{2}}\right\}&=B\\
\tfrac{15}{112}\left\{(r+r'+s)^{\frac{7}{2}}\mp(r+r'-s)^{\frac{7}{2}}\right\}&=C\\
\tfrac{25}{1152}\left\{(r+r'+s)^{\frac{9}{2}}\mp(r+r'-s)^{\frac{9}{2}}\right\}&=D\\
\tfrac{175}{45056}\left\{(r+r'+s)^{\frac{11}{2}}\pm(r+r'-s)^{\frac{11}{2}}\right\}&=E
\end{aligned}\right|\qquad 24)$$

so stellt sich die Lambert'sche Gleichung, wie folgt:

$$A = B\cdot\frac{1}{a} + C\cdot\frac{1}{a^2} + D\cdot\frac{1}{a^3} + E\cdot\frac{1}{a^4} + \ldots$$

Setzt man also weiter:

$$\frac{A}{B} = \alpha\,,\quad -\frac{C}{B} = \beta\,,\quad -\frac{D}{B} = \gamma\,,\quad -\frac{E}{B} = \delta\,\ldots \qquad 25)$$

und kehrt die Reihe um, so findet man sofort für $\frac{1}{a}$ den Ausdruck:

$$\frac{1}{a} = \alpha + \alpha^2\beta + \alpha^3\{2\beta^2+\gamma\} + \alpha^4\{5\beta^3+5\beta\gamma+\delta\} + \ldots \qquad 26)$$

Hierbei wird man beachten, dass eine Lösung, die einen genauen Werth für a gibt, in den hier in Betracht kommenden Fällen aus leicht begreiflichen Gründen nicht möglich ist. Sollte dieser Ausdruck sich als nicht ausreichend erweisen, wenn a nicht gross ist, so wird eine mit diesem Näherungswerthe ausgeführte versuchsweise Lösung mit Hilfe der Gleichung 17) alles Erforderliche erreichen lassen.

Schliesslich muss noch erwähnt werden, dass die Differentiation der Lambert'schen Gleichung nach der Zeit auf geschlossene, für die Rechnung bequeme Ausdrücke hinführt, die in der Folge Verwendung finden.

Differentiirt man die Gleichung 9) (pag. 465) nach den mit der Zeit veränderlichen Grössen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
k\,dt &= a^{\frac{3}{2}}\left\{(1-\cos\varepsilon)\,d\varepsilon-(1-\cos\delta)\,d\delta\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon\;d(r+r'+s)-\tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta\;d(r+r'-s)
\end{aligned}$$

oder mit Benützung der in 16) eingeführten Symbole, nämlich:

$$S = \frac{r+r'+s}{4a}\,,\quad D = \frac{r+r'-s}{4a}$$

$$4k\,dt = \frac{\sqrt{r+r'+s}}{\sqrt{1-S}}\,d(r+r'+s) \mp \frac{\sqrt{r+r'-s}}{\sqrt{1-D}}\,d(r+r'-s)\,, \qquad 27)$$

wobei die Zeichenunsicherheit, die durch die Einführung der Wurzelgrössen entsteht, den früheren Auseinandersetzungen gemäss zu beheben ist. In dem Ausdrucke 27) sind alle Wurzeln ihrem absoluten, positiven Werthe nach zu nehmen; das obere Zeichen gilt für heliocentrische Bewegungen, die kleiner sind als 180°, das untere für jene, die zwischen 180° und 360° liegen.

§ 2. Ableitung der Elemente aus zwei heliocentrischen Orten.

Die Ableitung der Elemente aus zwei heliocentrischen Orten ist der Hauptsache nach bereits im ersten Bande dieses Werkes (I pag. 221 und 226) erledigt worden, nur wird der Umstand, dass bei der hier in Frage kommenden Lösung häufig sehr grosse heliocentrische Bogen in Betracht kommen, während dort hauptsächlich die Fälle der ersten Bahnbestimmung mit mässigen Bogen berücksichtigt wurden, gewisse Aenderungen bedingen; ausserdem werde ich hier für nahezu parabolische Bahnen völlig andere Vorschriften angeben. Obgleich die im ersten Bande gegebenen Methoden auch hier in der Regel eine sehr bequeme Anwendung gestatten, da selbst bei sehr grossen heliocentrischen Bogen die Grösse $x = \frac{m}{\eta^2} - l$ klein bleibt, so bedingt doch häufig der Umstand, dass die zur bequemen Lösung der Aufgabe nöthige Tafel IX des ersten Bandes oft nicht ausreicht, den Nachtheil, dass die cubische Gleichung:

$$h = \frac{(\eta - 1)\eta^2}{\eta + \frac{1}{9}}$$

in diesem Falle ohne Zuhilfenahme der oben genannten Tafel gelöst werden muss.

Zunächst wird man aus den beiden heliocentrischen Orten die Bahnlage ableiten; sind l und l' die beiden heliocentrischen Längen, b und b' die beiden heliocentrischen Breiten, so ist nach den bekannten Formeln (vergl. I pag. 142), die Neigung i und der Knoten Ω bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} i \sin(l - \Omega) &= \operatorname{tang} b \\ \operatorname{tang} i \cos(l - \Omega) &= \frac{\operatorname{tang} b' - \operatorname{tang} b \cos(l' - l)}{\sin(l' - l)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{I)}$$

wobei i im ersten Quadranten anzunehmen, also $\operatorname{tang} i$ positiv ist bei directer Bewegung, im zweiten Quadranten dagegen (also $\operatorname{tang} i$ negativ) bei retrograder Bewegung. Die Argumente der Breite u und u' finden unter allen Umständen eine sichere Bestimmung durch:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} u &= \frac{\sin(l - \Omega) \cos i + \operatorname{tg} b \sin i}{\cos(l - \Omega)} \\ \operatorname{tang} u' &= \frac{\sin(l' - \Omega) \cos i + \operatorname{tg} b' \sin i}{\cos(l' - \Omega)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{II)}$$

Der Quadrant, in welchem u zu nehmen ist, bestimmt sich leicht nach der Regel, dass der Sinus das Zeichen des Zählers, der Cosinus das Zeichen des Nenners hat.

Die Rechnung nach dieser Formel ist in der That nicht unbequem, da der Additionslogarithmus für beide Fälle gleich ist; es ist nämlich das Argument für denselben entweder $\operatorname{tang} i^2$ oder $\operatorname{cotg} i^2$. Die Bestimmung der Grösse f kann zur Controle leicht direct aus den heliocentrischen Coordinaten erhalten werden. Aus der Relation:

$$\cos 2f = \sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos(l' - l)$$

ergeben sich leicht folgende Ausdrücke für die Berechnung von f:

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(l'-l)\sqrt{\cos b\cos b'} &= p\sin P\\
\sin\tfrac{1}{2}(b-b') &= p\cos P\\
\cos\tfrac{1}{2}(l'-l)\sqrt{\cos b\cos b'} &= q\sin Q\\
\sin\tfrac{1}{2}(b'+b) &= q\cos Q\\
\operatorname{tang} f &= \pm\frac{p}{q}\,.
\end{aligned}\right\}\quad \text{III}a)
$$

Bei der Ermittelung von Bahnen mit nahezu parabolischem Charakter wird man ausser den Radienvectoren r und r' auch noch den Werth der Sehne kennen, welche die Endpunkte der Radienvectoren verbindet; dann wird man $\operatorname{tang} f$ einfacher rechnen können (vergl. I pag. 143) nach:

$$
\left.\begin{aligned}
\Sigma &= \tfrac{1}{2}(r+r'+s)\\
\operatorname{tang} f &= \pm\sqrt{\frac{\left(1-\frac{r}{\Sigma}\right)\left(1-\frac{r'}{\Sigma}\right)}{\left(1-\frac{s}{\Sigma}\right)}}
\end{aligned}\right\}\quad \text{III}aa)
$$

wobei die Formeln so angesetzt sind, dass dieselben sich bei der Anwendung von Subtractionslogarithmen besonders bequem gestalten, doch ist die erste Form sicherer, wenn $2f$ nahe an 180° liegt.

Ist $(t'-t)$ die Zwischenzeit in Sonnentagen, k die Constante des Sonnensystemes (I pag. 45), so wird sich nunmehr die Rechnung verschieden gestalten, je nach dem Charakter der Bahnen. Für Bahnen mit mässiger Excentricität wird man rechnen:

$$
\left.\begin{aligned}
\tau &= k(t'-t)\\
m &= \frac{\tau^2}{\{2\cos f\sqrt{rr'}\}^3}\\
\operatorname{tang}(45+\omega) &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}}\\
l &= \frac{\sin\tfrac{1}{2}f^2+\operatorname{tg}2\omega^2}{\cos f}\,.
\end{aligned}\right\}\quad \text{IV}a)
$$

Ist nun der heliocentrische Bogen mässig, so dass die Differenz der excentrischen Anomalien $(2g)$ 60° nicht wesentlich überschreitet, so wird man, indem ξ aus der Tafel X des ersten Bandes mit dem aus genäherten Elementen (sind diese nicht vorhanden, so wird man in der ersten Näherung $\xi = 0$ nehmen) abzuleitenden Argumente:

$$x = \sin\tfrac{1}{2}g^2$$

entlehnt wird, rechnen:

$$
\left.\begin{aligned}
h &= \frac{m}{\tfrac{5}{6}+l+\xi}\\
x &= \frac{m}{\eta^2}-l\\
\sin\tfrac{1}{2}g^2 &= x
\end{aligned}\right\}\quad \text{V}a)
$$

wobei $\log\eta^2$ mit dem Argumente h aus der Tafel IX des ersten Bandes (vergl. I pag. 195) zu entnehmen ist; mit dem so erhaltenen Werthe von x wird nöthigenfalls

die Rechnung zu wiederholen sein, wenn eine Aenderung von x gegen die ursprüngliche Annahme eine Aenderung in ξ bedingen sollte.

Ist der heliocentrische Bogen und somit in dem vorgelegten Falle auch die Differenz der excentrischen Anomalien gross, so wird man mit Hilfe genäherter Werthe von g (vergl. I pag. 191) die folgenden Gleichungen durch Versuche lösen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} \\ \beta &= l + \sin\tfrac{1}{2}g^2 \\ m &= (\alpha\beta + 1)^2\beta\,; \end{aligned}\right\} \text{V}aa)$$

ist der Werth von g ermittelt, welcher der dritten Gleichung völlig genügt, so rechnet man noch:

$$\eta = \alpha\beta + 1$$

welche Grösse bei den folgenden Rechnungen als Controle benützt werden kann; die eben hingeschriebenen Formeln können indess, wenn die heliocentrische Bewegung nahe 180° ist, in der Anwendung sehr unsicher werden. Wenn nun dieser Fall auch in den hier in Betracht kommenden Fällen aus anderen Gründen ausgeschlossen ist, so dürfte es doch angenehm sein, hier diejenigen Abänderungen kennen zu lernen, die man in einem solchen Falle eintreten lassen muss. Die Rechnung der Grösse α bleibt unverändert. Multiplicirt man die letzte Gleichung in Vaa) beiderseits mit $\cos f^3$, so erhält man:

$$m\cos f^3 = \{\alpha\beta\cos f + \cos f\}^2\,\beta\cos f\,;$$

setzt man also, wenn man auf die Bedeutung der Grössen m und l zurückgeht (vergl. I pag. 189):

$$m' = \frac{\tau^2}{\{2\sqrt{rr'}\}^3}$$

$$\beta' = \sin\tfrac{1}{2}f^2 + \tang 2\omega^2 + \sin\tfrac{1}{2}g^2\cos f\,.$$

so wird die durch Versuche aufzulösende Gleichung die Form haben:

$$m' = (\alpha\beta' + \cos f)^2\beta'$$

die nunmehr von dem bemerkten Nachtheile frei ist. Ist also g durch eine der eben angeführten Methoden bekannt, so stellt sich die weitere Rechnung der Elemente wie folgt (vergl. I pag. 218 u. f. f.):

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(F-G)\cos\tfrac{1}{2}g\,(\gamma)^2 &= \cos\tfrac{1}{2}(f+g)\tang 2\omega \\ \cos\tfrac{1}{2}(F-G)\cos\tfrac{1}{2}g\,(\gamma)^2 &= \sin\tfrac{1}{2}(f+g)\sec 2\omega \\ \sin\tfrac{1}{2}(F+G)\sin\tfrac{1}{2}g\,(\gamma)^2 &= \cos\tfrac{1}{2}(f-g)\tang 2\omega \\ \cos\tfrac{1}{2}(F+G)\sin\tfrac{1}{2}g\,(\gamma)^2 &= \sin\tfrac{1}{2}(f-g)\sec 2\omega \\ \text{Probe: } (\gamma)^2 &= \frac{\sqrt{2m\cos f}}{\eta} \end{aligned}\right\} \text{VI}a$$

$$\left.\begin{aligned} v' &= F + f\,, \qquad E' = G + g \\ v &= F - f\,, \qquad E = G - g \\ x &= u + \Omega - v = u' + \Omega - v' \\ \text{Probe: } \tang\tfrac{1}{2}v &= \tang\tfrac{1}{2}E\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}g) \\ \tang\tfrac{1}{2}v' &= \tang\tfrac{1}{2}E'\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}g) \end{aligned}\right\} \text{VII}a$$

$$\left.\begin{aligned} e'' &= \sin\varphi : \sin 1'' \\ M &= E - e'' \sin E \\ M' &= E' - e'' \sin E' \\ \mu &= \frac{M' - M}{t' - t} \\ a^{\frac{3}{2}} &= \frac{k''}{\mu} \\ \log k'' &= 3.5500066 \\ \text{Probe} : p &= \left(\frac{\eta\, r\, r' \sin 2f}{\tau}\right)^2 \\ a &= p \sec^2\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII}a$$

wobei aber in der Regel der für a aus der Probe erhaltene Werth minder genau ist.

Für nahezu parabolische Bahnen setze ich vorerst voraus, dass der Werth der halben grossen Achse a bekannt sei, eine Annahme, die in diesen Fällen erlaubt ist; denn entweder ist in einer der folgenden Methoden schon eine Annahme über diese Grösse gemacht, oder man kann dieselbe leicht durch die Gleichung 26) (pag. 471) erlangen; es stellt sich nunmehr die Aufgabe, alle Elemente direct aus den beiden heliocentrischen Orten und dem bekannten Werthe von a zu ermitteln.

Im Bande I findet sich auf pag. 190 eine zwischen den Gleichungen 5) und 6) stehende Relation angeführt, die nach einer einfachen Umsetzung lautet:

$$2a \sin g^2 = r + r' - 2 \cos g \cos f \sqrt{r r'}\,, \qquad 1)$$

aus dieser Gleichung kann offenbar $\sin g^2$ bestimmt werden. Setzt man:

$$z = a \sin g^2\,, \qquad 2)$$

so wird z unter allen Umständen eine positive Grösse sein, da für hyperbolische Bahnen a und $\sin g^2$ gleichzeitig negativ sind. Man erhält aus 1) zunächst durch Quadrirung:

$$\{2z - (r + r')\}^2 = 4 \cos f^2 r r' \left\{1 - \frac{z}{a}\right\}$$

oder

$$z^2 - \left(r + r' - \frac{r r' \cos f^2}{a}\right) z = -\tfrac{1}{4}\{(r + r')^2 - 4 r r' \cos f^2\}\,.$$

Beachtet man, dass, wenn wie oben mit s die Sehne zwischen den beiden heliocentrischen Orten bezeichnet wird, der Klammerausdruck rechts vom Gleichheitszeichen mit s^2 identisch wird, da ja

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos 2f$$

ist, so gibt, wenn man zur Abkürzung

$$\zeta = (r + r') - \frac{r r' \cos f^2}{a} \qquad 3)$$

setzt, die Lösung der quadratischen Gleichung für z sofort den Werth

$$z = \tfrac{1}{2}\zeta \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta^2 - s^2}$$

Vor Allem wird man bemerken, dass eine doppelte Lösung für z stattfindet; das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere, wenn dieselbe grösser als 180° ist, eine Entscheidung, die sich sofort durch die

Gleichung 1) rechtfertigt, unter dem Vorbehalte, dass $\cos g$ als eine stets positive Grösse angesehen wird, was in den hier in Betracht kommenden Fällen, wo g stets ein sehr kleiner Bogen sein wird, zutrifft. Die Berechnung von z vereinfacht sich sehr durch die folgende offenkundige Transformation:

$$\left.\begin{array}{ll} \zeta = (r + r') - \frac{r r' \cos f^2}{a} & \\ \frac{s}{\zeta} = \sin \alpha & \\ 2f < 180^0 & 2f > 180^0 \\ z = \zeta \sin \frac{1}{2} \alpha^2 & z = \zeta \cos \frac{1}{2} \alpha^2 \,. \end{array}\right\} \quad \text{IV}b)$$

Diese Formeln können in jenen Fällen, wo $2f$ nahe an 180^0 liegt, besonders unsicher werden, was sich durch die Einführung der Sehne s erklärt, die in solchen Fällen kein sicheres Maass für den Winkel $2f$ abgibt. Wenn auch, wie schon oben bemerkt wurde, diese Fälle sich aus anderen Gründen von der Betrachtung ausschliessen, so wird es doch erwünscht sein, sofort jene Abänderungen angegeben zu finden, die man in solchen Fällen eintreten lassen muss.

Behält man den Winkel f, der aus II) und III) (pag. 472, 473) stets mit genügender Sicherheit resultirt, in den Gleichungen bei, so findet sich leicht:

$$z = \frac{1}{2} \zeta - \cos f \sqrt{r r' \left\{ 1 - \frac{r + r'}{2a} + \frac{r r' \cos f^2}{4 a^2} \right\}} \qquad \text{IV}bb)$$

wobei der Wurzelausdruck stets positiv zu nehmen ist, da $\cos f$ selbst die Entscheidung über das Zeichen bringt; da die Berechnung von z nach dieser zweiten Form nicht wesentlich erschwert ist, so dürfte sich die Rechnung nach derselben zur Controle empfehlen.

Es hätte nun keine Schwierigkeit, die Grösse $x = \sin \frac{1}{2} g^2$ als Argument für die ξ-Tafel direct zu erhalten, und von da ab auf die Berechnung der Formeln Va) einzugehen, wenn nicht ein anderer Weg den Vorzug verdienen würde; ich werde demnach nur kurz auf die Ableitung von x aus z hinweisen.

Es wird sein:

$$\sin g^2 = 4 \sin \tfrac{1}{2} g^2 \cos \tfrac{1}{2} g^2 \,;$$

man hat also mit Eliminirung des Imaginären sofort:

$$\frac{z}{a} = 4x (1 - x)$$

wo x leicht durch eine quadratische Gleichung aus z bestimmt werden könnte, doch wird die indirecte Lösung in der Form:

$$x = \frac{z}{4a(1-x)}$$

bei der vorausgesetzten Kleinheit von x rascher und bequemer das Ziel erreichen lassen.

Ist z ermittelt, so kann die Bestimmung der übrigen Elemente in der folgenden Weise erlangt werden. Aus den Gleichungen (I pag. 481):

$$\sqrt{r}\,\cos\tfrac{1}{2}v = \sqrt{a(1-e)}\,\cos\tfrac{1}{2}E$$
$$\sqrt{r}\,\sin\tfrac{1}{2}v = \sqrt{a(1+e)}\,\sin\tfrac{1}{2}E$$
$$\sqrt{r'}\,\cos\tfrac{1}{2}v' = \sqrt{a(1-e)}\,\cos\tfrac{1}{2}E'$$
$$\sqrt{r'}\,\sin\tfrac{1}{2}v' = \sqrt{a(1+e)}\,\sin\tfrac{1}{2}E'$$

folgt, wenn man das Product der zweiten und dritten Gleichung von dem Producte der ersten und vierten abzieht, und wie früher:

$$2f = v' - v$$
$$2g = E' - E$$

setzt, sofort:

$$a\sin g\sqrt{1-e^2} = \sqrt{rr'}\,\sin f\,; \qquad 6)$$

berücksichtigt man, dass:

$$p = a\cos\varphi^2 = a(1-e^2)$$

ist, so resultirt:

$$p = \frac{rr'\sin f^2}{z}\,. \qquad \text{V}b)$$

Auch die Bestimmung der Excentricität ist jetzt unmittelbar möglich: denn man erhält leicht aus 6):

a positiv:	a negativ:
$\frac{\sin f\sqrt{rr'}}{\sqrt{za}} = \sin\gamma$	$\frac{\sin f\sqrt{rr'}}{\sqrt{-za}} = \operatorname{tang}\gamma'$
$e = \cos\gamma$	$e = \sec\gamma'$
$1 - e = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$	$e - 1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma'^2\sec\gamma'$
$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma^2$	$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e} = -\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\gamma'\,.$

7)

wobei die Berechnung des Unterschiedes von e gegen die Einheit und des Ausdruckes für ε deshalb besonders angeführt ist, weil die genaue Kenntniss dieser Werthe bisweilen erwünscht sein kann; doch werden sich leicht Formeln finden, durch welche die Rechnung noch bequemer gestaltet wird.

Nach der bekannten Polargleichung der Kegelschnitte ist:

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos v}{p}$$
$$\frac{1}{r'} = \frac{1+e\cos v'}{p}\,;$$

wenn man also zur Abkürzung:

$$\tfrac{1}{2}(v+v') = F$$

setzt, so erhält man durch Addition und Subtraction:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} &= \frac{2e}{p}\sin f\sin F\\ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} &= \frac{2}{p} + \frac{2e}{p}\cos f\cos F\,;\end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

ersetzt man den Parameter in der ersten Gleichung durch den Werth aus V b), so findet sich:

$$2ez \sin F = (r' - r) \sin f\,; \tag{9}$$

multiplicirt man die zweite Gleichung in 8) beiderseits mit $\cos f$, so wird zunächst

$$\frac{r + r'}{rr'} \cos f = \frac{2 \cos f}{p} + \frac{2e \cos F}{p} - \frac{2e}{p} \sin f^2 \cos F\,;$$

ersetzt man im letzten Gliede $\frac{\sin f^2}{p}$ nach der Gleichung V b) durch $\frac{z}{rr'}$ und multiplicirt beiderseits mit rr', so findet sich weiter:

$$2ez \cos F = -(r + r') \cos f + \frac{2(\cos f + e \cos F)\, rr'}{p}\,;$$

nun ist aber nach I pag. 188 Gleichung 2):

$$\cos f + e \cos F = \frac{p}{\sqrt{rr'}} \cos g\,;$$

wenn man also, um Imaginäres zu vermeiden

$$\cos g = \sqrt{1 - \frac{z}{a}}$$

setzt, so erhält man schliesslich:

$$2ez \cos F = 2 \sqrt{rr' \left(1 - \frac{z}{a}\right)} - (r + r') \cos f\,. \tag{10}$$

Man hat demnach zur Berechnung von F und $2ez$, welche letztere Grösse, da sie stets positiv ist, die Bestimmung des Quadranten von F ermöglicht, und zudem, da z bekannt, eine Bestimmung der Grösse e ergibt, die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
2ez \sin F &= (r' - r) \sin f \\
2ez \cos F &= 2 \sqrt{rr' \left(1 - \frac{z}{a}\right)} - (r + r') \cos f \\
v &= F - f \\
v' &= F + f \\
q &= \frac{p}{1 + e} \\
1 - e &= \frac{q}{a} \\
\pi &= u + \Omega - v = u' + \Omega - v'
\end{aligned}\right\} \quad \text{VI}b)$$

Aus v und v' kann die Perihelzeit nach irgend einer für nahezu parabolische Bahnen I pag. 55 f. f. geltenden Methode ermittelt werden; doch werden geeignet construirte Hilfstafeln die Rechnung wesentlich erleichtern. Führt man die I pag. 60 angezeigte Integration durch Reihen aus, so erhält man sofort, wenn man:

$$\theta = \frac{1 - e}{1 + e} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^2$$

setzt, und die Zeit vom Perihel aus zählt:

$$\frac{kt\sqrt{1 + e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \left\{1 - \tfrac{2}{3}\theta + \tfrac{3}{5}\theta^2 - \tfrac{4}{7}\theta^3 + \ldots\right\} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^3 \left\{1 - \tfrac{6}{5}\theta + \tfrac{9}{7}\theta^2 - \tfrac{12}{9}\theta^3 + \ldots\right\},$$

Diese Reihen können mit dem Argumente θ leicht in Tafeln gebracht werden. Herr F. K. Ginzel hat eine solche Tafel sorgfältig neunstellig berechnet, und ich theile dieselbe auf 7 Stellen abgekürzt als Tafel XVIII mit; diese Tafel gibt mit dem Argumente θ die Werthe der obigen Reihen, noch mit dem Factor $\frac{2}{k}$ multiplicirt, so dass

$$\frac{t\sqrt{1+e}}{q^{\frac{3}{2}}} = P_1 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v + P_3 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^3$$

ist, wobei für k der bekannte Gauss'sche Werth benützt wurde.

Man hat daher zur Bestimmung der Perihelzeit T zunächst:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^2 ;$$

zu bestimmen und die Tafel XVIII gibt mit θ als Argument die Werthe von $\log P_1$ und $\log P_3$; dann ist:

$$T = t - \frac{q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+e}} \left\{ P_1 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v + P_3 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^3 \right\} . \qquad \text{VII}b$$

Diese Formel muss, wenn dieselbe auch auf v' angewendet wird, innerhalb der Unsicherheit der Rechnung denselben Werth für T finden lassen, welche werthvolle Controle auszuführen niemals unterlassen werden sollte.

Man wird bemerken, dass man die eben gegebenen Formelsysteme wohl auch für die Rechnung parabolischer Elemente benützen kann; es ergeben sich hierbei einige interessante Relationen. Zunächst ist offenbar (vergl. I pag. 475):

$$2z = r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f ,$$

und hiermit der Perihelabstand und das Mittel der wahren Anomalien:

$$q = \frac{rr' \sin f^2}{2z}$$

$$\operatorname{tg} F = \frac{(r'-r) \sin f}{2\sqrt{rr'} - (r+r') \cos f} ,$$

wobei der Quadrant von F wieder so zu wählen ist, dass $\sin F$ das Zeichen des Zählers, $\cos F$ das Zeichen des Nenners erhält. Doch wird man für die Parabel auch die in I pag. 143 angeführten Methoden zur Ermittelung der Elemente mit Vortheil verwenden können.

Schliesslich möge noch der Zusammenhang der Grösse z mit dem in den Gauss'schen Entwickelungen eine so wichtige Rolle spielenden Verhältnisse des Sectors zum Dreiecke, η angeführt werden; es ist nach I pag. 188:

$$\eta^2 = \frac{\tau^2 p}{4 (rr')^2 \sin f^2 \cos f^2} ;$$

führt man für den Parameter den Werth aus Vb (pag. 477) ein, so findet sich sofort:

$$\eta = \frac{\tau}{2 \cos f \sqrt{rr' z}} .$$

§ 3. Variation der Distanzen.

Es wird nicht immer nöthig sein, die in dem Abschnitte B vorgetragenen Methoden, die den Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit strenger Berücksichtigung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermöglichen, anzuwenden. Man wird sich häufig genug mit solchen Elementen begnügen können, die nur näherungsweise den durch die Methode der kleinsten Quadrate gestellten Forderungen entsprechen. Eine derartige Methode ist bereits im ersten Bande (I pag. 146 § 12) erwähnt worden; ich werde mich aber darauf beschränken, nur wenige Methoden vorzunehmen, die als sicher und bequem empfohlen werden können und die sich sowohl vom theoretischen, als auch vom practischen Standpunkte bewährt haben.

Es seien die vorhandenen Beobachtungen eines Himmelskörpers in eine entsprechende Anzahl von Normalorten zusammengefasst; man wähle zwei der Normalorte unter Berücksichtigung gewisser weiter unten näher zu erörternder Umstände; diese zwei Orte wird man durch ein System von Elementen vollständig darstellen, während an die übrigen Orte nur ein Anschluss nach den Principien der Wahrscheinlichkeit erreicht werden soll. Dieser Forderung wird am bequemsten entsprochen werden, wenn man vorerst ein Elementensystem herstellt, welches den zwei gewählten Orten und zugleich denjenigen geocentrischen Distanzen entspricht, die sich aus den besten vorhandenen Näherungselementen für diese beiden Orte ergeben. Seien diese letzteren ϱ und ϱ', so wird man zunächst die geocentrischen Coordinaten des Himmelskörpers rechnen nach:

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \lambda \cos \beta\,, & \xi' &= \varrho' \cos \lambda' \cos \beta' \\ \eta &= \varrho \sin \lambda \cos \beta\,, & \eta' &= \varrho' \sin \lambda' \cos \beta' \\ \zeta &= \varrho \sin \beta\,, & \zeta' &= \varrho' \sin \beta'\,. \end{aligned}$$

wobei es dem Ermessen des Rechners überlassen bleibt, welches Coordinatensystem er der Rechnung zu Grunde legen will; es wird sich wohl empfehlen, das System des Aequators oder der Ekliptik als maassgebend zu betrachten, und namentlich wird das erstere den Vorzug verdienen, insbesondere, wenn die Anzahl der Normalorte gross ist. Nun macht man den Uebergang auf die heliocentrichen Orte mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} r \cos l \cos b &= \xi - X\,, & r' \cos l' \cos b' &= \xi' - X' \\ r \sin l \cos b &= \eta - Y\,, & r' \sin l' \cos b' &= \eta' - Y' \\ r \sin b &= \zeta - Z\,, & r' \sin b' &= \zeta' - Z'\,, \end{aligned}$$

in welchen Ausdrücken die grossen römischen Buchstaben die geocentrischen Sonnencoordinaten bezogen auf die gewählte Fundamentalebene vorstellen. Man erhält so zwei heliocentrische Orte und die zugehörigen Radienvectoren, aus welchen in Verbindung mit der bekannten Zwischenzeit nach den angegebenen Methoden leicht Elemente ermittelt werden können. Diese so erhaltenen Elemente haben die Eigenschaft, dass dieselben den zwei ausgewählten Normalorten völlig genügen und es

wird sich stets empfehlen, zur Controle der durchgeführten Rechnungen die Darstellung der Orte durch die gefundenen Elemente zu rechnen; man muss innerhalb der Unsicherheit der Rechnung die der Berechnung zu Grunde gelegten Werthe ϱ, λ, β und ϱ', λ', β' wieder erhalten. Ueberdiess rechnet man die geocentrischen Orte, welche diese Elemente für die übrigen Normalorte finden lassen. Es werden sich im Allgemeinen Unterschiede zwischen den Normalorten und den so gerechneten geocentrischen Orten ergeben, die mit $\partial\lambda_1$, $\partial\lambda_2$, ... $\partial\beta_1$, $\partial\beta_2$ ... bezeichnet, und im Sinne: Beobachtung — Rechnung angesetzt werden sollen; ausserdem ist zu beachten, dass man für die Rectascensionen, eventuell Längen, die gefundenen Unterschiede durch Multiplication mit dem Cosinus der Declination, eventuell der Breite, auf den Parallel zu reduciren hätte. Es wird übrigens auf diesen Umstand später gehörig Rücksicht genommen werden.

Die aus diesen Elementen gefundenen geocentrischen Coordinaten selbst sollen mit $A_1{}^0$, $A_2{}^0$, ... $B_1{}^0$, $B_2{}^0$ ... bezeichnet werden, wobei also der untere Index auf den Normalort, der obere auf die Hypothese hinweist, wenn man die zu Grunde gelegten geocentrischen Distanzen als hypothetische Annahmen gelten lässt, was sie thatsächlich sind.

Die diesem ersten Elementensysteme zu Grunde gelegten geocentrischen Entfernungen werden von dem wahren Werthe mehr oder weniger abweichen; denkt man sich demnach die erste Distanz mit einem von der Einheit wenig verschiedenen Factor multiplicirt, so wird dies bedingen, dass der zu Grunde gelegte Logarithmus von ϱ einen etwas veränderten Werth erhält; man wird also in einer zweiten Hypothese annehmen:

für den Logarithmus der ersten geocentrischen Entfernung $\log \varrho + \partial x$,
» » » » zweiten » $\log \varrho'$,

d. h. für ϱ' den Werth der ersten Hypothese verwenden. Rechnet man unter diesen Annahmen wieder ein Elementensystem, und mit diesem die Darstellung der Orte, so werden sich für die übrigen Normalorte die geocentrischen Coordinaten:

$$A_1{}^1,\ A_2{}^1\ \ldots\ B_1{}^1,\ B_2{}^1\ \ldots$$

ergeben; bildet man nun die Unterschiede

$$\begin{array}{c} A_1{}^1 - A_1{}^0 \\ A_2{}^1 - A_2{}^0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ B_1{}^1 - B_1{}^0 \\ B_2{}^1 - B_2{}^0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \end{array}$$

so wird man, wenn ∂x nicht allzu gross genommen wurde, annehmen dürfen, dass beispielsweise die Grösse:

$$\frac{A_1{}^1 - A_1{}^0}{\partial x}$$

den Differentialquotienten der ersten geocentrischen Rectascension (Länge) in Bezug auf die Variation des Logarithmus der ersten geocentrischen Distanz mit ge-

nügender Annäherung darstellt, wobei als Einheit für ∂x die oben angenommene Aenderung zu betrachten ist. Man hat hiermit auf empirischem Wege die Differentialquotienten zwischen den geocentrischen polaren Coordinaten und dem Logarithmus der ersten geocentrischen Distanz hergestellt. Es soll daher mit Rücksicht auf die angenommene Einheit geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1^{1} - A_1^{0} = \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x}, & B_1^{1} - B_1^{0} = \dfrac{\partial \beta_1}{\partial x} \\ A_2^{1} - A_2^{0} = \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial x}, & B_2^{1} - B_2^{0} = \dfrac{\partial \beta_2}{\partial x} \\ A_3^{1} - A_3^{0} = \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial x}, & B_3^{1} - B_3^{0} = \dfrac{\partial \beta_3}{\partial x} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}\right\} \quad A)$$

Diese empirische Bestimmung der Differentialquotienten weist bereits auf die nothwendigen Beschränkungen hin, die man bei der Wahl von ∂x zu beachten hat. Wählt man ∂x sehr klein, so wird man sich allerdings der theoretischen Forderung des Differentialquotienten sehr annähern, dagegen werden aber die Differenzen für die einzelnen Orte berechnet nach den beiden Systemen sehr gering werden und dieselben werden wesentlich kleiner ausfallen, als die Variationen der Distanzen, namentlich in jenen Fällen, wo man diese Methode gewöhnlich anwendet, d. h. in den Fällen verhältnissmässig kleiner heliocentrischer Bogen.

Wählt man also ∂x zu klein, so werden diese Differenzen allzusehr von den unvermeidlichen Fehlern der Rechnung beeinflusst erscheinen, und somit können in diesem Falle die gefundenen Werthe der Differentialquotienten völlig illusorisch werden. Nimmt man dagegen für ∂x grosse Werthe an, so werden die dadurch bedingten Aenderungen in den geocentrischen Orten im Allgemeinen beträchtlich werden, es wird daher von dieser Seite die Sicherheit der Bestimmung wenig zu wünschen übrig lassen, dagegen entfernt man sich beträchtlich von der theoretischen Forderung des Differentialquotienten. Man kann aber in Bezug auf die obere Grenze jedenfalls sehr weit gehen, ohne die letztere Forderung allzusehr zu schädigen. Bei kleinen Planeten etwa, für welche die Elemente aus einer Opposition abgeleitet werden sollen, wird man ohne Bedenken für ∂x eine, ja auch zwei Einheiten der dritten Decimale des $\log \varrho$ annehmen dürfen, ohne den vorausgesetzten linearen Charakter des Differentialquotienten allzusehr zu benachtheiligen. Bei Kometen, die sehr verschiedene Verhältnisse bieten, lässt sich im Allgemeinen diesfalls keine bestimmte Annahme machen; nur so viel kann man etwa bemerken, dass man die Aenderungen wohl immer grösser annehmen soll, als die zu erwartenden Correctionen voraussichtlich betragen werden; doch bedarf es zur Abschätzung der letzteren einer durch zahlreiche Erfahrungen erlangten Uebung, die unter Umständen wohl auch nicht immer ausreicht. Man kann als allgemeine Regel indessen festhalten, die Aenderungen lieber zu gross, als zu klein anzunehmen.

Führt man nun eine dritte Hypothese durch, indem man:

für den Logarithmus der ersten geocentrischen Entfernung $\log \varrho$

" " " zweiten " " $\log \varrho' + \partial y$

annimmt, wobei für ∂y dieselben Bemerkungen wie oben gelten, so gelangt man zu einem dritten Elementensysteme, welches für die übrigen, dieser Rechnung nicht zu Grunde gelegten Orte, die geocentrischen Coordinaten:

$$A_1^2,\ A_2^2,\ \ldots\ B_1^2,\ B_2^2,\ \ldots$$

finden lassen wird; man erhält also wie oben:

$$\left.\begin{array}{ll}
A_1^2 - A_1^0 = \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial y}, & B_1^2 - B_1^0 = \dfrac{\partial \beta_1}{\partial y} \\
A_2^2 - A_2^0 = \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial y}, & B_2^2 - B_2^0 = \dfrac{\partial \beta_2}{\partial y} \\
A_3^2 - A_3^0 = \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial y}, & B_3^2 - B_3^0 = \dfrac{\partial \beta_3}{\partial y} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}\right\} \quad B)$$

und hat daher für die Bestimmung der Unbekannten Δx und Δy aus A) und B) die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\partial \lambda_1 = \left(\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\dfrac{d \lambda_1}{\partial y}\right) \Delta y \\
\partial \lambda_2 = \left(\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right) \Delta y \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\partial \beta_1 = \left(\dfrac{\partial \beta_1}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\dfrac{\partial \beta_1}{\partial y}\right) \Delta y \\
\partial \beta_2 = \left(\dfrac{\partial \beta_2}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\dfrac{\partial \beta_2}{\partial y}\right) \Delta y
\end{array}\right| \quad C)$$

in welchen Gleichungen die partiellen Differentialquotienten mit Rücksicht auf die Gleichungen A) und B) bekannte Grössen sind. Ehe man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate auflöst, wird man aber die ersteren die zu den Rectascensionen (Längen) gehören, mit denen der zweiten Gruppe homogen machen, indem man dieselben durch die Multiplication mit dem Cosinus der Declination (Breite) auf den Parallel reducirt. Haben die Gleichungen selbst verschiedene Gewichte, so wird diese Multiplication mit der Quadratwurzel der Gewichte vereinigt durchgeführt werden können.

Man erlangt dann durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von Δx und Δy, welche beziehungsweise an die ursprünglichen Werthe von $\log \varrho$ und $\log \varrho'$ angebracht, die nunmehr definitiven Werthe von $\log \varrho$ und $\log \varrho'$ geben. Mit Zugrundelegung dieser so verbesserten Distanzen und der beiden zugehörigen Normalorte ist es nun leicht, die definitiven Elemente zu rechnen. Der sonst häufig zu findende Vorschlag, dieses neue Elementensystem durch Interpolation zwischen den vorigen drei Systemen abzuleiten, scheint in denjenigen Fällen, für welche diese Methode gewöhnlich in Anwendung kommt, aus leicht begreiflichen Gründen nicht empfehlenswerth zu sein, weil die Elemente bei kleinen heliocentrischen Bogen vielfach grössere Aenderungen erfahren, als die eingeführten Variationen ∂x und ∂y, und demnach der lineare Charakter leicht verloren geht; wendet man aber diese

Methode an, wenn grosse heliocentrische Bogen zur Verfügung stehen und die Aenderungen in den Elementen gering sind, so wird man wohl das letzt erwähnte Verfahren einschlagen können. Bezeichnet man etwa mit E_0, E_1, E_2 die beziehungsweise in der ersten, zweiten und dritten Hypothese gefundenen Werthe für irgend eines der Elemente, so wird der neue, der vierten Hypothese entsprechende Werth E dieses Elementes gegeben sein durch:

$$E = E_0 + (E_1 - E_0)\,\Delta x + (E_2 - E_0)\,\Delta y\,,$$

wenn man durch Δx und Δy die durch die obigen Gleichungen bestimmten Werthe in Einheiten der angenommenen Aenderungen δx und δy darstellt.

Bei der Auswahl der zwei der Rechnung zu Grunde zu legenden Orte muss man bedacht sein, dieselben nicht allzu nahe an einander zu wählen, da sonst die kleinen, den Orten anhaftenden Fehler allzu nachtheilig hervortreten würden. Man wird daher, wenn es nur irgend möglich ist, die äussersten Orte als diejenigen annehmen, welche vollkommen dargestellt werden sollen. Doch wird man bisweilen von dieser Bestimmung absehen müssen, da in der Regel der erste und letzte Ort in Folge der hierbei obwaltenden Beobachtungsverhältnisse wesentlich unsicherer sein kann, als andere Normalorte; man wird indessen von dieser Wahl nur dann abgehen, wenn die vermuthete Unsicherheit eine sehr beträchtliche ist.

Die Methode wird aber auch dann unsichere Resultate gewähren, wenn die zu den beiden geocentrischen Orten gehörenden heliocentrischen Orte nahe zusammentreffen oder um 180° von einander abstehen. Es ist klar, dass in diesem Falle eine genaue Bestimmung der Bahnlage unthunlich wird, und man wird demnach bei der Auswahl der Beobachtungen auf diesen Umstand möglichst Rücksicht nehmen; übrigens findet derselbe unter den hier obwaltenden Verhältnissen gewöhnlich schon durch die Wahl der äussersten Orte ausreichende Berücksichtigung, da der Fall, wo die heliocentrische Bewegung nahezu 180° oder deren Vielfache beträgt, bei Anwendung dieser Methode selten genug auftreten wird. Indess wird man sich diese Umstände bei der Wahl der Beobachtungen doch stets gegenwärtig halten und in einem der letzteren Fälle lieber zwei Orte wählen, deren scheinbarer heliocentrischer Abstand etwa 90° beträgt.

Ich will die vorstehende Methode durch ein Beispiel erläutern und übrigens noch bemerken, dass sich später im § 5 des vorliegenden Abschnittes (pag. 507 ff.) noch ein hierher gehöriges Beispiel findet.

Für den Planeten Concordia (58) waren die folgenden auf den mittleren Aequator bezogenen geocentrischen Positionen und Sonnencoordinaten angenommen worden:

	mittl. Berl. Zeit	α	δ	X	Y	Z
1.	1860 März 24.5	180°28'18"0	+2°51'25"1	+0.0048582	+0.0725170	+0.0314716
2.	April 13.5	177° 1'32"5	+4°53'16"7	+0.9158787	+0.3770840	+0.1638895
3.	" 25.5	175°48'20"8	+5°30' 0"2	+0.8154794	+0.5410252	+0.2351599
4.	Mai 18.5	175°52'21"0	+5°13'42"8	+0.5341890	+0.7887080	+0.3422870

Der erste Ort beruht auf einer einzigen Beobachtung, die übrigen Orte sind

gut bestimmte Normalorte; es wird sich daher nicht empfehlen, den ersten Ort als einen der beiden Orte zu wählen, die völlig dargestellt werden sollen, da man bei einer Einzelnbeobachtung, abgesehen von dem ihr anhaftenden unvermeidlichen Beobachtungsfehler, nie mit Sicherheit voraussetzen kann, dass dieselbe nicht durch irgend ein Versehen besonders entstellt ist. Man wird deshalb mit Vortheil wohl den zweiten und vierten Ort als diejenigen annehmen, die völlig dargestellt werden sollen. Nach genäherten Elementen waren als geocentrische Distanzen für diese Orte angenommen worden:

$$\log \varrho = 0.221\ 0390$$
$$\log \varrho' = 0.297\ 4660\,;$$

für δx wurde für die zweite Hypothese der Werth -0.0001, und ebenso für δy der Werth -0.0001 angenommen. Diese Aenderungen sind wohl etwas zu klein gewählt und hätten wohl zehnmal grösser angenommen werden sollen; doch war die hier gemachte Annahme theilweise gerechtfertigt, weil, wie man sieht, das System der ersten Hypothese nur ganz unbedeutende Fehler in der Darstellung der Orte übrig liess. Die Hauptmomente der Rechnung finden sich für die einzelnen Hypothesen nachstehend übersichtlich neben einander gestellt. Die Epoche der Elemente ist 1860 April 13.5.

Hypothese	0	1	2	
$\log \varrho$	0.2210390	0.2209390	0.2210390	
$\log \varrho'$	0.2974660	0.2974660	0.2973660	
l *)	186°28′24″09	180°28′29″08	180°28′24″09	
l'	194°29′19″15	194°29′10″15	294°29′30″73	
d **)	−0°29′29″03	−0°29′31″89	−0°29′29″03	
d'	−3°11′41″03	−3°11′41″03	−3°11′46″57	
$\log r$	0.4128389	0.4127756	0.4128389	
$\log r'$	0.4131410	0.4131410	0.4130695	
M	2°22′41″14	3°47′14″80	0°49′46″78	
π'	183°58′ 7″58	182°26′31″30	185°39′ 5″31	
Ω'	5° 1′32″07	5° 1′28″62	5° 1′33″57	
i'	18°15′ 7″05	18°15′ 0″48	18°45′18″71	
φ	2°22′23″30	2°20′40″31	2°24′ 3″60	
μ	800″2500	801″0869	799″5989	
λ	177° 1′32″49	177° 1′32″49	177° 1′32″53	
λ'	175°52′21″82	175°52′21″80	175°52′21″89	***)
β	+4°53′10″70	+4°53′10″70	+4°53′10″69	
β'	+5°43′42″81	+5°43′42″85	+5°43′42″82	
A_1	180°28′12″33	180°28′16″85	180°28′ 9″63	

*) Heliocentrische Rectascensionen.

**) Heliocentrische Declinationen.

***) Durch diese Zahlen ist die Richtigkeit der Rechnung controlirt.

Hypothese	0	1	2
B_1	$+2°51'31''34$	$+2°51'28''66$	$+2°51'33''01$
λ_2	$175°48'21''12$	$175°48'20''60$	$175°48'21''29$
B_2	$+5°36'\ 7''63$	$+5°36'\ 7''97$	$-5°36'\ 7''49$

Mit Rücksicht auf B pag. 483) stellen sich die Gleichungen C) wie folgt:

$$1)\quad +\ 6''57 = +\ 4''52\ \Delta x - 2''70\ \Delta y$$
$$2)\quad -\ 0.32 = -\ 0.52\ \Delta x + 0.17\ \Delta y$$
$$3)\quad -\ 6.24 = -\ 2.68\ \Delta x + 1.70\ \Delta y$$
$$4)\quad +\ 1.57 = +\ 0.34\ \Delta x - 0.14\ \Delta y\,.$$

Die Kleinheit der Aenderungen in den Orten zeigt, dass es zweckmässiger gewesen wäre, δx und δy wesentlich grösser anzunehmen.

Den aus dem zweiten Orte folgenden Bedingungsgleichungen wird das Gewicht 4 ertheilt, weil dieser Ort ein Normalort ist, während der erste Ort nur auf einer einzelnen Beobachtung beruht; es müssen also die Gleichungen 2) und 4) pag. 314) mit 2 durchmultiplicirt werden, bevor die Methode der kleinsten Quadrate zur Anwendung kommt; ausserdem aber sind die Gleichungen 1) und 2) pag. 483 beziehungsweise mit $\cos B'$ und $\cos B''$ zu multipliciren, um die Bogengrössen auf den Parallel zu beziehen. Dadurch nehmen die Bedingungsgleichungen (logarithmisch) die folgende Gestalt an:

$$0.8171 = 0.6546\ \Delta x + 0_n4309\ \Delta y$$
$$9_n8040 = 0_n0149\ \Delta x + 9.5293\ \Delta y$$
$$0_n7952 = 0_n4281\ \Delta x + 0.2304\ \Delta y\,.$$
$$0.4069 = 9.8325\ \Delta x + 9_n4471\ \Delta y\,.$$

Macht man dieselben homogen (vergl. pag. 318), indem man:

$$x = 0.6546\ \Delta x$$
$$y = 0.4309\ \Delta y$$
$$\log \text{der Fehlereinheit} = 0.8171$$

annimmt, so stellen sich die Gleichungen wie folgt:

$$0.0000 = 0.0000\,x + 0_n0000\,y$$
$$8_n9800 = 9_n3603\,x + 9.0984\,y$$
$$9_n9781 = 9_n7735\,x + 9.7995\,y$$
$$9.0798 = 9.1779\,x + 9_n0162\,y$$

und man hat:

an	bn	aa	ab	bb
+ 1.0000	— 1.0000	+ 1.0000	— 1.0000	+ 1.0000
+ 0.0222	— 0.0122	+ 0.0525	— 0.0288	+ 0.0157
+ 0.5044	0.5092	+ 0.3524	— 0.3741	+ 0.3972
+ 0.0721	— 0.0197	+ 0.0327	— 0.0156	+ 0.0108
+ 1.0587	— 1.0011	+ 1.4270	— 1.4185	+ 1.4237.

Die Auflösung stellt sich nunmehr in folgender Art:

x	y	n
$+1.4276$	-1.4185	$+1.6587$
0.15461	0_n15183	0.21977
	$+1.4237$	-1.6611
9_n99722	$+1.4095$	-1.6481
	$+0.0142$	-0.0130
	8.15229	8_n11394

und es folgt:

$$\log y = 9_n06165$$
$$\log x = 0.40181 \; ,$$

oder mit Rücksicht auf die Homogenitätsfactoren und die Einheit für Δx und Δy:

$$\Delta x = -\ 0.0000367$$
$$\Delta y = +\ 0.0002227 \; .$$

Die schliesslichen Werthe für die Logarithmen der geocentrischen Distanzen sind also:

$$\log \varrho = 0.221\ 0023$$
$$\log \varrho' = 0.297\ 0887 \; ,$$

und die Darstellung der Orte nach den Differentialformeln wird:

	$\cos\delta\,\partial\alpha$	$\partial\delta$
1)	$-\ 1''1$	$-\ 1''5$
3)	$+\ 0''2$	$+\ 1''1$.

Rechnet man aus den so gefundenen Werthen für $\log \varrho$ und $\log \varrho'$ die Elemente und aus diesen die Darstellung der Orte, so findet sich dieselbe:

1)	$-\ 1''3$	$-\ 1''4$
3	$-\ 0''1$	$+\ 1''3$

genügend mit den aus den Differentialformeln abgeleiteten Werthen übereinstimmend. Die kleinen Unterschiede erklären sich völlig durch die Unsicherheit der siebenstelligen Rechnung, welche natürlich auch auf die Genauigkeit der obigen Werthe der Differentialquotienten Einfluss nimmt.

---

§ 4. Variation des Verhältnisses der Distanzen.

a. Parabolische Elemente.

Benützt man die Methode der Variation des Verhältnisses der Distanzen zur Bahnverbesserung, so knüpft sich daran unmittelbar die Bemerkung, dass aus dem

angenommenen Verhältnisse der Distanzen allein ohne weitere Voraussetzungen noch kein Schluss auf die Bahn selbst gemacht werden kann. In der That vermittelt aber die Annahme $a = \infty$ eine Lösung und ist dieselbe bereits, wenn auch nur andeutungsweise, im ersten Bande (I pag. 146) behandelt worden. Es soll hier auf diese Lösung nochmals zurückgegangen werden.

Handelt es sich um die Auswerthung einer parabolischen Bahn ($a = \infty$), so wird man mit der besten Annahme, die man über das Verhältniss der Distanzen M für zwei Normalorte (bei deren Auswahl wird man dieselben Vorsichtsmaassregeln zu befolgen haben, wie bei der Methode der Variation der Distanzen) vgl. pag. 484, machen kann, parabolische Elemente berechnen, die in den übrigen Orten etwa die Fehler $\partial\lambda_1$, $\partial\lambda_2$ ... $\partial\beta_1$, $\partial\beta_2$ ... übrig lassen. Die durch die Elemente selbst berechneten Positionen der nicht zu Grunde gelegten Normalorte seien Λ_1^0, Λ_2^0, ... B_1^0, B_2^0 ... Hierauf variirt man M, oder was noch bequemer ist $\log M$ in $\log M + \partial x$, wobei ∂x eine den Verhältnissen entsprechende Grösse ist, und wiederholt die Rechnung. Diese neuen Elemente werden für die übrigen Normalorte die Positionen Λ_1^1, Λ_2^1, ... B_1^1, B_2^1 ... ergeben. Man hat also ähnlich, wie bei der vorausgehenden Methode die empirische Bestimmung der Differentialquotienten zwischen den Coordinaten des Normalortes und der Variation von $\log M$ hergestellt und hat hierfür:

$$\Lambda_1^1 - \Lambda_1^0 = \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}, \qquad B_1^1 - B_1^0 = \frac{\partial\beta_1}{\partial x}$$

$$\Lambda_2^1 - \Lambda_2^0 = \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}, \qquad B_2^1 - B_2^0 = \frac{\partial\beta_2}{\partial x}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

wobei für ∂x als Einheit die angenommene Variation von $\log M$ zu betrachten ist. Man erhält also, wenn man sofort die Reduction auf den Parallel ausführt, als Bedingungsgleichungen, die nach der Methode der kleinsten Quadrate leicht aufgelöst werden können:

$$\cos\beta_1\,\partial\lambda_1 = \left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\right)\cos\beta_1\,\Delta x$$

$$\cos\beta_2\,\partial\lambda_2 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\right)\cos\beta_2\,\Delta x$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\partial\beta_1 = \left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\right)\Delta x$$

$$\partial\beta_2 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\right)\Delta x$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Multiplicirt man jede dieser Bedingungsgleichungen mit der Quadratwurzel ihres Gewichtes, und bezeichnet dann der Kürze halber die links vom Gleichheitszeichen stehenden Werthe mit n_1, n_2, n_3 ..., die Coëfficienten von Δx mit a_1, a_2, a_3 ..., so wird man nach der Methode der kleinsten Quadrate für den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten haben:

$$\Delta x = \frac{[a\,n]}{[a\,a]},$$

wobei also Δx in Einheiten von δx ausgedrückt erscheint.

Man kann nun mit dem Werthe $\log M + \delta x$ neue Elemente ableiten, oder man interpolirt, was bei dem oft grossen heliocentrischen Bogen vortheilhafter ist, unmittelbar die Elemente aus den beiden vorher ermittelten Systemen. Es wird nämlich:

$$E = E_0 + (E_1 - E_0)\,\Delta x\ .$$

Wir wollen diese Vorschriften durch ein ausführliches Beispiel erläutern und gleichzeitig die Formeln anführen, deren man zur Berechnung der auftretenden Grössen bedarf, die Ableitung derselben übergehe ich aber, da das Nöthige bereits im ersten Bande erläutert ist.

Ich wähle als Beispiel den I. Kometen des Jahres 1847; die Mittheilung der Normalorte und der Sonnencoordinaten verdanke ich Herrn Professor Hornstein, Director der Prager Sternwarte. Dieselben sind bezogen auf die mittlere Ekliptik 1847.0, wie folgt:

Mittl. Berl. Zeit.			λ	β	L	$\log R$
I	1847 Febr.	18.0	26°21′16″43	+62°44′ 5″18	329°13′31.05	9.9951324
II	»	26.0	22 49 8.25	+54 29 31.07	337 16 24.50	9.9959194
III	März	4.0	20 59 23.75	+47 35 53.42	343 17 13.98	9.9965726
IV	»	10.0	19 20 22.28	+39 53 7.72	349 17 0.68	9.9972759
V	»	16.0	17 27 10.54	+30 58 26.60	355 15 45.52	9.9980025
VI	»	20.0	15 47 38.06	+24 1 38.24	359 14 16.82	9.9984879
VII	April	24.0	44 18 54.19	+16 35 5.41	33 37 41.36	0.0027520

Als völlig darzustellende Normalorte werden der erste und der letzte Ort gewählt, für $\log M$ war aus genäherten Annahmen über die Elemente der Werth 0.2262773 gefunden worden, und da die zu Grunde gelegten Elemente schon sehr genau waren, indem sich dieselben nahezu allen Beobachtungen recht gut anschliessen, so wurde δx verhältnissmässig klein mit + 0.000 3000 angenommen. Es sind demnach zwei Systeme parabolischer Elemente abzuleiten, die den obigen äussersten Normalorten genügen und für welche einmal $\log M = \log \frac{\varrho'}{\varrho} = 0.226\ 2773$, das andere Mal $\log M = \log \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right) = 0.226\ 5773$ gesetzt ist. Ich unterscheide die aus der zweiten Annahme resultirenden Werthe dadurch, dass ich die analogen Buchstaben in Klammern ansetze.

Zuerst wird man die Berechnung jener Werthe vornehmen, die von der Annahme über M unabhängig sind. Man hat zu rechnen:

$$\left.\begin{aligned} g \cos(G - L) &= R' \cos(L' - L) - R \\ g \sin(G - L) &= R' \sin(L' - L) \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\cos\psi = \cos(\lambda - L)\cos\beta\,, & \cos\psi' = \cos(\lambda' - L')\cos\beta' \\ \sin\psi\cos P = \sin(\lambda - L)\cos\beta\,, & \sin\psi'\cos P' = \sin(\lambda' - L')\cos\beta' \\ \sin\psi\sin P = \sin\beta & ,\ \sin\psi'\sin P' = \sin\beta', \end{array}\right\} \quad \text{I)}$$

wobei g, $\sin\psi$ und $\sin\psi'$ stets positiv genommen werden.

Die Rechnung ergab:

$$G = 90^0 37' 43'' 08 \qquad R\sin\psi = 9.981\ 2753 \qquad R'\sin\psi' = 9.529\ 4070$$

$$\log g = 0.026\ 6750 \qquad R\cos\psi = 9.390\ 6985 \qquad R'\cos\psi' = 9.976\ 6998\ .$$

Jetzt sind jene Hilfsgrössen zu rechnen, welche die Darstellung von r, r' und s (Sehne) als Funktionen von ϱ vermitteln; man hat demnach für jede der Annahmen von M zu rechnen:

$$\left.\begin{array}{c} f = R\cos\psi\,, \qquad B = R\sin\psi \\ f' = \dfrac{R'\cos\psi'}{M}\,, \qquad B' = \dfrac{R'\sin\psi'}{M} \\ h\cos\zeta\cos(H - \lambda') = M\cos\beta' - \cos(\lambda' - \lambda)\cos\beta \\ h\cos\zeta\sin(H - \lambda') = \sin(\lambda' - \lambda)\cos\beta \\ h\sin\zeta = M\sin\beta' - \sin\beta \\ h \text{ und } \cos\zeta \text{ stets positiv} \\ \cos\varphi = \cos\zeta\cos(G - H) \\ \sin\varphi\cos Q = \cos\zeta\sin(G - H) \\ \sin\varphi\sin Q = \sin\zeta \\ \sin\varphi \text{ stets positiv.} \\ \gamma = \dfrac{g}{h}\cos\varphi \\ A = \dfrac{g}{h}\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \text{II)}$$

Es fanden sich aus den obigen Zahlen:

f	$+0.2458660$	(f)	$+0.2458660$
f'	$+0.5028887$	(f')	$+0.5625000$
$\log B$	9.9812753	$\log(B)$	9.9812753
$\log B'$	9.3031207	$\log(B')$	9.3028297
H	$51^0 9' 13'' 23$	(H)	$51^0 8' 50'' 16$
$\cos\zeta$	9.9756926	$\cos(\zeta)$	9.9757729
$\sin\zeta$	$9_n5124515$	$\sin(\zeta)$	$9_n5117733$
$\log h$	0.0985225	$\log(h)$	0.0988473
$\cos\varphi$	9.8632550	$\cos(\varphi)$	9.8632954
$\sin\varphi$	9.8347822	$\sin(\varphi)$	9.8347304
γ	$+0.6185906$	(γ)	$+0.6181916$
$\log A$	9.7620347	$\log(A)$	9.7625641
$\log g\sin\varphi$	9.8614572	$\log(g\sin\varphi)$	9.8614114

Nun ist ϱ so zu bestimmen, dass der Euler'schen Gleichung:

$$6k(t'-t) = (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\,, \quad \log 6k = 9.0137327$$

genügt wird; das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere, wenn dieselbe grösser als 180° ist; das letztere ist im vorliegenden Beispiele der Fall. Da bei der Anwendung dieser Methode im Allgemeinen grosse helioeentrische Bogen auftreten, so wird die Anwendung der Encke'schen μ Tafel (Tafel VIII des ersten Bandes) nicht empfohlen werden können; vielmehr wird man von einem Werthe von ϱ ausgehen, der den vorhandenen nahe richtigen Elementen zu entlehnen ist. Man berechnet also unter einer Annahme über ϱ:

$$\left.\begin{aligned}
\text{tag}\,\theta &= \frac{\varrho-f}{B}\,, \quad r = R\sin\psi\sec\theta \\
\text{tang}\,\theta' &= \frac{\varrho-f'}{B'}\,, \quad r' = R'\sin\psi'\sec\theta' \\
\text{tang}\,\vartheta &= \frac{\varrho-\gamma}{A}\,, \quad s = g\sin\varphi\sec\vartheta \\
6k(t'-t) &= (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{III}$$

und sieht nach, wie weit der letzteren Relation genügt wird, und zwar sei Δ der Fehler im Logarithmus von $6k(t'-t)$ im Sinne: Wahrer Werth — Berechneter Werth.

Es würde nicht angemessen sein, durch empirische Variation und nachherige Interpolation den wahren Werth von ϱ zu ermitteln; man wird vielmehr die noch nöthige Correction sofort auf differentiellem Wege zu ermitteln trachten. Mit Rücksicht auf Gleichung 27 (pag. 471) und den I pag. 127 aufgestellten Differentialquotienten wird man leicht die folgende Relation finden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{N} &= \left(\frac{r+r'+s}{1-\frac{r+r'+s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta + M\sin\theta' + h\sin\vartheta) \mp \\
&\mp \left(\frac{r+r'-s}{1-\frac{r+r'-s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta + M\sin\theta' - h\sin\vartheta) \\
\delta\varrho &= \left(\frac{4k}{\text{Mod}}\right)(t'-t)\,N\,.\,\Delta\,, \quad \log\left(\frac{4k}{\text{Mod}}\right) = 9.1999
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV}$$

und zwar ist in dieser Formel für den gegenwärtigen Fall $a=\infty$ zu setzen.

Man wird mit dem durch diesen Ausdruck ermittelten corrigirten Werthe von ϱ die Rechnung wiederholen, um sich durch die Uebereinstimmung der Werthe die Ueberzeugung von der Richtigkeit der Rechnung zu verschaffen. Es wird aber auch für die zweite Annahme von M die entsprechende Aenderung von ϱ sofort auf differentiellem Wege ermittelt werden können, und man wird auf diese Weise den wahren Werth gleich im ersten Versuche mit genügender Annäherung erhalten. Mit Rücksicht darauf, dass für den letzteren Fall auch M variabel ist, werden die I pag. 127 aufgestellten Ausdrücke dr, dr' und ds geschrieben werden müssen:

$$\begin{aligned}
dr &= \sin\theta\,d\varrho \\
dr' &= M\sin\theta'\,d\varrho + \varrho\sin\theta'\,dM \\
ds &= h\sin\vartheta\,d\varrho + \left(\frac{ds}{dM}\right)dM\,;
\end{aligned}$$

um den in dem letzteren Ausdrucke vorkommenden Differentialquotienten zu erhalten, nehme ich den Ausdruck (I pag. 105)

$$s^2 = \varrho^2 h^2 + g^2 - 2\varrho\, h\, g \cos\zeta \cos(G-H)$$

vor und differentiire denselben nach M. Mit Rücksicht auf die erste Gleichung 1) (I pag. 105) erhält man, wenn für ξ, und $\xi_{,,,}$ die polaren Coordinaten mit der hier abgeänderten Indexbezeichnung eingeführt, und alle Längen vom Punkte G aus gezählt werden, sofort:

$$h \cos\zeta \cos(G-H) = M \cos\beta' \cos(\lambda' - G) - \cos\beta \cos(\lambda - G).$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach M findet sich:

$$\frac{d\,(h\cos\zeta\cos(G-H))}{d\,M} = \cos\beta' \cos(G-\lambda')$$

hierdurch wird:

$$s\,\frac{d\,s}{d\,M} = \varrho^2\, h \left(\frac{d\,h}{d\,M}\right) - \varrho\, g \cos(G-\lambda')\cos\beta' \, ;$$

aus den Gleichungen 3) (I pag. 106) ergibt sich aber auch:

$$\frac{d\,h}{d\,M} = \cos\zeta \cos(H-\lambda')\cos\beta' + \sin\zeta \sin\beta' \, ,$$

und hiermit stellt sich, wenn man beachtet, dass in beiden Lösungen die Zwischenzeiten dargestellt werden, also:

$$0 = \left(\frac{r+r'+s}{1-\frac{r+r'+s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}} (d\,r + d\,r' + d\,s) \mp \left(\frac{r+r'-s}{1-\frac{r+r'-s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}} (d\,r + d\,r' - d\,s)$$

sein muss, die Rechnung wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\varrho}{s}\Big\{ g\cos\beta'\cos(G-\lambda') - \varrho\,[h\cos\zeta\cos(H-\lambda')\cos\beta' + h\sin\zeta\sin\beta']\Big\} \\ Q &= \frac{1}{\text{Mod}}\left\{\left(\frac{r+r'+s}{1-\frac{r+r'+s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}}(P-\varrho\sin\theta') \pm \left(\frac{r+r'-s}{1-\frac{r+r'-s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}}(P+\varrho\sin\theta')\right\} \\ \delta\varrho &= N\,.\,M\,.\,Q\,\delta\log M\,. \end{aligned}\right\} \quad \text{V)}$$

wobei in der Formel für Q das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere, wenn dieselbe grösser als 180° ist, und wobei N seinem Werthe nach aus IV (pag. 491) zu entnehmen ist, überdiess aber für die Parabel $a = \infty$ gesetzt werden muss.

Ich werde, um die obigen Formeln durch Beispiele zu erläutern, die Versuche hier ausführlich durchführen, dieselben aber der Raumersparniss wegen, nicht nach einander, wie sie thatsächlich ausgeführt wurden, sondern neben einander ansetzen. Der erste der drei Versuche entspricht dem ersten Werthe von M und ist mit einer genäherten Annahme über ϱ, welche den vorhandenen Näherungen entlehnt wurde, durchgeführt; für den zweiten Versuch ist der durch Anwendung der Formeln IV verbesserte Werth von ϱ benützt und die Durchführung des Versuches zeigt, dass der wahre Werth bereits erreicht ist. Der dritte Versuch ist für die zweite Annahme von M durchgeführt und dabei nur jener Werth von ϱ in Anwendung gezogen worden, der sich durch die Benützung der Formeln V) ergibt.

	M		(M)
Versuch	1	2	1
ϱ	+ 1.0530000	+ 1.0530458	+ 1.0525217
$\log(\varrho - f)$	9.9069457	9.9069703	9.9066882
$\log(\varrho - f')$	9.6902947	9.6903353	9.6902153
$\log(\varrho - \gamma)$	9.6378932	9.6379390	9.6378199
$\text{tang}\,\theta$	9.9256704	9.9256950	9.9254129
$\text{tang}\,\theta'$	0.3871650	0.3872056	0.3873856
$\text{tang}\,\vartheta$	9.8749585	9.8750043	9.8752558
$\cos\theta$	9.8834848	9.8834746	9.8835917
$\cos\theta'$	9.5790876	9.5790528	9.5788987
$\cos\vartheta$	9.9031269	9.9031105	9.9030199
r	0.0977905	0.0978007	0.0976836
r'	9.9503194	9.9503542	9.9505083
Add.	0.2335241	0.2335344	0.2336472
$r + r'$	0.3313146	0.3313351	0.3313308
s	9.9583303	9.9583467	9.9583915
Add.	0.1534058	0.1534045	0.1534101
Subtr.	0.2393199	0.2393169	0.2393530
$(r + r' + s)$	0.4847204	0.4847396	0.4847499
$(r + r' + s)^{\frac{1}{2}}$	0.2423602	0.2423698	0.2423749
$(r + r' - s)$	0.0919947	0.0920182	0.0919778
$(r + r' - s)^{\frac{1}{2}}$	0.0459973	0.0460091	0.0459889
$(r + r' + s)^{\frac{3}{2}}$	0.7270806	0.7271094	0.7271248
$(r + r' - s)^{\frac{3}{2}}$	0.1379920	0.1380273	0.1379667
Add.	0.0995354	0.0995368	0.0995212
$\log(6kt)$	0.8266160	0.8266462	0.8266460

Vergleicht man das Resultat des ersten Versuches für $\log 6kt$ mit dem strengen aus den Zwischenzeiten abgeleiteten Werthe, nämlich $\log 6kt = 0.8266461$, so ergibt sich im Sinne: Strenger Werth — Berechneter Werth ein Fehler $\Delta = + 301$ Einheiten der siebenten Decimale. Diese Differenz wird verwerthet, um nach den Formeln IV pag. 491 den definitiven Werth von ϱ zu erhalten. Die Rechnung stellt sich wie folgt:

$\sin\theta$	9.8002	$\sin\theta + M\sin\theta' + h\sin\vartheta$	0.4706
$M\sin\theta'$	0.1925	$\sin\theta + M\sin\theta' - h\sin\vartheta$	0.1613
Add.	0.1504	log I	0.7130
$\sin\theta + M\sin\theta'$	0.3429	log II	0.2073
$h\sin\vartheta$	9.8760	Add.	0.1180
Add.	0.1277	$\log N$	9.1690
Subtr.	9.8184	$\log\left(\frac{4k}{\text{Mod}}\right)(t' - t)$	1.0128

Es besteht also die Relation (logarithmisch):

$$\delta\varrho = \overline{0.1818}\,\Delta\,,$$

woraus folgt, dass mit dem obigen Werthe von Δ die Correction von $\delta\varrho = +458$ Einheiten der siebenten Decimale beträgt; mit dem so resultirenden Werthe von $\varrho = +1.0530458$ ist der zweite Versuch durchgeführt, der für Δ den Werth -1 finden lässt, also eine völlige Uebereinstimmung innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung. Es wurde aber mit Rücksicht darauf, dass die Kleinheit der Aenderungen die Differentialformeln fast streng erscheinen lässt, für die definitive Lösung gleichsam das Mittel der beiden Versuche benützt und $\varrho = +1.0530457$ gesetzt.

Um nun für den Werth (M) sofort eine hinreichende Annäherung einzuführen, wurde nach V (pag. 492) gerechnet:

$G-\lambda'$	$-46^\circ 18'8$	Subtr.	0.1556
$\cos(G-\lambda')$	9.8393	Add.	0.1208
$g\cos\beta'$	0.0082	$P-\varrho\sin\theta'$	0_n1443
$h\cos\zeta\cos(H-\lambda')\cos\beta'$	0.0527	$P+\varrho\sin\theta'$	9.7439
$h\sin\zeta\sin\beta'$	9_n0665	log {I}	0_n3867
Add.	9.9527	log {II}	9.7899
log [...]	0.0054	Add.	0.0980
log I	9.8475	lg {I—II}	0_n4847
log ϱ [...]	0.0278	Q	0_n8469
Subtr.	9.7115	$N.M$	9.3953
log {...}	9_n5590	$\delta\varrho : \delta\log M$	0_n2422
$\varrho : s$	0.0641	$\delta x = \delta\log M$	3.4771
P	9_n6231	$\delta\varrho$	-5240
$\varrho\sin\theta'$	9.9887		

Es war also für die zweite Annahme über M im ersten Versuche zu setzen:

$$\varrho = 1.0530457 - 0.0005240\,,$$

welcher Werth, wie die Zahlen der dritten Columne zeigen, in der That eine fast völlige Uebereinstimmung ergab; es wurde für die weitere Rechnung der Elemente einem Fehler $\Delta = +0.5$ entsprechend

$$\varrho = 1.0525217$$

angenommen. Der Uebergang auf die heliocentrischen Orte wurde ausgeführt nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho' = M\varrho \\ &r\cos b\cos(l-L) = \varrho\cos(\lambda-L)\cos\beta - R\,. \quad r'\cos b'\cos(l'-L') = \varrho'\cos(\lambda'-L')\cos\beta' - R' \\ &r\cos b\sin(l-L) = \varrho\sin(\lambda-L)\cos\beta \quad . \quad r'\cos b'\sin(l'-L') = \varrho'\sin(\lambda'-L')\cos\beta' \\ &r\sin b = \varrho\sin\beta \quad . \quad r'\sin b' = \varrho'\sin\beta' \end{aligned}\right\}\text{VI)}$$

und ergab für die beiden Annahmen von M durchgeführt:

$\log r$	0.0978007	$\log (r)$	0.0976836
l	120° 5′39″11	(l)	120° 6′38″47
$\operatorname{tang} b$	0.0510135	$\operatorname{tang} (b)$	0.0507892
$\log r'$	9.9503541	$\log (r')$	9.9505085
l'	59° 2′ 2″48	(l')	59° 1′39″06
$\operatorname{tang} b'$	9.8382382	$\operatorname{tang} (b')$	9.8381343

Die Uebereinstimmung der so gefundenen Radienvectoren mit den Werthen, die sich aus den Versuchen ergaben, erweist sich als genügend. Nach I), II) (pag. 472) und III b) (pag. 473) findet sich:

☊	21°43′23″19	(☊)	21°42′28″94
i	48 39 42.85	(i)	48 38 58.33
u	95 33 4.88	(u)	95 34 25.72
u'	49 5 5.61	(u')	49 5 12.19
$\frac{1}{2}(u'-u)$	156 46 0.36	$(\frac{1}{2}u'-u)$	156 45 23.23
f	156 46 0.31	(f)	156 45 23.22

Nach V) und VI) (I pag. 143 und 144) ergab sich:

$\log q$	8.6287758	$\log (q)$	8.6291866
v	−158°45′40″38	(v)	−158°44′53″37
v'	154 46 20.35	(v')	154 45 53.10
ω	254 18 45.26	(ω)	254 19 19.09
π	276 2 8.45	(π)	276 1 48.03

und nach VII) (I pag. 144):

	1847 März		1847 März
T aus v	30.32270	(T) aus (v)	30.30868
T aus v'	30.32273	(T) aus (v')	30.30865
T	30.322715	(T)	30.308665

Man hat daher die zwei Elementensysteme, bei welchen die Perihelzeit T sich auf den Monat März 1847 bezieht:

System	0	1
$\log M$	0.2262773	0.2205773
T	30.322715	30.308665
$\log q$	8.6287758	8.6291866
π	276° 2′ 8″45	276° 1′48″03
☊	21 43 23.19	21 42 28.94
i	48 39 42.85	48 38 58.33

Rechnet man aus diesen Elementen die für die Zeiten der Normalorte folgenden geocentrischen Positionen nach den bekannten Methoden, so erhält man:

	A^0	B^0	A^1	B^1
1)	26°21′16″36	+ 62°44′ 5″14	26°21′16″44	+ 62°44′ 5″15
2)	22 49 6.82	+ 54 29 41.57	22 48 44.68	+ 54 29 23.06
3)	20 59 14.40	+ 47 36 8.49	20 58 38.95	+ 47 35 32.39

	A^0	B^0	A^1	B^1
1)	19°20′22″25	+ 39°53′32″85	19°19′33″25	+ 39°52′35″23
5)	17 27 16.39	+ 30 59 2.31	17 26 11.65	+ 30 57 37.80
6)	15 47 48.13	+ 24 2 23.20	15 46 30.24	+ 24 0 36.72
7)	44 18 54.20	+ 16 35 5.42	44 18 54.20	+ 16 35 5.42

Die Darstellung der beiden äussersten Orte durch die Elemente ist eine befriedigende. Es sind also (vergl. pag. 488) die Bedingungsgleichungen, die sich aus den übrigen Normalorten ergaben:

$$\begin{aligned}
+\ 1''43 \cos\beta_2 &= -\ 22''14 \cos\beta_2\ \Delta x \\
+\ 9.35 \cos\beta_3 &= -\ 35.45 \cos\beta_3\ \Delta x \\
+\ 0.03 \cos\beta_4 &= -\ 49.00 \cos\beta_4\ \Delta x \\
-\ 5.85 \cos\beta_5 &= -\ 64.74 \cos\beta_5\ \Delta x \\
-10.07 \cos\beta_6 &= -\ 77.89 \cos\beta_6\ \Delta x \\
-10''50 &= -\ 18.51\ \Delta x \\
-15.07 &= -\ 36.10\ \Delta x \\
-25.13 &= -\ 57.62\ \Delta x \\
-35.71 &= -\ 84.51\ \Delta x \\
-44.96 &= -\ 106.48\ \Delta x\ .
\end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichungen logarithmisch an und macht die auftretenden Coëfficienten dadurch homogen, dass man den Logarithmus der Fehlereinheit 1.6528 und ausserdem:

$$\log x = 2.0273 + \log \Delta x$$

setzt, so erhält man, wenn man allen Gleichungen gleiches Gewicht gibt:

Längen	Breiten
$8.2666 = 9_n0820\,x$	$9_n3684 = 9_n2401\,x$
$9.1469 = 9_n3512\,x$	$9_n5253 = 9_n5302\,x$
$6.7093 = 9_n5479\,x$	$9_n7474 = 9_n7333\,x$
$9_n0476 = 9_n7171\,x$	$9_n9000 = 9_n8996\,x$
$9_n3108 = 9_n8247\,x$	$0_n0000 = 0_n0000\,x$

Da demnach

$$[an] = +\ 2.2480\ , \qquad [aa] = +\ 2.9752$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned}
\log x &= 9.8783 \\
\log \Delta x &= 9.5038\ .
\end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth von Δx in die obigen Gleichungen ein, so bleiben für die wahrscheinlichste Parabel die folgenden Fehler in den Normalorten übrig, wobei $\cos\beta\,\delta\lambda$ angesetzt erscheint, um sogleich einen Ueberblick über die absolute Grösse der Fehler zu erlangen:

	$\cos\beta\,\delta\lambda$	$\delta\beta$
1.	0″00	0″00
2.	+ 4.93	− 4.60
3.	+13.94	− 3.55
4.	+12.02	− 6.75
5.	+12.69	− 8.75
6.	+13.49	−10.99
7.	0.00	0.00 .

Die Fehler zeigen, dass die Parabel den Beobachtungen nicht völlig genügt. Ohne jedoch vorerst diese Unterschiede, die durch die Einführung eines Werthes der Excentricität, der von der Einheit verschieden ist, wesentlich verkleinert werden können, weiter zu beachten, will ich die wahrscheinlichsten parabolischen Elemente ableiten. Die Vergleichung der beiden Systeme gibt:

	$E_1 - E_0$	$(E_1 - E_0)\,\Delta x$
T	−14050	−4481
$\log q$	+ 4108	+1310
π	− 20″42	− 6″51
☊	− 54.25	−17.31
i	− 44.52	−14.20 ;

es sind also die wahrscheinlichsten parabolischen Elemente die folgenden:

☄ I 1847

$T =$ März 30.318234 mittl. Berl. Zeit
$\log q = 8.6289068$
$\pi = 276^\circ\ 2'\ 1''94$
☊ $=\ \ 21\ 43\ \ 5.88$
$i =\ \ 48\ 39\ 28.65$
mittl. Aequinoct. 1847,0 .

Die directe Nachrechnung der Orte mit diesen Elementen zeigt in der That innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung eine völlige Uebereinstimmung mit der oben aus den Differentialformeln angegebenen Darstellung der Orte. Wenn auch in dem vorliegenden Falle die Parabel den Beobachtungen nicht völlig genügt, so entspricht die hier durchgeführte Rechnung einem geeigneten Rechnungsbeispiele und es können die hier gegebenen Methoden auf jeden Kometen ohne Abänderung angewendet werden.

β. Bestimmte Annahme über a.

Die Variation des Verhältnisses der Distanzen wird auch noch in jenen Fällen mit Vortheil angewendet werden können, wo man eine bestimmte Annahme über a zu machen in der Lage ist, ein Fall, der dann eintreten wird, wenn die in der ersten Näherung abgeleiteten parabolischen Elemente eine auffallende Aehnlichkeit mit den Elementen eines früher erschienenen Kometen zeigen. Man wird sich dann zunächst mit Hilfe dieser ersten parabolischen Elemente (vergl. I pag. 150), wenn

sonst keine besseren Näherungen bekannt sind, einen möglichst genauen Werth von M verschaffen und alle Formeln bis zur Auflösung der Lambert'schen Gleichung eventuell gleichzeitig mit einem entsprechend variirten Werthe von M durchrechnen. Hierbei ist wohl zu beachten, dass die für M gemachten Näherungsannahmen von der Natur des Kegelschnittes unabhängig sind; es wird also, wenn man in M nur die aus den Zwischenzeiten folgende Näherung einsetzt, der betreffende Himmelskörper zur Zeit der mittleren Beobachtung bis auf kleine Grössen derselben Ordnung in dem gewählten grössten Kreise stehen, mag man über die grosse Achse der Bahn eine beliebige Annahme machen.

Es sei die gefundene Perihelzeit T, die dem anderen Kometen mit ähnlichen Elementen angehörige Perihelzeit t; dann kann die Umlaufszeit:

$$T-t, \quad \frac{T-t}{2}, \quad \frac{T-t}{3} \quad \text{u. s. f.}$$

sein und demgemäss wird die grosse Halbachse, wenn man den so gefundenen Zeitunterschied in Einheiten des siderischen Jahres ansetzt, sein können:

$$a = (T-t)^{\frac{2}{3}}, \quad \left(\frac{T-t}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \left(\frac{T-t}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{u. s. f.}$$

Man wird gewöhnlich mit dem grössten Werthe von a beginnen, ϱ entsprechend der Lambert'schen Gleichung mit Hilfe der sehr bequemen Relation 17) (pag. 468) und unter Benützung der Formel IV (pag. 491) bestimmen, dann die Elemente nach den obigen Formeln (§ 2 pag. 472 ff.) ableiten und die Darstellung des mittleren Ortes suchen. Man wird wohl bald denjenigen Werth der Halbachse erkennen, der den Beobachtungen am besten zu entsprechen scheint. Für diesen Werth wird man mit dem variirten Werthe von M die Rechnung wiederholen, um die möglichst beste Darstellung zu erreichen. Waren aber die Zwischenzeiten nicht gross, so dass die in M eingeführten Näherungen hinreichend zutreffen, so wird man mit Rücksicht auf die oben gemachte Bemerkung, dass die Richtigkeit von M nicht durch die Wahl von a beeinflusst wird, von einer Variation von M Abstand nehmen können.

Ich gebe für diese Methode kein Beispiel, da dieselbe ganz nach den für die Parabel geltenden Vorschriften durchgeführt werden kann, nur mit dem Unterschiede, dass man statt der Euler'schen Gleichung die Lambert'sche und zwar in der Form 17) (pag. 468) anwendet.

γ. Uebergang von der Parabel auf nahezu parabolische Bahnen. Hornstein's Methode.

Zeigt sich bei dem Anschlusse parabolischer Elemente an die Beobachtungen, dass die Parabel nicht völlig genügt, so kann man nach Hornstein's Vorschlage (Bestimmung der Bahn des ersten Kometen vom Jahre 1847, nebst Bemerkungen über den Uebergang von der Parabel zur Ellipse oder Hyperbel. Märzheft 1854 der Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften

in Wien) in sehr bequemer und zweckmässiger Weise mit Benützung der vorhandenen Rechnungen den Uebergang auf den wahrscheinlichsten Kegelschnitt ausführen; ich werde übrigens im folgenden Paragraphen (§ 5 pag. 507) noch eine andere Methode anführen, die bisweilen in mancher Beziehung noch bequemer erscheint.

Macht man über M dieselbe Annahme, wie in der ersten Hypothese bei der Ermittelung einer parabolischen Bahn und lässt an die Stelle der Euler'schen Gleichung die Lambert'sche (pag. 468) treten, so wird man mit Hilfe derselben eine Lösung erhalten, sobald man eine bestimmte Annahme über $\frac{1}{a} = y$ macht. Man wird für y einen kleinen Werth, etwa 0,01 oder 0,02 annehmen. Die Zahl der Versuche bei der Lösung der Lambert'schen Gleichung kann durch Benützung der Differentialformeln wieder wesentlich vermindert werden. Vergleicht man nämlich die Euler'sche und Lambert'sche Gleichung:

$$k(t'-t) = \tfrac{1}{6}(r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp \tfrac{1}{6}(r+r'-s)^{\frac{3}{2}}$$
$$k(t'-t) = (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} Q_s \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} Q_d$$

so erhält man durch Subtraction den Unterschied:

$$(r+r'+s)^{\frac{3}{2}}(\tfrac{1}{6}-Q_s) \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}(\tfrac{1}{6}-Q_d) = \Delta \qquad \text{IV}b)$$

zwischen $k(t'-t)$, der sich ergeben würde, wenn man in der Ellipse die für die Parabel geltenden Werthe einführt. Mit Benützüng der Formeln IV) (pag. 191) oder was hier bequemer ist, ohne Anwendung des logarithmischen Incrementes erhält man alle jene Aenderungen, die man mit Beibehaltung des Werthes von M, an den für die Parabel gefundenen Werth von ϱ anbringen muss, um der bestimmten Halbachse zu genügen. Es ist (vergl. 27) pag. 471):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{N} = (\sin\theta + M\sin\theta') & \left\{\left(\frac{r+r'+s}{1-\frac{r+r'+s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{1-\frac{r+r'-s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} + \\ & + h\sin\vartheta\left\{\left(\frac{r+r'+s}{1-\frac{r+r'+s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{r+r'-s}{1-\frac{r+r'-s}{4a}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \\ \partial\varrho = 4\Delta N. & \end{aligned}\right\} \qquad \text{IV}c)$$

wo wieder das obere Zeichen für heliocentrische Bewegungen, die kleiner, das untere Zeichen für solche, die grösser als 180° sind, gilt.

Diese so ermittelten Coëfficienten wird man bei allenfalls auftretenden Unterschieden auch für die weiteren Verbesserungen benützen dürfen. Ist dann derjenige Werth von ϱ ermittelt, der einerseits unter Benützung des angenommenen Werthes von $\frac{1}{a} = y$ der Lambert'schen Gleichung, andererseits dem zu Grunde gelegten Werthe von M genügt, so rechnet man aus diesem nach den oben angeführten Methoden die Elemente und mit diesen die Darstellung der Orte. Von diesen Orten müssen die der Rechnung zu Grunde gelegten Normalorte völlig dargestellt werden,

welcher Umstand eine Controle für die Richtigkeit der Rechnung abgibt. Wenn, dann für die übrigen nicht völlig dargestellten Normalorte $\Lambda_1^2, \Lambda_2^2 \ldots B_1^2, B_2^2 \ldots$ die aus diesen Elementen folgenden geocentrischen Coordinaten sind, so erhält man auf empirischem Wege die Differentialquotienten der Variationen des geocentrischen Ortes durch die Variation des reciproken Werthes der grossen Halbachse y wie folgt:

$$\Lambda_1^2 - \Lambda_1^0 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}, \qquad B_1^2 - B_1^0 = \frac{\partial \beta_1}{\partial y}$$

$$\Lambda_2^2 - \Lambda_2^0 = \frac{\partial \lambda_2}{d y}, \qquad B_2^2 - B_2^0 = \frac{\partial \beta_2}{d y}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

wobei wieder der angenommene Werth von y als Einheit für ∂y gilt. Mit Berücksichtigung der oben (pag. 488) für eine Variation von M erhaltenen Werthe werden nunmehr die Bedingungsgleichungen die Form haben:

$$\cos\beta_1\, \partial\lambda_1 = \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\right) \cos\beta_1\, \Delta x + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right) \cos\beta_1\, \Delta y$$

$$\cos\beta_2\, \partial\lambda_2 = \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x}\right) \cos\beta_2\, \Delta x + \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right) \cos\beta_2\, \Delta y$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\partial\beta_1 = \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y}\right) \Delta y$$

$$\partial\beta_2 = \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial y}\right) \Delta y$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Aus diesen Gleichungen leitet man, nachdem man dieselben noch vorher mit den Quadratwurzeln ihrer Gewichte durchmultiplicirt hat, nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe für Δx und Δy ab; Δx gibt die erforderliche Aenderung in M in Einheiten der angenommenen Aenderung, Δy gibt den reciproken Werth der grossen Halbachse in Einheiten der obigen Annahme, wobei man auf eine Hyperbel geführt würde, falls Δy negativ gefunden wird. Man kann nun mit den Werthen:

$$\log M = \log M_0 + \Delta x$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_0} + \Delta y$$

neue Elemente ableiten, oder dieselben auch nach der oben (pag. 484) angegebenen nunmehr auf zwei Variable zu erweiternden Interpolationsmethode erhalten, welche in den meisten Fällen, besonders, wenn die heliocentrischen Bogen gross sind, ebenfalls genügend genaue Resultate geben wird. Es wird für jedes Element

$$E = E_0 + (E_1 - E_0)\, \Delta x + (E_2 - E_0)\, \Delta y\,.$$

Ist aber die Abweichung von der Parabel sehr bedeutend, so wird diese Methode erst nach mehrfachen Versuchen zum Ziele führen; indem man vorerst einen Näherungswerth von a erhält, wird man diesen benützen, um mit zwei Annahmen über M mit Beibehaltung des Näherungswerthes von a einerseits, und einem abgeänderten Werthe von a andererseits das Verfahren fortzusetzen. Indess wird es sich

in diesen Fällen der stärkeren Abweichung mehr empfehlen, direct nach einer der im ersten Bande entwickelten Methoden aus den 3 zu Grunde gelegten Orten genäherte Elemente abzuleiten, auf welche man dann die in dem betreffenden Falle geeignet erscheinenden Verbesserungsmethoden anwendet.

Es soll zunächst Hornstein's Methode durch ein Beispiel erläutert werden, und ich wähle das früher für die Parabel durchgeführte Beispiel einer Bahnverbesserung für den ersten Cometen des Jahres 1847. Man wird jetzt leicht einsehen, weshalb ich dort ein Beispiel gewählt habe, welches der Parabel nicht völlig genügt.

Zunächst kann man alle Hilfsgrössen benützen, die oben für die Parabel in der ersten Annahme über M berechnet wurden und hat darauf die Lambert'sche Gleichung:

$$k(t'-t) = (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} Q_s \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} Q_d$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_s \text{ aus Tafel XVII mit dem Argumente } \dfrac{r+r'+s}{4a} \\ Q_d \text{ aus Tafel XVII } \quad » \quad » \quad » \quad \dfrac{r+r'-s}{4a} \end{array}\right\} \quad \text{V}b)$$

durch Versuche zu lösen. Für die Ermittelung der ersten Näherung von ϱ wird man die Formeln IVb) und IVc) (pag. 499) rechnen; nimmt man $a = \frac{1}{y} = 50$, so folgt:

$r+r'+s$	0.1847	$1-\frac{r+r'+s}{4a}$	9.9933
$4a$	2.3010	$1-\frac{r+r'-s}{4a}$	9.9973
$r+r'-s$	0.0020	$\left(1-\frac{r+r'+s}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$	9.9966
Arg. für Q_s	+0.015266	$\left(1-\frac{r+r'-s}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$	9.9986
Arg. für Q_d	+0.006180	$\sqrt{r+r'+s}$	0.2424
$\log Q_s$	9.2238496	$\sqrt{r+r'-s}$	0.0400
$\log Q_d$	9.2226559	$Z_s : N_s$	0.2458
Sub_s	2.3376	$Z_d : N_d$	0.0474
Sub_d	2.7312	Add.	0.2131
$\log(\frac{1}{6}-Q_s)$	6_n8862	Subtr.	0.4357
$\log(\frac{1}{6}-Q_d)$	6_n4915	(+)	0.4589
I	7_n6133	$\sin\theta + M\sin\theta'$	0.3429
II	6_n6295	(−)	9.8101
Add.	0.0429	$h\sin\vartheta$	9.8766
Δ	7_n6562	log I	0.8018
4Δ	8_n2583	log II	9.6867
N	9.1661	Add.	0.0321

Es ist somit $d\varrho = -0.0026571$, also $\varrho = 1.0503887$. Die Durchführung der Hypothese mit diesem Werthe gibt in $k(t'-t)$ den Fehler $\Delta = -75$ Einheiten der 7. Decimale. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit dem Werthe von N nach der

Formel $d\varrho = \frac{1}{4} \Delta N$ der Werth $\varrho = 1.0503843$, welcher Werth bei der Lösung der Lambert'schen Gleichung in der That eine völlige Uebereinstimmung ergibt. Die Rechnung dieser Versuche stellt sich wie folgt:

$a = 50$

Versuch	1	2
ϱ	+1.0503887	+1.0503843
$\log(\varrho - f)$	9.9055383	9.9055359
$\log(\varrho - f')$	9.6879746	9.6879707
$\log(\varrho - \gamma)$	9.6352747	9.6352703
$\tang \theta$	9.9242630	9.9242606
$\tang \theta'$	0.3848449	0.3848410
$\tang \vartheta$	9.8723400	9.8723356
$\cos \theta$	9.8840681	9.8840691
$\cos \theta'$	9.5810722	9.5810756
$\cos \vartheta$	9.9040658	9.9040673
r	0.0972072	0.0972062
r'	9.9483348	9.9483314
Add.	0.2329419	0.2329409
$r + r'$	0.3301491	0.3301471
s	9.9573914	9.9573899
Add.	0.1534732	0.1534734
Subtr.	0.2394860	0.2394870
$r + r' + s$	0.4836223	0.4836205
$(r + r' + s)^{\frac{1}{2}}$	0.2418111	0.2418102
$r + r' - s$	0.0906625	0.0906601
$(r + r' - s)^{\frac{1}{2}}$	0.0453312	0.0453300
S	0.0152262	0.0152262
D	0.0061607	0.0061607
$(r + r' + s)^{\frac{3}{2}}$	0.7254334	0.7254307
Q_s	9.2238443	9.2238443
$(r + r' - s)^{\frac{3}{2}}$	0.1359937	0.1359901
Q_d	9.2226533	9.2226533
I	+0.8897698	+0.8897643
II	+0.2283742	+0.2283723
$k(t' - t)$	+1.1181440	+1.1281366
Δ	— 75	— 1

Der Uebergang auf die heliocentrischen Orte mit den Werthen:

$$\log \varrho = 0.0213482$$
$$\log \varrho' = 0.2476255$$

ergab nach den bekannten Formeln:

l	120°10′40″61
l'	59 7 10.64
tang b	0.0498726
tang b'	9.8396016
r	0.0972062
r'	9.9483316;

hiermit fand sich nach I) und II) pag. 472:

i	48°36′14″09
☊	21 34 53.76
u	95 42 30.61
u'	49 17 6.31
f	156 47 17.85.

Die Probe nach III b) ergab in guter Uebereinstimmung:

$$f = 156°47'17''83 .$$

Die Rechnung der übrigen Elemente nach den Formeln IV b — VII b) (pag. 476 ff.) setze ich als die erste Anwendung dieser Formeln hier vollständig an. Nach IV b) pag. 476) und V b (pag. 477) fand sich mit Rücksicht darauf, dass für a der Werth 50 angenommen wurde:

$\cos f^2$	9.9266828	α	25°19′ 2″34
rr'	0.0455378	$\frac{1}{2}\alpha$	12 39 31.17
$rr' \cos f^2 : a$	8.2732506	$\cos \frac{1}{2}\alpha^2$	9.9786263
$r + r'$	0.3301471	z	0.3049469
Subtr.	0.0038265	$rr \sin f^2$	9.2368162
ζ	0.3263206	p	8.9318693

durch die Formeln VI b) (pag. 478) ergaben sich die folgenden Zahlen:

Subtr.	0.5372767	$2ez \sin F$	$0_n1555687$
$r' - r$	$9_n5599295$		9.9997265
$z : a$	8.6059769	$2ez \cos F$	0.6053319
$1 - \frac{z}{a}$	9.9821073	F	—2° 1′59″47
$rr'\left(1 - \frac{z}{a}\right)$	0.0276451	$2ez$	0.6056054
$\sqrt{rr'\left(1 - \frac{z}{a}\right)}$	0.0138225	$2z$	0.6059769
$2\sqrt{rr'\left(1 - \frac{z}{a}\right)}$	0.3148525	e	9.9996285
$(r + r') \cos f$	$0_n2934885$	$1 + e$	0.3008443

Add.	0.2904794	q	8.6310250
v	$-158^\circ 49' 17'' 32$	$1-e$	6.9320550
v'	$+154\ 45\ 18.38$	$\frac{1-e}{1+e}$	6.6312107
π	$276\ \ 6\ 41.69$	$q^{\frac{3}{2}} : \sqrt{1+e}$	7.7961154

Nach VII*b* (pag. 479) stellt sich die Rechnung für die beiden Orte mit Benützung der Tafel XVIII wie folgt:

	1.	2.
$\frac{1}{2}v$	$-79^\circ 24' 38'' 66$	$+77^\circ 22' 39'' 19$
tang $\frac{1}{2}v^2$	1.4565448	1.2997450
θ	+0.0122393	+0.0085301
tang $\frac{1}{2}v$	$0_n 7282724$	0.6498725
P_1	2.0619293	2.0629908
tang $\frac{1}{2}v^3$	$2_n 1848172$	1.9496175
P_3	1.5819853	1.5838996
I	$2_n 7902017$	2.7128633
II	$3_n 7668025$	3.5335171
Add.	0.0435727	0.0611238
{...}	$3_n 8103752$	3.5946409
$\varDelta t$	+40.41016	−24.58987
$T =$	März 30.41016	30.41013

$T = 30.410145$.

Stellt man daher die gefundenen Elemente zusammen, so erhält man das System:

2.

$T = 1847$ März 30.410145

$\log q = 8.6310250$

$\frac{1}{a} = 0.0200000$

$\pi = 276^\circ\ 6' 41'' 69$
$\Omega = \ \ 21\ 34\ 53.76$ mittl. Aequin. 1847.0
$i = \ \ 48\ 36\ 14.09$

und die geocentrischen polaren Coordinaten für die Zeiten der obigen Normalorte ergeben sich aus diesen Elementen in der bekannten Weise wie folgt:

	A^2	B^2
1	$26^\circ 21' 16'' 29$	$+62^\circ 44'\ 5'' 15$
2	22 51 48.10	+54 30 3.06
3)	21 3 29.55	+47 37 13.55
4)	19 25 56.16	+39 55 48.48
5)	17 34 1.56	+31 3 3.58
6	15 55 23.17	+24 8 4.75
7	14 18 54.15	+16 35 5.36 .

Die Darstellung der beiden äussersten Orte durch die obigen Elemente gibt eine befriedigende Controle für die Richtigkeit der vorausgegangenen Rechnungen. Bildet man nun den obigen Entwickelungen entsprechend (pag. 500) die Differentialquotienten für Δy, und setzt zugleich die bereits oben (pag. 496) ermittelten, für Δx geltenden Coëfficienten an, so erhält man nunmehr die Bedingungsgleichungen:

für die Längen:

$$
\begin{aligned}
+\ 1''43 \cos\beta_2 &= -\ 22''14 \cos\beta_2\, \Delta x + 161''34 \cos\beta_2\, \Delta y \\
+\ 9.35 \cos\beta_3 &= -\ 35.45 \cos\beta_3\, \Delta x + 255.15 \cos\beta_3\, \Delta y \\
+\ 0.03 \cos\beta_4 &= -\ 49.00 \cos\beta_4\, \Delta x + 333.91 \cos\beta_4\, \Delta y \\
-\ 5.85 \cos\beta_5 &= -\ 64.74 \cos\beta_5\, \Delta x + 405.17 \cos\beta_5\, \Delta y \\
-10.07 \cos\beta_6 &= -\ 77.89 \cos\beta_6\, \Delta x + 455.04 \cos\beta_6\, \Delta y
\end{aligned}
$$

für die Breiten:

$$
\begin{aligned}
-10''50 &= -\ \ 18''51\, \Delta x + \ \ 21''49\, \Delta y \\
-15.07 &= -\ \ 36.10\, \Delta x + \ \ 65.06\, \Delta y \\
-25.13 &= -\ \ 57.62\, \Delta x + 135.63\, \Delta y \\
-35.71 &= \ \ \ \ 84.51\, \Delta x + 241.27\, \Delta y \\
-44.96 &= -\ 106.48\, \Delta x + 341.55\, \Delta y\,.
\end{aligned}
$$

Gibt man allen diesen Bedingungsgleichungen gleiches Gewicht und setzt man, um dieselben möglichst homogen zu gestalten, wieder wie oben (pag. 496):

$$\log \text{Fehlereinheit} = 1.6528$$
$$\log x = 2.0273 + \log (\Delta x)$$

und ausserdem:

$$\log y = 2.6186 + \log (\Delta y)$$

so erhalten die Normalgleichungen die folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
+\ 2.9752\, x - 2.9632\, y &= +\ 2.2480 \\
-\ 2.9632\, x + 3.4485\, y &= -\ 1.7654
\end{aligned}
$$

und die Auflösung ergibt:

$$\log \Delta x = 9.8560\,, \quad \log \Delta y = 0.0126\,.$$

Wollte man sowohl die Elemente als auch die Darstellung der Orte als Funktionen von y darstellen, so würde man die erste der obigen Normalgleichungen hierzu benützen können; doch gehe ich auf diese Darstellung nicht ein, weil schon oben für dieses Verfahren hinreichend erläuternde Beispiele angeführt sind. Durch Einführung dieser Werthe der Unbekannten in die obigen Bedingungsgleichungen erhält man die folgende Darstellung der Orte:

	$\cos\beta\,\partial\lambda$	$\partial\beta$
1.	0″0	0″0
2.	+0.4	+0.6
3.	+5.8	+4.2
4.	+0.7	+2.3
5.	0.0	+0.2
6.	−0.9	−3.5
7.	0.0	0.0 .

Interpolirt man die Elemente nach der oben (pag. 500) angesetzten Formel, so findet man das folgende, nunmehr als definitiv anzusehende Elementensystem:

Ⅲ I. 1847

$T =$ März 30 321616 mittl. Berl. Zeit.

$\log q = 8.6293030$

$\log a = 2.686\ 1328 \quad (a = 485.437)$

$\pi = 276^\circ\ 2'21''91$
$\Omega = 21^\circ 41'51''69$ mittl. Aequinoct. 1847.0
$i = 18^\circ 38'49''32$

Die directe Nachrechnung der Orte aus diesen Elementen gibt gegen die obige aus den Differentialformeln abgeleitete Darstellung derselben eine genügende Uebereinstimmung. Sollte man, wie dies bei der Rechnung aus kleinen heliocentrischen Bogen zu befürchten ist, die Interpolation zwischen den Elementen selbst ihrer Linearität nach für nicht genügend gesichert halten, so wird man die Elemente aus dem verbesserten Werthe von M mit Zugrundelegung des oben gefundenen Werthes von a direct berechnen und dann einen viel besseren Anschluss an die Resultate der Differentialquotienten erhalten. Der Grund dieser Bemerkung ist nach den früher gegebenen Erklärungen (pag. 483) leicht ersichtlich; in dem hier gewählten Beispiele hätte man also anzunehmen:

$$\log M = 0.2262773 + 0.0003000\,\Delta x = 0.2264931\ ,$$
$$a = 485.437\ ;$$

doch führen diese Zahlen in dem vorliegenden Falle innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung aus leicht begreiflichen Gründen auf die oben durch Interpolation erhaltenen Elemente.

§ 5. Variation der Distanzen mit Benützung der Variation des Verhältnisses der Distanzen.

Man kann das durch die Variation des Verhältnissen der Distanzen M erhaltene Resultat noch in anderer Weise zur Ermittelung des wahrscheinlichsten Kegelschnittes verwerthen, und zwar bietet das hier vorgeschlagene Verfahren in jenen Fällen besondere Vortheile, wo durch die Variation von M die beiden geocentrischen Distanzen beeinflusst werden; jene Fälle, in denen bei der Variation von M die eine geocentrische Distanz fast unverändert bleibt, würde sich für die Anwendung dieses Verfahrens nicht eignen; man wird dies leicht durch die vorhandenen Rechnungen entscheiden können.

Es wurde oben (pag. 493) gefunden für die

	erste Parabel	zweite Parabel
$\log \varrho$	0.022 4472	0.022 2311
$\log \varrho'$	0.248 7245	0.248 8084 ;

es ändern sich also die beiden geocentrischen Distanzen in genügender Weise. Rechnet man nun ein Elementensystem, indem man den Werth von ϱ aus der zweiten, den Werth von ϱ' aus der ersten parabolischen Bahn nimmt, so hat diese Bahn als Grundlage die Werthe:

$$\log \varrho = 0.022\ 2311$$
$$\log \varrho' = 0.248\ 7245\ .$$

Betrachtet man die auf diesem Werthe beruhenden Elemente als Ausgangselemente, so hat man das vorliegende Problem auf die Methode der Variation der Distanzen reducirt, die in § 3 (pag. 480 u. ff.) ausführlich behandelt wurde. Das aus diesen letzteren Distanzen abgeleitete System ist also als das System I, die erste Parabel als System II, die zweite Parabel als System III zu betrachten und es ist weiter mit Beibehaltung der dort gewählten Bezeichnung (pag. 481, 482):

$$\delta x = +\ 0.000\ 2161$$
$$\delta y = +\ 0.000\ 0839\ .$$

Da hiermit Alles auf eine bereits bekannte Methode zurückgeführt erscheint, so ist weiter für die Durchführung des Beispieles nichts zu bemerken und ich will hier nur beifügen, dass die Vortheile dieser Methode gegen die in § 4 (pag. 498 ff.) auseinandergesetzte nicht unerheblich sind. Man hat nämlich vorerst nicht nöthig, die heliocentrischen Orte von Neuem aus den geocentrischen Distanzen abzuleiten, da die heliocentrischen Orte unverändert den früheren Rechnungen entlehnt werden können; ausserdem hat man nicht nöthig, die Lambert'sche Gleichung durch Versuche, bei denen r, r' und s variabel sind, zu lösen, sondern man gelangt durch die in den meisten Fällen völlig ausreichende Formel 26 (pag. 471) direct zur Kenntniss des Werthes von a, woraus die übrigen Elemente mit Hilfe der oben

gegebenen Vorschriften leicht gefunden werden können. Sollte die versuchsweise Lösung dennoch nothwendig sein, was wohl kaum je der Fall sein wird, so wird die Unveränderlichkeit der Werthe r, r' und s diese Rechnungen wesentlich abkürzen. Ich will nun das Beispiel des Kometen I 1847 nach dieser Methode durchführen.

Nach pag. 495 finden sich die heliocentrischen Orte, und zwar der erste Ort nach der zweiten Hypothese über M, der zweite nach der ersten Hypothese mit den Annahmen:

$$\log \varrho = 0.022\ 2311 \qquad \log \varrho' = 0.248\ 7245$$

für die geocentrischen Entfernungen wie folgt:

$$\log r \quad 0.097\ 6836 \qquad \log r' \quad 9.950\ 3541$$
$$l \quad 120^\circ 6' 38'' 47 \qquad l' \quad 59^\circ 2' 2'' 48$$
$$\text{tang}\, b \quad 0.050\ 7892 \qquad \text{tang}\, b' \quad 9.838\ 2382\,,$$

welche Angaben also der früheren Rechnung unverändert entlehnt sind.

Es sind nach Formel (I) und (II) (pag. 472):

$$\Omega \quad 21^\circ 42' 16'' 20 \qquad u \quad 95^\circ 34' 34'' 14$$
$$i \quad 48^\circ 38' 59'' 27 \qquad u' \quad 49^\circ 5' 49'' 81$$
$$\tfrac{1}{2}\,(u' - u) = f = 156^\circ 45' 37'' 835\,.$$

und die Controlrechnung nach IIIa (pag. 473) ergab in guter Uebereinstimmung:

$$f = 156^\circ 45' 37'' 83\,.$$

Bestimmt man die Sehne s nach der Formel:

$$s^2 = r^2 + r'^2 - r\,r' \cos 2f\,,$$

so erhält man:

$$\log s = 9.958\ 3262\,.$$

Mit Benützung der Formeln (24) und (25) (pag. 471) findet man weiter:

$$\log \alpha = 7.04276$$
$$\log \beta = 9_n 58044\,;$$

die Berechnung von γ erscheint bereits unnöthig; aus den letzteren Werthen erhält man endlich:

$$\frac{1}{a} = +\,0.001\ 1029.9 \text{ also } \log a = 2.957\ 4284\,,$$

wobei es in der Natur der Sache gelegen ist, dass a selbst numerisch nicht genau zu bestimmen ist; für die Darstellung der Beobachtungen aber ist diese Unsicherheit unschädlich. Die Controlrechnung mittelst der Lambert'schen Gleichung nach (17) (pag. 468) ergab eine vollständige Bestätigung für die Richtigkeit der Bestimmung von a.

Weiter wurde ermittelt nach IVb (pag. 476) und Vb (pag. 477):

$$\log z = 0.310\ 0819$$
$$\log p = 8.930\ 2156$$

dann nach VIb) (pag. 478):

$F =$	$-1^0 59' 40'' 52$	$v =$	$-158^0 45' 18'' 35$
$\log e =$	$9.999\ 9795$	$v' =$	$154^0 45' 57'' 31$
$\log (1-e) =$	$5.671\ 7674$	$\omega =$	$254^0 19' 52'' 50$
$\log q =$	$8.629\ 1958$	$\pi =$	$276^0 2' 8'' 70$;

endlich fand sich nach VIIb) (pag. 479) die Perihelzeit

aus: v, $T =$ März 30.31734
" v', $T =$ März 30.31740
also im Mittel: $T =$ März 30.317370,

womit die Rechnung der Elemente, die nach den obigen Vorschriften als Ausgangselemente zu betrachten sind, erledigt ist. Um alles übersichtlich beisammen zu haben, stelle ich die Elemente, die sich aus den voranstehenden und den oben für die beiden Parabeln (pag. 495 ff.) gefundenen Zahlen ergeben, neben einander:

	I	II	III
T	30.317370	30.322715	30.308665
$\log q$	8.6291958	8.6287758	8.6291866
$\frac{1}{a}$	0.0011029.9	0	0
π	$276^0\ 2'\ 8'' 70$	$276^0\ 2'\ 8'' 45$	$276^0\ 1' 48'' 03$
Ω	$21^0 42' 16'' 20$	$21^0 43' 23'' 19$	$21^0 42' 28'' 94$
i	$48^0 38' 59'' 27$	$48^0 39' 42'' 85$	$48^0 38' 58'' 33$

Die diesen Elementen für die Zeiten der Normalorte entsprechenden geocentrischen Coordinaten, mit Weglassung der äusseren Orte, die als Grundlagen der Rechnung durch alle drei Systeme völlig dargestellt werden, sind:

	I	II	III
A_2	$22^0 48' 59'' 67$	$22^0 49'\ 6'' 82$	$22^0 48' 44'' 68$
A_3	20 59 2.84	20 59 14.40	20 58 38.95
A_4	19 20 5.24	19 20 22.25	19 19 33.25
A_5	17 26 51.85	17 27 16.39	17 26 11.65
A_6	15 47 16.86	15 47 48.13	15 46 30.24
B_2	+ 54 29 29.42	+ 54 29 41.57	+ 54 29 23.06
B_3	+ 47 35 46.05	+ 47 36 8.49	+ 47 35 32.39
B_4	+ 39 52 58.78	+ 39 53 32.85	+ 39 52 35.23
B_5	+ 30 58 14.61	+ 30 59 2.31	+ 30 57 37.80
B_6	+ 24 1 25.21	+ 24 2 23.20	+ 24 0 36.72

Mit Rücksicht auf die im § 3 (pag. 480 ff.) auseinandergesetzten Vorschriften stellen sich die Bedingungsgleichungen zur Ermittelung der Correctionen der Logarithmen der geocentrischen Distanzen in folgender Weise:

Für die Längen:

$$+ 8''58 = + 7''15\ \Delta x - 14''99\ \Delta y$$
$$+ 20.91 = + 11.56\ \Delta x - 23.89\ \Delta y$$
$$+ 17.04 = + 17.01\ \Delta x - 31.99\ \Delta y$$
$$+ 18.69 = + 24.54\ \Delta x - 40.20\ \Delta y$$
$$+ 21.20 = + 31.27\ \Delta x - 46.62\ \Delta y$$

Für die Breiten:

$$+ 1''65 = + 12''15\ \Delta x - 6''36\ \Delta y$$
$$+ 7.37 = + 22.44\ \Delta x - 13.66\ \Delta y$$
$$+ 8.94 = + 34.07\ \Delta x - 23.55\ \Delta y$$
$$+ 11.99 = + 47.70\ \Delta x - 36.81\ \Delta y$$
$$+ 13.03 = + 57.99\ \Delta x - 48.49\ \Delta y$$

Die Bedingungsgleichungen für die Längen sind mit dem Cosinus der Breite, und ausserdem wären alle Gleichungen noch mit den Quadratwurzeln ihrer zugehörigen Gewichte durchzumultipliciren; letzteres entfiel hier, da alle Normalgleichungen gleiches Gewicht erhielten. Führt man, um diese Gleichungen homogen zu machen (vergl. pag. 318), die Relationen ein:

$$\text{Logarithmus der Fehlereinheit} = 1.2869$$
$$\log x = \log \Delta x + 1.7633$$
$$\log y = \log \Delta y + 1_n6856\ ,$$

so sind nun die neuen, logarithmisch angesetzten Bedingungsgleichungen:

$$9.4107 = 8.8551\ x + 9.2543\ y$$
$$9.8623 = 9.1286\ x + 9.5215\ y$$
$$9.8295 = 9.3524\ x + 9.7044\ y$$
$$9.9179 = 9.5508\ x + 9.8518\ y$$
$$0.0000 = 9.6924\ x + 9.9436\ y$$
$$8.9306 = 9.3213\ x + 9.1179\ y$$
$$9.5806 = 9.5877\ x + 9.4498\ y$$
$$9.6644 = 9.7691\ x + 9.6864\ y$$
$$9.7919 = 9.9152\ x + 9.8803\ y$$
$$9.8280 = 0.0000\ x + 0.0000\ y\ ,$$

die sich in die folgenden Normalgleichungen vereinigen:

$$+ 2.6039\ x + 2.9084\ y = + 2.6801$$
$$+ 2.9084\ x + 3.5843\ y = + 3.5825\ .$$

Die Auflösung gibt:

$$\log x = 9_n8731\ , \quad \log y = 0.2056\ ,$$

und mit Rücksicht auf die Homogenitätsfactoren folgt hieraus:

$$\log \Delta x = 9_n3967\ , \quad \log \Delta y = 9_n8069\ .$$

Wollte man nun die Distanzen bestimmen, die man der Ermittelung der neuen Elemente zu Grunde zu legen hätte, so wäre zu beachten, dass die Werthe von Δx und Δy in Einheiten der gewählten Aenderungen zu verstehen sind; letztere wurden oben in Einheiten der siebenten Decimale beziehungsweise + 2161 und + 830 gefunden; die Correctionen für die Distanzen würden also sein:

$$\text{für } \log \varrho - 539$$
$$\text{für } \log \varrho' - 538\,;$$

doch wird es in dem vorliegenden Falle nicht nöthig sein, die Berechnung der neuen Elemente aus den Distanzen durchzuführen, sondern es wird, da die Aenderungen der Elemente hinreichend klein sind, die Interpolation zwischen den Elementne zu demselben Resultate führen.

Ermittelt man vorerst die übrig bleibenden Fehler, indem man die obigen Werthe von Δx und Δy in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen einsetzt, so erhält man die folgende Darstellung der Orte:

	$\cos\beta\,\delta\lambda$	$\delta\beta$
1.	0″0	0.0
2.	+0.4	+0.6
3.	+5.7	+1.2
4.	+0.6	+2.3
5.	−0.8	+0.3
6.	−0.8	−3.6
7.	0.0	0.0

welche mit jener nach der in § 4 entwickelten Methode (vergl. pag. 506) angeführten Darstellung der Orte so gut wie völlig stimmt.

Die Interpolation der Elemente (vergl. pag. 500) ergibt:

Comet I 1847

$T =$ März 30.321618 mittl. Berl. Zeit.

$\log q = 8.629\ 3064$

$\log a = 2.080\ 8752$

$\left.\begin{aligned} \pi &= 276^\circ\ 2'22''01 \\ \Omega &= 21^\circ 41' 51'' 33 \\ i &= 48^\circ 38' 49'' 01 \end{aligned}\right\}$ mittl. Aeq. 1847.0

Wie man sieht, unterscheiden sich die Elemente um geringe Grössen von den auf pag. 506 angeführten. Der Unterschied in a ist aber beträchtlich, doch erklärt sich derselbe hinreichend durch die Unsicherheit der siebenstelligen Rechnung, da beide Systeme in nahezu völliger Uebereinstimmung die Beobachtungen darstellen. Hätte man die Elemente als Funktionen der Aenderungen des reciproken Werthes der grossen Achse dargestellt (vergl. die Andeutung pag. 505), so würde man in der That finden, dass die Einführung des Unterschiedes in a in den beiden Systemen eine völlige Uebereinstimmung herstellen würde.

Anhang.

Am Schlusse der folgenden Tafelsammlung habe ich eine mir von Herrn R. Schram freundlichst zur Verfügung gestellte Tafel als Tafel XIX aufgenommen. Dieselbe hat den Zweck, die Verwandlung grosser Zwischenzeiten in Tage zu erleichtern, indem sie die vorgelegten Daten unmittelbar in Tage der julianischen Periode umzusetzen gestattet, ohne dass man nöthig hätte, sich um die Art des Jahres (ob Schaltjahr oder nicht) zu bekümmern, und dürfte insofern einen Vortheil gegenüber den ähnlichen in der Connaissance und im englischen Nautical-Almanac enthaltenen Tafeln bieten. Die Tafel gibt auf der rechten Seite die Zahl der seit dem Beginne der julianischen Periode verflossenen Tage für den Anfang eines jeden Jahrhundertes sowohl für den julianischen als für den gregorianischen Kalender, und auf der linken Seite die Zahl der seit dem Anfange des Jahrhundertes bis zum Anfange des gegebenen Monates verflossenen Tage; die Summe dieser zwei Zahlen, mehr dem Monatsdatum gibt die verlangte Tageszahl der julianischen Periode; negative Jahreszahlen sind im Sinne der astronomischen Zählweise (Astr: — Hist: = + 1) verstanden. Es ist noch eine Hilfstafel beigefügt, um Stunden, Minuten und Sekunden in Tagesbruchtheile streng zu verwandeln. Weiter ist zu bemerken, dass in der Tafel für die einzelnen Jahre die Anordnung entsprechend jener der Logarithmentafeln so getroffen ist, dass der erste Theil der Zahl abgetrennt und durch einen Strich über der ersten Ziffer des zweiten Theiles angezeigt ist, wann der Uebergang auf die nächsthöheren Anfangsziffern stattfindet; für jene Jahrhunderte, welche bei der gregorianischen Zeitrechnung in Klammern gesetzt sind, ist für das nullte Jahr des betreffenden Säculums die erste ober dem Striche stehende Zeile auf der linken Seite zu benützen. Es soll nun die Anwendung der Tafel durch ein Beispiel erläutert werden; man hätte die Zwischenzeit zwischen — 399 Juni 21, $6^h\, 9^m\, 21^s 60$ julianisch und 1850 Januar 0, $0^h\, 0^m\, 0^s$ gregorianisch zu bestimmen. Die Rechnung stellt sich wie folgt, wenn man beachtet, dass — 399 = — 400 + 1:

Jahrhundert	— 400 . .	1574957	1800	2378495
Jahr 1 und Monat Juni	. .	517	50 Januar . .	18263
Monatstag 21	. .	21	0	0
	$6^h\, 0^m\, 0^s$ . .	0.25	1850 Jan. 0, $0^h\, 0^m\, 0^s 00$ = 2396758.00	
	$9^m\, 21^s 60$.	65		
— 399 Juni 21, $6^h\, 9^m\, 21^s 60$ = 1575495.2565				

also die Zwischenzeit 821262.7435. Hansen rechnet die Zwischenzeit in dem Supplemente zu seinen Sonnentafeln und findet sie gleich 2248 julianischen Jahren 180.7435 Tagen, was mit dieser Bestimmung identisch ist. Einige der Tafel angehängte Bemerkungen bedürfen kaum einer Erläuterung; so fände man z. B. dass der 21. Juni — 399 ein Samstag und der 0. Januar 1850 ein Montag war, da die erste Tageszahl (1575495) durch 7 dividirt den Rest 5, die zweite (2396758) den Rest 0 gibt. Bezüglich der das Berliner Jahrbuch betreffenden Bemerkung ist es klar, dass für die erstere schon die drei letzten, für die folgende aber schon die zwei letzten Ziffern der Zahl genügen, die Entscheidung zu bringen.

TAFELN.



Tafel I.

log $\{N_1{}^3(n)\}$.

vergl. pag. 18.

$\pm n$	N	$-\Delta$	$\pm n$	N	$-\Delta$	$\pm n$	N	$-\Delta$	$\pm n$	N	$-\Delta$	$\pm n$	N	$-\Delta$
0.000	9_n221 849	2	0.050	9_n218 579	132	0.100	9_n208 620	270	0.150	9_n191 497	420	0.200	9_n166 331	594
0.001	9_n221 847	4	0.051	9_n218 447	136	0.101	9_n208 350	273	0.151	9_n191 077	424	0.201	9_n165 737	598
0.002	9_n221 843	6	0.052	9_n218 311	138	0.102	9_n208 077	275	0.152	9_n190 653	427	0.202	9_n165 139	601
0.003	9_n221 837	9	0.053	9_n218 173	140	0.103	9_n207 802	279	0.153	9_n190 226	431	0.203	9_n164 538	606
0.004	9_n221 828	12	0.054	9_n218 033	144	0.104	9_n207 523	282	0.154	9_n189 795	433	0.204	9_n163 932	609
0.005	9_n221 816	14	0.055	9_n217 889	146	0.105	9_n207 241	284	0.155	9_n189 362	437	0.205	9_n163 323	613
0.006	9_n221 802	17	0.056	9_n217 743	148	0.106	9_n206 957	287	0.156	9_n188 925	441	0.206	9_n162 710	617
0.007	9_n221 785	20	0.057	9_n217 595	151	0.107	9_n206 670	290	0.157	9_n188 484	443	0.207	9_n162 093	621
0.008	9_n221 765	22	0.058	9_n217 444	154	0.108	9_n206 380	293	0.158	9_n188 041	447	0.208	9_n161 472	625
0.009	9_n221 743	25	0.059	9_n217 290	157	0.109	9_n206 087	296	0.159	9_n187 594	450	0.209	9_n160 847	629
0.010	9_n221 718	27	0.060	9_n217 133	160	0.110	9_n205 791	299	0.160	9_n187 144	453	0.210	9_n160 218	632
0.011	9_n221 691	30	0.061	9_n216 973	162	0.111	9_n205 492	302	0.161	9_n186 691	456	0.211	9_n159 586	637
0.012	9_n221 661	33	0.062	9_n216 811	164	0.112	9_n205 190	305	0.162	9_n186 235	460	0.212	9_n158 949	640
0.013	9_n221 628	35	0.063	9_n216 647	168	0.113	9_n204 885	307	0.163	9_n185 775	463	0.213	9_n158 309	645
0.014	9_n221 593	38	0.064	9_n216 479	170	0.114	9_n204 578	311	0.164	9_n185 312	467	0.214	9_n157 664	648
0.015	9_n221 555	40	0.065	9_n216 309	173	0.115	9_n204 267	314	0.165	9_n184 845	470	0.215	9_n157 016	653
0.016	9_n221 515	43	0.066	9_n216 136	176	0.116	9_n203 953	316	0.166	9_n184 375	473	0.216	9_n156 363	656
0.017	9_n221 472	46	0.067	9_n215 960	178	0.117	9_n203 637	319	0.167	9_n183 902	477	0.217	9_n155 707	661
0.018	9_n221 426	48	0.068	9_n215 782	181	0.118	9_n203 318	323	0.168	9_n183 425	480	0.218	9_n155 046	664
0.019	9_n221 378	51	0.069	9_n215 601	184	0.119	9_n202 995	325	0.169	9_n182 945	483	0.219	9_n154 382	669
0.020	9_n221 327	53	0.070	9_n215 417	186	0.120	9_n202 670	328	0.170	9_n182 462	487	0.220	9_n153 713	673
0.021	9_n221 274	56	0.071	9_n215 231	189	0.121	9_n202 342	332	0.171	9_n181 975	490	0.221	9_n153 040	676
0.022	9_n221 218	59	0.072	9_n215 042	192	0.122	9_n202 010	334	0.172	9_n181 485	493	0.222	9_n152 364	681
0.023	9_n221 159	61	0.073	9_n214 850	195	0.123	9_n201 676	337	0.173	9_n180 992	497	0.223	9_n151 683	685
0.024	9_n221 098	64	0.074	9_n214 655	198	0.124	9_n201 339	340	0.174	9_n180 495	501	0.224	9_n150 998	689
0.025	9_n221 034	67	0.075	9_n214 457	200	0.125	9_n200 999	344	0.175	9_n179 994	504	0.225	9_n150 309	694
0.026	9_n220 967	69	0.076	9_n214 257	203	0.126	9_n200 655	346	0.176	9_n179 490	507	0.226	9_n149 615	697
0.027	9_n220 898	72	0.077	9_n214 054	205	0.127	9_n200 309	349	0.177	9_n178 983	511	0.227	9_n148 918	702
0.028	9_n220 826	74	0.078	9_n213 849	209	0.128	9_n199 960	353	0.178	9_n178 472	514	0.228	9_n148 216	706
0.029	9_n220 752	77	0.079	9_n213 640	211	0.129	9_n199 607	355	0.179	9_n177 958	518	0.229	9_n147 510	710
0.030	9_n220 675	80	0.080	9_n213 429	214	0.130	9_n199 252	358	0.180	9_n177 440	521	0.230	9_n146 800	715
0.031	9_n220 595	82	0.081	9_n213 215	216	0.131	9_n198 894	362	0.181	9_n176 919	525	0.231	9_n146 085	719
0.032	9_n220 513	85	0.082	9_n212 999	220	0.132	9_n198 532	364	0.182	9_n176 394	528	0.232	9_n145 366	723
0.033	9_n220 428	88	0.083	9_n212 779	222	0.133	9_n198 168	368	0.183	9_n175 866	532	0.233	9_n144 643	727
0.034	9_n220 340	90	0.084	9_n212 557	225	0.134	9_n197 800	370	0.184	9_n175 334	536	0.234	9_n143 916	732
0.035	9_n220 250	93	0.085	9_n212 332	228	0.135	9_n197 430	374	0.185	9_n174 798	539	0.235	9_n143 184	736
0.036	9_n220 157	96	0.086	9_n212 104	231	0.136	9_n197 056	377	0.186	9_n174 259	542	0.236	9_n142 448	741
0.037	9_n220 061	98	0.087	9_n211 873	233	0.137	9_n196 679	379	0.187	9_n173 717	546	0.237	9_n141 707	745
0.038	9_n219 963	101	0.088	9_n211 640	236	0.138	9_n196 300	383	0.188	9_n173 171	550	0.238	9_n140 962	749
0.039	9_n219 862	103	0.089	9_n211 404	239	0.139	9_n195 917	386	0.189	9_n172 621	554	0.239	9_n140 213	754
0.040	9_n219 759	106	0.090	9_n211 165	242	0.140	9_n195 531	390	0.190	9_n172 067	557	0.240	9_n139 459	758
0.041	9_n219 653	109	0.091	9_n210 923	244	0.141	9_n195 141	392	0.191	9_n171 510	560	0.241	9_n138 701	763
0.042	9_n219 544	111	0.092	9_n210 679	248	0.142	9_n194 749	395	0.192	9_n170 950	565	0.242	9_n137 938	767
0.043	9_n219 433	114	0.093	9_n210 431	250	0.143	9_n194 354	399	0.193	9_n170 385	568	0.243	9_n137 171	772
0.044	9_n219 319	117	0.094	9_n210 181	253	0.144	9_n193 955	402	0.194	9_n169 817	571	0.244	9_n136 399	776
0.045	9_n219 202	119	0.095	9_n209 928	256	0.145	9_n193 553	405	0.195	9_n169 246	576	0.245	9_n135 623	781
0.046	9_n219 083	122	0.096	9_n209 672	259	0.146	9_n193 148	408	0.196	9_n168 670	579	0.246	9_n134 842	786
0.047	9_n218 961	125	0.097	9_n209 413	261	0.147	9_n192 740	411	0.197	9_n168 091	583	0.247	9_n134 056	790
0.048	9_n218 836	127	0.098	9_n209 152	264	0.148	9_n192 329	414	0.198	9_n167 508	586	0.248	9_n133 266	795
0.049	9_n218 709	130	0.099	9_n208 888	268	0.149	9_n191 915	418	0.199	9_n166 922	591	0.249	9_n132 471	799
0.050	9_n218 579		0.100	9_n208 620		0.150	9_n191 497		0.200	9_n166 331		0.250	9_n131 672	

Tafel I.

$\log \{N_1^1 n\}$.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	8_n920 819	1	0.050	8_n918 642	88	0.100	8_n912 045	178	0.150	8_n900 822	274	0.200	8_n884 607	379
0.001	8_n920 818	3	0.051	8_n918 554	90	0.101	8_n911 867	180	0.151	8_n900 548	276	0.201	8_n884 228	381
0.002	8_n920 815	4	0.052	8_n918 464	92	0.102	8_n911 687	182	0.152	8_n900 272	277	0.202	8_n883 847	383
0.003	8_n920 811	6	0.053	8_n918 372	93	0.103	8_n911 505	184	0.153	8_n899 995	280	0.203	8_n883 464	386
0.004	8_n920 805	8	0.054	8_n918 279	96	0.104	8_n911 321	186	0.154	8_n899 715	282	0.204	8_n883 078	387
0.005	8_n920 797	10	0.055	8_n918 183	97	0.105	8_n911 135	187	0.155	8_n899 433	284	0.205	8_n882 691	390
0.006	8_n920 787	11	0.056	8_n918 086	98	0.106	8_n910 948	189	0.156	8_n899 149	286	0.206	8_n882 301	392
0.007	8_n920 776	13	0.057	8_n917 988	101	0.107	8_n910 759	191	0.157	8_n898 863	288	0.207	8_n881 909	395
0.008	8_n920 763	15	0.058	8_n917 887	102	0.108	8_n910 568	193	0.158	8_n898 575	290	0.208	8_n881 514	397
0.009	8_n920 748	16	0.059	8_n917 785	104	0.109	8_n910 375	195	0.159	8_n898 285	292	0.209	8_n881 117	399
0.010	8_n920 732	18	0.060	8_n917 681	106	0.110	8_n910 180	197	0.160	8_n897 993	294	0.210	8_n880 718	401
0.011	8_n920 714	20	0.061	8_n917 575	108	0.111	8_n909 983	199	0.161	8_n897 699	296	0.211	8_n880 317	403
0.012	8_n920 694	22	0.062	8_n917 467	109	0.112	8_n909 784	200	0.162	8_n897 403	298	0.212	8_n879 914	406
0.013	8_n920 672	24	0.063	8_n917 358	112	0.113	8_n909 584	203	0.163	8_n897 105	300	0.213	8_n879 508	408
0.014	8_n920 648	25	0.064	8_n917 246	113	0.114	8_n909 381	204	0.164	8_n896 805	302	0.214	8_n879 100	411
0.015	8_n920 623	27	0.065	8_n917 133	114	0.115	8_n909 177	206	0.165	8_n896 503	304	0.215	8_n878 689	412
0.016	8_n920 596	28	0.066	8_n917 019	117	0.116	8_n908 971	208	0.166	8_n896 199	306	0.216	8_n878 277	415
0.017	8_n920 568	31	0.067	8_n916 902	118	0.117	8_n908 763	210	0.167	8_n895 893	308	0.217	8_n877 862	418
0.018	8_n920 537	32	0.068	8_n916 784	120	0.118	8_n908 553	212	0.168	8_n895 585	311	0.218	8_n877 444	419
0.019	8_n920 505	34	0.069	8_n916 664	122	0.119	8_n908 341	214	0.169	8_n895 274	312	0.219	8_n877 025	422
0.020	8_n920 471	35	0.070	8_n916 542	124	0.120	8_n908 127	215	0.170	8_n894 962	315	0.220	8_n876 603	425
0.021	8_n920 436	38	0.071	8_n916 418	126	0.121	8_n907 912	218	0.171	8_n894 647	316	0.221	8_n876 178	426
0.022	8_n920 398	39	0.072	8_n916 292	127	0.122	8_n907 694	219	0.172	8_n894 331	319	0.222	8_n875 752	429
0.023	8_n920 359	41	0.073	8_n916 165	129	0.123	8_n907 475	221	0.173	8_n894 012	320	0.223	8_n875 323	432
0.024	8_n920 318	42	0.074	8_n916 036	131	0.124	8_n907 254	224	0.174	8_n893 692	323	0.224	8_n874 891	433
0.025	8_n920 276	45	0.075	8_n915 905	132	0.125	8_n907 030	225	0.175	8_n893 369	325	0.225	8_n874 458	436
0.026	8_n920 231	46	0.076	8_n915 773	135	0.126	8_n906 805	227	0.176	8_n893 044	327	0.226	8_n874 022	439
0.027	8_n920 185	48	0.077	8_n915 638	136	0.127	8_n906 578	229	0.177	8_n892 717	329	0.227	8_n873 583	441
0.028	8_n920 137	49	0.078	8_n915 502	138	0.128	8_n906 349	230	0.178	8_n892 388	331	0.228	8_n873 142	443
0.029	8_n920 088	52	0.079	8_n915 364	140	0.129	8_n906 119	233	0.179	8_n892 057	334	0.229	8_n872 699	446
0.030	8_n920 036	53	0.080	8_n915 224	142	0.130	8_n905 886	235	0.180	8_n891 723	335	0.230	8_n872 253	448
0.031	8_n919 983	55	0.081	8_n915 082	143	0.131	8_n905 651	237	0.181	8_n891 388	338	0.231	8_n871 805	450
0.032	8_n919 928	56	0.082	8_n914 939	146	0.132	8_n905 414	238	0.182	8_n891 050	339	0.232	8_n871 355	453
0.033	8_n919 872	58	0.083	8_n914 793	147	0.133	8_n905 176	241	0.183	8_n890 711	342	0.233	8_n870 902	455
0.034	8_n919 814	60	0.084	8_n914 646	149	0.134	8_n904 935	242	0.184	8_n890 369	344	0.234	8_n870 447	458
0.035	8_n919 754	62	0.085	8_n914 497	150	0.135	8_n904 693	244	0.185	8_n890 025	346	0.235	8_n869 989	460
0.036	8_n919 692	64	0.086	8_n914 347	153	0.136	8_n904 449	247	0.186	8_n889 679	348	0.236	8_n869 529	463
0.037	8_n919 628	65	0.087	8_n914 194	154	0.137	8_n904 202	248	0.187	8_n889 331	351	0.237	8_n869 066	465
0.038	8_n919 563	67	0.088	8_n914 040	156	0.138	8_n903 954	250	0.188	8_n888 980	352	0.238	8_n868 601	467
0.039	8_n919 496	69	0.089	8_n913 884	158	0.139	8_n903 704	252	0.189	8_n888 628	355	0.239	8_n868 134	470
0.040	8_n919 427	71	0.090	8_n913 726	160	0.140	8_n903 452	254	0.190	8_n888 273	357	0.240	8_n867 664	473
0.041	8_n919 356	72	0.091	8_n913 566	162	0.141	8_n903 198	256	0.191	8_n887 916	359	0.241	8_n867 191	475
0.042	8_n919 284	74	0.092	8_n913 404	163	0.142	8_n902 942	258	0.192	8_n887 557	361	0.242	8_n866 716	477
0.043	8_n919 210	76	0.093	8_n913 241	166	0.143	8_n902 684	260	0.193	8_n887 196	363	0.243	8_n866 239	480
0.044	8_n919 134	78	0.094	8_n913 075	167	0.144	8_n902 424	262	0.194	8_n886 833	366	0.244	8_n865 759	482
0.045	8_n919 056	79	0.095	8_n912 908	169	0.145	8_n902 162	264	0.195	8_n886 467	367	0.245	8_n865 277	485
0.046	8_n918 977	81	0.096	8_n912 739	171	0.146	8_n901 898	266	0.196	8_n886 100	370	0.246	8_n864 792	488
0.047	8_n918 896	83	0.097	8_n912 568	172	0.147	8_n901 632	268	0.197	8_n885 730	373	0.247	8_n864 304	490
0.048	8_n918 813	85	0.098	8_n912 396	175	0.148	8_n901 364	270	0.198	8_n885 357	374	0.248	8_n863 814	492
0.049	8_n918 728	86	0.099	8_n912 221	176	0.149	8_n901 094	272	0.199	8_n884 983	376	0.249	8_n863 322	495
0.050	8_n918 642		0.100	8_n912 045		0.150	8_n900 822		0.200	8_n884 607		0.250	8_n862 827	

Tafel I.

$\log \{N_1^5\, n\}$.

± n	N	−Δ
0.000	8.522 879	
0.001	8.522 877	2
0.002	8.522 872	5
0.003	8.522 864	8
0.004	8.522 853	11
0.005	8.522 838	15
0.006	8.522 820	18
0.007	8.522 799	21
0.008	8.522 775	24
0.009	8.522 747	28
		31
0.010	8.522 716	
0.011	8.522 682	34
0.012	8.522 644	38
0.013	8.522 603	41
0.014	8.522 559	44
0.015	8.522 512	47
0.016	8.522 462	50
0.017	8.522 408	54
0.018	8.522 351	57
0.019	8.522 291	60
		64
0.020	8.522 227	
0.021	8.522 160	67
0.022	8.522 090	70
0.023	8.522 017	73
0.024	8.521 940	77
0.025	8.521 860	80
0.026	8.521 777	83
0.027	8.521 690	87
0.028	8.521 600	90
0.029	8.521 507	93
		96
0.030	8.521 411	
0.031	8.521 312	99
0.032	8.521 209	103
0.033	8.521 102	107
0.034	8.520 993	109
0.035	8.520 880	113
0.036	8.520 764	116
0.037	8.520 645	119
0.038	8.520 522	123
0.039	8.520 396	126
		129
0.040	8.520 267	
0.041	8.520 134	133
0.042	8.519 998	136
0.043	8.519 859	139
0.044	8.519 716	143
0.045	8.519 571	145
0.046	8.519 421	150
0.047	8.519 269	152
0.048	8.519 113	156
0.049	8.518 954	159
0.050	8.518 791	163

± n	N	−Δ
0.050	8.518 791	
0.051	8.518 626	165
0.052	8.518 457	169
0.053	8.518 284	173
0.054	8.518 108	176
0.055	8.517 929	179
0.056	8.517 747	182
0.057	8.517 561	186
0.058	8.517 371	190
0.059	8.517 179	192
		196
0.060	8.516 983	
0.061	8.516 784	199
0.062	8.516 581	203
0.063	8.516 375	206
0.064	8.516 166	209
0.065	8.515 953	213
0.066	8.515 736	217
0.067	8.515 517	219
0.068	8.515 294	223
0.069	8.515 067	227
		229
0.070	8.514 838	
0.071	8.514 604	234
0.072	8.514 368	236
0.073	8.514 128	240
0.074	8.513 884	244
0.075	8.513 637	247
0.076	8.513 387	250
0.077	8.513 133	254
0.078	8.512 876	257
0.079	8.512 615	261
		264
0.080	8.512 351	
0.081	8.512 084	267
0.082	8.511 813	271
0.083	8.511 538	275
0.084	8.511 260	278
0.085	8.510 979	281
0.086	8.510 694	285
0.087	8.510 406	288
0.088	8.510 114	292
0.089	8.509 818	296
		299
0.090	8.509 519	
0.091	8.509 217	302
0.092	8.508 911	306
0.093	8.508 601	310
0.094	8.508 288	313
0.095	8.507 972	316
0.096	8.507 652	320
0.097	8.507 328	324
0.098	8.507 001	327
0.099	8.506 670	331
0.100	8.506 336	334

± n	N	−Δ
0.100	8.506 336	
0.101	8.505 998	338
0.102	8.505 656	342
0.103	8.505 311	345
0.104	8.504 963	348
0.105	8.504 611	352
0.106	8.504 255	356
0.107	8.503 895	360
0.108	8.503 532	363
0.109	8.503 165	367
		370
0.110	8.502 795	
0.111	8.502 421	374
0.112	8.502 043	378
0.113	8.501 662	381
0.114	8.501 277	385
0.115	8.500 888	389
0.116	8.500 496	392
0.117	8.500 100	396
0.118	8.499 700	400
0.119	8.499 296	404
		407
0.120	8.498 889	
0.121	8.498 478	411
0.122	8.498 063	415
0.123	8.497 645	418
0.124	8.497 223	422
0.125	8.496 797	426
0.126	8.496 367	430
0.127	8.495 933	434
0.128	8.495 496	437
0.129	8.495 055	441
		445
0.130	8.494 610	
0.131	8.494 161	449
0.132	8.493 709	452
0.133	8.493 252	457
0.134	8.492 792	460
0.135	8.492 328	464
0.136	8.491 860	468
0.137	8.491 388	472
0.138	8.490 912	476
0.139	8.490 433	479
		484
0.140	8.489 949	
0.141	8.489 462	487
0.142	8.488 970	492
0.143	8.488 475	495
0.144	8.487 976	499
0.145	8.487 472	504
0.146	8.486 965	507
0.147	8.486 454	511
0.148	8.485 939	515
0.149	8.485 420	519
0.150	8.484 896	524

± n	N	−Δ
0.150	8.484 896	
0.151	8.484 369	527
0.152	8.483 838	531
0.153	8.483 303	535
0.154	8.482 763	540
0.155	8.482 220	543
0.156	8.481 672	548
0.157	8.481 120	552
0.158	8.480 565	555
0.159	8.480 005	560
		564
0.160	8.479 441	
0.161	8.478 872	569
0.162	8.478 300	572
0.163	8.477 723	577
0.164	8.477 143	580
0.165	8.476 558	585
0.166	8.475 968	590
0.167	8.475 375	593
0.168	8.474 777	598
0.169	8.474 175	602
		606
0.170	8.473 569	
0.171	8.472 959	610
0.172	8.472 344	615
0.173	8.471 725	619
0.174	8.471 101	624
0.175	8.470 474	627
0.176	8.469 841	633
0.177	8.469 205	636
0.178	8.468 564	641
0.179	8.467 919	645
		650
0.180	8.467 269	
0.181	8.466 615	654
0.182	8.465 956	659
0.183	8.465 293	663
0.184	8.464 625	668
0.185	8.463 953	672
0.186	8.463 276	677
0.187	8.462 595	681
0.188	8.461 909	686
0.189	8.461 219	690
		695
0.190	8.460 524	
0.191	8.459 824	700
0.192	8.459 120	704
0.193	8.458 412	708
0.194	8.457 698	714
0.195	8.456 980	718
0.196	8.456 257	723
0.197	8.455 530	727
0.198	8.454 797	733
0.199	8.454 060	737
0.200	8.453 318	742

± n	N	−Δ
0.200	8.453 318	
0.201	8.452 572	746
0.202	8.451 820	752
0.203	8.451 064	756
0.204	8.450 303	761
0.205	8.449 537	766
0.206	8.448 766	771
0.207	8.447 990	776
0.208	8.447 210	780
0.209	8.446 424	786
		791
0.210	8.445 633	
0.211	8.444 838	795
0.212	8.444 037	801
0.213	8.443 231	806
0.214	8.442 420	811
0.215	8.441 605	815
0.216	8.440 784	821
0.217	8.439 958	826
0.218	8.439 126	832
0.219	8.438 290	836
		842
0.220	8.437 448	
0.221	8.436 602	846
0.222	8.435 750	852
0.223	8.434 892	858
0.224	8.434 030	862
0.225	8.433 162	868
0.226	8.432 288	874
0.227	8.431 410	878
0.228	8.430 526	884
0.229	8.429 636	890
		895
0.230	8.428 741	
0.231	8.427 841	900
0.232	8.426 935	906
0.233	8.426 023	912
0.234	8.425 106	917
0.235	8.424 184	922
0.236	8.423 256	928
0.237	8.422 322	934
0.238	8.421 382	940
0.239	8.420 437	945
		951
0.240	8.419 486	
0.241	8.418 530	956
0.242	8.417 567	963
0.243	8.416 599	968
0.244	8.415 625	974
0.245	8.414 645	980
0.246	8.413 659	986
0.247	8.412 667	992
0.248	8.411 669	998
0.249	8.410 666	1003
0.250	8.409 656	1010

Tafel I.

$\log \{N_1^6 n\}$.

$\pm n$	N	$-\Delta$	$\pm n$	N	$-\Delta$	$\pm n$	N	$-\Delta$	$\pm n$	N	$-\Delta$	$\pm n$	N	$-\Delta$
0.000	8.045 757	1	0.050	8.043 037	111	0.100	8.034 795	222	0.150	8.020 789	342	0.200	8.000 579	472
0.001	8.045 756	3	0.051	8.042 926	112	0.101	8.034 573	225	0.151	8.020 447	344	0.201	8.000 107	475
0.002	8.045 753	5	0.052	8.042 814	115	0.102	8.034 348	227	0.152	8.020 103	346	0.202	7.999 632	477
0.003	8.045 748	8	0.053	8.042 699	116	0.103	8.034 121	229	0.153	8.019 757	349	0.203	7.999 155	480
0.004	8.045 740	10	0.054	8.042 583	119	0.104	8.033 892	232	0.154	8.019 408	352	0.204	7.998 675	482
0.005	8.045 730	12	0.055	8.042 464	122	0.105	8.033 660	234	0.155	8.019 056	354	0.205	7.998 193	486
0.006	8.045 718	14	0.056	8.042 342	123	0.106	8.033 426	236	0.156	8.018 702	356	0.206	7.997 707	488
0.007	8.045 704	16	0.057	8.042 219	126	0.107	8.033 190	239	0.157	8.018 346	359	0.207	7.997 219	491
0.008	8.045 688	19	0.058	8.042 093	128	0.108	8.032 951	241	0.158	8.017 987	362	0.208	7.996 728	494
0.009	8.045 669		0.059	8.041 965		0.109	8.032 710		0.159	8.017 625		0.209	7.996 234	
		20			130			243			364			497
0.010	8.045 649	23	0.060	8.041 835	132	0.110	8.032 467	246	0.160	8.017 261	366	0.210	7.995 737	500
0.011	8.045 626	25	0.061	8.041 703	134	0.111	8.032 221	248	0.161	8.016 895	369	0.211	7.995 237	502
0.012	8.045 601	27	0.062	8.041 569	137	0.112	8.031 973	250	0.162	8.016 526	372	0.212	7.994 735	505
0.013	8.045 574	29	0.063	8.041 432	139	0.113	8.031 723	253	0.163	8.016 154	374	0.213	7.994 230	508
0.014	8.045 545	32	0.064	8.041 293	141	0.114	8.031 470	255	0.164	8.015 780	377	0.214	7.993 722	511
0.015	8.045 513	34	0.065	8.041 152	144	0.115	8.031 215	257	0.165	8.015 403	379	0.215	7.993 211	514
0.016	8.045 479	35	0.066	8.041 008	145	0.116	8.030 958	260	0.166	8.015 024	382	0.216	7.992 697	517
0.017	8.045 444	38	0.067	8.040 863	148	0.117	8.030 698	262	0.167	8.014 642	384	0.217	7.992 180	519
0.018	8.045 406	40	0.068	8.040 715	150	0.118	8.030 436	265	0.168	8.014 258	387	0.218	7.991 661	522
0.019	8.045 366		0.069	8.040 565		0.119	8.030 171		0.169	8.013 871		0.219	7.991 139	
		43			153			266			389			526
0.020	8.045 323	45	0.070	8.040 412	154	0.120	8.029 905	269	0.170	8.013 482	392	0.220	7.990 613	528
0.021	8.045 278	46	0.071	8.040 258	157	0.121	8.029 636	272	0.171	8.013 090	395	0.221	7.990 085	531
0.022	8.045 232	49	0.072	8.040 101	159	0.122	8.029 364	274	0.172	8.012 695	397	0.222	7.989 554	534
0.023	8.045 183	51	0.073	8.039 942	161	0.123	8.029 090	276	0.173	8.012 298	400	0.223	7.989 020	536
0.024	8.045 132	53	0.074	8.039 781	164	0.124	8.028 814	279	0.174	8.011 898	402	0.224	7.988 484	540
0.025	8.045 079	56	0.075	8.039 617	166	0.125	8.028 535	281	0.175	8.011 496	405	0.225	7.987 944	543
0.026	8.045 023	58	0.076	8.039 451	168	0.126	8.028 254	283	0.176	8.011 091	408	0.226	7.987 401	545
0.027	8.044 965	59	0.077	8.039 283	170	0.127	8.027 971	286	0.177	8.010 683	410	0.227	7.986 856	549
0.028	8.044 906	62	0.078	8.039 113	172	0.128	8.027 685	288	0.178	8.010 273	413	0.228	7.986 307	551
0.029	8.044 844		0.079	8.038 941		0.129	8.027 397		0.179	8.009 860		0.229	7.985 756	
		65			175			290			415			555
0.030	8.044 779	66	0.080	8.038 766	177	0.130	8.027 107	293	0.180	8.009 445	418	0.230	7.985 201	557
0.031	8.044 713	68	0.081	8.038 589	179	0.131	8.026 814	295	0.181	8.009 027	421	0.231	7.984 644	561
0.032	8.044 645	71	0.082	8.038 410	182	0.132	8.026 519	298	0.182	8.008 606	423	0.232	7.984 083	563
0.033	8.044 574	73	0.083	8.038 228	183	0.133	8.026 221	300	0.183	8.008 183	426	0.233	7.983 520	566
0.034	8.044 501	75	0.084	8.038 045	186	0.134	8.025 921	303	0.184	8.007 757	428	0.234	7.982 954	570
0.035	8.044 426	77	0.085	8.037 859	189	0.135	8.025 618	305	0.185	8.007 329	432	0.235	7.982 384	572
0.036	8.044 349	80	0.086	8.037 670	190	0.136	8.025 313	307	0.186	8.006 897	434	0.236	7.981 812	576
0.037	8.044 269	82	0.087	8.037 480	193	0.137	8.025 006	310	0.187	8.006 463	436	0.237	7.981 236	578
0.038	8.044 187	83	0.088	8.037 287	195	0.138	8.024 696	312	0.188	8.006 027	439	0.238	7.980 658	582
0.039	8.044 104		0.089	8.037 092		0.139	8.024 384		0.189	8.005 588		0.239	7.980 076	
		86			197			314			442			584
0.040	8.044 018	89	0.090	8.036 895	200	0.140	8.024 070	317	0.190	8.005 146	445	0.240	7.979 492	588
0.041	8.043 929	90	0.091	8.036 695	202	0.141	8.023 753	320	0.191	8.004 701	447	0.241	7.978 904	590
0.042	8.043 839	93	0.092	8.036 493	204	0.142	8.023 433	322	0.192	8.004 254	450	0.242	7.978 314	594
0.043	8.043 746	94	0.093	8.036 289	207	0.143	8.023 111	324	0.193	8.003 804	452	0.243	7.977 720	597
0.044	8.043 652	97	0.094	8.036 082	208	0.144	8.022 787	327	0.194	8.003 352	456	0.244	7.977 123	600
0.045	8.043 555	100	0.095	8.035 874	211	0.145	8.022 460	329	0.195	8.002 896	458	0.245	7.976 523	603
0.046	8.043 455	101	0.096	8.035 663	214	0.146	8.022 131	332	0.196	8.002 438	461	0.246	7.975 920	606
0.047	8.043 354	104	0.097	8.035 449	215	0.147	8.021 799	334	0.197	8.001 977	463	0.247	7.975 314	609
0.048	8.043 250	105	0.098	8.035 234	218	0.148	8.021 465	337	0.198	8.001 514	466	0.248	7.974 705	613
0.049	8.043 145	108	0.099	8.035 016	221	0.149	8.021 128	339	0.199	8.001 048	469	0.249	7.974 092	615
0.050	8.043 037		0.100	8.034 795		0.150	8.020 789		0.200	8.000 579		0.250	7.973 477	

Tafel I.

$\log \{N_1{}^7(n)\}$.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	7_n853 872	2	0.050	7_n849 421	180	0.100	7_n835 854	368	0.150	7_n812 487	575	0.200	7_n778 030	815
0.001	7_n853 870	5	0.051	7_n849 241	185	0.101	7_n835 486	372	0.151	7_n811 912	579	0.201	7_n777 215	821
0.002	7_n853 865	9	0.052	7_n849 056	187	0.102	7_n835 114	376	0.152	7_n811 333	584	0.202	7_n776 394	826
0.003	7_n853 856	12	0.053	7_n848 869	192	0.103	7_n834 738	380	0.153	7_n810 749	588	0.203	7_n775 568	831
0.004	7_n853 844	16	0.054	7_n848 677	195	0.104	7_n834 358	384	0.154	7_n810 161	593	0.204	7_n774 737	837
0.005	7_n853 828	20	0.055	7_n848 482	199	0.105	7_n833 974	388	0.155	7_n809 568	597	0.205	7_n773 900	842
0.006	7_n853 808	23	0.056	7_n848 283	202	0.106	7_n833 586	391	0.156	7_n808 971	602	0.206	7_n773 058	847
0.007	7_n853 785	27	0.057	7_n848 081	206	0.107	7_n833 195	396	0.157	7_n808 369	606	0.207	7_n772 211	853
0.008	7_n853 758	30	0.058	7_n847 875	210	0.108	7_n832 799	400	0.158	7_n807 763	610	0.208	7_n771 358	858
0.009	7_n853 728	33	0.059	7_n847 665	213	0.109	7_n832 399	403	0.159	7_n807 153	616	0.209	7_n770 500	864
0.010	7_n853 695	38	0.060	7_n847 452	218	0.110	7_n831 996	408	0.160	7_n806 537	619	0.210	7_n769 636	870
0.011	7_n853 657	41	0.061	7_n847 234	220	0.111	7_n831 588	411	0.161	7_n805 918	625	0.211	7_n768 766	874
0.012	7_n853 616	44	0.062	7_n847 014	225	0.112	7_n831 177	416	0.162	7_n805 293	628	0.212	7_n767 892	881
0.013	7_n853 572	48	0.063	7_n846 789	228	0.113	7_n830 761	419	0.163	7_n804 665	634	0.213	7_n767 011	886
0.014	7_n853 524	51	0.064	7_n846 561	232	0.114	7_n830 342	424	0.164	7_n804 031	638	0.214	7_n766 125	891
0.015	7_n853 473	55	0.065	7_n846 329	235	0.115	7_n829 918	428	0.165	7_n803 393	643	0.215	7_n765 234	897
0.016	7_n853 418	59	0.066	7_n846 094	239	0.116	7_n829 490	431	0.166	7_n802 750	647	0.216	7_n764 337	903
0.017	7_n853 359	62	0.067	7_n845 855	243	0.117	7_n829 059	436	0.167	7_n802 103	652	0.217	7_n763 434	908
0.018	7_n853 297	66	0.068	7_n845 612	247	0.118	7_n828 623	440	0.168	7_n801 451	657	0.218	7_n762 526	915
0.019	7_n853 231	69	0.069	7_n845 365	250	0.119	7_n828 183	443	0.169	7_n800 794	661	0.219	7_n761 611	920
0.020	7_n853 162	73	0.070	7_n845 115	254	0.120	7_n827 740	448	0.170	7_n800 133	666	0.220	7_n760 691	925
0.021	7_n853 089	76	0.071	7_n844 861	258	0.121	7_n827 292	452	0.171	7_n799 467	671	0.221	7_n759 766	932
0.022	7_n853 013	80	0.072	7_n844 603	261	0.122	7_n826 840	456	0.172	7_n798 796	675	0.222	7_n758 834	937
0.023	7_n852 933	83	0.073	7_n844 342	265	0.123	7_n826 384	460	0.173	7_n798 121	680	0.223	7_n757 897	943
0.024	7_n852 850	87	0.074	7_n844 077	269	0.124	7_n825 924	464	0.174	7_n797 441	685	0.224	7_n756 954	949
0.025	7_n852 763	91	0.075	7_n843 808	273	0.125	7_n825 460	469	0.175	7_n796 756	690	0.225	7_n756 005	955
0.026	7_n852 672	94	0.076	7_n843 535	376	0.126	7_n824 991	472	0.176	7_n796 066	695	0.226	7_n755 050	960
0.027	7_n852 578	98	0.077	7_n843 259	280	0.127	7_n824 519	477	0.177	7_n795 371	699	0.227	7_n754 090	967
0.028	7_n852 480	101	0.078	7_n842 979	284	0.128	7_n824 042	481	0.178	7_n794 672	704	0.228	7_n753 123	973
0.029	7_n852 379	105	0.079	7_n842 695	288	0.129	7_n823 561	485	0.179	7_n793 968	709	0.229	7_n752 150	979
0.030	7_n852 274	109	0.080	7_n842 407	291	0.130	7_n823 076	489	0.180	7_n793 259	714	0.230	7_n751 171	984
0.031	7_n852 165	112	0.081	7_n842 116	296	0.131	7_n822 587	493	0.181	7_n792 545	719	0.231	7_n750 187	991
0.032	7_n852 053	116	0.082	7_n841 820	299	0.132	7_n822 094	497	0.182	7_n791 826	724	0.232	7_n749 196	997
0.033	7_n851 937	119	0.083	7_n841 521	302	0.133	7_n821 597	502	0.183	7_n791 102	728	0.233	7_n748 199	1003
0.034	7_n851 818	123	0.084	7_n841 219	307	0.134	7_n821 095	506	0.184	7_n790 374	734	0.234	7_n747 196	1009
0.035	7_n851 695	126	0.085	7_n840 912	310	0.135	7_n820 589	510	0.185	7_n789 640	738	0.235	7_n746 187	1016
0.036	7_n851 569	130	0.086	7_n840 602	315	0.136	7_n820 079	515	0.186	7_n788 902	744	0.236	7_n745 171	1021
0.037	7_n851 439	134	0.087	7_n840 287	318	0.137	7_n819 564	518	0.187	7_n788 158	748	0.237	7_n744 150	1028
0.038	7_n851 305	137	0.088	7_n839 969	321	0.138	7_n819 046	523	0.188	7_n787 410	754	0.238	7_n743 122	1035
0.039	7_n851 168	141	0.089	7_n839 648	326	0.139	7_n818 523	527	0.189	7_n786 656	759	0.239	7_n742 087	1040
0.040	7_n851 027	144	0.090	7_n839 322	330	0.140	7_n817 996	532	0.190	7_n785 897	763	0.240	7_n741 047	1047
0.041	7_n850 883	148	0.091	7_n838 992	333	0.141	7_n817 464	535	0.191	7_n785 134	769	0.241	7_n740 000	1053
0.042	7_n850 735	152	0.092	7_n838 659	337	0.142	7_n816 929	540	0.192	7_n784 365	774	0.242	7_n738 947	1060
0.043	7_n850 583	155	0.093	7_n838 322	341	0.143	7_n816 389	544	0.193	7_n783 591	779	0.243	7_n737 887	1066
0.044	7_n850 428	159	0.094	7_n837 981	345	0.144	7_n815 845	549	0.194	7_n782 812	784	0.244	7_n736 821	1073
0.045	7_n850 269	162	0.095	7_n837 636	348	0.145	7_n815 296	553	0.195	7_n782 028	789	0.245	7_n735 748	1079
0.046	7_n850 107	166	0.096	7_n837 288	353	0.146	7_n814 743	558	0.196	7_n781 239	794	0.246	7_n734 669	1086
0.047	7_n849 941	170	0.097	7_n836 935	356	0.147	7_n814 185	561	0.197	7_n780 445	800	0.247	7_n733 583	1092
0.048	7_n849 771	173	0.098	7_n836 579	361	0.148	7_n813 624	566	0.198	7_n779 645	805	0.248	7_n732 491	1099
0.049	7_n849 598	177	0.099	7_n836 218	364	0.149	7_n813 058	571	0.199	7_n778 840	810	0.249	7_n731 392	1106
0.050	7_n849 421		0.100	7_n835 854		0.150	7_n812 487		0.200	7_n778 030		0.250	7_n730 286	

Tafel I.

$\log \{N_1^S(n)\}$.

$\pm n$	N	$-\Delta$
0.000	7_n251 812	1
0.001	7_n251 811	4
0.002	7_n251 807	6
0.003	7_n251 801	8
0.004	7_n251 793	11
0.005	7_n251 782	13
0.006	7_n251 769	15
0.007	7_n251 754	18
0.008	7_n251 736	20
0.009	7_n251 716	22
0.010	7_n251 694	25
0.011	7_n251 669	27
0.012	7_n251 642	30
0.013	7_n251 612	32
0.014	7_n251 580	34
0.015	7_n251 546	37
0.016	7_n251 509	39
0.017	7_n251 470	41
0.018	7_n251 429	44
0.019	7_n251 385	46
0.020	7_n251 339	49
0.021	7_n251 290	51
0.022	7_n251 239	53
0.023	7_n251 186	55
0.024	7_n251 131	58
0.025	7_n251 073	61
0.026	7_n251 012	62
0.027	7_n250 950	65
0.028	7_n250 885	68
0.029	7_n250 817	70
0.030	7_n250 747	72
0.031	7_n250 675	75
0.032	7_n250 600	77
0.033	7_n250 523	79
0.034	7_n250 444	82
0.035	7_n250 362	84
0.036	7_n250 278	87
0.037	7_n250 191	89
0.038	7_n250 102	91
0.039	7_n250 011	93
0.040	7_n249 918	96
0.041	7_n249 822	99
0.042	7_n249 723	101
0.043	7_n249 622	103
0.044	7_n249 519	106
0.045	7_n249 413	108
0.046	7_n249 305	110
0.047	7_n249 195	113
0.048	7_n249 082	115
0.049	7_n248 967	118
0.050	7_n248 849	

$\pm n$	N	$-\Delta$
0.050	7_n248 849	120
0.051	7_n248 729	122
0.052	7_n248 607	125
0.053	7_n248 482	127
0.054	7_n248 355	129
0.055	7_n248 226	132
0.056	7_n248 094	135
0.057	7_n247 959	137
0.058	7_n247 822	139
0.059	7_n247 683	141
0.060	7_n247 542	144
0.061	7_n247 398	147
0.062	7_n247 251	149
0.063	7_n247 102	151
0.064	7_n246 951	154
0.065	7_n246 797	156
0.066	7_n246 641	158
0.067	7_n246 483	161
0.068	7_n246 322	164
0.069	7_n246 158	166
0.070	7_n245 992	168
0.071	7_n245 824	171
0.072	7_n245 653	173
0.073	7_n245 480	175
0.074	7_n245 305	178
0.075	7_n245 127	181
0.076	7_n244 946	183
0.077	7_n244 763	185
0.078	7_n244 578	188
0.079	7_n244 390	190
0.080	7_n244 200	193
0.081	7_n244 007	195
0.082	7_n243 812	197
0.083	7_n243 615	200
0.084	7_n243 415	203
0.085	7_n243 212	205
0.086	7_n243 007	207
0.087	7_n242 800	210
0.088	7_n242 590	213
0.089	7_n242 377	214
0.090	7_n242 163	218
0.091	7_n241 945	220
0.092	7_n241 725	222
0.093	7_n241 503	225
0.094	7_n241 278	227
0.095	7_n241 051	230
0.096	7_n240 821	232
0.097	7_n240 589	235
0.098	7_n240 354	237
0.099	7_n240 117	239
0.100	7_n239 878	

$\pm n$	N	$-\Delta$
0.100	7_n239 878	243
0.101	7_n239 635	244
0.102	7_n239 391	247
0.103	7_n239 144	250
0.104	7_n238 894	252
0.105	7_n238 642	255
0.106	7_n238 387	257
0.107	7_n238 130	260
0.108	7_n237 870	263
0.109	7_n237 607	265
0.110	7_n237 342	267
0.111	7_n237 075	270
0.112	7_n236 805	272
0.113	7_n236 533	275
0.114	7_n236 258	278
0.115	7_n235 980	280
0.116	7_n235 700	283
0.117	7_n235 417	285
0.118	7_n235 132	288
0.119	7_n234 844	290
0.120	7_n234 554	293
0.121	7_n234 261	295
0.122	7_n233 966	298
0.123	7_n233 668	301
0.124	7_n233 367	303
0.125	7_n233 064	306
0.126	7_n232 758	308
0.127	7_n232 450	311
0.128	7_n232 139	314
0.129	7_n231 825	316
0.130	7_n231 509	318
0.131	7_n231 191	322
0.132	7_n230 869	324
0.133	7_n230 545	326
0.134	7_n230 219	329
0.135	7_n229 890	332
0.136	7_n229 558	335
0.137	7_n229 223	337
0.138	7_n228 886	340
0.139	7_n228 546	342
0.140	7_n228 204	345
0.141	7_n227 859	348
0.142	7_n227 511	350
0.143	7_n227 161	353
0.144	7_n226 808	355
0.145	7_n226 453	359
0.146	7_n226 094	361
0.147	7_n225 733	363
0.148	7_n225 370	367
0.149	7_n225 003	369
0.150	7_n224 634	

$\pm n$	N	$-\Delta$
0.150	7_n224 634	371
0.151	7_n224 263	375
0.152	7_n223 888	377
0.153	7_n223 511	379
0.154	7_n223 132	383
0.155	7_n222 749	385
0.156	7_n222 364	388
0.157	7_n221 976	391
0.158	7_n221 585	393
0.159	7_n221 192	396
0.160	7_n220 796	399
0.161	7_n220 397	401
0.162	7_n219 996	405
0.163	7_n219 591	407
0.164	7_n219 184	409
0.165	7_n218 775	413
0.166	7_n218 362	415
0.167	7_n217 947	418
0.168	7_n217 529	421
0.169	7_n217 108	424
0.170	7_n216 684	427
0.171	7_n216 257	429
0.172	7_n215 828	432
0.173	7_n215 396	435
0.174	7_n214 961	437
0.175	7_n214 524	441
0.176	7_n214 083	443
0.177	7_n213 640	446
0.178	7_n213 194	449
0.179	7_n212 745	452
0.180	7_n212 293	455
0.181	7_n211 838	458
0.182	7_n211 380	460
0.183	7_n210 920	463
0.184	7_n210 457	466
0.185	7_n209 991	469
0.186	7_n209 522	472
0.187	7_n209 050	475
0.188	7_n208 575	478
0.189	7_n208 097	480
0.190	7_n207 617	484
0.191	7_n207 133	486
0.192	7_n206 647	490
0.193	7_n206 157	492
0.194	7_n205 665	495
0.195	7_n205 170	498
0.196	7_n204 672	502
0.197	7_n204 170	504
0.198	7_n203 666	507
0.199	7_n203 159	510
0.200	7_n202 649	

$\pm n$	N	$-\Delta$
0.200	7_n202 649	513
0.201	7_n202 136	516
0.202	7_n201 620	519
0.203	7_n201 101	522
0.204	7_n200 579	525
0.205	7_n200 054	528
0.206	7_n199 526	531
0.207	7_n198 995	534
0.208	7_n198 461	537
0.209	7_n197 924	540
0.210	7_n197 384	544
0.211	7_n196 840	546
0.212	7_n196 294	549
0.213	7_n195 745	553
0.214	7_n195 192	555
0.215	7_n194 637	559
0.216	7_n194 078	562
0.217	7_n193 516	564
0.218	7_n192 952	568
0.219	7_n192 384	571
0.220	7_n191 813	575
0.221	7_n191 238	577
0.222	7_n190 661	580
0.223	7_n190 081	584
0.224	7_n189 497	587
0.225	7_n188 910	590
0.226	7_n188 320	593
0.227	7_n187 727	597
0.228	7_n187 130	599
0.229	7_n186 531	603
0.230	7_n185 928	606
0.231	7_n185 322	609
0.232	7_n184 713	613
0.233	7_n184 100	616
0.234	7_n183 484	619
0.235	7_n182 865	622
0.236	7_n182 243	626
0.237	7_n181 617	629
0.238	7_n180 988	632
0.239	7_n180 356	635
0.240	7_n179 721	639
0.241	7_n179 082	642
0.242	7_n178 440	646
0.243	7_n177 794	648
0.244	7_n177 146	653
0.245	7_n176 493	655
0.246	7_n175 838	659
0.247	7_n175 179	662
0.248	7_n174 517	666
0.249	7_n173 851	669
0.250	7_n173 182	

Tafel I.

$\log \{N_1^{\,0}\, n\}$.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	7.200 659	1	0.050	7.196 004	189	0.100	7.181 811	385	0.150	7.157 357	602	0.200	7.121 271	855
0.001	7.200 658	6	0.051	7.195 815	192	0.101	7.181 426	389	0.151	7.156 755	606	0.201	7.120 416	860
0.002	7.200 652	9	0.052	7.195 623	197	0.102	7.181 037	394	0.152	7.156 149	611	0.202	7.119 556	865
0.003	7.200 643	13	0.053	7.195 426	200	0.103	7.180 643	397	0.153	7.155 538	616	0.203	7.118 691	871
0.004	7.200 630	17	0.054	7.195 226	204	0.104	7.180 246	402	0.154	7.154 922	621	0.204	7.117 820	877
0.005	7.200 613	20	0.055	7.195 022	208	0.105	7.179 844	405	0.155	7.154 301	625	0.205	7.116 943	882
0.006	7.200 593	24	0.056	7.194 814	212	0.106	7.179 439	410	0.156	7.153 676	630	0.206	7.116 061	888
0.007	7.200 569	28	0.057	7.194 602	216	0.107	7.179 029	414	0.157	7.153 046	634	0.207	7.115 173	894
0.008	7.200 541	32	0.058	7.194 386	219	0.108	7.178 615	418	0.158	7.152 412	640	0.208	7.114 279	900
0.009	7.200 509	35	0.059	7.194 167	223	0.109	7.178 197	423	0.159	7.151 772	644	0.209	7.113 379	905
0.010	7.200 474	39	0.060	7.193 944	227	0.110	7.177 774	426	0.160	7.151 128	649	0.210	7.112 474	911
0.011	7.200 435	43	0.061	7.193 717	231	0.111	7.177 348	431	0.161	7.150 479	653	0.211	7.111 563	917
0.012	7.200 392	46	0.062	7.193 486	235	0.112	7.176 917	435	0.162	7.149 826	659	0.212	7.110 646	923
0.013	7.200 346	50	0.063	7.193 251	238	0.113	7.176 482	439	0.163	7.149 167	663	0.213	7.109 723	928
0.014	7.200 296	54	0.064	7.193 013	243	0.114	7.176 043	443	0.164	7.148 504	668	0.214	7.108 795	935
0.015	7.200 242	57	0.065	7.192 770	246	0.115	7.175 600	447	0.165	7.147 836	673	0.215	7.107 860	940
0.016	7.200 185	62	0.066	7.192 524	250	0.116	7.175 153	452	0.166	7.147 163	678	0.216	7.106 920	946
0.017	7.200 123	65	0.067	7.192 274	254	0.117	7.174 701	456	0.167	7.146 485	682	0.217	7.105 974	953
0.018	7.200 058	68	0.068	7.192 020	258	0.118	7.174 245	460	0.168	7.145 803	688	0.218	7.105 021	958
0.019	7.199 990	73	0.069	7.191 762	262	0.119	7.173 785	464	0.169	7.145 115	692	0.219	7.104 063	965
0.020	7.199 917	76	0.070	7.191 500	266	0.120	7.173 321	469	0.170	7.144 423	698	0.220	7.103 098	970
0.021	7.199 841	80	0.071	7.191 234	270	0.121	7.172 852	473	0.171	7.143 725	702	0.221	7.102 128	977
0.022	7.199 761	83	0.072	7.190 964	273	0.122	7.172 379	477	0.172	7.143 023	707	0.222	7.101 151	982
0.023	7.199 678	88	0.073	7.190 691	277	0.123	7.171 902	482	0.173	7.142 316	713	0.223	7.100 169	989
0.024	7.199 590	91	0.074	7.190 414	282	0.124	7.171 420	486	0.174	7.141 603	717	0.224	7.099 180	995
0.025	7.199 499	95	0.075	7.190 132	285	0.125	7.170 934	490	0.175	7.140 886	722	0.225	7.098 185	1001
0.026	7.199 404	98	0.076	7.189 847	289	0.126	7.170 444	494	0.176	7.140 164	728	0.226	7.097 184	1008
0.027	7.199 306	102	0.077	7.189 558	293	0.127	7.169 950	499	0.177	7.139 436	732	0.227	7.096 176	1013
0.028	7.199 204	106	0.078	7.189 265	297	0.128	7.169 451	503	0.178	7.138 704	738	0.228	7.095 163	1020
0.029	7.199 098	110	0.079	7.188 968	301	0.129	7.168 948	508	0.179	7.137 966	742	0.229	7.094 143	1027
0.030	7.198 988	114	0.080	7.188 667	305	0.130	7.168 440	512	0.180	7.137 224	748	0.230	7.093 116	1033
0.031	7.198 874	117	0.081	7.188 362	309	0.131	7.167 928	516	0.181	7.136 476	753	0.231	7.092 083	1039
0.032	7.198 757	121	0.082	7.188 053	313	0.132	7.167 412	520	0.182	7.135 723	758	0.232	7.091 044	1045
0.033	7.198 636	125	0.083	7.187 740	317	0.133	7.166 892	525	0.183	7.134 965	763	0.233	7.089 999	1052
0.034	7.198 511	128	0.084	7.187 423	320	0.134	7.166 367	530	0.184	7.134 202	768	0.234	7.088 947	1059
0.035	7.198 383	132	0.085	7.187 103	325	0.135	7.165 837	534	0.185	7.133 434	774	0.235	7.087 888	1065
0.036	7.198 251	136	0.086	7.186 778	329	0.136	7.165 303	538	0.186	7.132 660	779	0.236	7.086 823	1072
0.037	7.198 115	140	0.087	7.186 449	332	0.137	7.164 765	543	0.187	7.131 881	784	0.237	7.085 751	1078
0.038	7.197 975	143	0.088	7.186 117	337	0.138	7.164 222	547	0.188	7.131 097	789	0.238	7.084 673	1085
0.039	7.197 832	148	0.089	7.185 780	341	0.139	7.163 675	552	0.189	7.130 308	795	0.239	7.083 588	1092
0.040	7.197 684	151	0.090	7.185 439	344	0.140	7.163 123	556	0.190	7.129 513	800	0.240	7.082 496	1098
0.041	7.197 533	155	0.091	7.185 095	349	0.141	7.162 567	561	0.191	7.128 713	805	0.241	7.081 398	1105
0.042	7.197 378	158	0.092	7.184 746	353	0.142	7.162 006	565	0.192	7.127 908	811	0.242	7.080 293	1112
0.043	7.197 220	162	0.093	7.184 393	356	0.143	7.161 441	570	0.193	7.127 097	816	0.243	7.079 181	1119
0.044	7.197 058	166	0.094	7.184 037	361	0.144	7.160 871	574	0.194	7.126 281	821	0.244	7.078 062	1125
0.045	7.196 892	170	0.095	7.183 676	365	0.145	7.160 297	579	0.195	7.125 460	827	0.245	7.076 937	1133
0.046	7.196 722	174	0.096	7.183 311	369	0.146	7.159 718	583	0.196	7.124 633	832	0.246	7.075 804	1139
0.047	7.196 548	178	0.097	7.182 942	373	0.147	7.159 135	588	0.197	7.123 801	838	0.247	7.074 665	1147
0.048	7.196 370	181	0.098	7.182 569	377	0.148	7.158 547	593	0.198	7.122 963	844	0.248	7.073 518	1153
0.049	7.196 189	185	0.099	7.182 192	381	0.149	7.157 954	597	0.199	7.122 119	848	0.249	7.072 365	1160
0.050	7.196 004		0.100	7.181 811		0.150	7.157 357		0.200	7.121 271		0.250	7.071 205	

Tafel I.

log {N_1^{10} n}.

± n	N	Δ	± n	N	− Δ	± n	N	− Δ	± n	N	− Δ	± n	N	− Δ
0.000	6.501 689	1	0.050	6.498 591	125	0.100	6.489 208	253	0.150	6.473 269	389	0.200	6.450 285	537
0.001	6.501 688	4	0.051	6.498 466	128	0.101	6.488 955	256	0.151	6.472 880	391	0.201	6.449 748	539
0.002	6.501 684	6	0.052	6.498 338	131	0.102	6.488 699	259	0.152	6.472 489	394	0.202	6.449 209	543
0.003	6.501 678	8	0.053	6.498 207	133	0.103	6.488 440	261	0.153	6.472 095	397	0.203	6.448 666	545
0.004	6.501 670	11	0.054	6.498 074	135	0.104	6.488 179	264	0.154	6.471 698	400	0.204	6.448 121	549
0.005	6.501 659	14	0.055	6.497 939	138	0.105	6.487 915	266	0.155	6.471 298	403	0.205	6.447 572	552
0.006	6.501 645	16	0.056	6.497 801	141	0.106	6.487 649	269	0.156	6.470 895	405	0.206	6.447 020	555
0.007	6.501 629	19	0.057	6.497 660	143	0.107	6.487 380	272	0.157	6.470 490	409	0.207	6.446 465	558
0.008	6.501 610	21	0.058	6.497 517	146	0.108	6.487 108	274	0.158	6.470 081	411	0.208	6.445 907	562
0.009	6.501 589	23	0.059	6.497 371	148	0.109	6.486 834	277	0.159	6.469 670	414	0.209	6.445 345	564
0.010	6.501 566	26	0.060	6.497 223	151	0.110	6.486 557	280	0.160	6.469 256	417	0.210	6.444 781	568
0.011	6.501 540	29	0.061	6.497 072	153	0.111	6.486 277	282	0.161	6.468 839	420	0.211	6.444 213	571
0.012	6.501 511	31	0.062	6.496 919	156	0.112	6.485 995	285	0.162	6.468 419	423	0.212	6.443 642	574
0.013	6.501 480	33	0.063	6.496 763	158	0.113	6.485 710	287	0.163	6.467 996	425	0.213	6.443 068	578
0.014	6.501 447	36	0.064	6.496 605	160	0.114	6.485 423	290	0.164	6.467 571	429	0.214	6.442 490	581
0.015	6.501 411	38	0.065	6.496 445	164	0.115	6.485 133	293	0.165	6.467 142	431	0.215	6.441 909	584
0.016	6.501 373	41	0.066	6.496 281	166	0.116	6.484 840	296	0.166	6.466 711	434	0.216	6.441 325	587
0.017	6.501 332	43	0.067	6.496 115	168	0.117	6.484 544	298	0.167	6.466 277	437	0.217	6.440 738	590
0.018	6.501 289	46	0.068	6.495 947	171	0.118	6.484 246	301	0.168	6.465 840	440	0.218	6.440 148	594
0.019	6.501 243	48	0.069	6.495 776	173	0.119	6.483 945	304	0.169	6.465 400	443	0.219	6.439 554	597
0.020	6.501 195	51	0.070	6.495 603	176	0.120	6.483 641	306	0.170	6.464 957	446	0.220	6.438 957	600
0.021	6.501 144	53	0.071	6.495 427	179	0.121	6.483 335	309	0.171	6.464 511	449	0.221	6.438 357	603
0.022	6.501 091	56	0.072	6.495 248	181	0.122	6.483 026	312	0.172	6.464 062	452	0.222	6.437 754	607
0.023	6.501 035	58	0.073	6.494 067	183	0.123	6.482 714	314	0.173	6.463 610	454	0.223	6.437 147	610
0.024	6.500 977	61	0.074	6.494 884	186	0.124	6.482 400	317	0.174	6.463 156	458	0.224	6.436 537	613
0.025	6.500 916	63	0.075	6.494 698	189	0.125	6.482 083	320	0.175	6.462 698	460	0.225	6.435 924	617
0.026	6.500 853	66	0.076	6.494 509	191	0.126	6.481 763	322	0.176	6.462 238	464	0.226	6.435 307	620
0.027	6.500 787	68	0.077	6.494 318	194	0.127	6.481 441	325	0.177	6.461 774	466	0.227	6.434 687	624
0.028	6.500 719	70	0.078	6.494 124	197	0.128	6.481 116	328	0.178	6.461 308	470	0.228	6.434 063	626
0.029	6.500 649	73	0.079	6.493 927	199	0.129	6.480 788	331	0.179	6.460 838	472	0.229	6.433 437	630
0.030	6.500 576	76	0.080	6.493 728	201	0.130	6.480 457	333	0.180	6.460 366	475	0.230	6.432 807	634
0.031	6.500 500	78	0.081	6.493 527	204	0.131	6.480 124	336	0.181	6.459 891	479	0.231	6.432 173	637
0.032	6.500 422	81	0.082	6.493 323	207	0.132	6.479 788	339	0.182	6.459 412	481	0.232	6.431 536	640
0.033	6.500 341	83	0.083	6.493 116	209	0.133	6.479 449	341	0.183	6.458 931	484	0.233	6.430 896	644
0.034	6.500 258	85	0.084	6.492 907	212	0.134	6.479 108	344	0.184	6.458 447	488	0.234	6.430 252	647
0.035	6.500 173	88	0.085	6.492 695	214	0.135	6.478 764	347	0.185	6.457 959	490	0.235	6.429 605	650
0.036	6.500 085	91	0.086	6.492 481	217	0.136	6.478 417	350	0.186	6.457 469	493	0.236	6.428 955	654
0.037	6.499 994	93	0.087	6.492 264	220	0.137	6.478 067	352	0.187	6.456 976	497	0.237	6.428 301	657
0.038	6.499 901	95	0.088	6.492 044	222	0.138	6.477 715	356	0.188	6.456 479	499	0.238	6.427 644	661
0.039	6.499 806	98	0.089	6.491 822	224	0.139	6.477 359	358	0.189	6.455 980	503	0.239	6.426 983	664
0.040	6.499 708	100	0.090	6.491 598	228	0.140	6.477 001	360	0.190	6.455 477	505	0.240	6.426 319	668
0.041	6.499 608	103	0.091	6.491 370	229	0.141	6.476 641	364	0.191	6.454 972	509	0.241	6.425 651	671
0.042	6.499 505	106	0.092	6.491 141	233	0.142	6.476 277	366	0.192	6.454 463	511	0.242	6.424 980	674
0.043	6.499 399	108	0.093	6.490 908	235	0.143	6.475 911	369	0.193	6.453 952	515	0.243	6.424 306	678
0.044	6.499 291	110	0.094	6.490 673	238	0.144	6.475 542	372	0.194	6.453 437	518	0.244	6.423 628	682
0.045	6.499 181	113	0.095	6.490 435	240	0.145	6.475 170	375	0.195	6.452 919	520	0.245	6.422 946	685
0.046	6.499 068	116	0.096	6.490 195	243	0.146	6.474 795	377	0.196	6.452 399	524	0.246	6.422 261	689
0.047	6.498 952	118	0.097	6.489 952	245	0.147	6.474 418	380	0.197	6.451 875	527	0.247	6.421 572	692
0.048	6.498 834	120	0.098	6.489 707	248	0.148	6.474 038	383	0.198	6.451 348	530	0.248	6.420 880	696
0.049	6.498 714	123	0.099	6.489 459	251	0.149	6.473 655	386	0.199	6.450 818	533	0.249	6.420 184	699
0.050	6.498 591		0.100	6.489 208		0.150	6.473 269		0.200	6.450 285		0.250	6.419 485	

Tafel II.

log {$M_1^3\, m$}.

vergl. pag. 19.

± m	M	− Δ
0.000	8,,619 789	6
0.001	8,,619 783	15
0.002	8,,619 768	26
0.003	8,,619 742	37
0.004	8,,619 705	47
0.005	8,,619 658	57
0.006	8,,619 601	68
0.007	8,,619 533	78
0.008	8,,619 455	89
0.009	8,,619 366	99
0.010	8,,619 267	109
0.011	8,,619 158	120
0.012	8,,619 038	131
0.013	8,,618 907	141
0.014	8,,618 766	152
0.015	8,,618 614	162
0.016	8,,618 452	172
0.017	8,,618 280	183
0.018	8,,618 097	194
0.019	8,,617 903	204
0.020	8,,617 699	215
0.021	8,,617 484	225
0.022	8,,617 259	236
0.023	8,,617 023	247
0.024	8,,616 776	257
0.025	8,,616 519	268
0.026	8,,616 251	278
0.027	8,,615 973	290
0.028	8,,615 683	300
0.029	8,,615 383	310
0.030	8,,615 073	322
0.031	8,,614 751	332
0.032	8,,614 419	343
0.033	8,,614 076	354
0.034	8,,613 722	365
0.035	8,,613 357	376
0.036	8,,612 981	386
0.037	8,,612 595	398
0.038	8,,612 197	408
0.039	8,,611 789	420
0.040	8,,611 369	430
0.041	8,,610 939	442
0.042	8,,610 497	453
0.043	8,,610 044	464
0.044	8,,609 580	475
0.045	8,,609 105	486
0.046	8,,608 619	498
0.047	8,,608 121	509
0.048	8,,607 612	520
0.049	8,,607 092	532
0.050	8,,606 560	

± m	M	− Δ
0.050	8,,606 560	543
0.051	8,,606 017	554
0.052	8,,605 463	566
0.053	8,,604 897	577
0.054	8,,604 320	589
0.055	8,,603 731	601
0.056	8,,603 130	612
0.057	8,,602 518	625
0.058	8,,601 893	635
0.059	8,,601 258	648
0.060	8,,600 610	660
0.061	8,,599 950	671
0.062	8,,599 279	684
0.063	8,,598 595	695
0.064	8,,597 900	708
0.065	8,,597 192	720
0.066	8,,596 472	732
0.067	8,,595 740	744
0.068	8,,594 996	756
0.069	8,,594 240	769
0.070	8,,593 471	782
0.071	8,,592 689	794
0.072	8,,591 895	806
0.073	8,,591 089	820
0.074	8,,590 269	832
0.075	8,,589 437	844
0.076	8,,588 593	858
0.077	8,,587 735	870
0.078	8,,586 865	884
0.079	8,,585 981	897
0.080	8,,585 084	909
0.081	8,,584 175	923
0.082	8,,583 252	937
0.083	8,,582 315	950
0.084	8,,581 365	963
0.085	8,,580 402	977
0.086	8,,579 425	990
0.087	8,,578 435	1005
0.088	8,,577 430	1018
0.089	8,,576 412	1032
0.090	8,,575 380	1046
0.091	8,,574 334	1060
0.092	8,,573 274	1075
0.093	8,,572 199	1088
0.094	8,,571 111	1104
0.095	8,,570 007	1117
0.096	8,,568 890	1133
0.097	8,,567 757	1147
0.098	8,,566 610	1162
0.099	8,,565 448	1177
0.100	8,,564 271	

± m	M	− Δ
0.100	8,,564 271	1192
0.101	8,,563 079	1207
0.102	8,,561 872	1222
0.103	8,,560 650	1238
0.104	8,,559 412	1254
0.105	8,,558 158	1269
0.106	8,,556 889	1285
0.107	8,,555 604	1301
0.108	8,,554 303	1317
0.109	8,,552 986	1333
0.110	8,,551 653	1349
0.111	8,,550 304	1366
0.112	8,,548 938	1383
0.113	8,,547 555	1399
0.114	8,,546 156	1416
0.115	8,,544 740	1434
0.116	8,,543 306	1450
0.117	8,,541 856	1468
0.118	8,,540 388	1486
0.119	8,,538 902	1503
0.120	8,,537 399	1521
0.121	8,,535 878	1539
0.122	8,,534 339	1557
0.123	8,,532 782	1576
0.124	8,,531 206	1594
0.125	8,,529 612	1613
0.126	8,,527 999	1632
0.127	8,,526 367	1651
0.128	8,,524 716	1670
0.129	8,,523 046	1690
0.130	8,,521 356	1710
0.131	8,,519 646	1729
0.132	8,,517 917	1750
0.133	8,,516 167	1770
0.134	8,,514 397	1791
0.135	8,,512 606	1811
0.136	8,,510 795	1832
0.137	8,,508 963	1854
0.138	8,,507 109	1875
0.139	8,,505 234	1897
0.140	8,,503 337	1919
0.141	8,,501 418	1942
0.142	8,,499 476	1964
0.143	8,,497 512	1986
0.144	8,,495 526	2010
0.145	8,,493 516	2033
0.146	8,,491 483	2057
0.147	8,,489 426	2080
0.148	8,,487 346	2105
0.149	8,,485 241	2129
0.150	8,,483 112	

± m	M	− Δ
0.150	8,,483 112	2155
0.151	8,,480 957	2179
0.152	8,,478 778	2205
0.153	8,,476 573	2231
0.154	8,,474 342	2256
0.155	8,,472 086	2284
0.156	8,,469 802	2310
0.157	8,,467 492	2337
0.158	8,,465 155	2365
0.159	8,,462 790	2393
0.160	8,,460 397	2422
0.161	8,,457 975	2450
0.162	8,,455 525	2480
0.163	8,,453 045	2509
0.164	8,,450 536	2539
0.165	8,,447 997	2569
0.166	8,,445 428	2601
0.167	8,,442 827	2632
0.168	8,,440 195	2664
0.169	8,,437 531	2696
0.170	8,,434 835	2729
0.171	8,,432 106	2763
0.172	8,,429 343	2797
0.173	8,,426 546	2831
0.174	8,,423 715	2866
0.175	8,,420 849	2902
0.176	8,,417 947	2938
0.177	8,,415 009	2974
0.178	8,,412 035	3013
0.179	8,,409 022	3050
0.180	8,,405 972	3089
0.181	8,,402 883	3129
0.182	8,,399 754	3168
0.183	8,,396 586	3210
0.184	8,,393 376	3251
0.185	8,,390 125	3293
0.186	8,,386 832	3337
0.187	8,,383 495	3380
0.188	8,,380 115	3426
0.189	8,,376 689	3470
0.190	8,,373 219	3518
0.191	8,,369 701	3564
0.192	8,,366 137	3613
0.193	8,,362 524	3663
0.194	8,,358 861	3713
0.195	8,,355 148	3764
0.196	8,,351 384	3817
0.197	8,,347 567	3870
0.198	8,,343 697	3924
0.199	8,,339 773	3981
0.200	8,,335 792	

± m	M	− Δ
0.200	8,,335 792	4037
0.201	8,,331 755	4096
0.202	8,,327 659	4155
0.203	8,,323 504	4217
0.204	8,,319 287	4278
0.205	8,,315 009	4343
0.206	8,,310 666	4408
0.207	8,,306 258	4476
0.208	8,,301 782	4543
0.209	8,,297 239	4614
0.210	8,,292 625	4685
0.211	8,,287 940	4759
0.212	8,,283 181	4835
0.213	8,,278 346	4913
0.214	8,,273 433	4992
0.215	8,,268 441	5073
0.216	8,,263 368	5158
0.217	8,,258 210	5244
0.218	8,,252 966	5332
0.219	8,,247 634	5424
0.220	8,,242 210	5518
0.221	8,,236 692	5613
0.222	8,,231 079	5714
0.223	8,,225 365	5815
0.224	8,,219 550	5922
0.225	8,,213 628	6030
0.226	8,,207 598	6142
0.227	8,,201 456	6258
0.228	8,,195 198	6377
0.229	8,,188 821	6502
0.230	8,,182 319	6629
0.231	8,,175 690	6761
0.232	8,,168 929	6898
0.233	8,,162 031	7039
0.234	8,,154 992	7187
0.235	8,,147 805	7339
0.236	8,,140 466	7497
0.237	8,,132 969	7661
0.238	8,,125 308	7832
0.239	8,,117 476	8010
0.240	8,,109 466	8195
0.241	8,,101 271	8387
0.242	8,,092 884	8588
0.243	8,,084 296	8798
0.244	8,,075 498	9017
0.245	8,,066 481	9246
0.246	8,,057 235	9487
0.247	8,,047 748	9738
0.248	8,,038 010	10002
0.249	8,,028 008	10279
0.250	8,,017 729	

Tafel II.

log $\{M_1^1 m\}$.

± m	M	− Δ
0.000	9_n318 759	1
0.001	9_n318 758	1
0.002	9_n318 757	1
0.003	9_n318 756	3
0.004	9_n318 753	3
0.005	9_n318 750	4
0.006	9_n318 746	4
0.007	9_n318 742	5
0.008	9_n318 737	6
0.009	9_n318 731	
		7
0.010	9_n318 724	7
0.011	9_n318 717	8
0.012	9_n318 709	9
0.013	9_n318 700	9
0.014	9_n318 691	10
0.015	9_n318 681	11
0.016	9_n318 670	12
0.017	9_n318 658	12
0.018	9_n318 646	13
0.019	9_n318 633	
		13
0.020	9_n318 620	14
0.021	9_n318 606	15
0.022	9_n318 591	16
0.023	9_n318 575	16
0.024	9_n318 559	17
0.025	9_n318 542	18
0.026	9_n318 524	19
0.027	9_n318 505	19
0.028	9_n318 486	20
0.029	9_n318 466	
		20
0.030	9_n318 446	21
0.031	9_n318 425	22
0.032	9_n318 403	23
0.033	9_n318 380	23
0.034	9_n318 357	24
0.035	9_n318 333	25
0.036	9_n318 308	25
0.037	9_n318 283	26
0.038	9_n318 257	27
0.039	9_n318 230	
		27
0.040	9_n318 203	29
0.041	9_n318 174	29
0.042	9_n318 145	29
0.043	9_n318 116	30
0.044	9_n318 086	31
0.045	9_n318 055	32
0.046	9_n318 023	32
0.047	9_n317 991	33
0.048	9_n317 958	34
0.049	9_n317 924	35
0.050	9_n317 889	

± m	M	− Δ
0.050	9_n317 889	35
0.051	9_n317 854	36
0.052	9_n317 818	36
0.053	9_n317 782	38
0.054	9_n317 744	38
0.055	9_n317 706	38
0.056	9_n317 668	40
0.057	9_n317 628	40
0.058	9_n317 588	40
0.059	9_n317 548	
		42
0.060	9_n317 506	42
0.061	9_n317 464	43
0.062	9_n317 421	43
0.063	9_n317 378	45
0.064	9_n317 333	45
0.065	9_n317 288	45
0.066	9_n317 243	47
0.067	9_n317 196	47
0.068	9_n317 149	48
0.069	9_n317 101	
		48
0.070	9_n317 053	49
0.071	9_n317 004	50
0.072	9_n316 954	51
0.073	9_n316 903	51
0.074	9_n316 852	52
0.075	9_n316 800	53
0.076	9_n316 747	53
0.077	9_n316 694	54
0.078	9_n316 640	55
0.079	9_n316 585	
		56
0.080	9_n316 529	56
0.081	9_n316 473	57
0.082	9_n316 416	57
0.083	9_n316 359	59
0.084	9_n316 300	59
0.085	9_n316 241	60
0.086	9_n316 181	60
0.087	9_n316 121	61
0.088	9_n316 060	62
0.089	9_n315 998	
		63
0.090	9_n315 935	63
0.091	9_n315 872	64
0.092	9_n315 808	65
0.093	9_n315 743	65
0.094	9_n315 678	66
0.095	9_n315 612	67
0.096	9_n315 545	68
0.097	9_n315 477	68
0.098	9_n315 409	69
0.099	9_n315 340	70
0.100	9_n315 270	

± m	M	− Δ
0.100	9_n315 270	70
0.101	9_n315 200	71
0.102	9_n315 129	72
0.103	9_n315 057	72
0.104	9_n314 985	74
0.105	9_n314 911	74
0.106	9_n314 837	74
0.107	9_n314 763	76
0.108	9_n314 687	76
0.109	9_n314 611	
		77
0.110	9_n314 534	77
0.111	9_n314 457	78
0.112	9_n314 379	79
0.113	9_n314 300	80
0.114	9_n314 220	81
0.115	9_n314 139	81
0.116	9_n314 058	82
0.117	9_n313 976	82
0.118	9_n313 894	83
0.119	9_n313 811	
		84
0.120	9_n313 727	85
0.121	9_n313 642	86
0.122	9_n313 556	86
0.123	9_n313 470	87
0.124	9_n313 383	87
0.125	9_n313 296	88
0.126	9_n313 208	89
0.127	9_n313 119	90
0.128	9_n313 029	91
0.129	9_n312 938	
		91
0.130	9_n312 847	92
0.131	9_n312 755	93
0.132	9_n312 662	93
0.133	9_n312 569	94
0.134	9_n312 475	95
0.135	9_n312 380	95
0.136	9_n312 285	97
0.137	9_n312 188	97
0.138	9_n312 091	97
0.139	9_n311 994	
		99
0.140	9_n311 895	99
0.141	9_n311 796	100
0.142	9_n311 696	101
0.143	9_n311 595	101
0.144	9_n311 494	102
0.145	9_n311 392	103
0.146	9_n311 289	104
0.147	9_n311 185	104
0.148	9_n311 081	105
0.149	9_n310 976	106
0.150	9_n310 870	

± m	M	− Δ
0.150	9_n310 870	106
0.151	9_n310 764	107
0.152	9_n310 657	108
0.153	9_n310 549	109
0.154	9_n310 440	110
0.155	9_n310 330	110
0.156	9_n310 220	111
0.157	9_n310 109	111
0.158	9_n309 998	113
0.159	9_n309 885	
		113
0.160	9_n309 772	114
0.161	9_n309 658	114
0.162	9_n309 544	116
0.163	9_n309 428	116
0.164	9_n309 312	117
0.165	9_n309 195	117
0.166	9_n309 078	119
0.167	9_n308 959	119
0.168	9_n308 840	120
0.169	9_n308 720	
		120
0.170	9_n308 600	121
0.171	9_n308 479	122
0.172	9_n308 357	123
0.173	9_n308 234	124
0.174	9_n308 110	124
0.175	9_n307 986	125
0.176	9_n307 861	126
0.177	9_n307 735	126
0.178	9_n307 609	128
0.179	9_n307 481	
		128
0.180	9_n307 353	128
0.181	9_n307 225	130
0.182	9_n307 095	130
0.183	9_n306 965	131
0.184	9_n306 834	132
0.185	9_n306 702	133
0.186	9_n306 569	133
0.187	9_n306 436	134
0.188	9_n306 302	135
0.189	9_n306 167	
		135
0.190	9_n306 032	137
0.191	9_n305 895	137
0.192	9_n305 758	138
0.193	9_n305 620	138
0.194	9_n305 482	140
0.195	9_n305 342	140
0.196	9_n305 202	141
0.197	9_n305 061	141
0.198	9_n304 920	143
0.199	9_n304 777	143
0.200	9_n304 634	

± m	M	− Δ
0.200	9_n304 634	144
0.201	9_n304 490	145
0.202	9_n304 345	145
0.203	9_n304 200	146
0.204	9_n304 054	147
0.205	9_n303 907	148
0.206	9_n303 759	149
0.207	9_n303 610	149
0.208	9_n303 461	150
0.209	9_n303 311	
		151
0.210	9_n303 160	152
0.211	9_n303 008	152
0.212	9_n302 856	153
0.213	9_n302 703	154
0.214	9_n302 549	155
0.215	9_n302 394	155
0.216	9_n302 239	157
0.217	9_n302 082	157
0.218	9_n301 925	158
0.219	9_n301 767	
		158
0.220	9_n301 609	160
0.221	9_n301 449	160
0.222	9_n301 289	161
0.223	9_n301 128	162
0.224	9_n300 966	162
0.225	9_n300 804	164
0.226	9_n300 640	164
0.227	9_n300 476	165
0.228	9_n300 311	165
0.229	9_n300 146	
		167
0.230	9_n299 979	167
0.231	9_n299 812	168
0.232	9_n299 644	169
0.233	9_n299 475	170
0.234	9_n299 305	170
0.235	9_n299 135	171
0.236	9_n298 964	172
0.237	9_n298 792	173
0.238	9_n298 619	174
0.239	9_n298 445	
		174
0.240	9_n298 271	175
0.241	9_n298 096	176
0.242	9_n297 920	177
0.243	9_n297 743	178
0.244	9_n297 565	178
0.245	9_n297 387	180
0.246	9_n297 207	180
0.247	9_n297 027	180
0.248	9_n296 847	182
0.249	9_n296 665	183
0.250	9_n296 482	

Tafel II.

$\log \{ M_1{}^5\, m \}$.

± m	M	− Δ	± m	M	− Δ	± m	M	− Δ	± m	M	− Δ	± m	M	− Δ
0.000	7.670 941	6	0.050	7.656 243	603	0.100	7.609 239	1326	0.150	7.518 822	2406	0.200	7.352 986	4594
0.001	7.670 935	17	0.051	7.655 640	616	0.101	7.607 913	1342	0.151	7.516 416	2434	0.201	7.348 392	4664
0.002	7.670 918	29	0.052	7.655 024	629	0.102	7.606 571	1360	0.152	7.513 982	2464	0.202	7.343 728	4735
0.003	7.670 889	40	0.053	7.654 395	642	0.103	7.605 211	1377	0.153	7.511 518	2492	0.203	7.338 993	4808
0.004	7.670 849	52	0.054	7.653 753	655	0.104	7.603 834	1394	0.154	7.509 026	2523	0.204	7.334 185	4883
0.005	7.670 797	64	0.055	7.653 098	667	0.105	7.602 440	1412	0.155	7.506 503	2552	0.205	7.329 302	4961
0.006	7.670 733	75	0.056	7.652 431	680	0.106	7.601 028	1429	0.156	7.503 951	2583	0.206	7.324 341	5039
0.007	7.670 658	87	0.057	7.651 751	694	0.107	7.599 599	1447	0.157	7.501 368	2614	0.207	7.319 302	5121
0.008	7.670 571	99	0.058	7.651 057	707	0.108	7.598 152	1465	0.158	7.498 754	2646	0.208	7.314 181	5203
0.009	7.670 472	110	0.059	7.650 350	719	0.109	7.596 687	1483	0.159	7.496 108	2677	0.209	7.308 978	5289
0.010	7.670 362	122	0.060	7.649 631	733	0.110	7.595 204	1501	0.160	7.493 431	2709	0.210	7.303 689	5376
0.011	7.670 240	133	0.061	7.648 898	746	0.111	7.593 703	1520	0.161	7.490 722	2743	0.211	7.298 313	5467
0.012	7.670 107	145	0.062	7.648 152	760	0.112	7.592 183	1538	0.162	7.487 979	2776	0.212	7.292 846	5559
0.013	7.669 962	157	0.063	7.647 392	773	0.113	7.590 645	1557	0.163	7.485 203	2809	0.213	7.287 287	5655
0.014	7.669 805	168	0.064	7.646 619	786	0.114	7.589 088	1576	0.164	7.482 394	2844	0.214	7.281 632	5753
0.015	7.669 637	180	0.065	7.645 833	800	0.115	7.587 512	1595	0.165	7.479 550	2879	0.215	7.275 879	5853
0.016	7.669 457	192	0.066	7.645 033	813	0.116	7.585 917	1615	0.166	7.476 671	2915	0.216	7.270 026	5957
0.017	7.669 265	204	0.067	7.644 220	827	0.117	7.584 302	1633	0.167	7.473 756	2950	0.217	7.264 069	6065
0.018	7.669 061	215	0.068	7.643 393	841	0.118	7.582 669	1654	0.168	7.470 806	2987	0.218	7.258 004	6176
0.019	7.668 846	227	0.069	7.642 552	855	0.119	7.581 015	1673	0.169	7.467 819	3024	0.219	7.251 828	6289
0.020	7.668 619	238	0.070	7.641 697	868	0.120	7.579 342	1693	0.170	7.464 795	3062	0.220	7.245 539	6407
0.021	7.668 381	251	0.071	7.640 829	883	0.121	7.577 649	1713	0.171	7.461 733	3100	0.221	7.239 132	6529
0.022	7.668 130	262	0.072	7.639 946	896	0.122	7.575 936	1734	0.172	7.458 633	3139	0.222	7.232 603	6654
0.023	7.667 868	274	0.073	7.639 050	910	0.123	7.574 202	1754	0.173	7.455 494	3180	0.223	7.225 949	6784
0.024	7.667 594	285	0.074	7.638 140	925	0.124	7.572 448	1775	0.174	7.452 314	3219	0.224	7.219 165	6917
0.025	7.667 309	298	0.075	7.637 215	939	0.125	7.570 673	1797	0.175	7.449 095	3260	0.225	7.212 248	7058
0.026	7.667 011	310	0.076	7.636 276	953	0.126	7.568 876	1817	0.176	7.445 835	3303	0.226	7.205 190	7201
0.027	7.666 701	321	0.077	7.635 323	967	0.127	7.567 059	1839	0.177	7.442 532	3345	0.227	7.197 989	7350
0.028	7.666 380	333	0.078	7.634 356	982	0.128	7.565 220	1860	0.178	7.439 187	3388	0.228	7.190 639	7505
0.029	7.666 047	346	0.079	7.633 374	997	0.129	7.563 360	1883	0.179	7.435 799	3433	0.229	7.183 134	7666
0.030	7.665 701	357	0.080	7.632 377	1011	0.130	7.561 477	1904	0.180	7.432 366	3477	0.230	7.175 468	7832
0.031	7.665 344	369	0.081	7.631 366	1026	0.131	7.559 573	1927	0.181	7.428 889	3523	0.231	7.167 636	8006
0.032	7.664 975	382	0.082	7.630 340	1041	0.132	7.557 646	1950	0.182	7.425 366	3570	0.232	7.159 630	8186
0.033	7.664 593	393	0.083	7.629 299	1056	0.133	7.555 696	1973	0.183	7.421 796	3617	0.233	7.151 444	8374
0.034	7.664 200	405	0.084	7.628 243	1071	0.134	7.553 723	1995	0.184	7.418 179	3666	0.234	7.143 070	8570
0.035	7.663 795	418	0.085	7.627 172	1085	0.135	7.551 728	2019	0.185	7.414 513	3715	0.235	7.134 500	8774
0.036	7.663 377	429	0.086	7.626 087	1101	0.136	7.549 709	2043	0.186	7.410 798	3766	0.236	7.125 726	8987
0.037	7.662 948	442	0.087	7.624 986	1117	0.137	7.547 666	2067	0.187	7.407 032	3817	0.237	7.116 739	9211
0.038	7.662 506	454	0.088	7.623 869	1132	0.138	7.545 599	2091	0.188	7.403 215	3870	0.238	7.107 528	9443
0.039	7.662 052	466	0.089	7.622 737	1147	0.139	7.543 508	2115	0.189	7.399 345	3922	0.239	7.098 085	9687
0.040	7.661 586	478	0.090	7.621 590	1163	0.140	7.541 393	2140	0.190	7.395 423	3978	0.240	7.088 398	9943
0.041	7.661 108	491	0.091	7.620 427	1179	0.141	7.539 253	2166	0.191	7.391 445	4033	0.241	7.078 455	10211
0.042	7.660 617	503	0.092	7.619 248	1194	0.142	7.537 087	2190	0.192	7.387 412	4090	0.242	7.068 244	10494
0.043	7.660 114	516	0.093	7.618 054	1211	0.143	7.534 897	2217	0.193	7.383 322	4149	0.243	7.057 750	10791
0.044	7.659 598	528	0.094	7.616 843	1226	0.144	7.532 680	2243	0.194	7.379 173	4208	0.244	7.046 959	11105
0.045	7.659 070	540	0.095	7.615 617	1243	0.145	7.530 437	2268	0.195	7.374 965	4268	0.245	7.035 854	11433
0.046	7.658 530	553	0.096	7.614 374	1259	0.146	7.528 169	2296	0.196	7.370 697	4331	0.246	7.024 421	11786
0.047	7.657 977	565	0.097	7.613 115	1276	0.147	7.525 873	2323	0.197	7.366 366	4395	0.247	7.012 635	12151
0.048	7.657 412	578	0.098	7.611 839	1292	0.148	7.523 550	2350	0.198	7.361 971	4459	0.248	7.000 484	12545
0.049	7.656 834	591	0.099	7.610 547	1308	0.149	7.521 200	2378	0.199	7.357 512	4526	0.249	6.987 939	12962
0.050	7.656 243		0.100	7.609 239		0.150	7.518 822		0.200	7.352 986		0.250	6.974 977	

Tafel II.

$\log\{M_1^{6}(m)\}$.

± m	M	− Δ	± m	M	− Δ	± m	M	− Δ	± m	M	− Δ	± m	M	− Δ
0.000	8.652 877	0	0.050	8.651 702	47	0.100	8.648 165	95	0.150	8.642 224	143	0.200	8.633 813	194
0.001	8.652 877	2	0.051	8.651 655	49	0.101	8.648 070	96	0.151	8.642 081	145	0.201	8.633 619	195
0.002	8.652 875	2	0.052	8.651 606	49	0.102	8.647 974	97	0.152	8.641 936	146	0.202	8.633 424	196
0.003	8.652 873	3	0.053	8.651 557	50	0.103	8.647 877	98	0.153	8.641 790	146	0.203	8.633 228	197
0.004	8.652 870	4	0.054	8.651 507	52	0.104	8.647 779	99	0.154	8.641 644	148	0.204	8.633 031	198
0.005	8.652 866	6	0.055	8.651 455	52	0.105	8.647 680	100	0.155	8.641 496	149	0.205	8.632 833	199
0.006	8.652 860	6	0.056	8.651 403	53	0.106	8.647 580	101	0.156	8.641 347	149	0.206	8.632 634	201
0.007	8.652 854	7	0.057	8.651 350	54	0.107	8.647 479	102	0.157	8.641 198	151	0.207	8.632 433	201
0.008	8.652 847	8	0.058	8.651 296	55	0.108	8.647 377	103	0.158	8.641 047	152	0.208	8.632 232	202
0.009	8.652 839	9	0.059	8.651 241	56	0.109	8.647 274	103	0.159	8.640 895	152	0.209	8.632 030	204
0.010	8.652 830	10	0.060	8.651 185	57	0.110	8.647 171	105	0.160	8.640 743	154	0.210	8.631 826	204
0.011	8.652 820	10	0.061	8.651 128	58	0.111	8.647 066	106	0.161	8.640 589	155	0.211	8.631 622	205
0.012	8.652 810	12	0.062	8.651 070	59	0.112	8.646 960	106	0.162	8.640 434	155	0.212	8.631 417	207
0.013	8.652 798	13	0.063	8.651 011	60	0.113	8.646 854	108	0.163	8.640 279	157	0.213	8.631 210	207
0.014	8.652 785	13	0.064	8.650 951	61	0.114	8.646 746	109	0.164	8.640 122	158	0.214	8.631 003	209
0.015	8.652 772	15	0.065	8.650 890	61	0.115	8.646 637	109	0.165	8.639 964	158	0.215	8.630 794	209
0.016	8.652 757	16	0.066	8.650 829	63	0.116	8.646 528	111	0.166	8.639 806	160	0.216	8.630 585	211
0.017	8.652 741	16	0.067	8.650 766	64	0.117	8.646 417	111	0.167	8.639 646	160	0.217	8.630 374	212
0.018	8.652 725	17	0.068	8.650 702	64	0.118	8.646 306	113	0.168	8.639 486	162	0.218	8.630 162	212
0.019	8.652 708	19	0.069	8.650 638	66	0.119	8.646 193	113	0.169	8.639 324	163	0.219	8.629 950	214
0.020	8.652 689	19	0.070	8.650 572	66	0.120	8.646 080	114	0.170	8.639 161	163	0.220	8.629 736	215
0.021	8.652 670	20	0.071	8.650 506	67	0.121	8.645 966	116	0.171	8.638 998	165	0.221	8.629 521	216
0.022	8.652 650	21	0.072	8.650 439	69	0.122	8.645 850	116	0.172	8.638 833	165	0.222	8.629 305	217
0.023	8.652 629	22	0.073	8.650 370	69	0.123	8.645 734	117	0.173	8.638 668	167	0.223	8.629 088	218
0.024	8.652 607	23	0.074	8.650 301	70	0.124	8.645 617	119	0.174	8.638 501	168	0.224	8.628 870	219
0.025	8.652 584	24	0.075	8.650 231	71	0.125	8.645 498	119	0.175	8.638 333	168	0.225	8.628 651	220
0.026	8.652 560	25	0.076	8.650 160	73	0.126	8.645 379	120	0.176	8.638 165	170	0.226	8.628 431	221
0.027	8.652 535	26	0.077	8.650 087	73	0.127	8.645 259	121	0.177	8.637 995	171	0.227	8.628 210	222
0.028	8.652 509	27	0.078	8.650 014	74	0.128	8.645 138	122	0.178	8.637 824	171	0.228	8.627 988	223
0.029	8.652 482	27	0.079	8.649 940	75	0.129	8.645 016	123	0.179	8.637 653	173	0.229	8.627 765	224
0.030	8.652 455	29	0.080	8.649 865	76	0.130	8.644 893	125	0.180	8.637 480	174	0.230	8.627 541	226
0.031	8.652 426	30	0.081	8.649 789	77	0.131	8.644 768	125	0.181	8.637 306	174	0.231	8.627 315	226
0.032	8.652 396	30	0.082	8.649 712	77	0.132	8.644 643	126	0.182	8.637 132	176	0.232	8.627 089	228
0.033	8.652 366	32	0.083	8.649 635	79	0.133	8.644 517	127	0.183	8.636 956	177	0.233	8.626 861	228
0.034	8.652 334	32	0.084	8.649 556	80	0.134	8.644 390	128	0.184	8.636 779	178	0.234	8.626 633	230
0.035	8.652 302	34	0.085	8.649 476	81	0.135	8.644 262	129	0.185	8.636 601	178	0.235	8.626 403	230
0.036	8.652 268	34	0.086	8.649 395	81	0.136	8.644 133	130	0.186	8.636 423	180	0.236	8.626 173	232
0.037	8.652 234	35	0.087	8.649 314	83	0.137	8.644 003	131	0.187	8.636 243	181	0.237	8.625 941	233
0.038	8.652 199	36	0.088	8.649 231	84	0.138	8.643 872	132	0.188	8.636 062	182	0.238	8.625 708	234
0.039	8.652 163	37	0.089	8.649 147	84	0.139	8.643 740	132	0.189	8.635 880	182	0.239	8.625 474	235
0.040	8.652 126	38	0.090	8.649 063	86	0.140	8.643 608	134	0.190	8.635 698	184	0.240	8.625 239	236
0.041	8.652 088	39	0.091	8.648 977	86	0.141	8.643 474	135	0.191	8.635 514	185	0.241	8.625 003	237
0.042	8.652 049	40	0.092	8.648 891	87	0.142	8.643 339	136	0.192	8.635 329	186	0.242	8.624 766	238
0.043	8.652 009	41	0.093	8.648 804	89	0.143	8.643 203	137	0.193	8.635 143	187	0.243	8.624 528	239
0.044	8.651 968	42	0.094	8.648 715	89	0.144	8.643 066	138	0.194	8.634 956	188	0.244	8.624 289	240
0.045	8.651 926	43	0.095	8.648 626	91	0.145	8.642 928	138	0.195	8.634 768	189	0.245	8.624 049	241
0.046	8.651 883	44	0.096	8.648 535	91	0.146	8.642 790	140	0.196	8.634 579	190	0.246	8.623 808	243
0.047	8.651 839	44	0.097	8.648 444	92	0.147	8.642 650	141	0.197	8.634 389	191	0.247	8.623 565	243
0.048	8.651 795	46	0.098	8.648 352	93	0.148	8.642 509	142	0.198	8.634 198	192	0.248	8.623 322	245
0.049	8.651 749	47	0.099	8.648 259	94	0.149	8.642 367	143	0.199	8.634 006	193	0.249	8.623 077	245
0.050	8.651 702		0.100	8.648 165		0.150	8.642 224		0.200	8.633 813		0.250	8.622 832	

Tafel II.

$\log \{M_1{}^7\, m^4\}$.

± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ
0.000	6,,843 572	6	0.050	6,,828 344	625	0.100	6,,779 638	1374	0.150	6,,685 855	2498	0.200	6,,513 122	4806
0.001	6,,843 566	18	0.051	6,,827 719	638	0.101	6,,778 264	1392	0.151	6,,683 357	2528	0.201	6,,508 316	4880
0.002	6,,843 548	30	0.052	6,,827 081	652	0.102	6,,776 872	1409	0.152	6,,680 829	2558	0.202	6,,503 436	4956
0.003	6,,843 518	42	0.053	6,,826 429	664	0.103	6,,775 463	1427	0.153	6,,678 271	2589	0.203	6,,498 480	5034
0.004	6,,843 476	54	0.054	6,,825 765	679	0.104	6,,774 036	1445	0.154	6,,675 682	2620	0.204	6,,493 446	5115
0.005	6,,843 422	66	0.055	6,,825 086	691	0.105	6,,772 591	1463	0.155	6,,673 062	2651	0.205	6,,488 331	5197
0.006	6,,843 356	78	0.056	6,,824 395	705	0.106	6,,771 128	1482	0.156	6,,670 411	2683	0.206	6,,483 134	5282
0.007	6,,843 278	90	0.057	6,,823 690	719	0.107	6,,769 646	1499	0.157	6,,667 728	2716	0.207	6,,477 852	5368
0.008	6,,843 188	102	0.058	6,,822 971	732	0.108	6,,768 147	1519	0.158	6,,665 012	2748	0.208	6,,472 484	5458
0.009	6,,843 086	114	0.059	6,,822 239	745	0.109	6,,766 628	1537	0.159	6,,662 264	2782	0.209	6,,467 026	5549
0.010	6,,842 972	126	0.060	6,,821 494	760	0.110	6,,765 091	1557	0.160	6,,659 482	2815	0.210	6,,461 477	5644
0.011	6,,842 846	139	0.061	6,,820 734	773	0.111	6,,763 534	1575	0.161	6,,656 667	2850	0.211	6,,455 833	5740
0.012	6,,842 707	150	0.062	6,,819 961	787	0.112	6,,761 959	1595	0.162	6,,653 817	2885	0.212	6,,450 093	5840
0.013	6,,842 557	162	0.063	6,,819 174	801	0.113	6,,760 364	1614	0.163	6,,650 932	2921	0.213	6,,444 253	5943
0.014	6,,842 395	175	0.064	6,,818 373	814	0.114	6,,758 750	1634	0.164	6,,648 011	2956	0.214	6,,438 310	6049
0.015	6,,842 220	186	0.065	6,,817 559	829	0.115	6,,757 116	1654	0.165	6,,645 055	2993	0.215	6,,432 261	6158
0.016	6,,842 034	199	0.066	6,,816 730	843	0.116	6,,755 462	1673	0.166	6,,642 062	3030	0.216	6,,426 103	6270
0.017	6,,841 835	210	0.067	6,,815 887	857	0.117	6,,753 789	1694	0.167	6,,639 032	3068	0.217	6,,419 833	6387
0.018	6,,841 625	223	0.068	6,,815 030	871	0.118	6,,752 095	1715	0.168	6,,635 964	3106	0.218	6,,413 446	6506
0.019	6,,841 402	235	0.069	6,,814 159	885	0.119	6,,750 380	1734	0.169	6,,632 858	3145	0.219	6,,406 940	6631
0.020	6,,841 167	248	0.070	6,,813 274	900	0.120	6,,748 646	1756	0.170	6,,629 713	3185	0.220	6,,400 309	6758
0.021	6,,840 919	259	0.071	6,,812 374	914	0.121	6,,746 890	1777	0.171	6,,626 528	3225	0.221	6,,393 551	6890
0.022	6,,840 660	272	0.072	6,,811 460	929	0.122	6,,745 113	1797	0.172	6,,623 303	3266	0.222	6,,386 661	7028
0.023	6,,840 388	283	0.073	6,,810 531	943	0.123	6,,743 316	1820	0.173	6,,620 037	3308	0.223	6,,379 633	7169
0.024	6,,840 105	297	0.074	6,,809 588	958	0.124	6,,741 496	1841	0.174	6,,616 729	3351	0.224	6,,372 464	7316
0.025	6,,839 808	308	0.075	6,,808 630	973	0.125	6,,739 655	1862	0.175	6,,613 378	3393	0.225	6,,365 148	7468
0.026	6,,839 500	321	0.076	6,,807 657	988	0.126	6,,737 793	1885	0.176	6,,609 985	3438	0.226	6,,357 680	7626
0.027	6,,839 179	333	0.077	6,,806 669	1002	0.127	6,,735 908	1907	0.177	6,,606 547	3483	0.227	6,,350 054	7790
0.028	6,,838 846	345	0.078	6,,805 667	1018	0.128	6,,734 001	1930	0.178	6,,603 064	3528	0.228	6,,342 264	7960
0.029	6,,838 501	358	0.079	6,,804 649	1033	0.129	6,,732 071	1952	0.179	6,,599 536	3575	0.229	6,,334 304	8138
0.030	6,,838 143	370	0.080	6,,803 616	1048	0.130	6,,730 119	1976	0.180	6,,595 961	3622	0.230	6,,326 166	8322
0.031	6,,837 773	382	0.081	6,,802 568	1063	0.131	6,,728 143	1999	0.181	6,,592 339	3670	0.231	6,,317 844	8514
0.032	6,,837 391	395	0.082	6,,801 505	1078	0.132	6,,726 144	2022	0.182	6,,588 669	3719	0.232	6,,309 330	8714
0.033	6,,836 996	408	0.083	6,,800 427	1094	0.133	6,,724 122	2046	0.183	6,,584 950	3770	0.233	6,,300 616	8923
0.034	6,,836 588	419	0.084	6,,799 333	1110	0.134	6,,722 076	2071	0.184	6,,581 180	3821	0.234	6,,291 693	9142
0.035	6,,836 169	433	0.085	6,,798 223	1125	0.135	6,,720 005	2094	0.185	6,,577 359	3873	0.235	6,,282 551	9369
0.036	6,,835 736	445	0.086	6,,797 098	1141	0.136	6,,717 911	2120	0.186	6,,573 486	3926	0.236	6,,273 182	9608
0.037	6,,835 291	458	0.087	6,,795 957	1157	0.137	6,,715 791	2144	0.187	6,,569 560	3980	0.237	6,,263 574	9860
0.038	6,,834 833	470	0.088	6,,794 800	1173	0.138	6,,713 647	2169	0.188	6,,565 580	4037	0.238	6,,253 714	10120
0.039	6,,834 363	483	0.089	6,,793 627	1189	0.139	6,,711 478	2196	0.189	6,,561 543	4092	0.239	6,,243 594	10397
0.040	6,,833 880	496	0.090	6,,792 438	1205	0.140	6,,709 282	2220	0.190	6,,557 451	4151	0.240	6,,233 197	10686
0.041	6,,833 384	508	0.091	6,,791 233	1221	0.141	6,,707 062	2248	0.191	6,,553 300	4209	0.241	6,,222 511	10993
0.042	6,,832 876	521	0.092	6,,790 012	1238	0.142	6,,704 814	2273	0.192	6,,549 091	4270	0.242	6,,211 518	11313
0.043	6,,832 355	534	0.093	6,,788 774	1255	0.143	6,,702 541	2301	0.193	6,,544 821	4332	0.243	6,,200 205	11654
0.044	6,,831 821	547	0.094	6,,787 519	1271	0.144	6,,700 240	2327	0.194	6,,540 489	4394	0.244	6,,188 551	12013
0.045	6,,831 274	560	0.095	6,,786 248	1288	0.145	6,,697 913	2355	0.195	6,,536 095	4460	0.245	6,,176 538	12394
0.046	6,,830 714	573	0.096	6,,784 960	1305	0.146	6,,695 558	2383	0.196	6,,531 635	4525	0.246	6,,164 144	12799
0.047	6,,830 141	586	0.097	6,,783 655	1322	0.147	6,,693 175	2411	0.197	6,,527 110	4593	0.247	6,,151 345	13229
0.048	6,,829 555	599	0.098	6,,782 333	1339	0.148	6,,690 764	2440	0.198	6,,522 517	4662	0.248	6,,138 116	13686
0.049	6,,828 956	612	0.099	6,,780 994	1356	0.149	6,,688 324	2469	0.199	6,,517 855	4733	0.249	6,,124 430	14176
0.050	6,,828 344		0.100	6,,779 638		0.150	6,,685 855		0.200	6,,513 122		0.250	6,,110 254	

Tafel II.

$\log \{M_1^s\, m\}$.

± m	M	Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ
0.000	8_n000 457	0	0.050	7_n999 129	54	0.100	7_n995 129	108	0.150	7_n988 413	162	0.200	7_n978 908	219
0.001	8_n000 457	2	0.051	7_n999 075	55	0.101	7_n995 021	109	0.151	7_n988 251	164	0.201	7_n978 689	221
0.002	8_n000 455	2	0.052	7_n999 020	56	0.102	7_n994 912	109	0.152	7_n988 087	165	0.202	7_n978 468	221
0.003	8_n000 453	4	0.053	7_n998 964	57	0.103	7_n994 803	111	0.153	7_n987 922	165	0.203	7_n978 247	223
0.004	8_n000 449	5	0.054	7_n998 907	58	0.104	7_n994 692	112	0.154	7_n987 757	167	0.204	7_n978 024	224
0.005	8_n000 444	6	0.055	7_n998 849	59	0.105	7_n994 580	113	0.155	7_n987 590	168	0.205	7_n977 800	225
0.006	8_n000 438	7	0.056	7_n998 790	60	0.106	7_n994 467	114	0.156	7_n987 422	169	0.206	7_n977 575	226
0.007	8_n000 431	8	0.057	7_n998 730	61	0.107	7_n994 353	115	0.157	7_n987 253	171	0.207	7_n977 349	227
0.008	8_n000 423	9	0.058	7_n998 669	62	0.108	7_n994 238	116	0.158	7_n987 082	171	0.208	7_n977 122	229
0.009	8_n000 414	10	0.059	7_n998 607	64	0.109	7_n994 122	117	0.159	7_n986 911	173	0.209	7_n976 893	230
0.010	8_n000 404	11	0.060	7_n998 543	64	0.110	7_n994 005	119	0.160	7_n986 738	173	0.210	7_n976 663	231
0.011	8_n000 393	12	0.061	7_n998 479	65	0.111	7_n993 886	119	0.161	7_n986 565	175	0.211	7_n976 432	232
0.012	8_n000 381	13	0.062	7_n998 414	67	0.112	7_n993 767	121	0.162	7_n986 390	176	0.212	7_n976 200	233
0.013	8_n000 368	15	0.063	7_n998 347	68	0.113	7_n993 646	122	0.163	7_n986 214	177	0.213	7_n975 967	234
0.014	8_n000 353	15	0.064	7_n998 279	68	0.114	7_n993 524	122	0.164	7_n986 037	178	0.214	7_n975 733	236
0.015	8_n000 338	17	0.065	7_n998 211	70	0.115	7_n993 402	124	0.165	7_n985 859	179	0.215	7_n975 497	236
0.016	8_n000 321	17	0.066	7_n998 141	71	0.116	7_n993 278	125	0.166	7_n985 680	181	0.216	7_n975 261	238
0.017	8_n000 304	19	0.067	7_n998 070	72	0.117	7_n993 153	126	0.167	7_n985 499	181	0.217	7_n975 023	239
0.018	8_n000 285	19	0.068	7_n997 998	73	0.118	7_n993 027	127	0.168	7_n985 318	183	0.218	7_n974 784	241
0.019	8_n000 266	21	0.069	7_n997 925	74	0.119	7_n992 900	128	0.169	7_n985 135	184	0.219	7_n974 543	241
0.020	8_n000 245	22	0.070	7_n997 851	75	0.120	7_n992 772	130	0.170	7_n984 951	185	0.220	7_n974 302	243
0.021	8_n000 223	23	0.071	7_n997 776	76	0.121	7_n992 642	130	0.171	7_n984 766	186	0.221	7_n974 059	244
0.022	8_n000 200	23	0.072	7_n997 700	78	0.122	7_n992 512	131	0.172	7_n984 580	187	0.222	7_n973 815	245
0.023	8_n000 177	25	0.073	7_n997 622	78	0.123	7_n992 381	133	0.173	7_n984 393	188	0.223	7_n973 570	246
0.024	8_n000 152	26	0.074	7_n997 544	79	0.124	7_n992 248	134	0.174	7_n984 205	190	0.224	7_n973 324	247
0.025	8_n000 126	28	0.075	7_n997 465	81	0.125	7_n992 114	135	0.175	7_n984 015	190	0.225	7_n973 077	249
0.026	8_n000 098	28	0.076	7_n997 384	81	0.126	7_n991 979	136	0.176	7_n983 825	192	0.226	7_n972 828	250
0.027	8_n000 070	29	0.077	7_n997 303	83	0.127	7_n991 843	137	0.177	7_n983 633	193	0.227	7_n972 578	250
0.028	8_n000 041	30	0.078	7_n997 220	84	0.128	7_n991 706	138	0.178	7_n983 440	194	0.228	7_n972 328	252
0.029	8_n000 011	32	0.079	7_n997 136	85	0.129	7_n991 568	139	0.179	7_n983 246	195	0.229	7_n972 076	254
0.030	7_n999 979	32	0.080	7_n997 051	86	0.130	7_n991 429	140	0.180	7_n983 051	196	0.230	7_n971 822	254
0.031	7_n999 947	33	0.081	7_n996 965	86	0.131	7_n991 289	142	0.181	7_n982 855	198	0.231	7_n971 568	256
0.032	7_n999 914	35	0.082	7_n996 879	89	0.132	7_n991 147	142	0.182	7_n982 657	198	0.232	7_n971 312	257
0.033	7_n999 879	36	0.083	7_n996 790	89	0.133	7_n991 005	144	0.183	7_n982 459	200	0.233	7_n971 055	258
0.034	7_n999 843	36	0.084	7_n996 701	90	0.134	7_n990 861	144	0.184	7_n982 259	201	0.234	7_n970 797	259
0.035	7_n999 807	38	0.085	7_n996 611	91	0.135	7_n990 717	146	0.185	7_n982 058	202	0.235	7_n970 538	261
0.036	7_n999 769	39	0.086	7_n996 520	92	0.136	7_n990 571	147	0.186	7_n981 856	203	0.236	7_n970 277	261
0.037	7_n999 730	40	0.087	7_n996 428	94	0.137	7_n990 424	148	0.187	7_n981 653	204	0.237	7_n970 016	263
0.038	7_n999 690	41	0.088	7_n996 334	94	0.138	7_n990 276	149	0.188	7_n981 449	205	0.238	7_n969 753	264
0.039	7_n999 649	42	0.089	7_n996 240	96	0.139	7_n990 127	151	0.189	7_n981 244	207	0.239	7_n969 489	265
0.040	7_n999 607	43	0.090	7_n996 144	97	0.140	7_n989 976	151	0.190	7_n981 037	208	0.240	7_n969 224	267
0.041	7_n999 564	44	0.091	7_n996 047	97	0.141	7_n989 825	152	0.191	7_n980 829	209	0.241	7_n968 957	268
0.042	7_n999 520	45	0.092	7_n995 950	99	0.142	7_n989 673	154	0.192	7_n980 620	210	0.242	7_n968 689	269
0.043	7_n999 475	46	0.093	7_n995 851	100	0.143	7_n989 519	155	0.193	7_n980 410	211	0.243	7_n968 420	270
0.044	7_n999 429	48	0.094	7_n995 751	101	0.144	7_n989 364	155	0.194	7_n980 199	212	0.244	7_n968 150	271
0.045	7_n999 381	48	0.095	7_n995 650	102	0.145	7_n989 209	157	0.195	7_n979 987	214	0.245	7_n967 879	272
0.046	7_n999 333	49	0.096	7_n995 548	104	0.146	7_n989 052	158	0.196	7_n979 773	214	0.246	7_n967 607	274
0.047	7_n999 284	51	0.097	7_n995 444	104	0.147	7_n988 894	159	0.197	7_n979 559	216	0.247	7_n967 333	275
0.048	7_n999 233	51	0.098	7_n995 340	105	0.148	7_n988 735	161	0.198	7_n979 343	217	0.248	7_n967 058	276
0.049	7_n999 182	53	0.099	7_n995 235	106	0.149	7_n988 574	161	0.199	7_n979 126	218	0.249	7_n966 782	278
0.050	7_n999 129		0.100	7_n995 129		0.150	7_n988 413		0.200	7_n978 908		0.250	7_n966 504	

Tafel II.

$\log \{M_1^0(m)\}$.

$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$
0.000	6.074 376		0.050	6.058 878		0.100	6.009 301		0.150	5.913 792		0.200	5.737 483	
0.001	6.074 369	7	0.051	6.058 242	636	0.101	6.007 903	1398	0.151	5.911 247	2545	0.201	5.732 567	4916
0.002	6.074 351	18	0.052	6.057 592	650	0.102	6.006 486	1417	0.152	5.908 671	2576	0.202	5.727 574	4993
0.003	6.074 321	30	0.053	6.056 929	663	0.103	6.005 052	1434	0.153	5.906 064	2607	0.203	5.722 502	5072
0.004	6.074 278	43	0.054	6.056 252	677	0.104	6.003 599	1453	0.154	5.903 426	2638	0.204	5.717 349	5153
0.005	6.074 223	55	0.055	6.055 562	690	0.105	6.002 128	1471	0.155	5.900 756	2670	0.205	5.712 113	5236
0.006	6.074 156	67	0.056	6.054 858	704	0.106	6.000 638	1490	0.156	5.898 054	2702	0.206	5.706 792	5321
0.007	6.074 076	80	0.057	6.054 141	717	0.107	5.999 130	1508	0.157	5.895 319	2735	0.207	5.701 383	5409
0.008	6.073 985	91	0.058	6.053 409	732	0.108	5.997 603	1527	0.158	5.892 551	2768	0.208	5.695 884	5499
0.009	6.073 881	104	0.059	6.052 664	745	0.109	5.996 057	1546	0.159	5.889 750	2801	0.209	5.690 293	5591
0.010	6.073 765	116	0.060	6.051 905	759	0.110	5.994 492	1565	0.160	5.886 914	2836	0.210	5.684 607	5686
0.011	6.073 636	129	0.061	6.051 132	773	0.111	5.992 907	1585	0.161	5.884 044	2870	0.211	5.678 822	5785
0.012	6.073 496	140	0.062	6.050 346	786	0.112	5.991 303	1604	0.162	5.881 138	2906	0.212	5.672 938	5884
0.013	6.073 343	153	0.063	6.049 545	801	0.113	5.989 680	1623	0.163	5.878 197	2941	0.213	5.666 949	5989
0.014	6.073 178	165	0.064	6.048 730	815	0.114	5.988 036	1644	0.164	5.875 220	2977	0.214	5.660 854	6095
0.015	6.073 000	178	0.065	6.047 900	830	0.115	5.986 373	1663	0.165	5.872 206	3014	0.215	5.654 648	6206
0.016	6.072 810	190	0.066	6.047 057	843	0.116	5.984 689	1684	0.166	5.869 154	3052	0.216	5.648 329	6319
0.017	6.072 608	202	0.067	6.046 199	858	0.117	5.982 985	1704	0.167	5.866 064	3090	0.217	5.641 893	6436
0.018	6.072 394	214	0.068	6.045 327	872	0.118	5.981 260	1725	0.168	5.862 936	3128	0.218	5.635 336	6557
0.019	6.072 167	227	0.069	6.044 440	887	0.119	5.979 515	1745	0.169	5.859 768	3168	0.219	5.628 654	6682
0.020	6.071 928	239	0.070	6.043 539	901	0.120	5.977 749	1766	0.170	5.856 560	3208	0.220	5.621 843	6811
0.021	6.071 676	252	0.071	6.042 623	916	0.121	5.975 961	1788	0.171	5.853 312	3248	0.221	5.614 897	6946
0.022	6.071 412	264	0.072	6.041 693	930	0.122	5.974 152	1809	0.172	5.850 022	3290	0.222	5.607 814	7083
0.023	6.071 136	276	0.073	6.040 747	946	0.123	5.972 321	1831	0.173	5.846 690	3332	0.223	5.600 588	7226
0.024	6.070 847	289	0.074	6.039 787	960	0.124	5.970 469	1852	0.174	5.843 316	3374	0.224	5.593 214	7374
0.025	6.070 545	302	0.075	6.038 812	975	0.125	5.968 594	1875	0.175	5.839 897	3419	0.225	5.585 685	7529
0.026	6.070 232	313	0.076	6.037 822	990	0.126	5.966 697	1897	0.176	5.836 435	3462	0.226	5.577 997	7688
0.027	6.069 905	327	0.077	6.036 817	1005	0.127	5.964 778	1919	0.177	5.832 927	3508	0.227	5.570 143	7854
0.028	6.069 566	339	0.078	6.035 796	1021	0.128	5.962 836	1942	0.178	5.829 373	3554	0.228	5.562 117	8026
0.029	6.069 215	351	0.079	6.034 760	1036	0.129	5.960 871	1965	0.179	5.825 773	3600	0.229	5.553 912	8205
0.030	6.068 851	364	0.080	6.033 710	1050	0.130	5.958 882	1989	0.180	5.822 124	3649	0.230	5.545 520	8392
0.031	6.068 474	377	0.081	6.032 643	1067	0.131	5.956 870	2012	0.181	5.818 428	3696	0.231	5.536 934	8586
0.032	6.068 085	389	0.082	6.031 561	1082	0.132	5.954 835	2035	0.182	5.814 681	3747	0.232	5.528 146	8788
0.033	6.067 683	402	0.083	6.030 463	1098	0.133	5.952 775	2060	0.183	5.810 884	3797	0.233	5.519 146	9000
0.034	6.067 268	415	0.084	6.029 350	1113	0.134	5.950 691	2084	0.184	5.807 035	3849	0.234	5.509 924	9222
0.035	6.066 841	427	0.085	6.028 220	1130	0.135	5.948 582	2109	0.185	5.803 134	3901	0.235	5.500 473	9451
0.036	6.066 401	440	0.086	6.027 075	1145	0.136	5.946 449	2133	0.186	5.799 179	3955	0.236	5.490 780	9693
0.037	6.065 948	453	0.087	6.025 913	1162	0.137	5.944 290	2159	0.187	5.795 169	4010	0.237	5.480 833	9947
0.038	6.065 482	466	0.088	6.024 736	1177	0.138	5.942 106	2184	0.188	5.791 104	4065	0.238	5.470 620	10213
0.039	6.065 003	479	0.089	6.023 542	1194	0.139	5.939 896	2210	0.189	5.786 981	4123	0.239	5.460 128	10492
0.040	6.064 512	491	0.090	6.022 332	1210	0.140	5.937 660	2236	0.190	5.782 800	4181	0.240	5.449 342	10786
0.041	6.064 007	505	0.091	6.021 105	1227	0.141	5.935 398	2262	0.191	5.778 560	4240	0.241	5.438 246	11096
0.042	6.063 490	517	0.092	6.019 861	1244	0.142	5.933 109	2289	0.192	5.774 258	4302	0.242	5.426 823	11423
0.043	6.062 959	531	0.093	6.018 601	1260	0.143	5.930 793	2316	0.193	5.769 895	4363	0.243	5.415 056	11767
0.044	6.062 416	543	0.094	6.017 324	1277	0.144	5.928 449	2344	0.194	5.765 468	4427	0.244	5.402 923	12133
0.045	6.061 859	557	0.095	6.016 030	1294	0.145	5.926 078	2371	0.195	5.760 976	4492	0.245	5.390 404	12519
0.046	6.061 289	570	0.096	6.014 719	1311	0.146	5.923 678	2400	0.196	5.756 417	4559	0.246	5.377 473	12931
0.047	6.060 706	583	0.097	6.013 391	1328	0.147	5.921 250	2428	0.197	5.751 790	4627	0.247	5.364 106	13367
0.048	6.060 110	596	0.098	6.012 045	1346	0.148	5.918 794	2456	0.198	5.747 093	4697	0.248	5.350 273	13833
0.049	6.059 501	609	0.099	6.010 682	1363	0.149	5.916 308	2486	0.199	5.742 325	4768	0.249	5.335 943	14330
0.050	6.058 878	623	0.100	6.009 301	1381	0.150	5.913 792	2516	0.200	5.737 483	4842	0.250	5.321 077	14866

Tafel II.

$\log \{M_1^{10}(m)\}$.

± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ
0.000	7.357 193	1	0.050	7.355 772	58	0.100	7.351 494	115	0.150	7.344 313	174	0.200	7.334 152	235
0.001	7.357 192	2	0.051	7.355 714	58	0.101	7.351 379	116	0.151	7.344 139	174	0.201	7.333 917	235
0.002	7.357 190	2	0.052	7.355 656	60	0.102	7.351 263	118	0.152	7.343 965	176	0.202	7.333 682	237
0.003	7.357 188	4	0.053	7.355 596	61	0.103	7.351 145	118	0.153	7.343 789	178	0.203	7.333 445	238
0.004	7.357 184	5	0.054	7.355 535	62	0.104	7.351 027	120	0.154	7.343 611	178	0.204	7.333 207	239
0.005	7.357 179	7	0.055	7.355 473	63	0.105	7.350 907	120	0.155	7.343 433	180	0.205	7.332 968	241
0.006	7.357 172	7	0.056	7.355 410	64	0.106	7.350 787	122	0.156	7.343 253	181	0.206	7.332 727	242
0.007	7.357 165	9	0.057	7.355 346	66	0.107	7.350 665	123	0.157	7.343 072	182	0.207	7.332 485	243
0.008	7.357 156	9	0.058	7.355 280	67	0.108	7.350 542	125	0.158	7.342 890	183	0.208	7.332 242	244
0.009	7.357 147	11	0.059	7.355 213	67	0.109	7.350 417	125	0.159	7.342 707	185	0.209	7.331 998	246
0.010	7.357 136	12	0.060	7.355 146	69	0.110	7.350 292	127	0.160	7.342 522	185	0.210	7.331 752	246
0.011	7.357 124	13	0.061	7.355 077	70	0.111	7.350 165	128	0.161	7.342 337	187	0.211	7.331 506	248
0.012	7.357 111	14	0.062	7.355 007	71	0.112	7.350 037	128	0.162	7.342 150	188	0.212	7.331 258	250
0.013	7.357 097	15	0.063	7.354 936	73	0.113	7.349 909	130	0.163	7.341 962	189	0.213	7.331 008	250
0.014	7.357 082	17	0.064	7.354 863	73	0.114	7.349 779	132	0.164	7.341 773	191	0.214	7.330 758	252
0.015	7.357 065	18	0.065	7.354 790	75	0.115	7.349 647	132	0.165	7.341 582	192	0.215	7.330 506	253
0.016	7.357 047	18	0.066	7.354 715	75	0.116	7.349 515	134	0.166	7.341 390	192	0.216	7.330 253	254
0.017	7.357 029	20	0.067	7.354 640	77	0.117	7.349 381	135	0.167	7.341 198	194	0.217	7.329 999	256
0.018	7.357 009	21	0.068	7.354 563	78	0.118	7.349 246	136	0.168	7.341 004	196	0.218	7.329 743	257
0.019	7.356 988	22	0.069	7.354 485	80	0.119	7.349 110	137	0.169	7.340 808	196	0.219	7.329 486	258
0.020	7.356 966	24	0.070	7.354 405	80	0.120	7.348 973	138	0.170	7.340 612	198	0.220	7.329 228	259
0.021	7.356 942	24	0.071	7.354 325	82	0.121	7.348 835	139	0.171	7.340 414	199	0.221	7.328 969	261
0.022	7.356 918	26	0.072	7.354 243	82	0.122	7.348 696	141	0.172	7.340 215	200	0.222	7.328 708	262
0.023	7.356 892	26	0.073	7.354 161	84	0.123	7.348 555	142	0.173	7.340 015	201	0.223	7.328 446	263
0.024	7.356 866	28	0.074	7.354 077	85	0.124	7.348 413	143	0.174	7.339 814	203	0.224	7.328 183	264
0.025	7.356 838	29	0.075	7.353 992	86	0.125	7.348 270	144	0.175	7.339 611	203	0.225	7.327 919	266
0.026	7.356 809	30	0.076	7.353 906	87	0.126	7.348 126	145	0.176	7.339 408	205	0.226	7.327 653	267
0.027	7.356 779	32	0.077	7.353 819	89	0.127	7.347 981	147	0.177	7.339 203	206	0.227	7.327 386	268
0.028	7.356 747	32	0.078	7.353 730	89	0.128	7.347 834	147	0.178	7.338 997	208	0.228	7.327 118	269
0.029	7.356 715	34	0.079	7.353 641	91	0.129	7.347 687	149	0.179	7.338 789	208	0.229	7.326 849	271
0.030	7.356 681	34	0.080	7.353 550	92	0.130	7.347 538	150	0.180	7.338 581	210	0.230	7.326 578	272
0.031	7.356 647	36	0.081	7.353 458	93	0.131	7.347 388	151	0.181	7.338 371	211	0.231	7.326 306	273
0.032	7.356 611	37	0.082	7.353 365	94	0.132	7.347 237	153	0.182	7.338 160	213	0.232	7.326 033	275
0.033	7.356 574	38	0.083	7.353 271	95	0.133	7.347 084	153	0.183	7.337 947	213	0.233	7.325 758	275
0.034	7.356 536	39	0.084	7.353 176	97	0.134	7.346 931	155	0.184	7.337 734	215	0.234	7.325 483	278
0.035	7.356 497	41	0.085	7.353 079	97	0.135	7.346 776	156	0.185	7.337 519	216	0.235	7.325 205	278
0.036	7.356 456	41	0.086	7.352 982	99	0.136	7.346 620	157	0.186	7.337 303	217	0.236	7.324 927	279
0.037	7.356 415	43	0.087	7.352 883	100	0.137	7.346 463	158	0.187	7.337 086	218	0.237	7.324 648	281
0.038	7.356 372	44	0.088	7.352 783	101	0.138	7.346 305	160	0.188	7.336 868	220	0.238	7.324 367	283
0.039	7.356 328	44	0.089	7.352 682	102	0.139	7.346 145	160	0.189	7.336 648	221	0.239	7.324 084	283
0.040	7.356 284	46	0.090	7.352 580	104	0.140	7.345 985	162	0.190	7.336 427	222	0.240	7.323 801	285
0.041	7.356 238	48	0.091	7.352 476	104	0.141	7.345 823	163	0.191	7.336 205	223	0.241	7.323 516	286
0.042	7.356 190	48	0.092	7.352 372	106	0.142	7.345 660	164	0.192	7.335 982	224	0.242	7.323 230	287
0.043	7.356 142	49	0.093	7.352 266	107	0.143	7.345 496	166	0.193	7.335 758	226	0.243	7.322 943	289
0.044	7.356 093	51	0.094	7.352 159	108	0.144	7.345 330	166	0.194	7.335 532	227	0.244	7.322 654	290
0.045	7.356 042	52	0.095	7.352 051	109	0.145	7.345 164	168	0.195	7.335 305	228	0.245	7.322 364	291
0.046	7.355 990	53	0.096	7.351 942	110	0.146	7.344 996	169	0.196	7.335 077	230	0.246	7.322 073	293
0.047	7.355 937	54	0.097	7.351 832	112	0.147	7.344 827	170	0.197	7.334 847	230	0.247	7.321 780	294
0.048	7.355 883	55	0.098	7.351 720	112	0.148	7.344 657	171	0.198	7.334 617	232	0.248	7.321 486	295
0.049	7.355 828	56	0.099	7.351 608	114	0.149	7.344 486	173	0.199	7.334 385	233	0.249	7.321 191	296
0.050	7.355 772		0.100	7.351 494		0.150	7.344 313		0.200	7.334 152		0.250	7.320 895	

Tafel III.

$\log \{N_2^4(n)\}$.

vergl. pag. 19.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	$8_n920\ 819$	3	0.050	$8_n914\ 255$	267	0.100	$8_n893\ 947$	558	0.150	$8_n857\ 835$	908	0.200	$8_n801\ 632$	1377
0.001	$8_n920\ 816$	8	0.051	$8_n913\ 988$	273	0.101	$8_n893\ 389$	564	0.151	$8_n856\ 927$	915	0.201	$8_n800\ 255$	1388
0.002	$8_n920\ 808$	13	0.052	$8_n913\ 715$	278	0.102	$8_n892\ 825$	570	0.152	$8_n856\ 012$	924	0.202	$8_n798\ 867$	1400
0.003	$8_n920\ 795$	18	0.053	$8_n913\ 437$	284	0.103	$8_n892\ 255$	576	0.153	$8_n855\ 088$	932	0.203	$8_n797\ 467$	1411
0.004	$8_n920\ 777$	23	0.054	$8_n913\ 153$	289	0.104	$8_n891\ 679$	583	0.154	$8_n854\ 156$	939	0.204	$8_n796\ 056$	1423
0.005	$8_n920\ 754$	29	0.055	$8_n912\ 864$	295	0.105	$8_n891\ 096$	589	0.155	$8_n853\ 217$	948	0.205	$8_n794\ 633$	1434
0.006	$8_n920\ 725$	34	0.056	$8_n912\ 569$	300	0.106	$8_n890\ 507$	596	0.156	$8_n852\ 269$	956	0.206	$8_n793\ 199$	1446
0.007	$8_n920\ 691$	39	0.057	$8_n912\ 269$	306	0.107	$8_n889\ 911$	602	0.157	$8_n851\ 313$	965	0.207	$8_n791\ 753$	1458
0.008	$8_n920\ 652$	44	0.058	$8_n911\ 963$	311	0.108	$8_n889\ 309$	608	0.158	$8_n850\ 348$	973	0.208	$8_n790\ 295$	1470
0.009	$8_n920\ 608$	50	0.059	$8_n911\ 652$	317	0.109	$8_n888\ 701$	615	0.159	$8_n849\ 375$	981	0.209	$8_n788\ 825$	1483
0.010	$8_n920\ 558$	55	0.060	$8_n911\ 335$	322	0.110	$8_n888\ 086$	621	0.160	$8_n848\ 394$	989	0.210	$8_n787\ 342$	1494
0.011	$8_n920\ 503$	60	0.061	$8_n911\ 013$	328	0.111	$8_n887\ 465$	628	0.161	$8_n847\ 405$	998	0.211	$8_n785\ 848$	1506
0.012	$8_n920\ 443$	65	0.062	$8_n910\ 685$	334	0.112	$8_n886\ 837$	635	0.162	$8_n846\ 407$	1006	0.212	$8_n784\ 342$	1519
0.013	$8_n920\ 378$	70	0.063	$8_n910\ 351$	339	0.113	$8_n886\ 202$	641	0.163	$8_n845\ 401$	1015	0.213	$8_n782\ 823$	1532
0.014	$8_n920\ 308$	76	0.064	$8_n910\ 012$	345	0.114	$8_n885\ 561$	648	0.164	$8_n844\ 386$	1023	0.214	$8_n781\ 291$	1544
0.015	$8_n920\ 232$	81	0.065	$8_n909\ 667$	350	0.115	$8_n884\ 913$	654	0.165	$8_n843\ 363$	1032	0.215	$8_n779\ 747$	1557
0.016	$8_n920\ 151$	86	0.066	$8_n909\ 317$	356	0.116	$8_n884\ 259$	661	0.166	$8_n842\ 331$	1041	0.216	$8_n778\ 190$	1570
0.017	$8_n920\ 065$	91	0.067	$8_n908\ 961$	362	0.117	$8_n883\ 598$	668	0.167	$8_n841\ 290$	1050	0.217	$8_n776\ 620$	1583
0.018	$8_n919\ 974$	97	0.068	$8_n908\ 599$	367	0.118	$8_n882\ 930$	674	0.168	$8_n840\ 240$	1059	0.218	$8_n775\ 037$	1596
0.019	$8_n919\ 877$	102	0.069	$8_n908\ 232$	373	0.119	$8_n882\ 256$	681	0.169	$8_n839\ 181$	1067	0.219	$8_n773\ 441$	1609
0.020	$8_n919\ 775$	107	0.070	$8_n907\ 859$	379	0.120	$8_n881\ 575$	688	0.170	$8_n838\ 114$	1076	0.220	$8_n771\ 832$	1622
0.021	$8_n919\ 668$	112	0.071	$8_n907\ 480$	384	0.121	$8_n880\ 887$	695	0.171	$8_n837\ 038$	1085	0.221	$8_n770\ 210$	1636
0.022	$8_n919\ 556$	118	0.072	$8_n907\ 096$	390	0.122	$8_n880\ 192$	701	0.172	$8_n835\ 953$	1095	0.222	$8_n768\ 574$	1650
0.023	$8_n919\ 438$	123	0.073	$8_n906\ 706$	396	0.123	$8_n879\ 491$	709	0.173	$8_n834\ 858$	1103	0.223	$8_n766\ 924$	1663
0.024	$8_n919\ 315$	128	0.074	$8_n906\ 310$	402	0.124	$8_n878\ 782$	715	0.174	$8_n833\ 755$	1113	0.224	$8_n765\ 261$	1677
0.025	$8_n919\ 187$	133	0.075	$8_n905\ 908$	407	0.125	$8_n878\ 067$	722	0.175	$8_n832\ 642$	1122	0.225	$8_n763\ 584$	1691
0.026	$8_n919\ 054$	139	0.076	$8_n905\ 501$	413	0.126	$8_n877\ 345$	730	0.176	$8_n831\ 520$	1131	0.226	$8_n761\ 893$	1705
0.027	$8_n918\ 915$	144	0.077	$8_n905\ 088$	419	0.127	$8_n876\ 615$	736	0.177	$8_n830\ 389$	1141	0.227	$8_n760\ 188$	1720
0.028	$8_n918\ 771$	149	0.078	$8_n904\ 669$	425	0.128	$8_n875\ 879$	743	0.178	$8_n829\ 248$	1150	0.228	$8_n758\ 468$	1734
0.029	$8_n918\ 622$	155	0.079	$8_n904\ 244$	431	0.129	$8_n875\ 136$	751	0.179	$8_n828\ 098$	1160	0.229	$8_n756\ 734$	1749
0.030	$8_n918\ 467$	160	0.080	$8_n903\ 813$	436	0.130	$8_n874\ 385$	757	0.180	$8_n826\ 938$	1169	0.230	$8_n754\ 985$	1763
0.031	$8_n918\ 307$	165	0.081	$8_n903\ 377$	443	0.131	$8_n873\ 628$	765	0.181	$8_n825\ 769$	1179	0.231	$8_n753\ 222$	1779
0.032	$8_n918\ 142$	170	0.082	$8_n902\ 934$	448	0.132	$8_n872\ 863$	772	0.182	$8_n824\ 590$	1189	0.232	$8_n751\ 443$	1793
0.033	$8_n917\ 972$	176	0.083	$8_n902\ 486$	454	0.133	$8_n872\ 091$	779	0.183	$8_n823\ 401$	1198	0.233	$8_n749\ 650$	1808
0.034	$8_n917\ 796$	181	0.084	$8_n902\ 032$	460	0.134	$8_n871\ 312$	786	0.184	$8_n822\ 203$	1208	0.234	$8_n747\ 842$	1824
0.035	$8_n917\ 615$	186	0.085	$8_n901\ 572$	466	0.135	$8_n870\ 526$	794	0.185	$8_n820\ 995$	1219	0.235	$8_n746\ 018$	1840
0.036	$8_n917\ 429$	192	0.086	$8_n901\ 106$	472	0.136	$8_n869\ 732$	801	0.186	$8_n819\ 776$	1228	0.236	$8_n744\ 178$	1855
0.037	$8_n917\ 237$	197	0.087	$8_n900\ 634$	478	0.137	$8_n868\ 931$	808	0.187	$8_n818\ 548$	1238	0.237	$8_n742\ 323$	1871
0.038	$8_n917\ 040$	203	0.088	$8_n900\ 156$	484	0.138	$8_n868\ 123$	816	0.188	$8_n817\ 310$	1249	0.238	$8_n740\ 452$	1887
0.039	$8_n916\ 837$	208	0.089	$8_n899\ 672$	490	0.139	$8_n867\ 307$	823	0.189	$8_n816\ 061$	1259	0.239	$8_n738\ 565$	1903
0.040	$8_n916\ 629$	213	0.090	$8_n899\ 182$	496	0.140	$8_n866\ 484$	830	0.190	$8_n814\ 802$	1269	0.240	$8_n736\ 662$	1919
0.041	$8_n916\ 416$	218	0.091	$8_n898\ 686$	502	0.141	$8_n865\ 654$	838	0.191	$8_n813\ 533$	1279	0.241	$8_n734\ 743$	1937
0.042	$8_n916\ 198$	224	0.092	$8_n898\ 184$	508	0.142	$8_n864\ 816$	846	0.192	$8_n812\ 254$	1290	0.242	$8_n732\ 806$	1952
0.043	$8_n915\ 974$	229	0.093	$8_n897\ 676$	515	0.143	$8_n863\ 970$	853	0.193	$8_n810\ 964$	1301	0.243	$8_n730\ 854$	1970
0.044	$8_n915\ 745$	235	0.094	$8_n897\ 161$	520	0.144	$8_n863\ 117$	861	0.194	$8_n809\ 663$	1311	0.244	$8_n728\ 884$	1987
0.045	$8_n915\ 510$	240	0.095	$8_n896\ 641$	526	0.145	$8_n862\ 256$	869	0.195	$8_n808\ 352$	1322	0.245	$8_n726\ 897$	2004
0.046	$8_n915\ 270$	246	0.096	$8_n896\ 115$	533	0.146	$8_n861\ 387$	876	0.196	$8_n807\ 030$	1333	0.246	$8_n724\ 893$	2022
0.047	$8_n915\ 024$	251	0.097	$8_n895\ 582$	539	0.147	$8_n860\ 511$	884	0.197	$8_n805\ 697$	1344	0.247	$8_n722\ 871$	2039
0.048	$8_n914\ 773$	256	0.098	$8_n895\ 043$	545	0.148	$8_n859\ 627$	892	0.198	$8_n804\ 353$	1355	0.248	$8_n720\ 832$	2058
0.049	$8_n914\ 517$	262	0.099	$8_n894\ 498$	551	0.149	$8_n858\ 735$	900	0.199	$8_n802\ 998$	1366	0.249	$8_n718\ 774$	2075
0.050	$8_n914\ 255$		0.100	$8_n893\ 947$		0.150	$8_n857\ 835$		0.200	$8_n801\ 632$		0.250	$8_n716\ 699$	

Tafel III.

$\log \{N_2^{5}/n\}$.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	9_n397 940	0	0.050	9_n397 216	30	0.100	9_n395 035	59	0.150	9_n391 376	88	0.200	9_n386 202	120
0.001	9_n397 940	1	0.051	9_n397 186	30	0.101	9_n394 976	59	0.151	9_n391 288	89	0.201	9_n386 082	120
0.002	9_n397 939	1	0.052	9_n397 156	30	0.102	9_n394 917	60	0.152	9_n391 199	90	0.202	9_n385 962	120
0.003	9_n397 938	2	0.053	9_n397 126	31	0.103	9_n394 857	60	0.153	9_n391 109	90	0.203	9_n385 842	121
0.004	9_n397 936	3	0.054	9_n397 095	32	0.104	9_n394 797	61	0.154	9_n391 019	91	0.204	9_n385 721	122
0.005	9_n397 933	3	0.055	9_n397 063	32	0.105	9_n394 736	61	0.155	9_n390 928	92	0.205	9_n385 599	123
0.006	9_n397 930	4	0.056	9_n397 031	33	0.106	9_n394 675	62	0.156	9_n390 836	92	0.206	9_n385 476	123
0.007	9_n397 926	4	0.057	9_n396 998	33	0.107	9_n394 613	63	0.157	9_n390 744	93	0.207	9_n385 353	123
0.008	9_n397 922	5	0.058	9_n396 965	34	0.108	9_n394 550	64	0.158	9_n390 651	93	0.208	9_n385 230	125
0.009	9_n397 917	6	0.059	9_n396 931	35	0.109	9_n394 486	64	0.159	9_n390 558	94	0.209	9_n385 105	125
0.010	9_n397 911	6	0.060	9_n396 896	35	0.110	9_n394 422	64	0.160	9_n390 464	95	0.210	9_n384 980	125
0.011	9_n397 905	7	0.061	9_n396 861	35	0.111	9_n394 358	65	0.161	9_n390 369	95	0.211	9_n384 855	126
0.012	9_n397 898	7	0.062	9_n396 826	37	0.112	9_n394 293	66	0.162	9_n390 274	95	0.212	9_n384 729	127
0.013	9_n397 891	8	0.063	9_n396 789	37	0.113	9_n394 227	66	0.163	9_n390 179	97	0.213	9_n384 602	128
0.014	9_n397 883	8	0.064	9_n396 752	37	0.114	9_n394 161	67	0.164	9_n390 082	97	0.214	9_n384 474	128
0.015	9_n397 875	9	0.065	9_n396 715	38	0.115	9_n394 094	67	0.165	9_n389 985	97	0.215	9_n384 346	129
0.016	9_n397 866	10	0.066	9_n396 677	39	0.116	9_n394 027	68	0.166	9_n389 888	99	0.216	9_n384 217	129
0.017	9_n397 856	10	0.067	9_n396 638	39	0.117	9_n393 959	69	0.167	9_n389 789	99	0.217	9_n384 088	130
0.018	9_n397 846	11	0.068	9_n396 599	40	0.118	9_n393 890	69	0.168	9_n389 690	99	0.218	9_n383 958	131
0.019	9_n397 835	11	0.069	9_n396 559	40	0.119	9_n393 821	70	0.169	9_n389 591	100	0.219	9_n383 827	131
0.020	9_n397 824	12	0.070	9_n396 519	41	0.120	9_n393 751	71	0.170	9_n389 491	101	0.220	9_n383 696	132
0.021	9_n397 812	12	0.071	9_n396 478	42	0.121	9_n393 680	71	0.171	9_n389 390	101	0.221	9_n383 564	133
0.022	9_n397 800	13	0.072	9_n396 436	42	0.122	9_n393 609	72	0.172	9_n389 289	102	0.222	9_n383 431	133
0.023	9_n397 787	14	0.073	9_n396 394	42	0.123	9_n393 537	72	0.173	9_n389 187	102	0.223	9_n383 298	134
0.024	9_n397 773	14	0.074	9_n396 352	44	0.124	9_n393 465	73	0.174	9_n389 085	103	0.224	9_n383 164	134
0.025	9_n397 759	15	0.075	9_n396 308	44	0.125	9_n393 392	73	0.175	9_n388 982	104	0.225	9_n383 030	136
0.026	9_n397 744	15	0.076	9_n396 264	44	0.126	9_n393 319	74	0.176	9_n388 878	105	0.226	9_n382 894	135
0.027	9_n397 729	16	0.077	9_n396 220	45	0.127	9_n393 245	75	0.177	9_n388 773	105	0.227	9_n382 759	137
0.028	9_n397 713	17	0.078	9_n396 175	46	0.128	9_n393 170	75	0.178	9_n388 668	105	0.228	9_n382 622	137
0.029	9_n397 696	17	0.079	9_n396 129	46	0.129	9_n393 095	76	0.179	9_n388 563	106	0.229	9_n382 485	138
0.030	9_n397 679	17	0.080	9_n396 083	47	0.130	9_n393 019	76	0.180	9_n388 457	107	0.230	9_n382 347	138
0.031	9_n397 662	18	0.081	9_n396 036	47	0.131	9_n392 943	77	0.181	9_n388 350	108	0.231	9_n382 209	139
0.032	9_n397 644	19	0.082	9_n395 989	48	0.132	9_n392 866	78	0.182	9_n388 242	108	0.232	9_n382 070	140
0.033	9_n397 625	20	0.083	9_n395 941	49	0.133	9_n392 788	78	0.183	9_n388 134	109	0.233	9_n381 930	140
0.034	9_n397 605	20	0.084	9_n395 892	49	0.134	9_n392 710	79	0.184	9_n388 025	109	0.234	9_n381 790	141
0.035	9_n397 585	20	0.085	9_n395 843	50	0.135	9_n392 631	79	0.185	9_n387 916	110	0.235	9_n381 649	142
0.036	9_n397 565	21	0.086	9_n395 793	50	0.136	9_n392 552	80	0.186	9_n387 806	110	0.236	9_n381 507	142
0.037	9_n397 544	22	0.087	9_n395 743	51	0.137	9_n392 472	81	0.187	9_n387 696	112	0.237	9_n381 365	143
0.038	9_n397 522	22	0.088	9_n395 692	51	0.138	9_n392 391	81	0.188	9_n387 584	111	0.238	9_n381 222	143
0.039	9_n397 500	23	0.089	9_n395 641	52	0.139	9_n392 310	82	0.189	9_n387 473	113	0.239	9_n381 079	144
0.040	9_n397 477	24	0.090	9_n395 589	53	0.140	9_n392 228	83	0.190	9_n387 360	113	0.240	9_n380 935	145
0.041	9_n397 453	24	0.091	9_n395 536	53	0.141	9_n392 145	83	0.191	9_n387 247	114	0.241	9_n380 790	146
0.042	9_n397 429	25	0.092	9_n395 483	54	0.142	9_n392 062	83	0.192	9_n387 133	114	0.242	9_n380 644	146
0.043	9_n397 404	25	0.093	9_n395 429	55	0.143	9_n391 979	84	0.193	9_n387 019	115	0.243	9_n380 498	147
0.044	9_n397 379	26	0.094	9_n395 374	55	0.144	9_n391 895	85	0.194	9_n386 904	115	0.244	9_n380 351	147
0.045	9_n397 353	26	0.095	9_n395 319	55	0.145	9_n391 810	86	0.195	9_n386 789	116	0.245	9_n380 204	148
0.046	9_n397 327	27	0.096	9_n395 264	57	0.146	9_n391 724	86	0.196	9_n386 673	117	0.246	9_n380 056	149
0.047	9_n397 300	28	0.097	9_n395 207	57	0.147	9_n391 638	87	0.197	9_n386 556	118	0.247	9_n379 907	150
0.048	9_n397 272	28	0.098	9_n395 150	57	0.148	9_n391 551	87	0.198	9_n386 438	118	0.248	9_n379 757	150
0.049	9_n397 244	28	0.099	9_n395 093	58	0.149	9_n391 464	88	0.199	9_n386 320	118	0.249	9_n379 607	150
0.050	9_n397 216		0.100	9_n395 035		0.150	9_n391 376		0.200	9_n386 202		0.250	9_n379 457	

Tafel III.

$\log\{N_2^6(n)\}$.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	8.045 758	4	0.050	8.037 547	334	0.100	8.012 075	701	0.150	7.966 480	1152	0.200	7.894 562	1779
0.001	8.045 754	10	0.051	8.037 213	341	0.101	8.011 374	709	0.151	7.965 328	1162	0.201	7.892 783	1795
0.002	8.045 744	16	0.052	8.036 872	349	0.102	8.010 665	717	0.152	7.964 166	1172	0.202	7.890 988	1810
0.003	8.045 728	23	0.053	8.036 523	355	0.103	8.009 948	725	0.153	7.962 994	1183	0.203	7.889 178	1827
0.004	8.045 705	29	0.054	8.036 168	362	0.104	8.009 223	733	0.154	7.961 811	1194	0.204	7.887 351	1842
0.005	8.045 676	36	0.055	8.035 806	369	0.105	8.008 490	741	0.155	7.960 617	1204	0.205	7.885 509	1858
0.006	8.045 640	42	0.056	8.035 437	376	0.106	8.007 749	749	0.156	7.959 413	1215	0.206	7.883 651	1875
0.007	8.045 598	49	0.057	8.035 061	382	0.107	8.007 000	757	0.157	7.958 198	1226	0.207	7.881 776	1891
0.008	8.045 549	55	0.058	8.034 679	390	0.108	8.006 243	766	0.158	7.956 972	1237	0.208	7.879 885	1908
0.009	8.045 494	62	0.059	8.034 289	397	0.109	8.005 477	774	0.159	7.955 735	1247	0.209	7.877 977	1924
0.010	8.045 432	69	0.060	8.033 892	404	0.110	8.004 703	782	0.160	7.954 488	1259	0.210	7.876 053	1941
0.011	8.045 363	75	0.061	8.033 488	410	0.111	8.003 921	791	0.161	7.953 229	1270	0.211	7.874 112	1959
0.012	8.045 288	81	0.062	8.033 078	418	0.112	8.003 130	799	0.162	7.951 959	1281	0.212	7.872 153	1976
0.013	8.045 207	88	0.063	8.032 660	425	0.113	8.002 331	807	0.163	7.950 678	1292	0.213	7.870 177	1993
0.014	8.045 119	95	0.064	8.032 235	432	0.114	8.001 524	816	0.164	7.949 386	1304	0.214	7.868 184	2011
0.015	8.045 024	101	0.065	8.031 803	439	0.115	8.000 708	824	0.165	7.948 082	1315	0.215	7.866 173	2029
0.016	8.044 923	108	0.066	8.031 364	446	0.116	7.999 884	833	0.166	7.946 767	1326	0.216	7.864 144	2047
0.017	8.044 815	114	0.067	8.030 918	453	0.117	7.999 051	842	0.167	7.945 441	1338	0.217	7.862 097	2066
0.018	8.044 701	121	0.068	8.030 465	460	0.118	7.998 209	850	0.168	7.944 103	1350	0.218	7.860 031	2083
0.019	8.044 580	127	0.069	8.030 005	468	0.119	7.997 359	858	0.169	7.942 753	1362	0.219	7.857 948	2103
0.020	8.044 453	134	0.070	8.029 537	474	0.120	7.996 501	868	0.170	7.941 391	1373	0.220	7.855 845	2121
0.021	8.044 319	141	0.071	8.029 063	482	0.121	7.995 633	876	0.171	7.940 018	1386	0.221	7.853 724	2141
0.022	8.044 178	147	0.072	8.028 581	489	0.122	7.994 757	885	0.172	7.938 632	1398	0.222	7.851 583	2159
0.023	8.044 031	153	0.073	8.028 092	497	0.123	7.993 872	893	0.173	7.937 234	1409	0.223	7.849 424	2180
0.024	8.043 878	160	0.074	8.027 595	503	0.124	7.992 979	903	0.174	7.935 825	1422	0.224	7.847 244	2199
0.025	8.043 718	167	0.075	8.027 092	511	0.125	7.992 076	911	0.175	7.934 403	1434	0.225	7.845 045	2219
0.026	8.043 551	174	0.076	8.026 581	518	0.126	7.991 165	921	0.176	7.932 969	1447	0.226	7.842 826	2239
0.027	8.043 377	180	0.077	8.026 063	525	0.127	7.990 244	929	0.177	7.931 522	1459	0.227	7.840 587	2260
0.028	8.043 197	186	0.078	8.025 538	533	0.128	7.989 315	939	0.178	7.930 063	1472	0.228	7.838 327	2281
0.029	8.043 011	194	0.079	8.025 005	540	0.129	7.988 376	948	0.179	7.928 591	1485	0.229	7.836 046	2301
0.030	8.042 817	200	0.080	8.024 465	548	0.130	7.987 428	956	0.180	7.927 106	1498	0.230	7.833 745	2323
0.031	8.042 617	206	0.081	8.023 917	555	0.131	7.986 472	966	0.181	7.925 608	1510	0.231	7.831 422	2344
0.032	8.042 411	213	0.082	8.023 362	562	0.132	7.985 506	976	0.182	7.924 098	1523	0.232	7.829 078	2366
0.033	8.042 198	220	0.083	8.022 800	570	0.133	7.984 530	984	0.183	7.922 575	1537	0.233	7.826 712	2389
0.034	8.041 978	227	0.084	8.022 230	577	0.134	7.983 546	994	0.184	7.921 038	1550	0.234	7.824 323	2410
0.035	8.041 751	233	0.085	8.021 653	585	0.135	7.982 552	1004	0.185	7.919 488	1563	0.235	7.821 913	2433
0.036	8.041 518	240	0.086	8.021 068	593	0.136	7.981 548	1013	0.186	7.917 925	1577	0.236	7.819 480	2456
0.037	8.041 278	246	0.087	8.020 475	600	0.137	7.980 535	1022	0.187	7.916 348	1591	0.237	7.817 024	2479
0.038	8.041 032	253	0.088	8.019 875	607	0.138	7.979 513	1032	0.188	7.914 757	1604	0.238	7.814 545	2502
0.039	8.040 779	260	0.089	8.019 268	615	0.139	7.978 481	1042	0.189	7.913 153	1618	0.239	7.812 043	2527
0.040	8.040 519	267	0.090	8.018 653	623	0.140	7.977 439	1051	0.190	7.911 535	1632	0.240	7.809 516	2551
0.041	8.040 252	274	0.091	8.018 030	631	0.141	7.976 388	1061	0.191	7.909 903	1647	0.241	7.806 965	2575
0.042	8.039 978	280	0.092	8.017 399	638	0.142	7.975 327	1071	0.192	7.908 256	1660	0.242	7.804 390	2599
0.043	8.039 698	286	0.093	8.016 761	646	0.143	7.974 256	1081	0.193	7.906 596	1675	0.243	7.801 791	2625
0.044	8.039 412	294	0.094	8.016 115	654	0.144	7.973 175	1090	0.194	7.904 921	1690	0.244	7.799 166	2650
0.045	8.039 118	301	0.095	8.015 461	661	0.145	7.972 085	1101	0.195	7.903 231	1704	0.245	7.796 516	2676
0.046	8.038 817	307	0.096	8.014 800	670	0.146	7.970 984	1111	0.196	7.901 527	1718	0.246	7.793 840	2703
0.047	8.038 510	314	0.097	8.014 130	677	0.147	7.969 873	1121	0.197	7.899 809	1734	0.247	7.791 137	2729
0.048	8.038 196	321	0.098	8.013 453	685	0.148	7.968 752	1131	0.198	7.898 075	1749	0.248	7.788 408	2756
0.049	8.037 875	328	0.099	8.012 768	693	0.149	7.967 621	1141	0.199	7.896 326	1764	0.249	7.785 652	2783
0.050	8.037 547		0.100	8.012 075		0.150	7.966 480		0.200	7.894 562		0.250	7.782 869	

Tafel III.

$\log \{N_2{}^7\, n\}$.

± n	N	− Δ	± n	N	− Δ	± n	N	− Δ	± n	N	− Δ	± n	N	− Δ
0.000	8.765 917	1	0.050	8.764 882	42	0.100	8.761 767	84	0.150	8.756 541	126	0.200	8.749 152	170
0.001	8.765 916	1	0.051	8.764 840	43	0.101	8.761 683	84	0.151	8.756 415	127	0.201	8.748 982	172
0.002	8.765 915	2	0.052	8.764 797	43	0.102	8.761 599	85	0.152	8.756 288	128	0.202	8.748 810	172
0.003	8.765 913	3	0.053	8.764 754	44	0.103	8.761 514	87	0.153	8.756 160	129	0.203	8.748 638	173
0.004	8.765 910	4	0.054	8.764 710	45	0.104	8.761 427	87	0.154	8.756 031	130	0.204	8.748 465	174
0.005	8.765 906	4	0.055	8.764 665	46	0.105	8.761 340	88	0.155	8.755 901	131	0.205	8.748 291	174
0.006	8.765 902	5	0.056	8.764 619	47	0.106	8.761 252	88	0.156	8.755 770	131	0.206	8.748 117	176
0.007	8.765 897	7	0.057	8.764 572	48	0.107	8.761 164	90	0.157	8.755 639	133	0.207	8.747 941	177
0.008	8.765 890	7	0.058	8.764 524	49	0.108	8.761 074	91	0.158	8.755 506	133	0.208	8.747 764	177
0.009	8.765 883	8	0.059	8.764 475	49	0.109	8.760 983	91	0.159	8.755 373	134	0.209	8.747 587	179
0.010	8.765 875	8	0.060	8.764 426	50	0.110	8.760 892	92	0.160	8.755 239	135	0.210	8.747 408	179
0.011	8.765 867	10	0.061	8.764 376	51	0.111	8.760 800	93	0.161	8.755 104	136	0.211	8.747 229	180
0.012	8.765 857	10	0.062	8.764 325	52	0.112	8.760 707	94	0.162	8.754 968	137	0.212	8.747 049	181
0.013	8.765 847	11	0.063	8.764 273	53	0.113	8.760 613	95	0.163	8.754 831	138	0.213	8.746 868	182
0.014	8.765 836	12	0.064	8.764 220	53	0.114	8.760 518	95	0.164	8.754 693	138	0.214	8.746 686	183
0.015	8.765 824	13	0.065	8.764 167	55	0.115	8.760 423	96	0.165	8.754 555	139	0.215	8.746 503	184
0.016	8.765 811	14	0.066	8.764 112	55	0.116	8.760 327	98	0.166	8.754 416	141	0.216	8.746 319	185
0.017	8.765 797	14	0.067	8.764 057	56	0.117	8.760 229	98	0.167	8.754 275	141	0.217	8.746 134	186
0.018	8.765 783	16	0.068	8.764 001	57	0.118	8.760 131	99	0.168	8.754 134	142	0.218	8.745 948	186
0.019	8.765 767	16	0.069	8.763 944	57	0.119	8.760 032	99	0.169	8.753 992	143	0.219	8.745 762	188
0.020	8.765 751	17	0.070	8.763 887	59	0.120	8.759 933	101	0.170	8.753 849	144	0.220	8.745 574	188
0.021	8.765 734	17	0.071	8.763 828	59	0.121	8.759 832	102	0.171	8.753 705	144	0.221	8.745 386	190
0.022	8.765 717	19	0.072	8.763 769	60	0.122	8.759 730	102	0.172	8.753 561	146	0.222	8.745 196	190
0.023	8.765 698	19	0.073	8.763 709	61	0.123	8.759 628	103	0.173	8.753 415	146	0.223	8.745 006	191
0.024	8.765 679	21	0.074	8.763 648	62	0.124	8.759 525	104	0.174	8.753 269	148	0.224	8.744 815	192
0.025	8.765 658	21	0.075	8.763 586	63	0.125	8.759 421	105	0.175	8.753 121	148	0.225	8.744 623	193
0.026	8.765 637	22	0.076	8.763 523	63	0.126	8.759 316	106	0.176	8.752 973	149	0.226	8.744 430	194
0.027	8.765 615	23	0.077	8.763 460	65	0.127	8.759 210	106	0.177	8.752 824	150	0.227	8.744 236	195
0.028	8.765 592	23	0.078	8.763 395	65	0.128	8.759 104	108	0.178	8.752 674	151	0.228	8.744 041	195
0.029	8.765 569	25	0.079	8.763 330	66	0.129	8.758 996	108	0.179	8.752 523	151	0.229	8.743 846	197
0.030	8.765 544	25	0.080	8.763 264	67	0.130	8.758 888	109	0.180	8.752 372	153	0.230	8.743 649	198
0.031	8.765 519	26	0.081	8.763 197	67	0.131	8.758 779	110	0.181	8.752 219	153	0.231	8.743 451	198
0.032	8.765 493	27	0.082	8.763 130	69	0.132	8.758 669	111	0.182	8.752 066	154	0.232	8.743 253	199
0.033	8.765 466	27	0.083	8.763 061	69	0.133	8.758 558	112	0.183	8.751 912	156	0.233	8.743 054	201
0.034	8.765 439	29	0.084	8.762 992	71	0.134	8.758 446	113	0.184	8.751 756	156	0.234	8.742 853	201
0.035	8.765 410	29	0.085	8.762 921	71	0.135	8.758 333	113	0.185	8.751 600	157	0.235	8.742 652	202
0.036	8.765 381	31	0.086	8.762 850	72	0.136	8.758 220	114	0.186	8.751 443	158	0.236	8.742 450	203
0.037	8.765 350	31	0.087	8.762 778	72	0.137	8.758 106	115	0.187	8.751 285	158	0.237	8.742 247	204
0.038	8.765 319	32	0.088	8.762 706	74	0.138	8.757 991	116	0.188	8.751 127	160	0.238	8.742 043	205
0.039	8.765 287	32	0.089	8.762 632	74	0.139	8.757 875	117	0.189	8.750 967	161	0.239	8.741 838	206
0.040	8.765 255	34	0.090	8.762 558	76	0.140	8.757 758	118	0.190	8.750 806	161	0.240	8.741 632	207
0.041	8.765 221	34	0.091	8.762 482	76	0.141	8.757 640	119	0.191	8.750 645	162	0.241	8.741 425	208
0.042	8.765 187	35	0.092	8.762 406	77	0.142	8.757 521	119	0.192	8.750 483	164	0.242	8.741 217	208
0.043	8.765 152	36	0.093	8.762 329	77	0.143	8.757 402	120	0.193	8.750 319	164	0.243	8.741 009	210
0.044	8.765 116	37	0.094	8.762 252	79	0.144	8.757 282	122	0.194	8.750 155	165	0.244	8.740 799	210
0.045	8.765 079	38	0.095	8.762 173	80	0.145	8.757 160	122	0.195	8.749 990	166	0.245	8.740 589	212
0.046	8.765 041	39	0.096	8.762 093	80	0.146	8.757 038	123	0.196	8.749 824	166	0.246	8.740 377	212
0.047	8.765 002	39	0.097	8.762 013	81	0.147	8.756 915	123	0.197	8.749 658	168	0.247	8.740 165	213
0.048	8.764 963	40	0.098	8.761 932	82	0.148	8.756 792	125	0.198	8.749 490	169	0.248	8.739 952	214
0.049	8.764 923	41	0.099	8.761 850	83	0.149	8.756 667	126	0.199	8.749 321	169	0.249	8.739 738	216
0.050	8.764 882		0.100	8.761 767		0.150	8.756 541		0.200	8.749 152		0.250	8.739 522	

Tafel III.

$\log\{N_2^{8}(n)\}$.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	7_n251 812	3	0.050	7_n242 870	365	0.100	7_n215 088	766	0.150	7_n165 199	1263	0.200	7_n085 989	1969
0.001	7_n251 809	11	0.051	7_n242 505	372	0.101	7_n214 322	774	0.151	7_n163 936	1275	0.201	7_n084 020	1987
0.002	7_n251 798	17	0.052	7_n242 133	379	0.102	7_n213 548	782	0.152	7_n162 661	1286	0.202	7_n082 033	2005
0.003	7_n251 781	25	0.053	7_n241 754	387	0.103	7_n212 766	792	0.153	7_n161 375	1298	0.203	7_n080 028	2023
0.004	7_n251 756	32	0.054	7_n241 367	395	0.104	7_n211 974	801	0.154	7_n160 077	1310	0.204	7_n078 005	2041
0.005	7_n251 724	39	0.055	7_n240 972	402	0.105	7_n211 173	809	0.155	7_n158 767	1321	0.205	7_n075 964	2059
0.006	7_n251 685	46	0.056	7_n240 570	410	0.106	7_n210 364	819	0.156	7_n157 446	1334	0.206	7_n073 905	2078
0.007	7_n251 639	54	0.057	7_n240 160	417	0.107	7_n209 545	827	0.157	7_n156 112	1346	0.207	7_n071 827	2097
0.008	7_n251 585	60	0.058	7_n239 743	425	0.108	7_n208 718	836	0.158	7_n154 766	1357	0.208	7_n069 730	2116
0.009	7_n251 525	68	0.059	7_n239 318	432	0.109	7_n207 882	846	0.159	7_n153 409	1370	0.209	7_n067 614	2136
0.010	7_n251 457	74	0.060	7_n238 886	440	0.110	7_n207 036	855	0.160	7_n152 039	1382	0.210	7_n065 478	2154
0.011	7_n251 383	82	0.061	7_n238 446	448	0.111	7_n206 181	864	0.161	7_n150 657	1395	0.211	7_n063 324	2175
0.012	7_n251 301	89	0.062	7_n237 998	455	0.112	7_n205 317	873	0.162	7_n149 262	1407	0.212	7_n061 149	2194
0.013	7_n251 212	96	0.063	7_n237 543	463	0.113	7_n204 444	882	0.163	7_n147 855	1420	0.213	7_n058 955	2214
0.014	7_n251 116	103	0.064	7_n237 080	471	0.114	7_n203 562	892	0.164	7_n146 435	1433	0.214	7_n056 741	2235
0.015	7_n251 013	110	0.065	7_n236 609	478	0.115	7_n202 670	901	0.165	7_n145 002	1445	0.215	7_n054 506	2255
0.016	7_n250 903	117	0.066	7_n236 131	486	0.116	7_n201 769	910	0.166	7_n143 557	1458	0.216	7_n052 251	2277
0.017	7_n250 786	124	0.067	7_n235 645	494	0.117	7_n200 859	920	0.167	7_n142 099	1471	0.217	7_n049 974	2297
0.018	7_n250 662	132	0.068	7_n235 151	502	0.118	7_n199 939	929	0.168	7_n140 628	1484	0.218	7_n047 677	2319
0.019	7_n250 530	139	0.069	7_n234 649	510	0.119	7_n199 010	939	0.169	7_n139 144	1498	0.219	7_n045 358	2340
0.020	7_n250 391	145	0.070	7_n234 139	517	0.120	7_n198 071	948	0.170	7_n137 646	1511	0.220	7_n043 018	2362
0.021	7_n250 246	153	0.071	7_n233 622	526	0.121	7_n197 123	958	0.171	7_n136 135	1524	0.221	7_n040 656	2384
0.022	7_n250 093	160	0.072	7_n233 096	533	0.122	7_n196 165	968	0.172	7_n134 611	1537	0.222	7_n038 272	2407
0.023	7_n249 933	168	0.073	7_n232 563	541	0.123	7_n195 197	977	0.173	7_n133 074	1552	0.223	7_n035 865	2429
0.024	7_n249 765	174	0.074	7_n232 022	549	0.124	7_n194 220	988	0.174	7_n131 522	1565	0.224	7_n033 436	2452
0.025	7_n249 591	182	0.075	7_n231 473	557	0.125	7_n193 232	997	0.175	7_n129 957	1578	0.225	7_n030 984	2476
0.026	7_n249 409	189	0.076	7_n230 916	565	0.126	7_n192 235	1007	0.176	7_n128 379	1593	0.226	7_n028 508	2499
0.027	7_n249 220	196	0.077	7_n230 351	573	0.127	7_n191 228	1016	0.177	7_n126 786	1607	0.227	7_n026 009	2523
0.028	7_n249 024	203	0.078	7_n229 778	581	0.128	7_n190 212	1027	0.178	7_n125 179	1621	0.228	7_n023 486	2547
0.029	7_n248 821	211	0.079	7_n229 197	590	0.129	7_n189 185	1037	0.179	7_n123 558	1636	0.229	7_n020 939	2571
0.030	7_n248 610	217	0.080	7_n228 607	597	0.130	7_n188 148	1047	0.180	7_n121 922	1650	0.230	7_n018 368	2597
0.031	7_n248 393	225	0.081	7_n228 010	605	0.131	7_n187 101	1058	0.181	7_n120 272	1665	0.231	7_n015 771	2621
0.032	7_n248 168	233	0.082	7_n227 405	613	0.132	7_n186 043	1067	0.182	7_n118 607	1679	0.232	7_n013 150	2647
0.033	7_n247 935	239	0.083	7_n226 792	622	0.133	7_n184 976	1078	0.183	7_n116 928	1694	0.233	7_n010 503	2673
0.034	7_n247 696	247	0.084	7_n226 170	630	0.134	7_n183 898	1088	0.184	7_n115 234	1710	0.234	7_n007 830	2699
0.035	7_n247 449	254	0.085	7_n225 540	638	0.135	7_n182 810	1099	0.185	7_n113 524	1724	0.235	7_n005 131	2726
0.036	7_n247 195	261	0.086	7_n224 902	646	0.136	7_n181 711	1109	0.186	7_n111 800	1740	0.236	7_n002 405	2752
0.037	7_n246 934	268	0.087	7_n224 256	655	0.137	7_n180 602	1120	0.187	7_n110 060	1755	0.237	6_n999 653	2780
0.038	7_n246 666	276	0.088	7_n223 601	663	0.138	7_n179 482	1130	0.188	7_n108 305	1770	0.238	6_n996 873	2807
0.039	7_n246 390	284	0.089	7_n222 938	671	0.139	7_n178 352	1141	0.189	7_n106 535	1787	0.239	6_n994 066	2836
0.040	7_n246 106	290	0.090	7_n222 267	680	0.140	7_n177 211	1152	0.190	7_n104 748	1802	0.240	6_n991 230	2864
0.041	7_n245 816	298	0.091	7_n221 587	688	0.141	7_n176 059	1162	0.191	7_n102 946	1818	0.241	6_n988 366	2893
0.042	7_n245 518	305	0.092	7_n220 899	696	0.142	7_n174 897	1174	0.192	7_n101 128	1834	0.242	6_n985 473	2922
0.043	7_n245 213	313	0.093	7_n220 203	705	0.143	7_n173 723	1184	0.193	7_n099 294	1850	0.243	6_n982 551	2952
0.044	7_n244 900	320	0.094	7_n219 498	714	0.144	7_n172 539	1195	0.194	7_n097 444	1867	0.244	6_n979 599	2983
0.045	7_n244 580	327	0.095	7_n218 784	722	0.145	7_n171 344	1207	0.195	7_n095 577	1884	0.245	6_n976 616	3013
0.046	7_n244 253	335	0.096	7_n218 062	731	0.146	7_n170 137	1217	0.196	7_n093 693	1900	0.246	6_n973 603	3044
0.047	7_n243 918	342	0.097	7_n217 331	739	0.147	7_n168 920	1229	0.197	7_n091 793	1918	0.247	6_n970 559	3076
0.048	7_n243 576	349	0.098	7_n216 592	748	0.148	7_n167 691	1240	0.198	7_n089 875	1934	0.248	6_n967 483	3108
0.049	7_n243 227	357	0.099	7_n215 844	756	0.149	7_n166 451	1252	0.199	7_n087 941	1952	0.249	6_n964 375	3140
0.050	7_n242 870		0.100	7_n215 088		0.150	7_n165 199		0.200	7_n085 989		0.250	6_n961 235	

Tafel III.

$\log\{N_2^{0}(n)\}$.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	8_n132 202	0	0.050	8_n130 996	49	0.100	8_n127 367	98	0.150	8_n121 278	147	0.200	8_n112 668	198
0.001	8_n132 202	2	0.051	8_n130 947	49	0.101	8_n127 269	98	0.151	8_n121 131	149	0.201	8_n112 470	200
0.002	8_n132 200	2	0.052	8_n130 898	51	0.102	8_n127 171	100	0.152	8_n120 982	149	0.202	8_n112 270	200
0.003	8_n132 198	4	0.053	8_n130 847	52	0.103	8_n127 071	100	0.153	8_n120 833	150	0.203	8_n112 070	202
0.004	8_n132 194	4	0.054	8_n130 795	52	0.104	8_n126 971	102	0.154	8_n120 683	151	0.204	8_n111 868	202
0.005	8_n132 190	5	0.055	8_n130 743	54	0.105	8_n126 869	102	0.155	8_n120 532	153	0.205	8_n111 666	204
0.006	8_n132 185	6	0.056	8_n130 689	55	0.106	8_n126 767	103	0.156	8_n120 379	153	0.206	8_n111 462	205
0.007	8_n132 179	8	0.057	8_n130 634	55	0.107	8_n126 664	105	0.157	8_n120 226	154	0.207	8_n111 257	206
0.008	8_n132 171	8	0.058	8_n130 579	56	0.108	8_n126 559	105	0.158	8_n120 072	156	0.208	8_n111 051	206
0.009	8_n132 163	9	0.059	8_n130 523	58	0.109	8_n126 454	107	0.159	8_n119 916	156	0.209	8_n110 845	208
0.010	8_n132 154	10	0.060	8_n130 465	59	0.110	8_n126 347	107	0.160	8_n119 760	157	0.210	8_n110 637	209
0.011	8_n132 144	11	0.061	8_n130 406	59	0.111	8_n126 240	108	0.161	8_n119 603	159	0.211	8_n110 428	210
0.012	8_n132 133	12	0.062	8_n130 347	60	0.112	8_n126 132	110	0.162	8_n119 444	159	0.212	8_n110 218	211
0.013	8_n132 121	13	0.063	8_n130 287	62	0.113	8_n126 022	110	0.163	8_n119 285	160	0.213	8_n110 007	212
0.014	8_n132 108	14	0.064	8_n130 225	62	0.114	8_n125 912	111	0.164	8_n119 125	162	0.214	8_n109 795	214
0.015	8_n132 094	15	0.065	8_n130 163	63	0.115	8_n125 801	113	0.165	8_n118 963	162	0.215	8_n109 581	214
0.016	8_n132 079	16	0.066	8_n130 100	65	0.116	8_n125 688	113	0.166	8_n118 801	164	0.216	8_n109 367	215
0.017	8_n132 063	17	0.067	8_n130 035	65	0.117	8_n125 575	114	0.167	8_n118 637	164	0.217	8_n109 152	216
0.018	8_n132 046	18	0.068	8_n129 970	66	0.118	8_n125 461	115	0.168	8_n118 473	166	0.218	8_n108 936	218
0.019	8_n132 028	19	0.069	8_n129 904	67	0.119	8_n125 346	117	0.169	8_n118 307	166	0.219	8_n108 718	218
0.020	8_n132 009	20	0.070	8_n129 837	69	0.120	8_n125 229	117	0.170	8_n118 141	167	0.220	8_n108 500	220
0.021	8_n131 989	20	0.071	8_n129 768	69	0.121	8_n125 112	118	0.171	8_n117 974	169	0.221	8_n108 280	220
0.022	8_n131 969	22	0.072	8_n129 699	70	0.122	8_n124 994	120	0.172	8_n117 805	170	0.222	8_n108 060	222
0.023	8_n131 947	23	0.073	8_n129 629	71	0.123	8_n124 874	120	0.173	8_n117 635	170	0.223	8_n107 838	222
0.024	8_n131 924	23	0.074	8_n129 558	72	0.124	8_n124 754	121	0.174	8_n117 465	172	0.224	8_n107 616	224
0.025	8_n131 901	25	0.075	8_n129 486	73	0.125	8_n124 633	122	0.175	8_n117 293	172	0.225	8_n107 392	225
0.026	8_n131 876	25	0.076	8_n129 413	74	0.126	8_n124 511	123	0.176	8_n117 121	174	0.226	8_n107 167	226
0.027	8_n131 851	27	0.077	8_n129 339	75	0.127	8_n124 388	125	0.177	8_n116 947	175	0.227	8_n106 941	227
0.028	8_n131 824	27	0.078	8_n129 264	76	0.128	8_n124 263	125	0.178	8_n116 772	176	0.228	8_n106 714	228
0.029	8_n131 797	29	0.079	8_n129 188	77	0.129	8_n124 138	126	0.179	8_n116 596	176	0.229	8_n106 486	229
0.030	8_n131 768	29	0.080	8_n129 111	78	0.130	8_n124 012	127	0.180	8_n116 420	178	0.230	8_n106 257	230
0.031	8_n131 739	31	0.081	8_n129 033	79	0.131	8_n123 885	128	0.181	8_n116 242	179	0.231	8_n106 027	232
0.032	8_n131 708	31	0.082	8_n128 954	80	0.132	8_n123 757	130	0.182	8_n116 063	180	0.232	8_n105 795	232
0.033	8_n131 677	32	0.083	8_n128 874	80	0.133	8_n123 627	130	0.183	8_n115 883	180	0.233	8_n105 563	233
0.034	8_n131 645	34	0.084	8_n128 794	82	0.134	8_n123 497	131	0.184	8_n115 703	182	0.234	8_n105 330	235
0.035	8_n131 611	34	0.085	8_n128 712	83	0.135	8_n123 366	132	0.185	8_n115 521	183	0.235	8_n105 095	235
0.036	8_n131 577	35	0.086	8_n128 629	84	0.136	8_n123 234	133	0.186	8_n115 338	184	0.236	8_n104 860	237
0.037	8_n131 542	36	0.087	8_n128 545	85	0.137	8_n123 101	134	0.187	8_n115 154	185	0.237	8_n104 623	238
0.038	8_n131 506	37	0.088	8_n128 460	85	0.138	8_n122 967	136	0.188	8_n114 969	186	0.238	8_n104 385	238
0.039	8_n131 469	38	0.089	8_n128 375	87	0.139	8_n122 831	136	0.189	8_n114 783	187	0.239	8_n104 147	240
0.040	8_n131 431	39	0.090	8_n128 288	88	0.140	8_n122 695	137	0.190	8_n114 596	188	0.240	8_n103 907	241
0.041	8_n131 392	40	0.091	8_n128 200	89	0.141	8_n122 558	138	0.191	8_n114 408	189	0.241	8_n103 666	242
0.042	8_n131 352	42	0.092	8_n128 111	89	0.142	8_n122 420	139	0.192	8_n114 219	191	0.242	8_n103 424	243
0.043	8_n131 310	42	0.093	8_n128 022	91	0.143	8_n122 281	141	0.193	8_n114 028	191	0.243	8_n103 181	244
0.044	8_n131 268	43	0.094	8_n127 931	91	0.144	8_n122 140	141	0.194	8_n113 837	192	0.244	8_n102 937	246
0.045	8_n131 225	43	0.095	8_n127 840	93	0.145	8_n121 999	142	0.195	8_n113 645	193	0.245	8_n102 691	246
0.046	8_n131 182	45	0.096	8_n127 747	94	0.146	8_n121 857	143	0.196	8_n113 452	194	0.246	8_n102 445	247
0.047	8_n131 137	46	0.097	8_n127 653	94	0.147	8_n121 714	145	0.197	8_n113 258	196	0.247	8_n102 198	249
0.048	8_n131 091	47	0.098	8_n127 559	96	0.148	8_n121 569	145	0.198	8_n113 062	196	0.248	8_n101 949	249
0.049	8_n131 044	48	0.099	8_n127 463	96	0.149	8_n121 424	146	0.199	8_n112 866	198	0.249	8_n101 700	251
0.050	8_n130 996		0.100	8_n127 367		0.150	8_n121 278		0.200	8_n112 668		0.250	8_n101 449	

Tafel III.

$\log \{N_2^{10}(n)\}$.

± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ	± n	N	−Δ
0.000	6.501 690	4	0.050	6.492 335	382	0.100	6.463 250	802	0.150	6.410 922	1327	0.200	6.327 515	2080
0.001	6.501 686	11	0.051	6.491 953	389	0.101	6.462 448	811	0.151	6.409 595	1339	0.201	6.325 435	2099
0.002	6.501 675	19	0.052	6.491 564	397	0.102	6.461 637	820	0.152	6.408 256	1351	0.202	6.323 336	2117
0.003	6.501 656	26	0.053	6.491 167	405	0.103	6.460 817	830	0.153	6.406 905	1363	0.203	6.321 219	2137
0.004	6.501 630	33	0.054	6.490 762	412	0.104	6.459 987	839	0.154	6.405 542	1376	0.204	6.319 082	2157
0.005	6.501 597	41	0.055	6.490 350	421	0.105	6.459 148	848	0.155	6.404 166	1389	0.205	6.316 925	2177
0.006	6.501 556	48	0.056	6.489 929	429	0.106	6.458 300	857	0.156	6.402 777	1402	0.206	6.314 748	2197
0.007	6.501 508	56	0.057	6.489 500	436	0.107	6.457 443	867	0.157	6.401 375	1414	0.207	6.312 551	2217
0.008	6.501 452	63	0.058	6.489 064	445	0.108	6.456 576	877	0.158	6.399 961	1427	0.208	6.310 334	2237
0.009	6.501 389	71	0.059	6.488 619	452	0.109	6.455 699	886	0.159	6.398 534	1440	0.209	6.308 097	2258
0.010	6.501 318	78	0.060	6.488 167	461	0.110	6.454 813	896	0.160	6.397 094	1453	0.210	6.305 839	2280
0.011	6.501 240	85	0.061	6.487 706	468	0.111	6.453 917	905	0.161	6.395 641	1466	0.211	6.303 559	2300
0.012	6.501 155	93	0.062	6.487 238	477	0.112	6.453 012	915	0.162	6.394 175	1479	0.212	6.301 259	2322
0.013	6.501 062	100	0.063	6.486 761	485	0.113	6.452 097	925	0.163	6.392 696	1493	0.213	6.298 937	2344
0.014	6.500 962	108	0.064	6.486 276	492	0.114	6.451 172	934	0.164	6.391 203	1506	0.214	6.296 593	2366
0.015	6.500 854	115	0.065	6.485 784	501	0.115	6.450 238	945	0.165	6.389 697	1520	0.215	6.294 227	2388
0.016	6.500 739	123	0.066	6.485 283	509	0.116	6.449 293	954	0.166	6.388 177	1534	0.216	6.291 839	2410
0.017	6.500 616	130	0.067	6.484 774	517	0.117	6.448 339	964	0.167	6.386 643	1547	0.217	6.289 429	2434
0.018	6.500 486	137	0.068	6.484 257	525	0.118	6.447 375	974	0.168	6.385 096	1562	0.218	6.286 995	2456
0.019	6.500 349	145	0.069	6.483 732	534	0.119	6.446 401	985	0.169	6.383 534	1575	0.219	6.284 539	2480
0.020	6.500 204	153	0.070	6.483 198	541	0.120	6.445 416	994	0.170	6.381 959	1589	0.220	6.282 059	2504
0.021	6.500 051	160	0.071	6.482 657	550	0.121	6.444 422	1004	0.171	6.380 370	1604	0.221	6.279 555	2527
0.022	6.499 891	167	0.072	6.482 107	558	0.122	6.443 418	1015	0.172	6.378 766	1618	0.222	6.277 028	2552
0.023	6.499 724	175	0.073	6.481 549	567	0.123	6.442 403	1025	0.173	6.377 148	1633	0.223	6.274 476	2577
0.024	6.499 549	183	0.074	6.480 982	574	0.124	6.441 378	1035	0.174	6.375 515	1648	0.224	6.271 899	2601
0.025	6.499 366	190	0.075	6.480 408	583	0.125	6.440 343	1046	0.175	6.373 867	1662	0.225	6.269 298	2627
0.026	6.499 176	198	0.076	6.479 825	592	0.126	6.439 297	1056	0.176	6.372 205	1677	0.226	6.266 671	2652
0.027	6.498 978	205	0.077	6.479 233	600	0.127	6.438 241	1067	0.177	6.370 528	1692	0.227	6.264 019	2679
0.028	6.498 773	212	0.078	6.478 633	608	0.128	6.437 174	1077	0.178	6.368 836	1707	0.228	6.261 340	2704
0.029	6.498 561	220	0.079	6.478 025	617	0.129	6.436 097	1088	0.179	6.367 129	1722	0.229	6.258 636	2732
0.030	6.498 341	228	0.080	6.477 408	625	0.130	6.435 009	1098	0.180	6.365 407	1738	0.230	6.255 904	2758
0.031	6.498 113	235	0.081	6.476 783	634	0.131	6.433 911	1109	0.181	6.363 669	1753	0.231	6.253 146	2786
0.032	6.497 878	243	0.082	6.476 149	642	0.132	6.432 802	1120	0.182	6.361 916	1770	0.232	6.250 360	2814
0.033	6.497 635	251	0.083	6.475 507	651	0.133	6.431 682	1131	0.183	6.360 146	1785	0.233	6.247 546	2842
0.034	6.497 384	258	0.084	6.474 856	660	0.134	6.430 551	1142	0.184	6.358 361	1801	0.234	6.244 704	2870
0.035	6.497 126	266	0.085	6.474 196	668	0.135	6.429 409	1153	0.185	6.356 560	1817	0.235	6.241 834	2900
0.036	6.496 860	273	0.086	6.473 528	676	0.136	6.428 256	1164	0.186	6.354 743	1833	0.236	6.238 934	2929
0.037	6.496 587	281	0.087	6.472 852	686	0.137	6.427 092	1175	0.187	6.352 910	1850	0.237	6.236 005	2959
0.038	6.496 306	289	0.088	6.472 166	694	0.138	6.425 917	1186	0.188	6.351 060	1867	0.238	6.233 046	2989
0.039	6.496 017	296	0.089	6.471 472	703	0.139	6.424 731	1197	0.189	6.349 193	1883	0.239	6.230 057	3020
0.040	6.495 721	304	0.090	6.470 769	712	0.140	6.423 534	1209	0.190	6.347 310	1900	0.240	6.227 037	3051
0.041	6.495 417	311	0.091	6.470 057	721	0.141	6.422 325	1220	0.191	6.345 410	1918	0.241	6.223 986	3084
0.042	6.495 106	320	0.092	6.469 336	729	0.142	6.421 105	1232	0.192	6.343 492	1935	0.242	6.220 902	3115
0.043	6.494 786	327	0.093	6.468 607	738	0.143	6.419 873	1244	0.193	6.341 557	1952	0.243	6.217 787	3148
0.044	6.494 459	334	0.094	6.467 869	748	0.144	6.418 629	1255	0.194	6.339 605	1970	0.244	6.214 639	3182
0.045	6.494 125	343	0.095	6.467 121	756	0.145	6.417 374	1266	0.195	6.337 635	1988	0.245	6.211 457	3215
0.046	6.493 782	350	0.096	6.466 365	765	0.146	6.416 108	1279	0.196	6.335 647	2005	0.246	6.208 242	3250
0.047	6.493 432	358	0.097	6.465 600	775	0.147	6.414 829	1290	0.197	6.333 642	2024	0.247	6.204 992	3285
0.048	6.493 074	366	0.098	6.464 825	783	0.148	6.413 539	1303	0.198	6.331 618	2042	0.248	6.201 707	3320
0.049	6.492 708	373	0.099	6.464 042	792	0.149	6.412 236	1314	0.199	6.329 576	2061	0.249	6.198 387	3356
0.050	6.492 335		0.100	6.463 250		0.150	6.410 922		0.200	6.327 515		0.250	6.195 031	

Tafel IV.

$\log \{M_2{}^4(m)\}$.

vergl. pag. 20.

$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$
0.000	9_n318 759	1	0.050	9_n316 145	106	0.100	9_n308 209	215	0.150	9_n294 650	332	0.200	9_n274 927	462
0.001	9_n318 758	3	0.051	9_n316 039	108	0.101	9_n307 994	217	0.151	9_n294 318	334	0.201	9_n274 465	466
0.002	9_n318 755	5	0.052	9_n315 931	110	0.102	9_n307 777	219	0.152	9_n293 984	337	0.202	9_n273 999	468
0.003	9_n318 750	8	0.053	9_n315 821	112	0.103	9_n307 558	222	0.153	9_n293 647	339	0.203	9_n273 531	471
0.004	9_n318 742	9	0.054	9_n315 709	115	0.104	9_n307 336	223	0.154	9_n293 308	342	0.204	9_n273 060	474
0.005	9_n318 733	12	0.055	9_n315 594	116	0.105	9_n307 113	226	0.155	9_n292 966	344	0.205	9_n272 586	477
0.006	9_n318 721	13	0.056	9_n315 478	119	0.106	9_n306 887	229	0.156	9_n292 622	346	0.206	9_n272 109	479
0.007	9_n318 708	16	0.057	9_n315 359	121	0.107	9_n306 658	230	0.157	9_n292 276	349	0.207	9_n271 630	483
0.008	9_n318 692	18	0.058	9_n315 238	123	0.108	9_n306 428	233	0.158	9_n291 927	352	0.208	9_n271 147	485
0.009	9_n318 674	19	0.059	9_n315 115	125	0.109	9_n306 195	235	0.159	9_n291 575	354	0.209	9_n270 662	488
0.010	9_n318 655	22	0.060	9_n314 990	127	0.110	9_n305 960	237	0.160	9_n291 221	357	0.210	9_n270 174	491
0.011	9_n318 633	24	0.061	9_n314 863	129	0.111	9_n305 723	240	0.161	9_n290 864	359	0.211	9_n269 683	494
0.012	9_n318 609	26	0.062	9_n314 734	132	0.112	9_n305 483	242	0.162	9_n290 505	362	0.212	9_n269 189	497
0.013	9_n318 583	29	0.063	9_n314 602	134	0.113	9_n305 241	244	0.163	9_n290 143	364	0.213	9_n268 692	500
0.014	9_n318 554	30	0.064	9_n314 468	135	0.114	9_n304 997	246	0.164	9_n289 779	367	0.214	9_n268 192	502
0.015	9_n318 524	32	0.065	9_n314 333	138	0.115	9_n304 751	249	0.165	9_n289 412	369	0.215	9_n267 690	506
0.016	9_n318 492	35	0.066	9_n314 195	141	0.116	9_n304 502	251	0.166	9_n289 043	372	0.216	9_n267 184	508
0.017	9_n318 457	36	0.067	9_n314 054	142	0.117	9_n304 251	253	0.167	9_n288 671	374	0.217	9_n266 676	512
0.018	9_n318 421	39	0.068	9_n313 912	144	0.118	9_n303 998	256	0.168	9_n288 297	377	0.218	9_n266 164	514
0.019	9_n318 382	40	0.069	9_n313 768	147	0.119	9_n303 742	258	0.169	9_n287 920	380	0.219	9_n265 650	518
0.020	9_n318 342	43	0.070	9_n313 621	148	0.120	9_n303 484	260	0.170	9_n287 540	382	0.220	9_n265 132	520
0.021	9_n318 299	45	0.071	9_n313 473	151	0.121	9_n303 224	263	0.171	9_n287 158	384	0.221	9_n264 612	523
0.022	9_n318 254	47	0.072	9_n313 322	154	0.122	9_n302 961	265	0.172	9_n286 774	387	0.222	9_n264 089	527
0.023	9_n318 207	49	0.073	9_n313 168	155	0.123	9_n302 696	267	0.173	9_n286 387	390	0.223	9_n263 562	529
0.024	9_n318 158	51	0.074	9_n313 013	157	0.124	9_n302 429	269	0.174	9_n285 997	393	0.224	9_n263 033	532
0.025	9_n318 107	53	0.075	9_n312 856	160	0.125	9_n302 160	272	0.175	9_n285 604	395	0.225	9_n262 501	536
0.026	9_n318 054	56	0.076	9_n312 696	161	0.126	9_n301 888	275	0.176	9_n285 209	397	0.226	9_n261 965	538
0.027	9_n317 998	57	0.077	9_n312 535	164	0.127	9_n301 613	276	0.177	9_n284 812	401	0.227	9_n261 427	542
0.028	9_n317 941	60	0.078	9_n312 371	166	0.128	9_n301 337	279	0.178	9_n284 411	403	0.228	9_n260 885	544
0.029	9_n317 881	61	0.079	9_n312 205	169	0.129	9_n301 058	281	0.179	9_n284 008	405	0.229	9_n260 341	548
0.030	9_n317 820	64	0.080	9_n312 036	170	0.130	9_n300 777	284	0.180	9_n283 603	408	0.230	9_n259 793	551
0.031	9_n317 756	66	0.081	9_n311 866	173	0.131	9_n300 493	286	0.181	9_n283 195	411	0.231	9_n259 242	554
0.032	9_n317 690	68	0.082	9_n311 693	175	0.132	9_n300 207	288	0.182	9_n282 784	414	0.232	9_n258 688	557
0.033	9_n317 622	70	0.083	9_n311 518	177	0.133	9_n299 919	291	0.183	9_n282 370	416	0.233	9_n258 131	560
0.034	9_n317 552	72	0.084	9_n311 341	179	0.134	9_n299 628	293	0.184	9_n281 954	419	0.234	9_n257 571	563
0.035	9_n317 480	74	0.085	9_n311 162	181	0.135	9_n299 335	296	0.185	9_n281 535	421	0.235	9_n257 008	566
0.036	9_n317 406	77	0.086	9_n310 981	184	0.136	9_n299 039	298	0.186	9_n281 114	424	0.236	9_n256 442	570
0.037	9_n317 329	78	0.087	9_n310 797	186	0.137	9_n298 741	300	0.187	9_n280 690	427	0.237	9_n255 872	572
0.038	9_n317 251	80	0.088	9_n310 611	188	0.138	9_n298 441	303	0.188	9_n280 263	430	0.238	9_n255 300	576
0.039	9_n317 171	83	0.089	9_n310 423	190	0.139	9_n298 138	305	0.189	9_n279 833	432	0.239	9_n254 724	579
0.040	9_n317 088	85	0.090	9_n310 233	192	0.140	9_n297 833	307	0.190	9_n279 401	435	0.240	9_n254 145	582
0.041	9_n317 003	87	0.091	9_n310 041	195	0.141	9_n297 526	310	0.191	9_n278 966	438	0.241	9_n253 563	585
0.042	9_n316 916	89	0.092	9_n309 846	197	0.142	9_n297 216	312	0.192	9_n278 528	440	0.242	9_n252 978	589
0.043	9_n316 827	91	0.093	9_n309 649	199	0.143	9_n296 904	315	0.193	9_n278 088	444	0.243	9_n252 389	592
0.044	9_n316 736	93	0.094	9_n309 450	201	0.144	9_n296 589	317	0.194	9_n277 644	446	0.244	9_n251 797	595
0.045	9_n316 643	95	0.095	9_n309 249	204	0.145	9_n296 272	320	0.195	9_n277 198	448	0.245	9_n251 202	598
0.046	9_n316 548	98	0.096	9_n309 045	206	0.146	9_n295 952	322	0.196	9_n276 750	452	0.246	9_n250 604	602
0.047	9_n316 450	99	0.097	9_n308 839	208	0.147	9_n295 630	324	0.197	9_n276 298	454	0.247	9_n250 002	605
0.048	9_n316 351	102	0.098	9_n308 631	210	0.148	9_n295 306	327	0.198	9_n275 844	457	0.248	9_n249 397	608
0.049	9_n316 249	104	0.099	9_n308 421	212	0.149	9_n294 979	329	0.199	9_n275 387	460	0.249	9_n248 789	611
0.050	9_n316 145		0.100	9_n308 209		0.150	9_n294 650		0.200	9_n274 927		0.250	9_n248 178	

Tafel IV.

$\log \{M_2{}^5(m)\}$.

$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$
0.000	9_n096 910		0.050	9_n095 460		0.100	9_n091 080		0.150	9_n083 682		0.200	9_n073 107	
0.001	9_n096 910	0	0.051	9_n095 401	59	0.101	9_n090 962	118	0.151	9_n083 502	180	0.201	9_n072 862	245
0.002	9_n096 908	2	0.052	9_n095 341	60	0.102	9_n090 843	119	0.152	9_n083 321	181	0.202	9_n072 615	247
0.003	9_n096 905	3	0.053	9_n095 280	61	0.103	9_n090 723	120	0.153	9_n083 139	182	0.203	9_n072 367	248
0.004	9_n096 901	4	0.054	9_n095 218	62	0.104	9_n090 601	122	0.154	9_n082 955	184	0.204	9_n072 117	250
0.005	9_n096 896	5	0.055	9_n095 155	63	0.105	9_n090 478	123	0.155	9_n082 770	185	0.205	9_n071 867	250
0.006	9_n096 889	7	0.056	9_n095 090	65	0.106	9_n090 354	124	0.156	9_n082 584	186	0.206	9_n071 615	252
0.007	9_n096 882	7	0.057	9_n095 025	65	0.107	9_n090 229	125	0.157	9_n082 397	187	0.207	9_n071 361	254
0.008	9_n096 873	9	0.058	9_n094 958	67	0.108	9_n090 103	126	0.158	9_n082 208	189	0.208	9_n071 106	255
0.009	9_n096 863	10	0.059	9_n094 890	68	0.109	9_n089 975	128	0.159	9_n082 018	190	0.209	9_n070 850	256
0.010	9_n096 852	11	0.060	9_n094 820	70	0.110	9_n089 846	129	0.160	9_n081 827	191	0.210	9_n070 592	258
0.011	9_n096 840	12	0.061	9_n094 750	70	0.111	9_n089 716	130	0.161	9_n081 635	192	0.211	9_n070 333	259
0.012	9_n096 827	13	0.062	9_n094 678	72	0.112	9_n089 585	131	0.162	9_n081 441	194	0.212	9_n070 073	260
0.013	9_n096 812	15	0.063	9_n094 606	72	0.113	9_n089 452	133	0.163	9_n081 246	195	0.213	9_n069 811	262
0.014	9_n096 797	15	0.064	9_n094 532	74	0.114	9_n089 319	133	0.164	9_n081 049	197	0.214	9_n069 547	264
0.015	9_n096 780	17	0.065	9_n094 457	75	0.115	9_n089 184	135	0.165	9_n080 852	197	0.215	9_n069 283	264
0.016	9_n096 762	18	0.066	9_n094 380	77	0.116	9_n089 047	137	0.166	9_n080 653	199	0.216	9_n069 017	266
0.017	9_n096 743	19	0.067	9_n094 303	77	0.117	9_n088 910	137	0.167	9_n080 453	200	0.217	9_n068 749	268
0.018	9_n096 722	21	0.068	9_n094 224	79	0.118	9_n088 771	139	0.168	9_n080 251	202	0.218	9_n068 480	269
0.019	9_n096 701	21	0.069	9_n094 144	80	0.119	9_n088 632	139	0.169	9_n080 048	203	0.219	9_n068 210	270
0.020	9_n096 678	23	0.070	9_n094 063	81	0.120	9_n088 491	141	0.170	9_n079 844	204	0.220	9_n067 938	272
0.021	9_n096 655	23	0.071	9_n093 981	82	0.121	9_n088 348	143	0.171	9_n079 639	205	0.221	9_n067 665	273
0.022	9_n096 630	25	0.072	9_n093 898	83	0.122	9_n088 205	143	0.172	9_n079 432	207	0.222	9_n067 391	274
0.023	9_n096 604	26	0.073	9_n093 813	85	0.123	9_n088 060	145	0.173	9_n079 224	208	0.223	9_n067 115	276
0.024	9_n096 576	28	0.074	9_n093 727	86	0.124	9_n087 914	146	0.174	9_n079 015	209	0.224	9_n066 838	277
0.025	9_n096 548	28	0.075	9_n093 641	86	0.125	9_n087 767	147	0.175	9_n078 804	211	0.225	9_n066 559	279
0.026	9_n096 518	30	0.076	9_n093 553	88	0.126	9_n087 618	149	0.176	9_n078 592	212	0.226	9_n066 279	280
0.027	9_n096 488	30	0.077	9_n093 463	90	0.127	9_n087 469	149	0.177	9_n078 379	213	0.227	9_n065 997	282
0.028	9_n096 456	32	0.078	9_n093 373	90	0.128	9_n087 318	151	0.178	9_n078 164	215	0.228	9_n065 714	283
0.029	9_n096 423	33	0.079	9_n093 281	92	0.129	9_n087 165	153	0.179	9_n077 948	216	0.229	9_n065 430	284
0.030	9_n096 389	34	0.080	9_n093 188	93	0.130	9_n087 012	153	0.180	9_n077 731	217	0.230	9_n065 144	286
0.031	9_n096 353	36	0.081	9_n093 094	94	0.131	9_n086 857	155	0.181	9_n077 513	218	0.231	9_n064 857	287
0.032	9_n096 317	36	0.082	9_n092 999	95	0.132	9_n086 701	156	0.182	9_n077 293	220	0.232	9_n064 568	289
0.033	9_n096 279	38	0.083	9_n092 902	97	0.133	9_n086 544	157	0.183	9_n077 072	221	0.233	9_n064 278	290
0.034	9_n096 240	39	0.084	9_n092 805	97	0.134	9_n086 386	158	0.184	9_n076 849	223	0.234	9_n063 986	292
0.035	9_n096 200	40	0.085	9_n092 706	99	0.135	9_n086 226	160	0.185	9_n076 625	224	0.235	9_n063 693	293
0.036	9_n096 159	41	0.086	9_n092 606	100	0.136	9_n086 065	161	0.186	9_n076 400	225	0.236	9_n063 398	295
0.037	9_n096 117	42	0.087	9_n092 505	101	0.137	9_n085 903	162	0.187	9_n076 174	226	0.237	9_n063 102	296
0.038	9_n096 073	44	0.088	9_n092 402	103	0.138	9_n085 740	163	0.188	9_n075 946	228	0.238	9_n062 805	297
0.039	9_n096 028	45	0.089	9_n092 299	103	0.139	9_n085 575	165	0.189	9_n075 717	229	0.239	9_n062 506	299
0.040	9_n095 983	45	0.090	9_n092 194	105	0.140	9_n085 410	165	0.190	9_n075 486	231	0.240	9_n062 206	300
0.041	9_n095 936	47	0.091	9_n092 088	106	0.141	9_n085 243	167	0.191	9_n075 254	232	0.241	9_n061 904	302
0.042	9_n095 887	49	0.092	9_n091 981	107	0.142	9_n085 074	169	0.192	9_n075 021	233	0.242	9_n061 601	303
0.043	9_n095 838	49	0.093	9_n091 873	108	0.143	9_n084 904	170	0.193	9_n074 787	234	0.243	9_n061 296	305
0.044	9_n095 788	50	0.094	9_n091 763	110	0.144	9_n084 734	170	0.194	9_n074 551	236	0.244	9_n060 990	306
0.045	9_n095 736	52	0.095	9_n091 652	111	0.145	9_n084 562	172	0.195	9_n074 313	238	0.245	9_n060 682	308
0.046	9_n095 683	53	0.096	9_n091 540	112	0.146	9_n084 388	174	0.196	9_n074 075	238	0.246	9_n060 373	309
0.047	9_n095 629	54	0.097	9_n091 427	113	0.147	9_n084 213	175	0.197	9_n073 835	240	0.247	9_n060 062	311
0.048	9_n095 574	55	0.098	9_n091 313	114	0.148	9_n084 037	176	0.198	9_n073 594	241	0.248	9_n059 750	312
0.049	9_n095 517	57	0.099	9_n091 197	116	0.149	9_n083 860	177	0.199	9_n073 351	243	0.249	9_n059 437	313
0.050	9_n095 460	57	0.100	9_n091 080	117	0.150	9_n083 682	178	0.200	9_n073 107	244	0.250	9_n059 122	315

Tafel IV.

$\log \{M_2^6(m)\}$.

$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$
0.000	8.652 877		0.050	8.649 344		0.100	8.638 600		0.150	8.620 189		0.200	8.593 271	
0.001	8.652 876	1	0.051	8.649 201	143	0.101	8.638 309	291	0.151	8.619 738	451	0.201	8.592 637	634
0.002	8.652 872	4	0.052	8.649 055	146	0.102	8.638 015	294	0.152	8.619 283	455	0.202	8.592 000	637
0.003	8.652 865	7	0.053	8.648 906	149	0.103	8.637 718	297	0.153	8.618 825	458	0.203	8.591 358	642
0.004	8.652 855	10	0.054	8.648 754	152	0.104	8.637 418	300	0.154	8.618 363	462	0.204	8.590 713	645
0.005	8.652 842	13	0.055	8.648 599	155	0.105	8.637 115	303	0.155	8.617 898	465	0.205	8.590 064	649
0.006	8.652 827	15	0.056	8.648 442	157	0.106	8.636 808	307	0.156	8.617 430	468	0.206	8.589 410	654
0.007	8.652 808	19	0.057	8.648 281	161	0.107	8.636 499	309	0.157	8.616 958	472	0.207	8.588 753	657
0.008	8.652 787	21	0.058	8.648 118	163	0.108	8.636 186	313	0.158	8.616 483	475	0.208	8.588 092	661
0.009	8.652 763	24	0.059	8.647 951	167	0.109	8.635 871	315	0.159	8.616 004	479	0.209	8.587 426	666
0.010	8.652 736	27	0.060	8.647 782	169	0.110	8.635 552	319	0.160	8.615 521	483	0.210	8.586 757	669
0.011	8.652 707	29	0.061	8.647 610	172	0.111	8.635 230	322	0.161	8.615 036	485	0.211	8.586 083	674
0.012	8.652 674	33	0.062	8.647 435	175	0.112	8.634 905	325	0.162	8.614 546	490	0.212	8.585 406	677
0.013	8.652 639	35	0.063	8.647 257	178	0.113	8.634 577	328	0.163	8.614 054	492	0.213	8.584 724	682
0.014	8.652 601	38	0.064	8.647 076	181	0.114	8.634 246	331	0.164	8.613 557	497	0.214	8.584 038	686
0.015	8.652 560	41	0.065	8.646 892	184	0.115	8.633 912	334	0.165	8.613 058	499	0.215	8.583 348	690
0.016	8.652 517	43	0.066	8.646 706	186	0.116	8.633 574	338	0.166	8.612 554	504	0.216	8.582 654	694
0.017	8.652 470	47	0.067	8.646 516	190	0.117	8.633 234	340	0.167	8.612 047	507	0.217	8.581 956	698
0.018	8.652 421	49	0.068	8.646 324	192	0.118	8.632 890	344	0.168	8.611 537	510	0.218	8.581 253	703
0.019	8.652 369	52	0.069	8.646 128	196	0.119	8.632 543	347	0.169	8.611 023	514	0.219	8.580 546	707
0.020	8.652 314	55	0.070	8.645 930	198	0.120	8.632 193	350	0.170	8.610 506	517	0.220	8.579 836	710
0.021	8.652 256	58	0.071	8.645 729	201	0.121	8.631 840	353	0.171	8.609 985	521	0.221	8.579 120	716
0.022	8.652 195	61	0.072	8.645 524	205	0.122	8.631 484	356	0.172	8.609 460	525	0.222	8.578 401	719
0.023	8.652 132	63	0.073	8.645 317	207	0.123	8.631 124	360	0.173	8.608 932	528	0.223	8.577 678	723
0.024	8.652 065	67	0.074	8.645 107	210	0.124	8.630 761	363	0.174	8.608 400	532	0.224	8.576 950	728
0.025	8.651 996	69	0.075	8.644 894	213	0.125	8.630 395	366	0.175	8.607 865	535	0.225	8.576 218	732
0.026	8.651 924	72	0.076	8.644 678	216	0.126	8.630 026	369	0.176	8.607 325	540	0.226	8.575 481	737
0.027	8.651 849	75	0.077	8.644 459	219	0.127	8.629 654	372	0.177	8.606 783	542	0.227	8.574 740	741
0.028	8.651 772	77	0.078	8.644 237	222	0.128	8.629 278	376	0.178	8.606 236	547	0.228	8.573 995	745
0.029	8.651 691	81	0.079	8.644 012	225	0.129	8.628 900	378	0.179	8.605 686	550	0.229	8.573 246	749
0.030	8.651 608	83	0.080	8.643 785	227	0.130	8.628 518	382	0.180	8.605 133	553	0.230	8.572 492	754
0.031	8.651 522	86	0.081	8.643 554	231	0.131	8.628 132	386	0.181	8.604 575	558	0.231	8.571 733	759
0.032	8.651 433	89	0.082	8.643 320	234	0.132	8.627 744	388	0.182	8.604 014	561	0.232	8.570 971	762
0.033	8.651 341	92	0.083	8.643 083	237	0.133	8.627 352	392	0.183	8.603 450	564	0.233	8.570 204	767
0.034	8.651 247	94	0.084	8.642 844	239	0.134	8.626 957	395	0.184	8.602 881	569	0.234	8.569 432	772
0.035	8.651 149	98	0.085	8.642 601	243	0.135	8.626 559	398	0.185	8.602 309	572	0.235	8.568 656	776
0.036	8.651 049	100	0.086	8.642 355	246	0.136	8.626 158	401	0.186	8.601 733	576	0.236	8.567 875	781
0.037	8.650 946	103	0.087	8.642 107	248	0.137	8.625 753	405	0.187	8.601 153	580	0.237	8.567 090	785
0.038	8.650 840	106	0.088	8.641 855	252	0.138	8.625 345	408	0.188	8.600 570	583	0.238	8.566 301	789
0.039	8.650 731	109	0.089	8.641 600	255	0.139	8.624 933	412	0.189	8.599 983	587	0.239	8.565 506	795
0.040	8.650 619	112	0.090	8.641 343	257	0.140	8.624 519	414	0.190	8.599 392	591	0.240	8.564 708	798
0.041	8.650 504	115	0.091	8.641 082	261	0.141	8.624 101	418	0.191	8.598 797	595	0.241	8.563 904	804
0.042	8.650 387	117	0.092	8.640 818	264	0.142	8.623 680	421	0.192	8.598 198	599	0.242	8.563 096	808
0.043	8.650 267	120	0.093	8.640 552	266	0.143	8.623 255	425	0.193	8.597 596	602	0.243	8.562 284	812
0.044	8.650 143	124	0.094	8.640 282	270	0.144	8.622 827	428	0.194	8.596 990	606	0.244	8.561 467	817
0.045	8.650 017	126	0.095	8.640 009	273	0.145	8.622 396	431	0.195	8.596 379	611	0.245	8.560 645	822
0.046	8.649 888	129	0.096	8.639 734	275	0.146	8.621 961	435	0.196	8.595 765	614	0.246	8.559 818	827
0.047	8.649 757	131	0.097	8.639 455	279	0.147	8.621 523	438	0.197	8.595 148	617	0.247	8.558 987	831
0.048	8.649 622	135	0.098	8.639 173	282	0.148	8.621 082	441	0.198	8.594 526	622	0.248	8.558 151	836
0.049	8.649 485	137	0.099	8.638 888	285	0.149	8.620 637	445	0.199	8.593 900	626	0.249	8.557 310	841
0.050	8.649 344	141	0.100	8.638 600	288	0.150	8.620 189	448	0.200	8.593 271	629	0.250	8.556 465	845

Tafel IV.

$\log \{M_2^7(m)\}$.

$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$	$\pm m$	M	$-\Delta$
0.000	8.284 901	1	0.050	8.282 941	79	0.100	8.277 023	159	0.150	8.267 026	243	0.200	8.252 738	331
0.001	8.284 900	3	0.051	8.282 862	81	0.101	8.276 864	161	0.151	8.266 783	244	0.201	8.252 407	333
0.002	8.284 897	4	0.052	8.282 781	83	0.102	8.276 703	163	0.152	8.266 539	246	0.202	8.252 074	336
0.003	8.284 893	5	0.053	8.282 698	84	0.103	8.276 540	164	0.153	8.266 293	248	0.203	8.251 738	337
0.004	8.284 888	7	0.054	8.282 614	85	0.104	8.276 376	166	0.154	8.266 045	250	0.204	8.251 401	339
0.005	8.284 881	9	0.055	8.282 529	87	0.105	8.276 210	168	0.155	8.265 795	252	0.205	8.251 062	340
0.006	8.284 872	10	0.056	8.282 442	89	0.106	8.276 042	169	0.156	8.265 543	253	0.206	8.250 722	343
0.007	8.284 862	12	0.057	8.282 353	91	0.107	8.275 873	171	0.157	8.265 290	255	0.207	8.250 379	344
0.008	8.284 850	13	0.058	8.282 262	92	0.108	8.275 702	172	0.158	8.265 035	256	0.208	8.250 035	347
0.009	8.284 837	15	0.059	8.282 170	93	0.109	8.275 530	174	0.159	8.264 779	259	0.209	8.249 688	348
0.010	8.284 822	16	0.060	8.282 077	95	0.110	8.275 356	176	0.160	8.264 520	260	0.210	8.249 340	350
0.011	8.284 806	18	0.061	8.281 982	97	0.111	8.275 180	178	0.161	8.264 260	262	0.211	8.248 990	352
0.012	8.284 788	20	0.062	8.281 885	98	0.112	8.275 002	179	0.162	8.263 998	263	0.212	8.248 638	354
0.013	8.284 768	21	0.063	8.281 787	100	0.113	8.274 823	180	0.163	8.263 735	265	0.213	8.248 284	356
0.014	8.284 747	23	0.064	8.281 687	102	0.114	8.274 643	183	0.164	8.263 470	267	0.214	8.247 928	357
0.015	8.284 724	24	0.065	8.281 585	103	0.115	8.274 460	184	0.165	8.263 203	269	0.215	8.247 571	360
0.016	8.284 700	26	0.066	8.281 482	105	0.116	8.274 276	186	0.166	8.262 934	271	0.216	8.247 211	361
0.017	8.284 674	27	0.067	8.281 377	106	0.117	8.274 090	187	0.167	8.262 663	272	0.217	8.246 850	363
0.018	8.284 647	29	0.068	8.281 271	108	0.118	8.273 903	189	0.168	8.262 391	274	0.218	8.246 487	366
0.019	8.284 618	31	0.069	8.281 163	109	0.119	8.273 714	190	0.169	8.262 117	276	0.219	8.246 121	367
0.020	8.284 587	32	0.070	8.281 054	111	0.120	8.273 524	193	0.170	8.261 841	277	0.220	8.245 754	369
0.021	8.284 555	33	0.071	8.280 943	113	0.121	8.273 331	194	0.171	8.261 564	280	0.221	8.245 385	371
0.022	8.284 522	36	0.072	8.280 830	114	0.122	8.273 137	195	0.172	8.261 284	281	0.222	8.245 014	372
0.023	8.284 486	36	0.073	8.280 716	116	0.123	8.272 942	197	0.173	8.261 003	283	0.223	8.244 642	375
0.024	8.284 450	39	0.074	8.280 600	118	0.124	8.272 745	199	0.174	8.260 720	284	0.224	8.244 267	377
0.025	8.284 411	40	0.075	8.280 482	119	0.125	8.272 546	201	0.175	8.260 436	287	0.225	8.243 890	378
0.026	8.284 371	41	0.076	8.280 363	120	0.126	8.272 345	202	0.176	8.260 149	288	0.226	8.243 512	381
0.027	8.284 330	43	0.077	8.280 243	123	0.127	8.272 143	204	0.177	8.259 861	290	0.227	8.243 131	382
0.028	8.284 287	45	0.078	8.280 120	123	0.128	8.271 939	206	0.178	8.259 571	291	0.228	8.242 749	384
0.029	8.284 242	46	0.079	8.279 997	126	0.129	8.271 733	207	0.179	8.259 280	294	0.229	8.242 365	387
0.030	8.284 196	48	0.080	8.279 871	127	0.130	8.271 526	209	0.180	8.258 986	295	0.230	8.241 978	388
0.031	8.284 148	49	0.081	8.279 744	129	0.131	8.271 317	211	0.181	8.258 691	297	0.231	8.241 590	390
0.032	8.284 099	51	0.082	8.279 615	130	0.132	8.271 106	212	0.182	8.258 394	299	0.232	8.241 200	392
0.033	8.284 048	53	0.083	8.279 485	132	0.133	8.270 894	214	0.183	8.258 095	301	0.233	8.240 808	394
0.034	8.283 995	54	0.084	8.279 353	133	0.134	8.270 680	216	0.184	8.257 794	302	0.234	8.240 414	396
0.035	8.283 941	55	0.085	8.279 220	135	0.135	8.270 464	217	0.185	8.257 492	304	0.235	8.240 018	398
0.036	8.283 886	58	0.086	8.279 085	137	0.136	8.270 247	219	0.186	8.257 188	306	0.236	8.239 620	400
0.037	8.283 828	59	0.087	8.278 948	138	0.137	8.270 028	221	0.187	8.256 882	308	0.237	8.239 220	402
0.038	8.283 769	60	0.088	8.278 810	140	0.138	8.269 807	222	0.188	8.256 574	310	0.238	8.238 818	404
0.039	8.283 709	62	0.089	8.278 670	142	0.139	8.269 585	224	0.189	8.256 264	311	0.239	8.238 414	406
0.040	8.283 647	63	0.090	8.278 528	143	0.140	8.269 361	226	0.190	8.255 953	313	0.240	8.238 008	408
0.041	8.283 584	65	0.091	8.278 385	145	0.141	8.269 135	228	0.191	8.255 640	315	0.241	8.237 600	410
0.042	8.283 519	67	0.092	8.278 240	146	0.142	8.268 907	229	0.192	8.255 325	317	0.242	8.237 190	412
0.043	8.283 452	68	0.093	8.278 094	148	0.143	8.268 678	231	0.193	8.255 008	319	0.243	8.236 778	413
0.044	8.283 384	70	0.094	8.277 946	150	0.144	8.268 447	232	0.194	8.254 689	321	0.244	8.236 365	416
0.045	8.283 314	72	0.095	8.277 796	151	0.145	8.268 215	235	0.195	8.254 368	322	0.245	8.235 949	418
0.046	8.283 242	73	0.096	8.277 645	153	0.146	8.267 980	236	0.196	8.254 046	324	0.246	8.235 531	420
0.047	8.283 169	74	0.097	8.277 492	155	0.147	8.267 744	237	0.197	8.253 722	326	0.247	8.235 111	422
0.048	8.283 095	76	0.098	8.277 337	156	0.148	8.267 507	240	0.198	8.253 396	328	0.248	8.234 689	423
0.049	8.283 019	78	0.099	8.277 181	158	0.149	8.267 267	241	0.199	8.253 068	330	0.249	8.234 266	426
0.050	8.282 941		0.100	8.277 023		0.150	8.267 026		0.200	8.252 738		0.250	8.233 840	

Tafel IV.

$\log \{M_2^8(m)\}$.

± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ	± m	M	−Δ
0.000	8_n000 458	2	0.050	7_n996 461	162	0.100	7_n984 298	329	0.150	7_n963 422	512	0.200	7_n932 814	722
0.001	8_n000 456	5	0.051	7_n996 299	165	0.101	7_n983 969	333	0.151	7_n962 910	516	0.201	7_n932 092	726
0.002	8_n000 451	8	0.052	7_n996 134	169	0.102	7_n983 636	337	0.152	7_n962 394	521	0.202	7_n931 366	731
0.003	8_n000 443	11	0.053	7_n995 965	172	0.103	7_n983 299	340	0.153	7_n961 873	524	0.203	7_n930 635	735
0.004	8_n000 432	14	0.054	7_n995 793	175	0.104	7_n982 959	343	0.154	7_n961 349	528	0.204	7_n929 900	740
0.005	8_n000 418	18	0.055	7_n995 618	178	0.105	7_n982 616	347	0.155	7_n960 821	532	0.205	7_n929 160	745
0.006	8_n000 400	21	0.056	7_n995 440	182	0.106	7_n982 269	351	0.156	7_n960 289	536	0.206	7_n928 415	749
0.007	8_n000 379	23	0.057	7_n995 258	185	0.107	7_n981 918	354	0.157	7_n959 753	539	0.207	7_n927 666	754
0.008	8_n000 356	28	0.058	7_n995 073	188	0.108	7_n981 564	358	0.158	7_n959 214	544	0.208	7_n926 912	759
0.009	8_n000 328		0.059	7_n994 885		0.109	7_n981 206		0.159	7_n958 670		0.209	7_n926 153	
		30			191			361			548			763
0.010	8_n000 298	33	0.060	7_n994 694	195	0.110	7_n980 845	364	0.160	7_n958 122	552	0.210	7_n925 390	768
0.011	8_n000 265	37	0.061	7_n994 499	198	0.111	7_n980 481	369	0.161	7_n957 570	555	0.211	7_n924 622	773
0.012	8_n000 228	40	0.062	7_n994 301	202	0.112	7_n980 112	371	0.162	7_n957 015	560	0.212	7_n923 849	777
0.013	8_n000 188	43	0.063	7_n994 099	204	0.113	7_n979 741	376	0.163	7_n956 455	564	0.213	7_n923 072	782
0.014	8_n000 145	46	0.064	7_n993 895	208	0.114	7_n979 365	379	0.164	7_n955 891	568	0.214	7_n922 290	787
0.015	8_n000 099	49	0.065	7_n993 687	212	0.115	7_n978 986	382	0.165	7_n955 323	571	0.215	7_n921 503	792
0.016	8_n000 050	53	0.066	7_n993 475	214	0.116	7_n978 604	386	0.166	7_n954 752	576	0.216	7_n920 711	797
0.017	7_n999 997	56	0.067	7_n993 261	218	0.117	7_n978 218	390	0.167	7_n954 176	580	0.217	7_n919 914	801
0.018	7_n999 941	59	0.068	7_n993 043	221	0.118	7_n977 828	393	0.168	7_n953 596	584	0.218	7_n919 113	807
0.019	7_n999 882		0.069	7_n992 822		0.119	7_n977 435		0.169	7_n953 012		0.219	7_n918 306	
		62			225			396			588			811
0.020	7_n999 820	65	0.070	7_n992 597	227	0.120	7_n977 039	401	0.170	7_n952 424	593	0.220	7_n917 495	816
0.021	7_n999 755	69	0.071	7_n992 370	231	0.121	7_n976 638	404	0.171	7_n951 831	596	0.221	7_n916 679	821
0.022	7_n999 686	72	0.072	7_n992 139	235	0.122	7_n976 234	407	0.172	7_n951 235	600	0.222	7_n915 858	826
0.023	7_n999 614	75	0.073	7_n991 904	238	0.123	7_n975 827	412	0.173	7_n950 635	605	0.223	7_n915 032	832
0.024	7_n999 539	78	0.074	7_n991 666	241	0.124	7_n975 415	415	0.174	7_n950 030	609	0.224	7_n914 200	836
0.025	7_n999 461	81	0.075	7_n991 425	244	0.125	7_n975 000	418	0.175	7_n949 421	613	0.225	7_n913 364	841
0.026	7_n999 380	85	0.076	7_n991 181	248	0.126	7_n974 582	422	0.176	7_n948 808	617	0.226	7_n912 523	846
0.027	7_n999 295	88	0.077	7_n990 933	251	0.127	7_n974 160	426	0.177	7_n948 191	621	0.227	7_n911 677	851
0.028	7_n999 207	91	0.078	7_n990 682	255	0.128	7_n973 734	430	0.178	7_n947 570	625	0.228	7_n910 826	856
0.029	7_n999 116		0.079	7_n990 427		0.129	7_n973 304		0.179	7_n946 945		0.229	7_n909 970	
		94			258			433			630			861
0.030	7_n999 022	97	0.080	7_n990 169	261	0.130	7_n972 871	437	0.180	7_n946 315	634	0.230	7_n909 109	867
0.031	7_n998 925	101	0.081	7_n989 908	265	0.131	7_n972 434	440	0.181	7_n945 681	638	0.231	7_n908 242	871
0.032	7_n998 824	104	0.082	7_n989 643	268	0.132	7_n971 994	444	0.182	7_n945 043	642	0.232	7_n907 371	877
0.033	7_n998 720	107	0.083	7_n989 375	271	0.133	7_n971 550	448	0.183	7_n944 401	647	0.233	7_n906 494	882
0.034	7_n998 613	110	0.084	7_n989 104	275	0.134	7_n971 102	452	0.184	7_n943 754	651	0.234	7_n905 612	887
0.035	7_n998 503	114	0.085	7_n988 829	278	0.135	7_n970 650	455	0.185	7_n943 103	655	0.235	7_n904 725	893
0.036	7_n998 389	116	0.086	7_n988 551	282	0.136	7_n970 195	459	0.186	7_n942 448	660	0.236	7_n903 832	897
0.037	7_n998 273	120	0.087	7_n988 269	284	0.137	7_n969 736	463	0.187	7_n941 788	664	0.237	7_n902 935	903
0.038	7_n998 153	124	0.088	7_n987 985	289	0.138	7_n969 273	467	0.188	7_n941 124	668	0.238	7_n902 032	909
0.039	7_n998 029		0.089	7_n987 696		0.139	7_n968 806		0.189	7_n940 456		0.239	7_n901 123	
		126			292			470			673			913
0.040	7_n997 903	130	0.090	7_n987 404	295	0.140	7_n968 336	474	0.190	7_n939 783	677	0.240	7_n900 210	919
0.041	7_n997 773	133	0.091	7_n987 109	298	0.141	7_n967 862	478	0.191	7_n939 106	681	0.241	7_n899 291	925
0.042	7_n997 640	136	0.092	7_n986 811	302	0.142	7_n967 384	482	0.192	7_n938 425	686	0.242	7_n898 366	930
0.043	7_n997 504	139	0.093	7_n986 509	306	0.143	7_n966 902	486	0.193	7_n937 739	690	0.243	7_n897 436	935
0.044	7_n997 365	143	0.094	7_n986 203	309	0.144	7_n966 416	489	0.194	7_n937 049	695	0.244	7_n896 501	941
0.045	7_n997 222	145	0.095	7_n985 894	312	0.145	7_n965 927	493	0.195	7_n936 354	699	0.245	7_n895 560	946
0.046	7_n997 077	149	0.096	7_n985 582	316	0.146	7_n965 434	497	0.196	7_n935 655	704	0.246	7_n894 614	952
0.047	7_n996 928	153	0.097	7_n985 266	319	0.147	7_n964 937	501	0.197	7_n934 951	708	0.247	7_n893 662	957
0.048	7_n996 775	155	0.098	7_n984 947	323	0.148	7_n964 436	505	0.198	7_n934 243	712	0.248	7_n892 705	963
0.049	7_n996 620	159	0.099	7_n984 624	326	0.149	7_n963 931	509	0.199	7_n933 531	717	0.249	7_n891 742	968
0.050	7_n996 461		0.100	7_n984 298		0.150	7_n963 422		0.200	7_n932 814		0.250	7_n890 774	

Tafel IV.

$\log\{M_2{}^{9}(m)\}$.

$\pm m$	M	$-\Delta$
0.000	7_n523 336	1
0.001	7_n523 335	2
0.002	7_n523 333	5
0.003	7_n523 328	6
0.004	7_n523 322	8
0.005	7_n523 314	10
0.006	7_n523 304	11
0.007	7_n523 293	13
0.008	7_n523 280	15
0.009	7_n523 265	17
0.010	7_n523 248	19
0.011	7_n523 229	20
0.012	7_n523 209	22
0.013	7_n523 187	24
0.014	7_n523 163	26
0.015	7_n523 137	27
0.016	7_n523 110	29
0.017	7_n523 081	32
0.018	7_n523 049	32
0.019	7_n523 017	35
0.020	7_n522 982	36
0.021	7_n522 946	38
0.022	7_n522 908	40
0.023	7_n522 868	42
0.024	7_n522 826	43
0.025	7_n522 783	45
0.026	7_n522 738	47
0.027	7_n522 691	49
0.028	7_n522 642	50
0.029	7_n522 592	53
0.030	7_n522 539	54
0.031	7_n522 485	56
0.032	7_n522 429	57
0.033	7_n522 372	60
0.034	7_n522 312	61
0.035	7_n522 251	63
0.036	7_n522 188	64
0.037	7_n522 124	67
0.038	7_n522 057	68
0.039	7_n521 989	70
0.040	7_n521 919	72
0.041	7_n521 847	74
0.042	7_n521 773	75
0.043	7_n521 698	77
0.044	7_n521 621	79
0.045	7_n521 542	81
0.046	7_n521 461	82
0.047	7_n521 379	85
0.048	7_n521 294	86
0.049	7_n521 208	88
0.050	7_n521 120	

$\pm m$	M	$-\Delta$
0.050	7_n521 120	90
0.051	7_n521 030	91
0.052	7_n520 939	93
0.053	7_n520 846	95
0.054	7_n520 751	97
0.055	7_n520 654	99
0.056	7_n520 555	100
0.057	7_n520 455	103
0.058	7_n520 352	104
0.059	7_n520 248	105
0.060	7_n520 143	108
0.061	7_n520 035	109
0.062	7_n519 926	112
0.063	7_n519 814	113
0.064	7_n519 701	114
0.065	7_n519 587	117
0.066	7_n519 470	118
0.067	7_n519 352	121
0.068	7_n519 231	122
0.069	7_n519 109	123
0.070	7_n518 986	126
0.071	7_n518 860	127
0.072	7_n518 733	130
0.073	7_n518 603	131
0.074	7_n518 472	132
0.075	7_n518 340	135
0.076	7_n518 205	137
0.077	7_n518 068	138
0.078	7_n517 930	140
0.079	7_n517 790	142
0.080	7_n517 648	144
0.081	7_n517 504	145
0.082	7_n517 359	147
0.083	7_n517 212	150
0.084	7_n517 062	151
0.085	7_n516 911	152
0.086	7_n516 759	155
0.087	7_n516 604	157
0.088	7_n516 447	158
0.089	7_n516 289	160
0.090	7_n516 129	162
0.091	7_n515 967	164
0.092	7_n515 803	165
0.093	7_n515 638	168
0.094	7_n515 470	169
0.095	7_n515 301	171
0.096	7_n515 130	173
0.097	7_n514 957	175
0.098	7_n514 782	176
0.099	7_n514 606	179
0.100	7_n514 427	

$\pm m$	M	$-\Delta$
0.100	7_n514 427	180
0.101	7_n514 247	182
0.102	7_n514 065	184
0.103	7_n513 881	186
0.104	7_n513 695	188
0.105	7_n513 507	189
0.106	7_n513 318	192
0.107	7_n513 126	193
0.108	7_n512 933	195
0.109	7_n512 738	197
0.110	7_n512 541	199
0.111	7_n512 342	200
0.112	7_n512 142	203
0.113	7_n511 939	204
0.114	7_n511 735	207
0.115	7_n511 528	208
0.116	7_n511 320	210
0.117	7_n511 110	212
0.118	7_n510 898	213
0.119	7_n510 685	216
0.120	7_n510 469	217
0.121	7_n510 252	220
0.122	7_n510 032	221
0.123	7_n509 811	223
0.124	7_n509 588	225
0.125	7_n509 363	227
0.126	7_n509 136	229
0.127	7_n508 907	230
0.128	7_n508 677	233
0.129	7_n508 444	234
0.130	7_n508 210	237
0.131	7_n507 973	238
0.132	7_n507 735	240
0.133	7_n507 495	242
0.134	7_n507 253	244
0.135	7_n507 009	246
0.136	7_n506 763	248
0.137	7_n506 515	249
0.138	7_n506 266	252
0.139	7_n506 014	253
0.140	7_n505 761	256
0.141	7_n505 505	257
0.142	7_n505 248	259
0.143	7_n504 989	261
0.144	7_n504 728	263
0.145	7_n504 465	265
0.146	7_n504 200	267
0.147	7_n503 933	269
0.148	7_n503 664	271
0.149	7_n503 393	273
0.150	7_n503 120	

$\pm m$	M	$-\Delta$
0.150	7_n503 120	274
0.151	7_n502 846	277
0.152	7_n502 569	278
0.153	7_n502 291	281
0.154	7_n502 010	282
0.155	7_n501 728	285
0.156	7_n501 443	286
0.157	7_n501 157	288
0.158	7_n500 869	291
0.159	7_n500 578	292
0.160	7_n500 286	294
0.161	7_n499 992	296
0.162	7_n499 696	298
0.163	7_n499 398	300
0.164	7_n499 098	302
0.165	7_n498 796	304
0.166	7_n498 492	306
0.167	7_n498 186	308
0.168	7_n497 878	310
0.169	7_n497 568	312
0.170	7_n497 256	314
0.171	7_n496 942	316
0.172	7_n496 626	318
0.173	7_n496 308	320
0.174	7_n495 988	322
0.175	7_n495 666	324
0.176	7_n495 342	326
0.177	7_n495 016	328
0.178	7_n494 688	330
0.179	7_n494 358	332
0.180	7_n494 026	334
0.181	7_n493 692	336
0.182	7_n493 356	338
0.183	7_n493 018	340
0.184	7_n492 678	342
0.185	7_n492 336	344
0.186	7_n491 992	346
0.187	7_n491 646	348
0.188	7_n491 298	351
0.189	7_n490 947	352
0.190	7_n490 595	354
0.191	7_n490 241	357
0.192	7_n489 884	358
0.193	7_n489 526	361
0.194	7_n489 165	362
0.195	7_n488 803	365
0.196	7_n488 438	366
0.197	7_n488 072	369
0.198	7_n487 703	371
0.199	7_n487 332	373
0.200	7_n486 959	

$\pm m$	M	$-\Delta$
0.200	7_n486 959	375
0.201	7_n486 584	377
0.202	7_n486 207	379
0.203	7_n485 828	382
0.204	7_n485 446	383
0.205	7_n485 063	386
0.206	7_n484 677	387
0.207	7_n484 290	390
0.208	7_n483 900	392
0.209	7_n483 508	394
0.210	7_n483 114	396
0.211	7_n482 718	398
0.212	7_n482 320	400
0.213	7_n481 920	402
0.214	7_n481 518	405
0.215	7_n481 113	407
0.216	7_n480 706	409
0.217	7_n480 297	411
0.218	7_n479 886	413
0.219	7_n479 473	415
0.220	7_n479 058	417
0.221	7_n478 641	420
0.222	7_n478 221	422
0.223	7_n477 799	424
0.224	7_n477 375	426
0.225	7_n476 949	428
0.226	7_n476 521	431
0.227	7_n476 090	432
0.228	7_n475 658	435
0.229	7_n475 223	437
0.230	7_n474 786	439
0.231	7_n474 347	442
0.232	7_n473 905	444
0.233	7_n473 461	445
0.234	7_n473 016	448
0.235	7_n472 568	451
0.236	7_n472 117	452
0.237	7_n471 665	455
0.238	7_n471 210	457
0.239	7_n470 753	459
0.240	7_n470 294	462
0.241	7_n469 832	463
0.242	7_n469 369	466
0.243	7_n468 903	469
0.244	7_n468 434	470
0.245	7_n467 964	473
0.246	7_n467 491	475
0.247	7_n467 016	477
0.248	7_n466 539	480
0.249	7_n466 059	482
0.250	7_n465 577	

Tafel IV.

$\log \{M_2^{10}(m)\}$.

± m	M	−Δ
0.000	7.357 193	2
0.001	7.357 191	5
0.002	7.357 186	8
0.003	7.357 178	12
0.004	7.357 166	16
0.005	7.357 150	18
0.006	7.357 132	23
0.007	7.357 109	25
0.008	7.357 084	29
0.009	7.357 055	32
0.010	7.357 023	36
0.011	7.356 987	40
0.012	7.356 947	42
0.013	7.356 905	46
0.014	7.356 859	50
0.015	7.356 809	53
0.016	7.356 756	56
0.017	7.356 700	60
0.018	7.356 640	63
0.019	7.356 577	66
0.020	7.356 511	70
0.021	7.356 441	73
0.022	7.356 368	77
0.023	7.356 291	80
0.024	7.356 211	84
0.025	7.356 127	87
0.026	7.356 040	91
0.027	7.355 949	94
0.028	7.355 855	97
0.029	7.355 758	101
0.030	7.355 657	104
0.031	7.355 553	107
0.032	7.355 446	111
0.033	7.355 335	115
0.034	7.355 220	118
0.035	7.355 102	121
0.036	7.354 981	125
0.037	7.354 856	129
0.038	7.354 727	131
0.039	7.354 596	135
0.040	7.354 461	139
0.041	7.354 322	142
0.042	7.354 180	146
0.043	7.354 034	149
0.044	7.353 885	152
0.045	7.353 733	156
0.046	7.353 577	160
0.047	7.353 417	163
0.048	7.353 254	166
0.049	7.353 088	170
0.050	7.352 918	

± m	M	−Δ
0.050	7.352 918	173
0.051	7.352 745	177
0.052	7.352 568	180
0.053	7.352 388	184
0.054	7.352 204	188
0.055	7.352 016	191
0.056	7.351 825	194
0.057	7.351 631	198
0.058	7.351 433	201
0.059	7.351 232	205
0.060	7.351 027	208
0.061	7.350 819	212
0.062	7.350 607	216
0.063	7.350 391	219
0.064	7.350 172	222
0.065	7.349 950	226
0.066	7.349 724	230
0.067	7.349 494	233
0.068	7.349 261	236
0.069	7.349 025	240
0.070	7.348 785	244
0.071	7.348 541	248
0.072	7.348 293	250
0.073	7.348 043	255
0.074	7.347 788	258
0.075	7.347 530	262
0.076	7.347 268	265
0.077	7.347 003	269
0.078	7.346 734	272
0.079	7.346 462	276
0.080	7.346 186	280
0.081	7.345 906	283
0.082	7.345 623	286
0.083	7.345 337	291
0.084	7.345 046	294
0.085	7.344 752	298
0.086	7.344 454	301
0.087	7.344 153	305
0.088	7.343 848	309
0.089	7.343 539	312
0.090	7.343 227	316
0.091	7.342 911	319
0.092	7.342 592	324
0.093	7.342 268	327
0.094	7.341 941	330
0.095	7.341 611	334
0.096	7.341 277	338
0.097	7.340 939	342
0.098	7.340 597	346
0.099	7.340 251	349
0.100	7.339 902	

± m	M	−Δ
0.100	7.339 902	352
0.101	7.339 550	357
0.102	7.339 193	360
0.103	7.338 833	364
0.104	7.338 469	368
0.105	7.338 101	372
0.106	7.337 729	375
0.107	7.337 354	379
0.108	7.336 975	383
0.109	7.336 592	387
0.110	7.336 205	390
0.111	7.335 815	395
0.112	7.335 420	398
0.113	7.335 022	401
0.114	7.334 621	406
0.115	7.334 215	410
0.116	7.333 805	413
0.117	7.333 392	417
0.118	7.332 975	421
0.119	7.332 554	425
0.120	7.332 129	429
0.121	7.331 700	433
0.122	7.331 267	436
0.123	7.330 831	441
0.124	7.330 390	444
0.125	7.329 946	448
0.126	7.329 498	453
0.127	7.329 045	456
0.128	7.328 589	460
0.129	7.328 129	464
0.130	7.327 665	468
0.131	7.327 197	472
0.132	7.326 725	476
0.133	7.326 249	480
0.134	7.325 769	484
0.135	7.325 285	488
0.136	7.324 797	492
0.137	7.324 305	496
0.138	7.323 809	500
0.139	7.323 309	504
0.140	7.322 805	508
0.141	7.322 297	512
0.142	7.321 785	516
0.143	7.321 269	521
0.144	7.320 748	524
0.145	7.320 224	529
0.146	7.319 695	533
0.147	7.319 162	537
0.148	7.318 625	541
0.149	7.318 084	545
0.150	7.317 539	

± m	M	−Δ
0.150	7.317 539	549
0.151	7.316 990	554
0.152	7.316 436	557
0.153	7.315 879	562
0.154	7.315 317	566
0.155	7.314 751	571
0.156	7.314 180	574
0.157	7.313 606	579
0.158	7.313 027	583
0.159	7.312 444	588
0.160	7.311 856	591
0.161	7.311 265	596
0.162	7.310 669	600
0.163	7.310 069	605
0.164	7.309 464	609
0.165	7.308 855	613
0.166	7.308 242	618
0.167	7.307 624	622
0.168	7.307 002	626
0.169	7.306 376	631
0.170	7.305 745	636
0.171	7.305 109	639
0.172	7.304 470	645
0.173	7.303 825	648
0.174	7.303 177	653
0.175	7.302 524	658
0.176	7.301 866	662
0.177	7.301 204	667
0.178	7.300 537	671
0.179	7.299 866	676
0.180	7.299 190	680
0.181	7.298 510	685
0.182	7.297 825	690
0.183	7.297 135	694
0.184	7.296 441	699
0.185	7.295 742	703
0.186	7.295 039	708
0.187	7.294 331	713
0.188	7.293 618	718
0.189	7.292 900	722
0.190	7.292 178	727
0.191	7.291 451	732
0.192	7.290 719	736
0.193	7.289 983	741
0.194	7.289 242	746
0.195	7.288 496	751
0.196	7.287 745	756
0.197	7.286 989	761
0.198	7.286 228	765
0.199	7.285 463	771
0.200	7.284 692	

± m	M	−Δ
0.200	7.284 692	775
0.201	7.283 917	780
0.202	7.283 137	785
0.203	7.282 352	791
0.204	7.281 561	795
0.205	7.280 766	800
0.206	7.279 966	805
0.207	7.279 161	810
0.208	7.278 351	816
0.209	7.277 535	820
0.210	7.276 715	826
0.211	7.275 889	831
0.212	7.275 058	835
0.213	7.274 223	841
0.214	7.273 382	847
0.215	7.272 535	851
0.216	7.271 684	857
0.217	7.270 827	862
0.218	7.269 965	867
0.219	7.269 098	873
0.220	7.268 225	878
0.221	7.267 347	883
0.222	7.266 464	889
0.223	7.265 575	894
0.224	7.264 681	900
0.225	7.263 781	905
0.226	7.262 876	910
0.227	7.261 966	916
0.228	7.261 050	922
0.229	7.260 128	927
0.230	7.259 201	932
0.231	7.258 269	939
0.232	7.257 330	944
0.233	7.256 386	949
0.234	7.255 437	955
0.235	7.254 482	961
0.236	7.253 521	967
0.237	7.252 554	973
0.238	7.251 581	978
0.239	7.250 603	984
0.240	7.249 619	990
0.241	7.248 629	996
0.242	7.247 633	1002
0.243	7.246 631	1008
0.244	7.245 623	1014
0.245	7.244 609	1019
0.246	7.243 590	1026
0.247	7.242 564	1032
0.248	7.241 532	1038
0.249	7.240 494	1044
0.250	7.239 450	

Tafel V.

vergl. pag. 35.

Q_1^1	—	1 : 12
Q_1^3	+	11 : 720
Q_1^5	—	191 : 60480
Q_1^7	+	2497 : 36 28800
Q_1^9	—	14797 : 958 00320
Q_1^{11}	+	924 27157 : 261 53487 36000
Q_1^{13}	—	367 40617 : 448 34549 76000
Q_1^{15}	+	6 14309 43169 : 32 01186 85286 40000
Q_1^{17}	—	2313 39458 92303 : 51090 94217 17094 40000
Q_1^{19}	+	1639 96886 81447 : 1 52579 28431 37024 00000

Q_2^0	+	1 : 12
Q_2^2	—	1 : 240
Q_2^4	+	31 : 60480
Q_2^6	—	289 : 36 28800
Q_2^8	+	317 : 228 09600
Q_2^{10}	—	68 03477 : 261 53487 36000
Q_2^{12}	+	32 03699 : 627 68369 66400
Q_2^{14}	—	6632 25741 : 6 40237 37057 28000
Q_2^{16}	+	22 03877 95651 : 10218 18843 43418 88000
Q_2^{18}	—	15447 34732 56043 : 337 20021 83332 82304 00000

P_1^1	+	1 : 24
P_1^3	—	17 : 5760
P_1^5	+	367 : 9 67680
P_1^7	—	27859 : 4644 86400
P_1^9	+	12 95803 : 12 26244 09600
P_1^{11}	—	53292 42827 : 2 67811 71056 64000
P_1^{13}	+	2 51988 57127 : 64 27481 05359 36000
P_1^{15}	—	1195 97121 66949 : 1 49852 12970 66393 60000
P_1^{17}	+	11 15323 97734 19941 : 6696 59197 23302 99719 68000
P_1^{19}	—	31326 45059 69545 10807 : 883 95014 03475 99562 99776 00000

P_2^0	—	1 : 24
P_2^2	+	17 : 1920
P_2^4	—	367 : 1 93536
P_2^6	+	27859 : 663 55200
P_2^8	—	12 95803 : 1 36249 34400
P_2^{10}	+	53292 42827 : 24346 51914 24000
P_2^{12}	—	2 51988 57127 : 4 94421 61950 72000
P_2^{14}	+	1195 97121 66949 : 9990 14198 04426 24000
P_2^{16}	—	11 15323 97734 19941 : 393 91717 48429 58807 04000
P_2^{18}	+	31326 45059 69545 10807 : 46 52369 15972 42082 26304 00000

$\log Q_1^1$	8_n92081	87539	52375	17228	— 10
$\log Q_1^3$	8.18406	01887	26956	58052	— 10
$\log Q_1^5$	7_n49942	15847	54577	41897	— 10
$\log Q_1^7$	6.83765	55094	74554	00968	— 10
$\log Q_1^9$	6_n18880	67140	59646	43697	— 10
$\log Q_1^{11}$	5.54826	99878	35275	08440	— 10
$\log Q_1^{13}$	4_n91353	36324	92680	95240	— 10
$\log Q_1^{15}$	4.28307	61586	36488	77263	— 10
$\log Q_1^{17}$	3_n65590	58038	69592	29695	— 10
$\log Q_1^{19}$	3.03134	00303	59002	66855	— 10

$\log Q_2^0$	8.92081	87539	52375	17228	— 10
$\log Q_2^2$	7_n61978	87582	88393	97706	— 10
$\log Q_2^4$	6.70974	99113	41122	56100	— 10
$\log Q_2^6$	5_n90113	48098	79754	10591	— 10
$\log Q_2^8$	5.14294	15928	69027	14291	— 10
$\log Q_2^{10}$	4_n41520	13141	51965	43582	— 10
$\log Q_2^{12}$	3.70791	08571	71699	08962	— 10
$\log Q_2^{14}$	3_n01532	03533	68939	05852	— 10
$\log Q_2^{16}$	2.33381	36337	74462	41189	— 10
$\log Q_2^{18}$	1_n66096	60643	89676	13374	— 10

$\log P_1^1$	8.61978	87582	88393	97706	— 10
$\log P_1^3$	7_n47002	64379	55061	88267	— 10
$\log P_1^5$	6.57893	42991	03014	43847	— 10
$\log P_1^7$	5_n77799	25208	24003	32215	— 10
$\log P_1^9$	5.02396	20516	80116	06360	— 10
$\log P_1^{11}$	4_n29883	59458	96757	75456	— 10
$\log P_1^{13}$	3.59334	00390	27949	00215	— 10
$\log P_1^{15}$	2_n90205	78081	19206	78783	— 10
$\log P_1^{17}$	2.22154	72009	05976	08148	— 10
$\log P_1^{19}$	1_n54948	34213	88368	16947	— 10

$\log P_2^0$	8_n61978	87582	88393	97706	— 10
$\log P_2^2$	7.94714	76926	74724	31996	— 10
$\log P_2^4$	7_n27790	43034	39033	24326	— 10
$\log P_2^6$	6.62309	05608	38260	15286	— 10
$\log P_2^8$	5_n97820	45611	19440	93819	— 10
$\log P_2^{10}$	5.34022	86310	54982	79531	— 10
$\log P_2^{12}$	4_n70728	33913	34785	77136	— 10
$\log P_2^{14}$	4.07814	90671	74888	02991	— 10
$\log P_2^{16}$	3_n45199	61222	84250	01002	— 10
$\log P_2^{18}$	2.82823	70223	41197	13100	— 10

Tafel VI.

$\log \{Q_1{}^1\, n\}$.

vergl. pag. 41.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	8_n920 819	3	0.050	8_n914 255	267	0.100	8_n893 947	558	0.150	8_n857 835	908	0.200	8_n801 632	1377
0.001	8_n920 816	8	0.051	8_n913 988	273	0.101	8_n893 389	564	0.151	8_n856 927	915	0.201	8_n800 255	1388
0.002	8_n920 808	13	0.052	8_n913 715	278	0.102	8_n892 825	570	0.152	8_n856 012	924	0.202	8_n798 867	1400
0.003	8_n920 795	18	0.053	8_n913 437	284	0.103	8_n892 255	576	0.153	8_n855 088	932	0.203	8_n797 467	1411
0.004	8_n920 777	23	0.054	8_n913 153	289	0.104	8_n891 679	583	0.154	8_n854 156	940	0.204	8_n796 056	1423
0.005	8_n920 754	29	0.055	8_n912 864	295	0.105	8_n891 096	589	0.155	8_n853 216	947	0.205	8_n794 633	1434
0.006	8_n920 725	34	0.056	8_n912 569	300	0.106	8_n890 507	596	0.156	8_n852 269	957	0.206	8_n793 199	1446
0.007	8_n920 691	39	0.057	8_n912 269	306	0.107	8_n889 911	602	0.157	8_n851 312	964	0.207	8_n791 753	1458
0.008	8_n920 652	44	0.058	8_n911 963	311	0.108	8_n889 309	608	0.158	8_n850 348	973	0.208	8_n790 295	1470
0.009	8_n920 608	50	0.059	8_n911 652	317	0.109	8_n888 701	615	0.159	8_n849 375	981	0.209	8_n788 825	1483
0.010	8_n920 558	55	0.060	8_n911 335	322	0.110	8_n888 086	621	0.160	8_n848 394	989	0.210	8_n787 342	1494
0.011	8_n920 503	60	0.061	8_n911 013	328	0.111	8_n887 465	628	0.161	8_n847 405	998	0.211	8_n785 848	1506
0.012	8_n920 443	65	0.062	8_n910 685	334	0.112	8_n886 837	635	0.162	8_n846 407	1006	0.212	8_n784 342	1519
0.013	8_n920 378	70	0.063	8_n910 351	339	0.113	8_n886 202	641	0.163	8_n845 401	1015	0.213	8_n782 823	1532
0.014	8_n920 308	76	0.064	8_n910 012	344	0.114	8_n885 561	648	0.164	8_n844 386	1023	0.214	8_n781 291	1544
0.015	8_n920 232	81	0.065	8_n909 668	351	0.115	8_n884 913	654	0.165	8_n843 363	1032	0.215	8_n779 747	1557
0.016	8_n920 151	86	0.066	8_n909 317	356	0.116	8_n884 259	661	0.166	8_n842 331	1041	0.216	8_n778 190	1570
0.017	8_n920 065	91	0.067	8_n908 961	362	0.117	8_n883 598	667	0.167	8_n841 290	1050	0.217	8_n776 620	1583
0.018	8_n919 974	97	0.068	8_n908 599	367	0.118	8_n882 931	675	0.168	8_n840 240	1058	0.218	8_n775 037	1595
0.019	8_n919 877	102	0.069	8_n908 232	373	0.119	8_n882 256	681	0.169	8_n839 182	1068	0.219	8_n773 442	1610
0.020	8_n919 775	107	0.070	8_n907 859	379	0.120	8_n881 575	688	0.170	8_n838 114	1076	0.220	8_n771 832	1622
0.021	8_n919 668	112	0.071	8_n907 480	384	0.121	8_n880 887	695	0.171	8_n837 038	1085	0.221	8_n770 210	1636
0.022	8_n919 556	118	0.072	8_n907 096	390	0.122	8_n880 192	701	0.172	8_n835 953	1095	0.222	8_n768 574	1649
0.023	8_n919 438	123	0.073	8_n906 706	396	0.123	8_n879 491	709	0.173	8_n834 858	1103	0.223	8_n766 925	1664
0.024	8_n919 315	128	0.074	8_n906 310	402	0.124	8_n878 782	715	0.174	8_n833 755	1113	0.224	8_n765 261	1677
0.025	8_n919 187	133	0.075	8_n905 908	407	0.125	8_n878 067	723	0.175	8_n832 642	1122	0.225	8_n763 584	1691
0.026	8_n919 054	139	0.076	8_n905 501	413	0.126	8_n877 344	729	0.176	8_n831 520	1131	0.226	8_n761 893	1706
0.027	8_n918 915	144	0.077	8_n905 088	419	0.127	8_n876 615	736	0.177	8_n830 389	1141	0.227	8_n760 187	1719
0.028	8_n918 771	149	0.078	8_n904 669	425	0.128	8_n875 879	743	0.178	8_n829 248	1150	0.228	8_n758 468	1734
0.029	8_n918 622	155	0.079	8_n904 244	431	0.129	8_n875 136	751	0.179	8_n828 098	1160	0.229	8_n756 734	1749
0.030	8_n918 467	160	0.080	8_n903 813	436	0.130	8_n874 385	757	0.180	8_n826 938	1169	0.230	8_n754 985	1763
0.031	8_n918 307	165	0.081	8_n903 377	443	0.131	8_n873 628	765	0.181	8_n825 769	1179	0.231	8_n753 222	1779
0.032	8_n918 142	170	0.082	8_n902 934	448	0.132	8_n872 863	772	0.182	8_n824 590	1188	0.232	8_n751 443	1793
0.033	8_n917 972	176	0.083	8_n902 486	454	0.133	8_n872 091	779	0.183	8_n823 402	1199	0.233	8_n749 650	1808
0.034	8_n917 796	181	0.084	8_n902 032	460	0.134	8_n871 312	786	0.184	8_n822 203	1208	0.234	8_n747 842	1824
0.035	8_n917 615	186	0.085	8_n901 572	466	0.135	8_n870 526	794	0.185	8_n820 995	1219	0.235	8_n746 018	1840
0.036	8_n917 429	192	0.086	8_n901 106	472	0.136	8_n869 732	801	0.186	8_n819 776	1228	0.236	8_n744 178	1855
0.037	8_n917 237	197	0.087	8_n900 634	478	0.137	8_n868 931	808	0.187	8_n818 548	1238	0.237	8_n742 323	1871
0.038	8_n917 040	203	0.088	8_n900 156	484	0.138	8_n868 123	816	0.188	8_n817 310	1249	0.238	8_n740 452	1887
0.039	8_n916 837	208	0.089	8_n899 672	490	0.139	8_n867 307	823	0.189	8_n816 061	1259	0.239	8_n738 565	1903
0.040	8_n916 629	213	0.090	8_n899 182	496	0.140	8_n866 484	830	0.190	8_n814 802	1269	0.240	8_n736 662	1919
0.041	8_n916 416	218	0.091	8_n898 686	502	0.141	8_n865 654	838	0.191	8_n813 533	1279	0.241	8_n734 743	1936
0.042	8_n916 198	224	0.092	8_n898 184	508	0.142	8_n864 816	846	0.192	8_n812 254	1291	0.242	8_n732 807	1953
0.043	8_n915 974	229	0.093	8_n897 676	515	0.143	8_n863 970	853	0.193	8_n810 963	1300	0.243	8_n730 854	1970
0.044	8_n915 745	235	0.094	8_n897 161	520	0.144	8_n863 117	861	0.194	8_n809 663	1311	0.244	8_n728 884	1987
0.045	8_n915 510	240	0.095	8_n896 641	526	0.145	8_n862 256	869	0.195	8_n808 352	1322	0.245	8_n726 897	2004
0.046	8_n915 270	246	0.096	8_n896 115	533	0.146	8_n861 387	876	0.196	8_n807 030	1333	0.246	8_n724 893	2022
0.047	8_n915 024	251	0.097	8_n895 582	539	0.147	8_n860 511	884	0.197	8_n805 697	1344	0.247	8_n722 871	2039
0.048	8_n914 773	256	0.098	8_n895 043	545	0.148	8_n859 627	892	0.198	8_n804 353	1355	0.248	8_n720 832	2058
0.049	8_n914 517	262	0.099	8_n894 498	551	0.149	8_n858 735	900	0.199	8_n802 998	1366	0.249	8_n718 774	2075
0.050	8_n914 255		0.100	8_n893 947		0.150	8_n857 835		0.200	8_n801 632		0.250	8_n716 699	

Tafel VI.

$\log \{Q_1^3 n_j\}$.

± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ
0.000	8.184 060		0.050	8.178 105		0.100	8.159 826		0.150	8.127 878		0.200	8.079 583	
0.001	8.184 058	2	0.051	8.177 863	242	0.101	8.159 327	499	0.151	8.127 084	794	0.201	8.078 422	1161
0.002	8.184 051	7	0.052	8.177 616	247	0.102	8.158 823	504	0.152	8.126 284	800	0.202	8.077 252	1170
0.003	8.184 039	12	0.053	8.177 364	252	0.103	8.158 314	509	0.153	8.125 477	807	0.203	8.076 074	1178
0.004	8.184 022	17	0.054	8.177 107	257	0.104	8.157 799	515	0.154	8.124 663	814	0.204	8.074 887	1187
0.005	8.184 001	21	0.055	8.176 846	261	0.105	8.157 278	521	0.155	8.123 843	820	0.205	8.073 692	1195
0.006	8.183 975	26	0.056	8.176 579	267	0.106	8.156 752	526	0.156	8.123 017	826	0.206	8.072 488	1204
0.007	8.183 944	31	0.057	8.176 308	271	0.107	8.156 221	531	0.157	8.122 183	834	0.207	8.071 275	1213
0.008	8.183 909	35	0.058	8.176 031	277	0.108	8.155 683	538	0.158	8.121 344	839	0.208	8.070 054	1221
0.009	8.183 868	41	0.059	8.175 750	281	0.109	8.155 141	542	0.159	8.120 497	847	0.209	8.068 824	1230
0.010	8.183 823	45	0.060	8.175 463	287	0.110	8.154 593	548	0.160	8.119 644	853	0.210	8.067 585	1239
0.011	8.183 773	50	0.061	8.175 172	291	0.111	8.154 039	554	0.161	8.118 783	861	0.211	8.066 336	1249
0.012	8.183 719	54	0.062	8.174 875	297	0.112	8.153 479	560	0.162	8.117 916	867	0.212	8.065 079	1257
0.013	8.183 660	59	0.063	8.174 574	301	0.113	8.152 914	565	0.163	8.117 043	873	0.213	8.063 813	1266
0.014	8.183 596	64	0.064	8.174 268	306	0.114	8.152 344	570	0.164	8.116 162	881	0.214	8.062 538	1275
0.015	8.183 527	69	0.065	8.173 956	312	0.115	8.151 768	576	0.165	8.115 275	887	0.215	8.061 254	1284
0.016	8.183 453	74	0.066	8.173 640	316	0.116	8.151 186	582	0.166	8.114 380	895	0.216	8.059 960	1294
0.017	8.183 375	78	0.067	8.173 318	322	0.117	8.150 598	588	0.167	8.113 479	901	0.217	8.058 657	1303
0.018	8.183 292	83	0.068	8.172 992	326	0.118	8.150 005	593	0.168	8.112 571	908	0.218	8.057 345	1312
0.019	8.183 204	88	0.069	8.172 661	331	0.119	8.149 405	600	0.169	8.111 655	916	0.219	8.056 023	1322
0.020	8.183 112	92	0.070	8.172 324	337	0.120	8.148 801	604	0.170	8.110 733	922	0.220	8.054 692	1331
0.021	8.183 015	97	0.071	8.171 982	342	0.121	8.148 190	611	0.171	8.109 803	930	0.221	8.053 351	1341
0.022	8.182 912	103	0.072	8.171 636	346	0.122	8.147 574	616	0.172	8.108 866	937	0.222	8.052 000	1351
0.023	8.182 806	106	0.073	8.171 284	352	0.123	8.146 951	623	0.173	8.107 923	943	0.223	8.050 640	1360
0.024	8.182 694	112	0.074	8.170 927	357	0.124	8.146 323	628	0.174	8.106 971	952	0.224	8.049 270	1370
0.025	8.182 578	116	0.075	8.170 565	362	0.125	8.145 689	634	0.175	8.106 013	958	0.225	8.047 890	1380
0.026	8.182 456	122	0.076	8.170 198	367	0.126	8.145 050	639	0.176	8.105 048	965	0.226	8.046 501	1389
0.027	8.182 331	125	0.077	8.169 826	372	0.127	8.144 404	646	0.177	8.104 075	973	0.227	8.045 101	1400
0.028	8.182 200	131	0.078	8.169 449	377	0.128	8.143 752	652	0.178	8.103 094	981	0.228	8.043 691	1410
0.029	8.182 064	136	0.079	8.169 066	383	0.129	8.143 095	657	0.179	8.102 107	987	0.229	8.042 272	1419
0.030	8.181 924	140	0.080	8.168 679	387	0.130	8.142 432	663	0.180	8.101 112	995	0.230	8.040 841	1431
0.031	8.181 779	145	0.081	8.168 286	393	0.131	8.141 762	670	0.181	8.100 109	1003	0.231	8.039 401	1440
0.032	8.181 629	150	0.082	8.167 888	398	0.132	8.141 087	675	0.182	8.099 099	1010	0.232	8.037 950	1451
0.033	8.181 474	155	0.083	8.167 485	403	0.133	8.140 405	682	0.183	8.098 081	1018	0.233	8.036 489	1461
0.034	8.181 315	159	0.084	8.167 077	408	0.134	8.139 718	687	0.184	8.097 056	1025	0.234	8.035 018	1471
0.035	8.181 150	165	0.085	8.166 663	414	0.135	8.139 024	694	0.185	8.096 023	1033	0.235	8.033 535	1483
0.036	8.180 981	169	0.086	8.166 244	419	0.136	8.138 325	699	0.186	8.094 983	1040	0.236	8.032 042	1493
0.037	8.180 807	174	0.087	8.165 820	424	0.137	8.137 619	706	0.187	8.093 934	1049	0.237	8.030 539	1503
0.038	8.180 629	178	0.088	8.165 391	429	0.138	8.136 907	712	0.188	8.092 878	1056	0.238	8.029 024	1515
0.039	8.180 445	184	0.089	8.164 957	434	0.139	8.136 189	718	0.189	8.091 814	1064	0.239	8.027 498	1526
0.040	8.180 256	189	0.090	8.164 517	440	0.140	8.135 465	724	0.190	8.090 743	1071	0.240	8.025 962	1536
0.041	8.180 063	193	0.091	8.164 072	445	0.141	8.134 735	730	0.191	8.089 663	1080	0.241	8.024 414	1548
0.042	8.179 865	198	0.092	8.163 621	451	0.142	8.133 998	737	0.192	8.088 576	1087	0.242	8.022 855	1559
0.043	8.179 662	203	0.093	8.163 166	455	0.143	8.133 255	743	0.193	8.087 480	1096	0.243	8.021 285	1570
0.044	8.179 454	208	0.094	8.162 705	461	0.144	8.132 506	749	0.194	8.086 376	1104	0.244	8.019 703	1582
0.045	8.179 242	212	0.095	8.162 238	467	0.145	8.131 751	755	0.195	8.085 265	1111	0.245	8.018 110	1593
0.046	8.179 024	218	0.096	8.161 767	471	0.146	8.130 989	762	0.196	8.084 145	1120	0.246	8.016 506	1604
0.047	8.178 801	223	0.097	8.161 290	477	0.147	8.130 221	768	0.197	8.083 017	1128	0.247	8.014 889	1617
0.048	8.178 574	227	0.098	8.160 807	483	0.148	8.129 446	775	0.198	8.081 881	1136	0.248	8.013 261	1628
0.049	8.178 342	232	0.099	8.160 319	488	0.149	8.128 665	781	0.199	8.080 736	1145	0.249	8.011 621	1640
0.050	8.178 105	237	0.100	8.159 826	493	0.150	8.127 878	787	0.200	8.079 583	1153	0.250	8.009 969	1652

Tafel VI.

$\log \{Q_1{}^1 n\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	8_n142 668	1	0.050	8_n142 016	27	0.100	8_n140 054	53	0.150	8_n136 765	80	0.200	8_n132 117	107
0.001	8_n142 667	0	0.051	8_n141 989	27	0.101	8_n140 001	53	0.151	8_n136 685	80	0.201	8_n132 010	107
0.002	8_n142 667	2	0.052	8_n141 962	27	0.102	8_n139 948	54	0.152	8_n136 605	81	0.202	8_n131 903	109
0.003	8_n142 665	2	0.053	8_n141 935	28	0.103	8_n139 894	54	0.153	8_n136 524	81	0.203	8_n131 794	108
0.004	8_n142 663	2	0.054	8_n141 907	28	0.104	8_n139 840	55	0.154	8_n136 443	81	0.204	8_n131 686	110
0.005	8_n142 661	3	0.055	8_n141 879	29	0.105	8_n139 785	55	0.155	8_n136 362	83	0.205	8_n131 576	110
0.006	8_n142 658	3	0.056	8_n141 850	30	0.106	8_n139 730	56	0.156	8_n136 279	82	0.206	8_n131 466	110
0.007	8_n142 655	4	0.057	8_n141 820	30	0.107	8_n139 674	57	0.157	8_n136 197	84	0.207	8_n131 356	111
0.008	8_n142 651	5	0.058	8_n141 790	30	0.108	8_n139 617	56	0.158	8_n136 113	84	0.208	8_n131 245	112
0.009	8_n142 646	5	0.059	8_n141 760	32	0.109	8_n139 561	58	0.159	8_n136 029	84	0.209	8_n131 133	112
0.010	8_n142 641	5	0.060	8_n141 728	31	0.110	8_n139 503	58	0.160	8_n135 945	85	0.210	8_n131 021	112
0.011	8_n142 636	6	0.061	8_n141 697	32	0.111	8_n139 445	59	0.161	8_n135 860	85	0.211	8_n130 909	114
0.012	8_n142 630	6	0.062	8_n141 665	33	0.112	8_n139 386	59	0.162	8_n135 775	86	0.212	8_n130 795	113
0.013	8_n142 624	7	0.063	8_n141 632	33	0.113	8_n139 327	59	0.163	8_n135 689	87	0.213	8_n130 682	115
0.014	8_n142 617	8	0.064	8_n141 599	34	0.114	8_n139 268	60	0.164	8_n135 602	87	0.214	8_n130 567	115
0.015	8_n142 609	8	0.065	8_n141 565	34	0.115	8_n139 208	61	0.165	8_n135 515	88	0.215	8_n130 452	115
0.016	8_n142 601	9	0.066	8_n141 531	35	0.116	8_n139 147	61	0.166	8_n135 427	88	0.216	8_n130 337	116
0.017	8_n142 592	9	0.067	8_n141 496	35	0.117	8_n139 086	62	0.167	8_n135 339	89	0.217	8_n130 221	117
0.018	8_n142 583	9	0.068	8_n141 461	36	0.118	8_n139 024	62	0.168	8_n135 250	89	0.218	8_n130 104	117
0.019	8_n142 574	11	0.069	8_n141 425	36	0.119	8_n138 962	63	0.169	8_n135 161	90	0.219	8_n129 987	118
0.020	8_n142 563	10	0.070	8_n141 389	37	0.120	8_n138 899	63	0.170	8_n135 071	91	0.220	8_n129 869	118
0.021	8_n142 553	12	0.071	8_n141 352	37	0.121	8_n138 836	64	0.171	8_n134 980	91	0.221	8_n129 751	119
0.022	8_n142 541	11	0.072	8_n141 315	38	0.122	8_n138 772	65	0.172	8_n134 889	91	0.222	8_n129 632	120
0.023	8_n142 530	13	0.073	8_n141 277	39	0.123	8_n138 707	65	0.173	8_n134 798	92	0.223	8_n129 512	120
0.024	8_n142 517	12	0.074	8_n141 238	39	0.124	8_n138 642	65	0.174	8_n134 706	93	0.224	8_n129 392	121
0.025	8_n142 505	14	0.075	8_n141 199	39	0.125	8_n138 577	66	0.175	8_n134 613	93	0.225	8_n129 271	121
0.026	8_n142 491	13	0.076	8_n141 160	40	0.126	8_n138 511	67	0.176	8_n134 520	94	0.226	8_n129 150	122
0.027	8_n142 478	15	0.077	8_n141 120	41	0.127	8_n138 444	67	0.177	8_n134 426	94	0.227	8_n129 028	122
0.028	8_n142 463	15	0.078	8_n141 079	41	0.128	8_n138 377	67	0.178	8_n134 332	95	0.228	8_n128 906	123
0.029	8_n142 448	15	0.079	8_n141 038	41	0.129	8_n138 310	69	0.179	8_n134 237	95	0.229	8_n128 783	123
0.030	8_n142 433	16	0.080	8_n140 997	42	0.130	8_n138 241	68	0.180	8_n134 142	96	0.230	8_n128 660	125
0.031	8_n142 417	16	0.081	8_n140 955	43	0.131	8_n138 173	70	0.181	8_n134 046	97	0.231	8_n128 535	124
0.032	8_n142 401	17	0.082	8_n140 912	43	0.132	8_n138 103	69	0.182	8_n133 949	97	0.232	8_n128 411	125
0.033	8_n142 384	18	0.083	8_n140 869	44	0.133	8_n138 034	71	0.183	8_n133 852	97	0.233	8_n128 286	126
0.034	8_n142 366	18	0.084	8_n140 825	44	0.134	8_n137 963	71	0.184	8_n133 755	98	0.234	8_n128 160	127
0.035	8_n142 348	18	0.085	8_n140 781	45	0.135	8_n137 892	71	0.185	8_n133 657	99	0.235	8_n128 033	127
0.036	8_n142 330	19	0.086	8_n140 736	45	0.136	8_n137 821	72	0.186	8_n133 558	99	0.236	8_n127 906	127
0.037	8_n142 311	20	0.087	8_n140 691	46	0.137	8_n137 749	72	0.187	8_n133 459	100	0.237	8_n127 779	128
0.038	8_n142 291	20	0.088	8_n140 645	46	0.138	8_n137 677	73	0.188	8_n133 359	101	0.238	8_n127 651	129
0.039	8_n142 271	21	0.089	8_n140 599	47	0.139	8_n137 604	74	0.189	8_n133 258	101	0.239	8_n127 523	129
0.040	8_n142 250	21	0.090	8_n140 552	48	0.140	8_n137 530	74	0.190	8_n133 157	101	0.240	8_n127 393	130
0.041	8_n142 229	21	0.091	8_n140 504	48	0.141	8_n137 456	75	0.191	8_n133 056	102	0.241	8_n127 263	130
0.042	8_n142 208	23	0.092	8_n140 456	48	0.142	8_n137 381	75	0.192	8_n132 954	103	0.242	8_n127 133	131
0.043	8_n142 185	22	0.093	8_n140 408	49	0.143	8_n137 306	76	0.193	8_n132 851	103	0.243	8_n127 002	132
0.044	8_n142 163	23	0.094	8_n140 359	50	0.144	8_n137 230	76	0.194	8_n132 748	104	0.244	8_n126 870	132
0.045	8_n142 140	24	0.095	8_n140 309	50	0.145	8_n137 154	77	0.195	8_n132 644	104	0.245	8_n126 738	133
0.046	8_n142 116	24	0.096	8_n140 259	50	0.146	8_n137 077	77	0.196	8_n132 540	105	0.246	8_n126 605	133
0.047	8_n142 092	25	0.097	8_n140 209	51	0.147	8_n137 000	78	0.197	8_n132 435	105	0.247	8_n126 472	134
0.048	8_n142 067	26	0.098	8_n140 158	52	0.148	8_n136 922	78	0.198	8_n132 330	106	0.248	8_n126 338	135
0.049	8_n142 041	25	0.099	8_n140 106	52	0.149	8_n136 844	79	0.199	8_n132 224	107	0.249	8_n126 203	135
0.050	8_n142 016		0.100	8_n140 054		0.150	8_n136 765		0.200	8_n132 117		0.250	8_n126 068	

Tafel VI.

$\log \{Q_1{}^5 (n)\}$

± n	Q	− Δ
0.000	7_n499 422	3
0.001	7_n499 419	7
0.002	7_n499 412	11
0.003	7_n499 401	16
0.004	7_n499 385	21
0.005	7_n499 364	25
0.006	7_n499 339	30
0.007	7_n499 309	34
0.008	7_n499 275	39
0.009	7_n499 236	44
0.010	7_n499 192	48
0.011	7_n499 144	52
0.012	7_n499 092	58
0.013	7_n499 034	62
0.014	7_n498 972	66
0.015	7_n498 906	71
0.016	7_n498 835	76
0.017	7_n498 759	80
0.018	7_n498 679	85
0.019	7_n498 594	90
0.020	7_n498 504	94
0.021	7_n498 410	99
0.022	7_n498 311	103
0.023	7_n498 208	108
0.024	7_n498 100	113
0.025	7_n497 987	117
0.026	7_n497 870	122
0.027	7_n497 748	126
0.028	7_n497 622	131
0.029	7_n497 491	136
0.030	7_n497 355	140
0.031	7_n497 215	145
0.032	7_n497 070	150
0.033	7_n496 920	154
0.034	7_n496 766	159
0.035	7_n496 607	164
0.036	7_n496 443	168
0.037	7_n496 275	173
0.038	7_n496 102	177
0.039	7_n495 925	182
0.040	7_n495 743	187
0.041	7_n495 556	192
0.042	7_n495 364	196
0.043	7_n495 168	201
0.044	7_n494 967	206
0.045	7_n494 761	210
0.046	7_n494 551	215
0.047	7_n494 336	220
0.048	7_n494 116	224
0.049	7_n493 892	229
0.050	7_n493 663	

± n	Q	− Δ
0.050	7_n493 663	234
0.051	7_n493 429	239
0.052	7_n493 190	243
0.053	7_n492 947	248
0.054	7_n492 699	253
0.055	7_n492 446	258
0.056	7_n492 188	262
0.057	7_n491 926	267
0.058	7_n491 659	272
0.059	7_n491 387	277
0.060	7_n491 110	281
0.061	7_n490 829	287
0.062	7_n490 542	291
0.063	7_n490 251	296
0.064	7_n489 955	300
0.065	7_n489 655	306
0.066	7_n489 349	310
0.067	7_n489 039	315
0.068	7_n488 724	321
0.069	7_n488 403	325
0.070	7_n488 078	329
0.071	7_n487 749	335
0.072	7_n487 414	340
0.073	7_n487 074	344
0.074	7_n486 730	349
0.075	7_n486 381	355
0.076	7_n486 026	359
0.077	7_n485 667	364
0.078	7_n485 303	369
0.079	7_n484 934	374
0.080	7_n484 560	379
0.081	7_n484 181	383
0.082	7_n483 798	389
0.083	7_n483 409	394
0.084	7_n483 015	399
0.085	7_n482 616	404
0.086	7_n482 212	409
0.087	7_n481 803	414
0.088	7_n481 389	419
0.089	7_n480 970	424
0.090	7_n480 546	429
0.091	7_n480 117	434
0.092	7_n479 683	439
0.093	7_n479 244	445
0.094	7_n478 799	449
0.095	7_n478 350	455
0.096	7_n477 895	459
0.097	7_n477 436	465
0.098	7_n476 971	470
0.099	7_n476 501	475
0.100	7_n476 026	

± n	Q	− Δ
0.100	7_n476 026	480
0.101	7_n475 546	486
0.102	7_n475 060	491
0.103	7_n474 569	496
0.104	7_n474 073	501
0.105	7_n473 572	506
0.106	7_n473 066	512
0.107	7_n472 554	517
0.108	7_n472 037	522
0.109	7_n471 515	528
0.110	7_n470 987	533
0.111	7_n470 454	538
0.112	7_n469 916	543
0.113	7_n469 373	549
0.114	7_n468 824	555
0.115	7_n468 269	559
0.116	7_n467 710	566
0.117	7_n467 144	570
0.118	7_n466 574	576
0.119	7_n465 998	582
0.120	7_n465 416	587
0.121	7_n464 829	592
0.122	7_n464 237	598
0.123	7_n463 639	603
0.124	7_n463 036	609
0.125	7_n462 427	615
0.126	7_n461 812	620
0.127	7_n461 192	626
0.128	7_n460 566	631
0.129	7_n459 935	637
0.130	7_n459 298	643
0.131	7_n458 655	649
0.132	7_n458 006	654
0.133	7_n457 352	659
0.134	7_n456 693	666
0.135	7_n456 027	671
0.136	7_n455 356	677
0.137	7_n454 679	682
0.138	7_n453 997	689
0.139	7_n453 308	695
0.140	7_n452 613	700
0.141	7_n451 913	706
0.142	7_n451 207	712
0.143	7_n450 495	718
0.144	7_n449 777	724
0.145	7_n449 053	730
0.146	7_n448 323	736
0.147	7_n447 587	742
0.148	7_n446 845	747
0.149	7_n446 098	754
0.150	7_n445 344	

± n	Q	− Δ
0.150	7_n445 344	760
0.151	7_n444 584	766
0.152	7_n443 818	773
0.153	7_n443 045	778
0.154	7_n442 267	785
0.155	7_n441 482	790
0.156	7_n440 692	797
0.157	7_n439 895	803
0.158	7_n439 092	810
0.159	7_n438 282	816
0.160	7_n437 466	822
0.161	7_n436 644	828
0.162	7_n435 816	835
0.163	7_n434 981	842
0.164	7_n434 139	847
0.165	7_n433 292	855
0.166	7_n432 437	860
0.167	7_n431 577	867
0.168	7_n430 710	874
0.169	7_n429 836	881
0.170	7_n428 955	886
0.171	7_n428 069	894
0.172	7_n427 175	900
0.173	7_n426 275	907
0.174	7_n425 368	914
0.175	7_n424 454	920
0.176	7_n423 534	928
0.177	7_n422 606	934
0.178	7_n421 672	941
0.179	7_n420 731	948
0.180	7_n419 783	954
0.181	7_n418 829	962
0.182	7_n417 867	969
0.183	7_n416 898	976
0.184	7_n415 922	982
0.185	7_n414 940	990
0.186	7_n413 950	997
0.187	7_n412 953	1005
0.188	7_n411 948	1011
0.189	7_n410 937	1019
0.190	7_n409 918	1026
0.191	7_n408 892	1033
0.192	7_n407 859	1041
0.193	7_n406 818	1048
0.194	7_n405 770	1055
0.195	7_n404 715	1063
0.196	7_n403 652	1071
0.197	7_n402 581	1078
0.198	7_n401 503	1086
0.199	7_n400 417	1093
0.200	7_n399 324	

± n	Q	− Δ
0.200	7_n399 324	1101
0.201	7_n398 223	1109
0.202	7_n397 114	1116
0.203	7_n395 998	1125
0.204	7_n394 873	1132
0.205	7_n393 741	1140
0.206	7_n392 601	1148
0.207	7_n391 453	1156
0.208	7_n390 297	1164
0.209	7_n389 133	1173
0.210	7_n387 960	1180
0.211	7_n386 780	1189
0.212	7_n385 591	1196
0.213	7_n384 395	1205
0.214	7_n383 190	1214
0.215	7_n381 976	1222
0.216	7_n380 754	1230
0.217	7_n379 524	1239
0.218	7_n378 285	1247
0.219	7_n377 038	1256
0.220	7_n375 782	1265
0.221	7_n374 517	1273
0.222	7_n373 244	1282
0.223	7_n371 962	1291
0.224	7_n370 671	1300
0.225	7_n369 371	1309
0.226	7_n368 062	1318
0.227	7_n366 744	1326
0.228	7_n365 418	1336
0.229	7_n364 082	1346
0.230	7_n362 736	1354
0.231	7_n361 382	1364
0.232	7_n360 018	1373
0.233	7_n358 645	1383
0.234	7_n357 262	1392
0.235	7_n355 870	1401
0.236	7_n354 469	1412
0.237	7_n353 057	1421
0.238	7_n351 636	1430
0.239	7_n350 206	1441
0.240	7_n348 765	1451
0.241	7_n347 314	1460
0.242	7_n345 854	1471
0.243	7_n344 383	1481
0.244	7_n342 902	1491
0.245	7_n341 411	1501
0.246	7_n339 910	1511
0.247	7_n338 399	1523
0.248	7_n336 876	1532
0.249	7_n335 344	1543
0.250	7_n333 801	

Tafel VI.

$\log \{Q_1{}^{6}(u)\}$.

$\pm u$	Q	$-\Delta$
0.000	7.267 606	0
0.001	7.267 606	1
0.002	7.267 605	2
0.003	7.267 603	2
0.004	7.267 601	3
0.005	7.267 598	3
0.006	7.267 595	5
0.007	7.267 590	4
0.008	7.267 586	6
0.009	7.267 580	6
0.010	7.267 574	7
0.011	7.267 567	8
0.012	7.267 559	8
0.013	7.267 551	9
0.014	7.267 542	9
0.015	7.267 533	10
0.016	7.267 523	11
0.017	7.267 512	11
0.018	7.267 501	12
0.019	7.267 489	13
0.020	7.267 476	13
0.021	7.267 463	14
0.022	7.267 449	15
0.023	7.267 434	15
0.024	7.267 419	16
0.025	7.267 403	17
0.026	7.267 386	17
0.027	7.267 369	18
0.028	7.267 351	19
0.029	7.267 332	19
0.030	7.267 313	20
0.031	7.267 293	20
0.032	7.267 273	21
0.033	7.267 252	22
0.034	7.267 230	23
0.035	7.267 207	23
0.036	7.267 184	24
0.037	7.267 160	24
0.038	7.267 136	25
0.039	7.267 111	26
0.040	7.267 085	26
0.041	7.267 059	28
0.042	7.267 031	27
0.043	7.267 004	29
0.044	7.266 975	29
0.045	7.266 946	29
0.046	7.266 917	31
0.047	7.266 886	31
0.048	7.266 855	31
0.049	7.266 824	32
0.050	7.266 792	

$\pm u$	Q	$-\Delta$
0.050	7.266 792	33
0.051	7.266 759	34
0.052	7.266 725	34
0.053	7.266 691	35
0.054	7.266 656	36
0.055	7.266 620	36
0.056	7.266 584	37
0.057	7.266 547	37
0.058	7.266 510	39
0.059	7.266 471	38
0.060	7.266 433	40
0.061	7.266 393	40
0.062	7.266 353	41
0.063	7.266 312	41
0.064	7.266 271	42
0.065	7.266 229	43
0.066	7.266 186	43
0.067	7.266 143	44
0.068	7.266 099	45
0.069	7.266 054	46
0.070	7.266 008	46
0.071	7.265 962	46
0.072	7.265 916	48
0.073	7.265 868	48
0.074	7.265 820	48
0.075	7.265 772	50
0.076	7.265 722	50
0.077	7.265 672	50
0.078	7.265 622	51
0.079	7.265 571	52
0.080	7.265 519	53
0.081	7.265 466	53
0.082	7.265 413	54
0.083	7.265 359	55
0.084	7.265 304	55
0.085	7.265 249	56
0.086	7.265 193	56
0.087	7.265 137	58
0.088	7.265 079	58
0.089	7.265 021	58
0.090	7.264 963	59
0.091	7.264 904	60
0.092	7.264 844	61
0.093	7.264 783	61
0.094	7.264 722	62
0.095	7.264 660	62
0.096	7.264 598	63
0.097	7.264 535	64
0.098	7.264 471	64
0.099	7.264 407	66
0.100	7.264 341	

$\pm u$	Q	$-\Delta$
0.100	7.264 341	65
0.101	7.264 276	67
0.102	7.264 209	67
0.103	7.264 142	68
0.104	7.264 074	68
0.105	7.264 006	69
0.106	7.263 937	70
0.107	7.263 867	70
0.108	7.263 797	71
0.109	7.263 726	72
0.110	7.263 654	72
0.111	7.263 582	73
0.112	7.263 509	74
0.113	7.263 435	74
0.114	7.263 361	76
0.115	7.263 285	75
0.116	7.263 210	77
0.117	7.263 133	77
0.118	7.263 056	77
0.119	7.262 979	79
0.120	7.262 900	79
0.121	7.262 821	80
0.122	7.262 741	80
0.123	7.262 661	81
0.124	7.262 580	82
0.125	7.262 498	82
0.126	7.262 416	83
0.127	7.262 333	84
0.128	7.262 249	84
0.129	7.262 165	85
0.130	7.262 080	86
0.131	7.261 994	86
0.132	7.261 908	87
0.133	7.261 821	88
0.134	7.261 733	88
0.135	7.261 645	89
0.136	7.261 556	90
0.137	7.261 466	90
0.138	7.261 376	91
0.139	7.261 285	92
0.140	7.261 193	92
0.141	7.261 101	93
0.142	7.261 008	94
0.143	7.260 914	95
0.144	7.260 819	95
0.145	7.260 724	95
0.146	7.260 629	97
0.147	7.260 532	97
0.148	7.260 435	98
0.149	7.260 337	98
0.150	7.260 239	

$\pm u$	Q	$-\Delta$
0.150	7.260 239	99
0.151	7.260 140	100
0.152	7.260 040	100
0.153	7.259 940	101
0.154	7.259 839	102
0.155	7.259 737	103
0.156	7.259 634	103
0.157	7.259 531	104
0.158	7.259 427	104
0.159	7.259 323	105
0.160	7.259 218	106
0.161	7.259 112	107
0.162	7.259 005	107
0.163	7.258 898	108
0.164	7.258 790	108
0.165	7.258 682	109
0.166	7.258 573	110
0.167	7.258 463	111
0.168	7.258 352	111
0.169	7.258 241	112
0.170	7.258 129	112
0.171	7.258 017	114
0.172	7.257 903	114
0.173	7.257 789	114
0.174	7.257 675	116
0.175	7.257 559	116
0.176	7.257 443	116
0.177	7.257 327	118
0.178	7.257 209	118
0.179	7.257 091	118
0.180	7.256 973	120
0.181	7.256 853	120
0.182	7.256 733	121
0.183	7.256 612	121
0.184	7.256 491	122
0.185	7.256 369	123
0.186	7.256 246	123
0.187	7.256 123	125
0.188	7.255 998	125
0.189	7.255 873	125
0.190	7.255 748	126
0.191	7.255 622	127
0.192	7.255 495	128
0.193	7.255 367	128
0.194	7.255 239	129
0.195	7.255 110	130
0.196	7.254 980	130
0.197	7.254 850	131
0.198	7.254 719	132
0.199	7.254 587	132
0.200	7.254 455	

$\pm u$	Q	$-\Delta$
0.200	7.254 455	133
0.201	7.254 322	134
0.202	7.254 188	135
0.203	7.254 053	135
0.204	7.253 918	136
0.205	7.253 782	136
0.206	7.253 646	137
0.207	7.253 509	138
0.208	7.253 371	139
0.209	7.253 232	139
0.210	7.253 093	140
0.211	7.252 953	141
0.212	7.252 812	141
0.213	7.252 671	143
0.214	7.252 528	142
0.215	7.252 386	144
0.216	7.252 242	144
0.217	7.252 098	145
0.218	7.251 953	145
0.219	7.251 808	147
0.220	7.251 661	147
0.221	7.251 514	147
0.222	7.251 367	149
0.223	7.251 218	149
0.224	7.251 069	150
0.225	7.250 919	150
0.226	7.250 769	151
0.227	7.250 618	152
0.228	7.250 466	153
0.229	7.250 313	153
0.230	7.250 160	154
0.231	7.250 006	155
0.232	7.249 851	155
0.233	7.249 696	156
0.234	7.249 540	157
0.235	7.249 383	157
0.236	7.249 226	158
0.237	7.249 068	159
0.238	7.248 909	160
0.239	7.248 749	160
0.240	7.248 589	161
0.241	7.248 428	162
0.242	7.248 266	162
0.243	7.248 104	164
0.244	7.247 940	163
0.245	7.247 777	165
0.246	7.247 612	165
0.247	7.247 447	166
0.248	7.247 281	167
0.249	7.247 114	167
0.250	7.246 947	

Tafel VI.

$\log\{Q_1{}^7(n)\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	6.837 656	3	0.050	6.831 993	230	0.100	6.814 670	471	0.150	6.784 599	744	0.200	6.739 658	1073
0.001	6.837 653	6	0.051	6.831 763	234	0.101	6.814 199	477	0.151	6.783 855	750	0.201	6.738 585	1080
0.002	6.837 647	12	0.052	6.831 529	239	0.102	6.813 722	481	0.152	6.783 105	755	0.202	6.737 505	1087
0.003	6.837 635	15	0.053	6.831 290	244	0.103	6.813 241	487	0.153	6.782 350	762	0.203	6.736 418	1095
0.004	6.837 620	21	0.054	6.831 046	249	0.104	6.812 754	492	0.154	6.781 588	768	0.204	6.735 323	1103
0.005	6.837 599	25	0.055	6.830 797	253	0.105	6.812 262	497	0.155	6.780 820	773	0.205	6.734 220	1110
0.006	6.837 574	29	0.056	6.830 544	258	0.106	6.811 765	502	0.156	6.780 047	780	0.206	6.733 110	1118
0.007	6.837 545	34	0.057	6.830 286	262	0.107	6.811 263	507	0.157	6.779 267	786	0.207	6.731 992	1126
0.008	6.837 511	38	0.058	6.830 024	268	0.108	6.810 756	512	0.158	6.778 481	791	0.208	6.730 866	1133
0.009	6.837 473	43	0.059	6.829 756	272	0.109	6.810 244	518	0.159	6.777 690	798	0.209	6.729 733	1141
0.010	6.837 430	47	0.060	6.829 484	276	0.110	6.809 726	523	0.160	6.776 892	804	0.210	6.728 592	1149
0.011	6.837 383	52	0.061	6.829 208	282	0.111	6.809 203	528	0.161	6.776 088	810	0.211	6.727 443	1156
0.012	6.837 331	56	0.062	6.828 926	286	0.112	6.808 675	533	0.162	6.775 278	817	0.212	6.726 287	1165
0.013	6.837 275	61	0.063	6.828 640	290	0.113	6.808 142	538	0.163	6.774 461	822	0.213	6.725 122	1172
0.014	6.837 214	66	0.064	6.828 350	296	0.114	6.807 604	544	0.164	6.773 639	829	0.214	6.723 950	1181
0.015	6.837 148	70	0.065	6.828 054	300	0.115	6.807 060	549	0.165	6.772 810	835	0.215	6.722 769	1188
0.016	6.837 078	74	0.066	6.827 754	305	0.116	6.806 511	554	0.166	6.771 975	841	0.216	6.721 581	1196
0.017	6.837 004	79	0.067	6.827 449	310	0.117	6.805 957	560	0.167	6.771 134	848	0.217	6.720 385	1205
0.018	6.836 925	84	0.068	6.827 139	314	0.118	6.805 397	564	0.168	6.770 286	854	0.218	6.719 180	1213
0.019	6.836 841	88	0.069	6.826 825	320	0.119	6.804 833	571	0.169	6.769 432	860	0.219	6.717 967	1221
0.020	6.836 753	92	0.070	6.826 505	324	0.120	6.804 262	575	0.170	6.768 572	866	0.220	6.716 746	1229
0.021	6.836 661	97	0.071	6.826 181	328	0.121	6.803 687	581	0.171	6.767 706	874	0.221	6.715 517	1237
0.022	6.836 564	102	0.072	6.825 853	334	0.122	6.803 106	586	0.172	6.766 832	879	0.222	6.714 280	1246
0.023	6.836 462	106	0.073	6.825 519	338	0.123	6.802 520	592	0.173	6.765 953	886	0.223	6.713 034	1254
0.024	6.836 356	111	0.074	6.825 181	343	0.124	6.801 928	597	0.174	6.765 067	893	0.224	6.711 780	1263
0.025	6.836 245	115	0.075	6.824 838	348	0.125	6.801 331	602	0.175	6.764 174	899	0.225	6.710 517	1272
0.026	6.836 130	120	0.076	6.824 490	353	0.126	6.800 729	608	0.176	6.763 275	905	0.226	6.709 245	1279
0.027	6.836 010	124	0.077	6.824 137	358	0.127	6.800 121	613	0.177	6.762 370	912	0.227	6.707 966	1289
0.028	6.835 886	129	0.078	6.823 779	362	0.128	6.799 508	619	0.178	6.761 458	919	0.228	6.706 677	1297
0.029	6.835 757	134	0.079	6.823 417	368	0.129	6.798 889	624	0.179	6.760 539	926	0.229	6.705 380	1306
0.030	6.835 623	138	0.080	6.823 049	372	0.130	6.798 265	630	0.180	6.759 613	932	0.230	6.704 074	1314
0.031	6.835 485	142	0.081	6.822 677	377	0.131	6.797 635	635	0.181	6.758 681	939	0.231	6.702 760	1324
0.032	6.835 343	147	0.082	6.822 300	382	0.132	6.797 000	641	0.182	6.757 742	945	0.232	6.701 436	1332
0.033	6.835 196	152	0.083	6.821 918	387	0.133	6.796 359	646	0.183	6.756 797	953	0.233	6.700 104	1342
0.034	6.835 044	156	0.084	6.821 531	391	0.134	6.795 713	652	0.184	6.755 844	959	0.234	6.698 762	1350
0.035	6.834 888	161	0.085	6.821 140	397	0.135	6.795 061	658	0.185	6.754 885	966	0.235	6.697 412	1360
0.036	6.834 727	165	0.086	6.820 743	402	0.136	6.794 403	663	0.186	6.753 919	973	0.236	6.696 052	1368
0.037	6.834 562	170	0.087	6.820 341	406	0.137	6.793 740	669	0.187	6.752 946	979	0.237	6.694 684	1378
0.038	6.834 392	175	0.088	6.819 935	411	0.138	6.793 071	675	0.188	6.751 967	987	0.238	6.693 306	1388
0.039	6.834 217	179	0.089	6.819 524	417	0.139	6.792 396	680	0.189	6.750 980	994	0.239	6.691 918	1396
0.040	6.834 038	184	0.090	6.819 107	421	0.140	6.791 716	685	0.190	6.749 986	1000	0.240	6.690 522	1406
0.041	6.833 854	188	0.091	6.818 686	426	0.141	6.791 031	692	0.191	6.748 986	1008	0.241	6.689 116	1415
0.042	6.833 666	193	0.092	6.818 260	431	0.142	6.790 339	697	0.192	6.747 978	1015	0.242	6.687 701	1425
0.043	6.833 473	198	0.093	6.817 829	436	0.143	6.789 642	703	0.193	6.746 963	1022	0.243	6.686 276	1435
0.044	6.833 275	202	0.094	6.817 393	442	0.144	6.788 939	709	0.194	6.745 941	1029	0.244	6.684 841	1444
0.045	6.833 073	207	0.095	6.816 951	446	0.145	6.788 230	715	0.195	6.744 912	1036	0.245	6.683 397	1454
0.046	6.832 866	211	0.096	6.816 505	451	0.146	6.787 515	720	0.196	6.743 876	1044	0.246	6.681 943	1463
0.047	6.832 655	216	0.097	6.816 054	456	0.147	6.786 795	726	0.197	6.742 832	1050	0.247	6.680 480	1474
0.048	6.832 439	221	0.098	6.815 598	462	0.148	6.786 069	732	0.198	6.741 782	1058	0.248	6.679 006	1483
0.049	6.832 218	225	0.099	6.815 136	466	0.149	6.785 337	738	0.199	6.740 724	1066	0.249	6.677 523	1494
0.050	6.831 993		0.100	6.814 670		0.150	6.784 599		0.200	6.739 658		0.250	6.676 029	

Tafel VI.

$\log \{Q_1^{S}(n)\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	6_n473 661	1	0.050	6_n472 774	36	0.100	6_n470 107	72	0.150	6_n465 644	108	0.200	6_n459 356	144
0.001	6_n473 660	1	0.051	6_n472 738	37	0.101	6_n470 035	72	0.151	6_n465 536	109	0.201	6_n459 212	146
0.002	6_n473 659	1	0.052	6_n472 701	37	0.102	6_n469 963	73	0.152	6_n465 427	109	0.202	6_n459 066	146
0.003	6_n473 658	3	0.053	6_n472 664	38	0.103	6_n469 890	74	0.153	6_n465 318	110	0.203	6_n458 920	147
0.004	6_n473 655	3	0.054	6_n472 626	39	0.104	6_n469 816	74	0.154	6_n465 208	110	0.204	6_n458 773	147
0.005	6_n473 652	4	0.055	6_n472 587	39	0.105	6_n469 742	76	0.155	6_n465 098	112	0.205	6_n458 626	149
0.006	6_n473 648	5	0.056	6_n472 548	40	0.106	6_n469 666	76	0.156	6_n464 986	112	0.206	6_n458 477	149
0.007	6_n473 643	5	0.057	6_n472 508	41	0.107	6_n469 590	76	0.157	6_n464 874	113	0.207	6_n458 328	149
0.008	6_n473 638	6	0.058	6_n472 467	42	0.108	6_n469 514	77	0.158	6_n464 761	113	0.208	6_n458 179	151
0.009	6_n473 632	7	0.059	6_n472 425	42	0.109	6_n469 437	78	0.159	6_n464 648	115	0.209	6_n458 028	151
0.010	6_n473 625	7	0.060	6_n472 383	43	0.110	6_n469 359	79	0.160	6_n464 533	115	0.210	6_n457 877	152
0.011	6_n473 618	8	0.061	6_n472 340	44	0.111	6_n469 280	80	0.161	6_n464 418	116	0.211	6_n457 725	153
0.012	6_n473 610	9	0.062	6_n472 296	44	0.112	6_n469 200	80	0.162	6_n464 302	116	0.212	6_n457 572	154
0.013	6_n473 601	10	0.063	6_n472 252	45	0.113	6_n469 120	81	0.163	6_n464 186	117	0.213	6_n457 418	154
0.014	6_n473 591	10	0.064	6_n472 207	46	0.114	6_n469 039	82	0.164	6_n464 069	118	0.214	6_n457 264	155
0.015	6_n473 581	11	0.065	6_n472 161	47	0.115	6_n468 957	82	0.165	6_n463 951	119	0.215	6_n457 109	156
0.016	6_n473 570	12	0.066	6_n472 114	47	0.116	6_n468 875	83	0.166	6_n463 832	120	0.216	6_n456 953	157
0.017	6_n473 558	12	0.067	6_n472 067	48	0.117	6_n468 792	84	0.167	6_n463 712	120	0.217	6_n456 796	157
0.018	6_n473 546	13	0.068	6_n472 019	48	0.118	6_n468 708	84	0.168	6_n463 592	121	0.218	6_n456 639	158
0.019	6_n473 533	14	0.069	6_n471 971	50	0.119	6_n468 624	86	0.169	6_n463 471	121	0.219	6_n456 481	159
0.020	6_n473 519	14	0.070	6_n471 921	50	0.120	6_n468 538	86	0.170	6_n463 350	123	0.220	6_n456 322	159
0.021	6_n473 505	16	0.071	6_n471 871	51	0.121	6_n468 452	86	0.171	6_n463 227	123	0.221	6_n456 163	161
0.022	6_n473 489	16	0.072	6_n471 820	51	0.122	6_n468 366	88	0.172	6_n463 104	124	0.222	6_n456 002	161
0.023	6_n473 473	16	0.073	6_n471 769	53	0.123	6_n468 278	88	0.173	6_n462 980	124	0.223	6_n455 841	162
0.024	6_n473 457	18	0.074	6_n471 716	53	0.124	6_n468 190	89	0.174	6_n462 856	126	0.224	6_n455 679	162
0.025	6_n473 439	18	0.075	6_n471 663	53	0.125	6_n468 101	89	0.175	6_n462 730	126	0.225	6_n455 517	164
0.026	6_n473 421	19	0.076	6_n471 610	55	0.126	6_n468 012	91	0.176	6_n462 604	127	0.226	6_n455 353	164
0.027	6_n473 402	19	0.077	6_n471 555	55	0.127	6_n467 921	91	0.177	6_n462 477	127	0.227	6_n455 189	165
0.028	6_n473 383	20	0.078	6_n471 500	56	0.128	6_n467 830	92	0.178	6_n462 350	129	0.228	6_n455 024	165
0.029	6_n473 363	21	0.079	6_n471 444	56	0.129	6_n467 738	92	0.179	6_n462 221	129	0.229	6_n454 859	167
0.030	6_n473 342	22	0.080	6_n471 388	57	0.130	6_n467 646	93	0.180	6_n462 092	129	0.230	6_n454 692	167
0.031	6_n473 320	22	0.081	6_n471 331	58	0.131	6_n467 553	94	0.181	6_n461 963	131	0.231	6_n454 525	168
0.032	6_n473 298	24	0.082	6_n471 273	59	0.132	6_n467 459	95	0.182	6_n461 832	131	0.232	6_n454 357	168
0.033	6_n473 274	23	0.083	6_n471 214	59	0.133	6_n467 364	95	0.183	6_n461 701	132	0.233	6_n454 189	170
0.034	6_n473 251	25	0.084	6_n471 155	61	0.134	6_n467 269	96	0.184	6_n461 569	133	0.234	6_n454 019	170
0.035	6_n473 226	25	0.085	6_n471 094	60	0.135	6_n467 173	97	0.185	6_n461 436	133	0.235	6_n453 849	171
0.036	6_n473 201	26	0.086	6_n471 034	62	0.136	6_n467 076	98	0.186	6_n461 303	134	0.236	6_n453 678	172
0.037	6_n473 175	27	0.087	6_n470 972	62	0.137	6_n466 978	98	0.187	6_n461 169	135	0.237	6_n453 506	172
0.038	6_n473 148	27	0.088	6_n470 910	63	0.138	6_n466 880	99	0.188	6_n461 034	136	0.238	6_n453 334	173
0.039	6_n473 121	28	0.089	6_n470 847	64	0.139	6_n466 781	100	0.189	6_n460 898	136	0.239	6_n453 161	174
0.040	6_n473 093	29	0.090	6_n470 783	64	0.140	6_n466 681	100	0.190	6_n460 762	138	0.240	6_n452 987	175
0.041	6_n473 064	29	0.091	6_n470 719	65	0.141	6_n466 581	102	0.191	6_n460 624	138	0.241	6_n452 812	176
0.042	6_n473 035	30	0.092	6_n470 654	66	0.142	6_n466 479	101	0.192	6_n460 486	138	0.242	6_n452 636	176
0.043	6_n473 005	31	0.093	6_n470 588	67	0.143	6_n466 378	103	0.193	6_n460 348	140	0.243	6_n452 460	177
0.044	6_n472 974	32	0.094	6_n470 521	67	0.144	6_n466 275	103	0.194	6_n460 208	140	0.244	6_n452 283	178
0.045	6_n472 942	32	0.095	6_n470 454	68	0.145	6_n466 172	105	0.195	6_n460 068	141	0.245	6_n452 105	178
0.046	6_n472 910	33	0.096	6_n470 386	69	0.146	6_n466 067	104	0.196	6_n459 927	141	0.246	6_n451 927	180
0.047	6_n472 877	34	0.097	6_n470 317	69	0.147	6_n465 963	106	0.197	6_n459 786	143	0.247	6_n451 747	180
0.048	6_n472 843	34	0.098	6_n470 248	70	0.148	6_n465 857	106	0.198	6_n459 643	143	0.248	6_n451 567	181
0.049	6_n472 809	35	0.099	6_n470 178	71	0.149	6_n465 751	107	0.199	6_n459 500	144	0.249	6_n451 386	181
0.050	6_n472 774		0.100	6_n470 107		0.150	6_n465 644		0.200	6_n459 356		0.250	6_n451 205	

Tafel VI.

$\log \{Q_1{}^0\, n\}$.

± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ
0.000	6,,188 807	2	0.050	6,,183 202	228	0.100	6,,166 065	467	0.150	6,,136 353	734	0.200	6,,092 041	1056
0.001	6,,188 805	7	0.051	6,,182 974	232	0.101	6,,165 598	471	0.151	6,,135 619	740	0.201	6,,090 985	1064
0.002	6,,188 798	11	0.052	6,,182 742	237	0.102	6,,165 127	476	0.152	6,,134 879	746	0.202	6,,089 921	1070
0.003	6,,188 787	16	0.053	6,,182 505	241	0.103	6,,164 651	481	0.153	6,,134 133	752	0.203	6,,088 851	1079
0.004	6,,188 771	20	0.054	6,,182 264	246	0.104	6,,164 170	486	0.154	6,,133 381	758	0.204	6,,087 772	1085
0.005	6,,188 751	25	0.055	6,,182 018	250	0.105	6,,163 684	492	0.155	6,,132 623	763	0.205	6,,086 687	1093
0.006	6,,188 726	29	0.056	6,,181 768	256	0.106	6,,163 192	496	0.156	6,,131 860	770	0.206	6,,085 594	1100
0.007	6,,188 697	33	0.057	6,,181 512	259	0.107	6,,162 696	501	0.157	6,,131 090	775	0.207	6,,084 494	1108
0.008	6,,188 664	38	0.058	6,,181 253	265	0.108	6,,162 195	507	0.158	6,,130 315	781	0.208	6,,083 386	1115
0.009	6,,188 626	42	0.059	6,,180 988	269	0.109	6,,161 688	512	0.159	6,,129 534	788	0.209	6,,082 271	1123
0.010	6,,188 584	47	0.060	6,,180 719	274	0.110	6,,161 176	516	0.160	6,,128 746	793	0.210	6,,081 148	1130
0.011	6,,188 537	52	0.061	6,,180 445	278	0.111	6,,160 660	522	0.161	6,,127 953	800	0.211	6,,080 018	1139
0.012	6,,188 485	55	0.062	6,,180 167	283	0.112	6,,160 138	527	0.162	6,,127 153	805	0.212	6,,078 879	1145
0.013	6,,188 430	61	0.063	6,,179 884	288	0.113	6,,159 611	533	0.163	6,,126 348	812	0.213	6,,077 734	1154
0.014	6,,188 369	65	0.064	6,,179 596	292	0.114	6,,159 078	537	0.164	6,,125 536	817	0.214	6,,076 580	1161
0.015	6,,188 304	69	0.065	6,,179 304	297	0.115	6,,158 541	543	0.165	6,,124 719	824	0.215	6,,075 419	1169
0.016	6,,188 235	73	0.066	6,,179 007	302	0.116	6,,157 998	547	0.166	6,,123 895	830	0.216	6,,074 250	1177
0.017	6,,188 162	79	0.067	6,,178 705	307	0.117	6,,157 451	553	0.167	6,,123 065	836	0.217	6,,073 073	1185
0.018	6,,188 083	82	0.068	6,,178 398	311	0.118	6,,156 898	559	0.168	6,,122 229	843	0.218	6,,071 888	1192
0.019	6,,188 001	87	0.069	6,,178 087	316	0.119	6,,156 339	563	0.169	6,,121 386	848	0.219	6,,070 696	1201
0.020	6,,187 914	92	0.070	6,,177 771	320	0.120	6,,155 776	569	0.170	6,,120 538	855	0.220	6,,069 495	1209
0.021	6,,187 822	96	0.071	6,,177 451	326	0.121	6,,155 207	574	0.171	6,,119 683	861	0.221	6,,068 286	1217
0.022	6,,187 726	101	0.072	6,,177 125	330	0.122	6,,154 633	579	0.172	6,,118 822	868	0.222	6,,067 069	1224
0.023	6,,187 625	105	0.073	6,,176 795	334	0.123	6,,154 054	585	0.173	6,,117 954	874	0.223	6,,065 845	1234
0.024	6,,187 520	110	0.074	6,,176 461	340	0.124	6,,153 469	590	0.174	6,,117 080	880	0.224	6,,064 611	1241
0.025	6,,187 410	114	0.075	6,,176 121	344	0.125	6,,152 879	595	0.175	6,,116 200	886	0.225	6,,063 370	1250
0.026	6,,187 296	118	0.076	6,,175 777	349	0.126	6,,152 284	601	0.176	6,,115 314	893	0.226	6,,062 120	1258
0.027	6,,187 178	123	0.077	6,,175 428	354	0.127	6,,151 683	606	0.177	6,,114 421	899	0.227	6,,060 862	1266
0.028	6,,187 055	128	0.078	6,,175 074	359	0.128	6,,151 077	611	0.178	6,,113 522	906	0.228	6,,059 596	1275
0.029	6,,186 927	132	0.079	6,,174 715	363	0.129	6,,150 466	617	0.179	6,,112 616	913	0.229	6,,058 321	1283
0.030	6,,186 795	137	0.080	6,,174 352	368	0.130	6,,149 849	622	0.180	6,,111 703	919	0.230	6,,057 038	1292
0.031	6,,186 658	141	0.081	6,,173 984	373	0.131	6,,149 227	627	0.181	6,,110 784	925	0.231	6,,055 746	1300
0.032	6,,186 517	145	0.082	6,,173 611	378	0.132	6,,148 600	633	0.182	6,,109 859	932	0.232	6,,054 446	1309
0.033	6,,186 372	150	0.083	6,,173 233	383	0.133	6,,147 967	639	0.183	6,,108 927	939	0.233	6,,053 137	1318
0.034	6,,186 222	155	0.084	6,,172 850	387	0.134	6,,147 328	644	0.184	6,,107 988	945	0.234	6,,051 819	1326
0.035	6,,186 067	159	0.085	6,,172 463	392	0.135	6,,146 684	650	0.185	6,,107 043	952	0.235	6,,050 493	1336
0.036	6,,185 908	164	0.086	6,,172 071	397	0.136	6,,146 034	655	0.186	6,,106 091	959	0.236	6,,049 157	1344
0.037	6,,185 744	168	0.087	6,,171 674	402	0.137	6,,145 379	660	0.187	6,,105 132	966	0.237	6,,047 813	1353
0.038	6,,185 576	173	0.088	6,,171 272	407	0.138	6,,144 719	666	0.188	6,,104 166	972	0.238	6,,046 460	1362
0.039	6,,185 403	177	0.089	6,,170 865	412	0.139	6,,144 053	672	0.189	6,,103 194	979	0.239	6,,045 098	1371
0.040	6,,185 226	182	0.090	6,,170 453	417	0.140	6,,143 381	677	0.190	6,,102 215	986	0.240	6,,043 727	1380
0.041	6,,185 044	187	0.091	6,,170 036	421	0.141	6,,142 704	683	0.191	6,,101 229	993	0.241	6,,042 347	1390
0.042	6,,184 857	191	0.092	6,,169 615	427	0.142	6,,142 021	689	0.192	6,,100 236	1000	0.242	6,,040 957	1398
0.043	6,,184 666	195	0.093	6,,169 188	431	0.143	6,,141 332	694	0.193	6,,099 236	1007	0.243	6,,039 559	1408
0.044	6,,184 471	200	0.094	6,,168 757	437	0.144	6,,140 638	700	0.194	6,,098 229	1013	0.244	6,,038 151	1417
0.045	6,,184 271	205	0.095	6,,168 320	441	0.145	6,,139 938	706	0.195	6,,097 216	1021	0.245	6,,036 734	1427
0.046	6,,184 066	209	0.096	6,,167 879	446	0.146	6,,139 232	711	0.196	6,,096 195	1028	0.246	6,,035 307	1436
0.047	6,,183 857	214	0.097	6,,167 433	451	0.147	6,,138 521	717	0.197	6,,095 167	1035	0.247	6,,033 871	1446
0.048	6,,183 643	218	0.098	6,,166 982	456	0.148	6,,137 804	722	0.198	6,,094 132	1042	0.248	6,,032 425	1455
0.049	6,,183 425	223	0.099	6,,166 526	461	0.149	6,,137 082	729	0.199	6,,093 090	1049	0.249	6,,030 970	1465
0.050	6,,183 202		0.100	6,,166 065		0.150	6,,136 353		0.200	6,,092 041		0.250	6,,029 505	

Tafel VI.

$\log \{Q_1^{10}\, n\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	5.723 538	0	0.050	5.722 610	37	0.100	5.719 821	74	0.150	5.715 156	113	0.200	5.708 586	151
0.001	5.723 538	1	0.051	5.722 573	39	0.101	5.719 747	76	0.151	5.715 043	113	0.201	5.708 435	152
0.002	5.723 537	2	0.052	5.722 534	39	0.102	5.719 671	76	0.152	5.714 930	115	0.202	5.708 283	153
0.003	5.723 535	3	0.053	5.722 495	39	0.103	5.719 595	77	0.153	5.714 815	114	0.203	5.708 130	153
0.004	5.723 532	3	0.054	5.722 456	41	0.104	5.719 518	78	0.154	5.714 701	116	0.204	5.707 977	154
0.005	5.723 529	4	0.055	5.722 415	41	0.105	5.719 440	79	0.155	5.714 585	117	0.205	5.707 823	155
0.006	5.723 525	5	0.056	5.722 374	42	0.106	5.719 361	79	0.156	5.714 468	117	0.206	5.707 668	156
0.007	5.723 520	6	0.057	5.722 332	43	0.107	5.719 282	80	0.157	5.714 351	118	0.207	5.707 512	156
0.008	5.723 514	6	0.058	5.722 289	43	0.108	5.719 202	81	0.158	5.714 233	118	0.208	5.707 356	158
0.009	5.723 508	7	0.059	5.722 246	44	0.109	5.719 121	82	0.159	5.714 115	120	0.209	5.707 198	158
0.010	5.723 501	8	0.060	5.722 202	45	0.110	5.719 039	82	0.160	5.713 995	120	0.210	5.707 040	159
0.011	5.723 493	8	0.061	5.722 157	46	0.111	5.718 957	83	0.161	5.713 875	121	0.211	5.706 881	159
0.012	5.723 485	10	0.062	5.722 111	46	0.112	5.718 874	84	0.162	5.713 754	122	0.212	5.706 722	161
0.013	5.723 475	10	0.063	5.722 065	48	0.113	5.718 790	85	0.163	5.713 632	123	0.213	5.706 561	161
0.014	5.723 465	10	0.064	5.722 017	48	0.114	5.718 705	85	0.164	5.713 509	123	0.214	5.706 400	162
0.015	5.723 455	12	0.065	5.721 969	48	0.115	5.718 620	86	0.165	5.713 386	124	0.215	5.706 238	163
0.016	5.723 443	12	0.066	5.721 921	50	0.116	5.718 534	87	0.166	5.713 262	125	0.216	5.706 075	163
0.017	5.723 431	13	0.067	5.721 871	50	0.117	5.718 447	88	0.167	5.713 137	125	0.217	5.705 912	164
0.018	5.723 418	14	0.068	5.721 821	51	0.118	5.718 359	88	0.168	5.713 012	127	0.218	5.705 748	166
0.019	5.723 404	14	0.069	5.721 770	51	0.119	5.718 271	89	0.169	5.712 885	127	0.219	5.705 582	165
0.020	5.723 390	16	0.070	5.721 719	53	0.120	5.718 182	90	0.170	5.712 758	128	0.220	5.705 417	167
0.021	5.723 374	16	0.071	5.721 666	53	0.121	5.718 092	91	0.171	5.712 630	128	0.221	5.705 250	168
0.022	5.723 358	16	0.072	5.721 613	54	0.122	5.718 001	91	0.172	5.712 502	130	0.222	5.705 082	168
0.023	5.723 342	18	0.073	5.721 559	54	0.123	5.717 910	93	0.173	5.712 372	130	0.223	5.704 914	169
0.024	5.723 324	18	0.074	5.721 505	56	0.124	5.717 817	92	0.174	5.712 242	131	0.224	5.704 745	170
0.025	5.723 306	19	0.075	5.721 449	56	0.125	5.717 725	94	0.175	5.712 111	132	0.225	5.704 575	170
0.026	5.723 287	19	0.076	5.721 393	57	0.126	5.717 631	95	0.176	5.711 979	132	0.226	5.704 405	172
0.027	5.723 268	21	0.077	5.721 336	57	0.127	5.717 536	95	0.177	5.711 847	134	0.227	5.704 233	172
0.028	5.723 247	21	0.078	5.721 279	59	0.128	5.717 441	96	0.178	5.711 713	134	0.228	5.704 061	173
0.029	5.723 226	22	0.079	5.721 220	59	0.129	5.717 345	96	0.179	5.711 579	135	0.229	5.703 888	174
0.030	5.723 204	22	0.080	5.721 161	60	0.130	5.717 240	98	0.180	5.711 444	135	0.230	5.703 714	174
0.031	5.723 182	24	0.081	5.721 101	60	0.131	5.717 151	98	0.181	5.711 309	137	0.231	5.703 540	175
0.032	5.723 158	24	0.082	5.721 041	62	0.132	5.717 053	99	0.182	5.711 172	137	0.232	5.703 365	177
0.033	5.723 134	25	0.083	5.720 979	62	0.133	5.716 954	100	0.183	5.711 035	138	0.233	5.703 188	176
0.034	5.723 109	25	0.084	5.720 917	63	0.134	5.716 854	100	0.184	5.710 897	138	0.234	5.703 012	178
0.035	5.723 084	27	0.085	5.720 854	63	0.135	5.716 754	101	0.185	5.710 759	140	0.235	5.702 834	179
0.036	5.723 057	27	0.086	5.720 791	65	0.136	5.716 653	102	0.186	5.710 619	140	0.236	5.702 655	179
0.037	5.723 030	28	0.087	5.720 726	65	0.137	5.716 551	103	0.187	5.710 479	141	0.237	5.702 476	180
0.038	5.723 002	28	0.088	5.720 661	66	0.138	5.716 448	104	0.188	5.710 338	142	0.238	5.702 296	181
0.039	5.722 974	30	0.089	5.720 595	66	0.139	5.716 344	104	0.189	5.710 196	142	0.239	5.702 115	182
0.040	5.722 944	30	0.090	5.720 529	68	0.140	5.716 240	105	0.190	5.710 054	143	0.240	5.701 933	182
0.041	5.722 914	31	0.091	5.720 461	68	0.141	5.716 135	106	0.191	5.709 911	145	0.241	5.701 751	183
0.042	5.722 883	31	0.092	5.720 393	69	0.142	5.716 029	106	0.192	5.709 766	144	0.242	5.701 568	184
0.043	5.722 852	32	0.093	5.720 324	69	0.143	5.715 923	108	0.193	5.709 622	146	0.243	5.701 384	185
0.044	5.722 820	33	0.094	5.720 255	71	0.144	5.715 815	108	0.194	5.709 476	146	0.244	5.701 199	186
0.045	5.722 787	34	0.095	5.720 184	71	0.145	5.715 707	108	0.195	5.709 330	148	0.245	5.701 013	186
0.046	5.722 753	35	0.096	5.720 113	71	0.146	5.715 599	110	0.196	5.709 182	148	0.246	5.700 827	187
0.047	5.722 718	35	0.097	5.720 042	73	0.147	5.715 489	110	0.197	5.709 034	148	0.247	5.700 640	188
0.048	5.722 683	36	0.098	5.719 969	73	0.148	5.715 379	111	0.198	5.708 886	150	0.248	5.700 452	189
0.049	5.722 647	37	0.099	5.719 896	75	0.149	5.715 268	112	0.199	5.708 736	150	0.249	5.700 263	190
0.050	5.722 610		0.100	5.719 821		0.150	5.715 156		0.200	5.708 586		0.250	5.700 073	

Tafel VII.

$\log \{P_1^{\,1}(m)\}$.

vergl. pag. 42.

± m	P	+ Δ
0.000	8.619 789	5
0.001	8.619 794	16
0.002	8.619 810	26
0.003	8.619 836	36
0.004	8.619 872	47
0.005	8.619 919	57
0.006	8.619 976	68
0.007	8.620 044	78
0.008	8.620 122	89
0.009	8.620 211	
		99
0.010	8.620 310	109
0.011	8.620 419	120
0.012	8.620 539	130
0.013	8.620 669	140
0.014	8.620 809	151
0.015	8.620 960	161
0.016	8.621 121	171
0.017	8.621 292	182
0.018	8.621 474	192
0.019	8.621 666	
		202
0.020	8.621 868	213
0.021	8.622 081	223
0.022	8.622 304	233
0.023	8.622 537	243
0.024	8.622 780	254
0.025	8.623 034	264
0.026	8.623 298	273
0.027	8.623 571	285
0.028	8.623 856	294
0.029	8.624 150	
		304
0.030	8.624 454	314
0.031	8.624 768	325
0.032	8.625 093	334
0.033	8.625 427	345
0.034	8.625 772	354
0.035	8.626 126	365
0.036	8.626 491	374
0.037	8.626 865	385
0.038	8.627 250	394
0.039	8.627 644	
		404
0.040	8.628 048	414
0.041	8.628 462	424
0.042	8.628 886	434
0.043	8.629 320	443
0.044	8.629 763	453
0.045	8.630 216	463
0.046	8.630 679	472
0.047	8.631 151	482
0.048	8.631 633	492
0.049	8.632 125	501
0.050	8.632 626	

± m	P	+ Δ
0.050	8.632 626	511
0.051	8.633 137	520
0.052	8.633 657	530
0.053	8.634 187	539
0.054	8.634 726	548
0.055	8.635 274	558
0.056	8.635 832	567
0.057	8.636 399	577
0.058	8.636 976	586
0.059	8.637 562	
		594
0.060	8.638 156	605
0.061	8.638 761	613
0.062	8.639 374	622
0.063	8.639 996	631
0.064	8.640 627	641
0.065	8.641 268	649
0.066	8.641 917	658
0.067	8.642 575	667
0.068	8.643 242	676
0.069	8.643 918	
		685
0.070	8.644 603	693
0.071	8.645 296	702
0.072	8.645 998	711
0.073	8.646 709	720
0.074	8.647 429	728
0.075	8.648 157	736
0.076	8.648 893	745
0.077	8.649 638	754
0.078	8.650 392	762
0.079	8.651 154	
		770
0.080	8.651 924	778
0.081	8.652 702	787
0.082	8.653 489	795
0.083	8.654 284	803
0.084	8.655 087	811
0.085	8.655 898	820
0.086	8.656 718	827
0.087	8.657 545	835
0.088	8.658 380	843
0.089	8.659 223	
		852
0.090	8.660 075	858
0.091	8.660 933	867
0.092	8.661 800	874
0.093	8.662 674	882
0.094	8.663 556	890
0.095	8.664 446	897
0.096	8.665 343	905
0.097	8.666 248	912
0.098	8.667 160	920
0.099	8.668 080	927
0.100	8.669 007	

± m	P	+ Δ
0.100	8.669 007	934
0.101	8.669 941	942
0.102	8.670 883	948
0.103	8.671 831	956
0.104	8.672 787	963
0.105	8.673 750	970
0.106	8.674 720	977
0.107	8.675 697	984
0.108	8.676 681	991
0.109	8.677 672	
		998
0.110	8.678 670	1005
0.111	8.679 675	1011
0.112	8.680 686	1018
0.113	8.681 704	1025
0.114	8.682 729	1031
0.115	8.683 760	1038
0.116	8.684 798	1044
0.117	8.685 842	1050
0.118	8.686 892	1057
0.119	8.687 949	
		1064
0.120	8.689 013	1069
0.121	8.690 082	1076
0.122	8.691 158	1082
0.123	8.692 240	1088
0.124	8.693 328	1094
0.125	8.694 422	1101
0.126	8.695 523	1106
0.127	8.696 629	1112
0.128	8.697 741	1118
0.129	8.698 859	
		1123
0.130	8.699 982	1130
0.131	8.701 112	1135
0.132	8.702 247	1140
0.133	8.703 387	1147
0.134	8.704 534	1152
0.135	8.705 686	1157
0.136	8.706 843	1163
0.137	8.708 006	1168
0.138	8.709 174	1174
0.139	8.710 348	
		1178
0.140	8.711 526	1184
0.141	8.712 710	1189
0.142	8.713 899	1195
0.143	8.715 094	1199
0.144	8.716 293	1204
0.145	8.717 497	1210
0.146	8.718 707	1214
0.147	8.719 921	1219
0.148	8.721 140	1224
0.149	8.722 364	1229
0.150	8.723 593	

± m	P	+ Δ
0.150	8.723 593	1233
0.151	8.724 826	1238
0.152	8.726 064	1243
0.153	8.727 307	1247
0.154	8.728 554	1252
0.155	8.729 806	1256
0.156	8.731 062	1261
0.157	8.732 323	1265
0.158	8.733 588	1269
0.159	8.734 857	
		1274
0.160	8.736 131	1278
0.161	8.737 409	1282
0.162	8.738 691	1286
0.163	8.739 977	1290
0.164	8.741 267	1294
0.165	8.742 561	1299
0.166	8.743 860	1302
0.167	8.745 162	1306
0.168	8.746 468	1310
0.169	8.747 778	
		1314
0.170	8.749 092	1317
0.171	8.750 409	1322
0.172	8.751 731	1325
0.173	8.753 056	1328
0.174	8.754 384	1332
0.175	8.755 716	1336
0.176	8.757 052	1339
0.177	8.758 391	1342
0.178	8.759 733	1346
0.179	8.761 079	
		1350
0.180	8.762 429	1352
0.181	8.763 781	1356
0.182	8.765 137	1359
0.183	8.766 496	1362
0.184	8.767 858	1366
0.185	8.769 224	1368
0.186	8.770 592	1371
0.187	8.771 963	1375
0.188	8.773 338	1377
0.189	8.774 715	
		1381
0.190	8.776 096	1383
0.191	8.777 479	1386
0.192	8.778 865	1389
0.193	8.780 254	1391
0.194	8.781 645	1395
0.195	8.783 040	1397
0.196	8.784 437	1399
0.197	8.785 836	1403
0.198	8.787 239	1404
0.199	8.788 643	1408
0.200	8.790 051	

± m	P	+ Δ
0.200	8.790 051	1409
0.201	8.791 460	1412
0.202	8.792 872	1415
0.203	8.794 287	1417
0.204	8.795 704	1419
0.205	8.797 123	1422
0.206	8.798 545	1424
0.207	8.799 969	1426
0.208	8.801 395	1428
0.209	8.802 823	
		1430
0.210	8.804 253	1432
0.211	8.805 685	1435
0.212	8.807 120	1436
0.213	8.808 556	1439
0.214	8.809 995	1440
0.215	8.811 435	1443
0.216	8.812 878	1444
0.217	8.814 322	1446
0.218	8.815 768	1448
0.219	8.817 216	
		1450
0.220	8.818 666	1451
0.221	8.820 117	1453
0.222	8.821 570	1455
0.223	8.823 025	1457
0.224	8.824 482	1458
0.225	8.825 940	1460
0.226	8.827 400	1461
0.227	8.828 861	1463
0.228	8.830 324	1464
0.229	8.831 788	
		1465
0.230	8.833 253	1468
0.231	8.834 721	1468
0.232	8.836 189	1470
0.233	8.837 659	1471
0.234	8.839 130	1473
0.235	8.840 603	1474
0.236	8.842 077	1475
0.237	8.843 552	1476
0.238	8.845 028	1477
0.239	8.846 505	
		1479
0.240	8.847 984	1479
0.241	8.849 463	1481
0.242	8.850 944	1482
0.243	8.852 426	1483
0.244	8.853 909	1484
0.245	8.855 393	1485
0.246	8.856 878	1486
0.247	8.858 364	1487
0.248	8.859 851	1487
0.249	8.861 338	1489
0.250	8.862 827	

Tafel VII.

$\log \{P_1^2(m)\}$.

± m	P	−Δ
0.000	9,,096 910	1
0.001	9,,096 909	1
0.002	9,,096 908	3
0.003	9,,096 905	4
0.004	9,,096 901	5
0.005	9,,096 896	7
0.006	9,,096 889	7
0.007	9,,096 882	9
0.008	9,,096 873	10
0.009	9,,096 863	11
0.010	9,,096 852	12
0.011	9,,096 840	13
0.012	9,,096 827	15
0.013	9,,096 812	15
0.014	9,,096 797	17
0.015	9,,096 780	18
0.016	9,,096 762	19
0.017	9,,096 743	21
0.018	9,,096 722	21
0.019	9,,096 701	23
0.020	9,,096 678	23
0.021	9,,096 655	25
0.022	9,,096 630	26
0.023	9,,096 604	28
0.024	9,,096 576	28
0.025	9,,096 548	30
0.026	9,,096 518	30
0.027	9,,096 488	32
0.028	9,,096 456	33
0.029	9,,096 423	34
0.030	9,,096 389	36
0.031	9,,096 353	36
0.032	9,,096 317	38
0.033	9,,096 279	39
0.034	9,,096 240	40
0.035	9,,096 200	41
0.036	9,,096 159	42
0.037	9,,096 117	44
0.038	9,,096 073	45
0.039	9,,096 028	45
0.040	9,,095 983	47
0.041	9,,095 936	49
0.042	9,,095 887	49
0.043	9,,095 838	50
0.044	9,,095 788	52
0.045	9,,095 736	53
0.046	9,,095 683	54
0.047	9,,095 629	55
0.048	9,,095 574	57
0.049	9,,095 517	57
0.050	9,,095 460	

± m	P	−Δ
0.050	9,,095 460	59
0.051	9,,095 401	60
0.052	9,,095 341	61
0.053	9,,095 280	62
0.054	9,,095 218	63
0.055	9,,095 155	65
0.056	9,,095 090	65
0.057	9,,095 025	67
0.058	9,,094 958	68
0.059	9,,094 890	70
0.060	9,,094 820	70
0.061	9,,094 750	72
0.062	9,,094 678	72
0.063	9,,094 606	74
0.064	9,,094 532	75
0.065	9,,094 457	77
0.066	9,,094 380	77
0.067	9,,094 303	79
0.068	9,,094 224	80
0.069	9,,094 144	81
0.070	9,,094 063	82
0.071	9,,093 981	83
0.072	9,,093 898	85
0.073	9,,093 813	86
0.074	9,,093 727	86
0.075	9,,093 641	89
0.076	9,,093 552	89
0.077	9,,093 463	90
0.078	9,,093 373	92
0.079	9,,093 281	93
0.080	9,,093 188	94
0.081	9,,093 094	95
0.082	9,,092 999	97
0.083	9,,092 902	97
0.084	9,,092 805	99
0.085	9,,092 706	100
0.086	9,,092 606	101
0.087	9,,092 505	103
0.088	9,,092 402	103
0.089	9,,092 299	105
0.090	9,,092 194	106
0.091	9,,092 088	107
0.092	9,,091 981	108
0.093	9,,091 873	110
0.094	9,,091 763	111
0.095	9,,091 652	112
0.096	9,,091 540	113
0.097	9,,091 427	114
0.098	9,,091 313	116
0.099	9,,091 197	117
0.100	9,,091 080	

± m	P	−Δ
0.100	9,,091 080	118
0.101	9,,090 962	119
0.102	9,,090 843	120
0.103	9,,090 723	122
0.104	9,,090 601	122
0.105	9,,090 479	124
0.106	9,,090 355	126
0.107	9,,090 229	126
0.108	9,,090 103	128
0.109	9,,089 975	129
0.110	9,,089 846	130
0.111	9,,089 716	131
0.112	9,,089 585	133
0.113	9,,089 452	133
0.114	9,,089 319	135
0.115	9,,089 184	136
0.116	9,,089 048	138
0.117	9,,088 910	138
0.118	9,,088 772	140
0.119	9,,088 632	141
0.120	9,,088 491	143
0.121	9,,088 348	143
0.122	9,,088 205	145
0.123	9,,088 060	146
0.124	9,,087 914	147
0.125	9,,087 767	149
0.126	9,,087 618	149
0.127	9,,087 469	151
0.128	9,,087 318	153
0.129	9,,087 165	153
0.130	9,,087 012	155
0.131	9,,086 857	156
0.132	9,,086 701	157
0.133	9,,086 544	158
0.134	9,,086 386	160
0.135	9,,086 226	161
0.136	9,,086 065	162
0.137	9,,085 903	163
0.138	9,,085 740	165
0.139	9,,085 575	165
0.140	9,,085 410	168
0.141	9,,085 242	168
0.142	9,,085 074	170
0.143	9,,084 904	170
0.144	9,,084 734	173
0.145	9,,084 561	173
0.146	9,,084 388	175
0.147	9,,084 213	176
0.148	9,,084 037	177
0.149	9,,083 860	178
0.150	9,,083 682	

± m	P	−Δ
0.150	9,,083 682	180
0.151	9,,083 502	181
0.152	9,,083 321	182
0.153	9,,083 139	184
0.154	9,,082 955	185
0.155	9,,082 770	186
0.156	9,,082 584	187
0.157	9,,082 397	189
0.158	9,,082 208	190
0.159	9,,082 018	191
0.160	9,,081 827	192
0.161	9,,081 635	194
0.162	9,,081 441	195
0.163	9,,081 246	196
0.164	9,,081 050	198
0.165	9,,080 852	199
0.166	9,,080 653	200
0.167	9,,080 453	202
0.168	9,,080 251	203
0.169	9,,080 048	204
0.170	9,,079 844	205
0.171	9,,079 639	207
0.172	9,,079 432	208
0.173	9,,079 224	209
0.174	9,,079 015	211
0.175	9,,078 804	212
0.176	9,,078 592	213
0.177	9,,078 379	215
0.178	9,,078 164	216
0.179	9,,077 948	217
0.180	9,,077 731	218
0.181	9,,077 513	220
0.182	9,,077 293	221
0.183	9,,077 072	223
0.184	9,,076 849	224
0.185	9,,076 625	225
0.186	9,,076 400	226
0.187	9,,076 174	228
0.188	9,,075 946	229
0.189	9,,075 717	231
0.190	9,,075 486	232
0.191	9,,075 254	233
0.192	9,,075 021	234
0.193	9,,074 787	236
0.194	9,,074 551	237
0.195	9,,074 314	239
0.196	9,,074 075	240
0.197	9,,073 835	241
0.198	9,,073 594	243
0.199	9,,073 351	244
0.200	9,,073 107	

± m	P	−Δ
0.200	9,,073 107	245
0.201	9,,072 862	247
0.202	9,,072 615	248
0.203	9,,072 367	249
0.204	9,,072 118	251
0.205	9,,071 867	252
0.206	9,,071 615	254
0.207	9,,071 361	255
0.208	9,,071 106	256
0.209	9,,070 850	258
0.210	9,,070 592	259
0.211	9,,070 333	261
0.212	9,,070 072	261
0.213	9,,069 811	264
0.214	9,,069 547	264
0.215	9,,069 283	266
0.216	9,,069 017	268
0.217	9,,068 749	269
0.218	9,,068 480	270
0.219	9,,068 210	272
0.220	9,,067 938	273
0.221	9,,067 665	274
0.222	9,,067 391	276
0.223	9,,067 115	277
0.224	9,,066 838	279
0.225	9,,066 559	280
0.226	9,,066 279	282
0.227	9,,065 997	283
0.228	9,,065 714	284
0.229	9,,065 430	286
0.230	9,,065 144	287
0.231	9,,064 857	289
0.232	9,,064 568	290
0.233	9,,064 278	292
0.234	9,,063 986	293
0.235	9,,063 693	294
0.236	9,,063 399	296
0.237	9,,063 103	298
0.238	9,,062 805	299
0.239	9,,062 506	300
0.240	9,,062 206	302
0.241	9,,061 904	303
0.242	9,,061 601	305
0.243	9,,061 296	306
0.244	9,,060 990	308
0.245	9,,060 682	309
0.246	9,,060 373	311
0.247	9,,060 062	312
0.248	9,,059 750	313
0.249	9,,059 437	315
0.250	9,,059 122	

Tafel VII.

$\log \{P_1{}^3(m)\}$.

± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ
0.000	7_n470 026	4	0.050	7_n477 586	301	0.100	7_n499 076	553	0.150	7_n531 357	728	0.200	7_n570 316	818
0.001	7_n470 030	9	0.051	7_n477 887	307	0.101	7_n499 629	557	0.151	7_n532 085	731	0.201	7_n571 134	819
0.002	7_n470 039	15	0.052	7_n478 194	312	0.102	7_n500 186	561	0.152	7_n532 816	733	0.202	7_n571 953	820
0.003	7_n470 054	22	0.053	7_n478 506	318	0.103	7_n500 747	565	0.153	7_n533 549	736	0.203	7_n572 773	821
0.004	7_n470 076	27	0.054	7_n478 824	323	0.104	7_n501 312	570	0.154	7_n534 285	738	0.204	7_n573 594	822
0.005	7_n470 103	34	0.055	7_n479 147	329	0.105	7_n501 882	574	0.155	7_n535 023	741	0.205	7_n574 416	823
0.006	7_n470 137	40	0.056	7_n479 476	335	0.106	7_n502 456	578	0.156	7_n535 764	743	0.206	7_n575 239	823
0.007	7_n470 177	46	0.057	7_n479 811	340	0.107	7_n503 034	582	0.157	7_n536 507	746	0.207	7_n576 062	824
0.008	7_n470 223	52	0.058	7_n480 151	345	0.108	7_n503 616	587	0.158	7_n537 253	748	0.208	7_n576 886	825
0.009	7_n470 275	58	0.059	7_n480 496	351	0.109	7_n504 203	590	0.159	7_n538 001	751	0.209	7_n577 711	826
0.010	7_n470 333	64	0.060	7_n480 847	357	0.110	7_n504 793	595	0.160	7_n538 752	752	0.210	7_n578 537	826
0.011	7_n470 397	71	0.061	7_n481 204	362	0.111	7_n505 388	598	0.161	7_n539 504	756	0.211	7_n579 363	827
0.012	7_n470 468	76	0.062	7_n481 566	366	0.112	7_n505 986	602	0.162	7_n540 260	757	0.212	7_n580 190	828
0.013	7_n470 544	83	0.063	7_n481 932	373	0.113	7_n506 588	607	0.163	7_n541 017	760	0.213	7_n581 018	828
0.014	7_n470 627	88	0.064	7_n482 305	378	0.114	7_n507 195	610	0.164	7_n541 777	761	0.214	7_n581 846	829
0.015	7_n470 715	95	0.065	7_n482 683	383	0.115	7_n507 805	614	0.165	7_n542 538	764	0.215	7_n582 675	829
0.016	7_n470 810	101	0.066	7_n483 066	389	0.116	7_n508 419	618	0.166	7_n543 302	766	0.216	7_n583 504	830
0.017	7_n470 911	107	0.067	7_n483 455	393	0.117	7_n509 037	622	0.167	7_n544 068	768	0.217	7_n584 334	830
0.018	7_n471 018	113	0.068	7_n483 848	399	0.118	7_n509 659	625	0.168	7_n544 836	771	0.218	7_n585 164	830
0.019	7_n471 131	119	0.069	7_n484 247	405	0.119	7_n510 284	629	0.169	7_n545 607	772	0.219	7_n585 994	831
0.020	7_n471 250	125	0.070	7_n484 652	409	0.120	7_n510 913	633	0.170	7_n546 379	774	0.220	7_n586 825	832
0.021	7_n471 375	131	0.071	7_n485 061	415	0.121	7_n511 546	637	0.171	7_n547 153	776	0.221	7_n587 657	832
0.022	7_n471 506	137	0.072	7_n485 476	419	0.122	7_n512 183	640	0.172	7_n547 929	778	0.222	7_n588 489	832
0.023	7_n471 643	144	0.073	7_n485 895	425	0.123	7_n512 823	644	0.173	7_n548 707	780	0.223	7_n589 321	832
0.024	7_n471 787	149	0.074	7_n486 320	430	0.124	7_n513 467	647	0.174	7_n549 487	782	0.224	7_n590 153	833
0.025	7_n471 936	155	0.075	7_n486 750	435	0.125	7_n514 114	651	0.175	7_n550 269	783	0.225	7_n590 986	832
0.026	7_n472 091	161	0.076	7_n487 185	441	0.126	7_n514 765	655	0.176	7_n551 052	786	0.226	7_n591 818	833
0.027	7_n472 252	167	0.077	7_n487 626	444	0.127	7_n515 420	657	0.177	7_n551 838	787	0.227	7_n592 651	834
0.028	7_n472 419	174	0.078	7_n488 070	451	0.128	7_n516 077	662	0.178	7_n552 625	789	0.228	7_n593 485	833
0.029	7_n472 593	179	0.079	7_n488 521	455	0.129	7_n516 739	664	0.179	7_n553 414	790	0.229	7_n594 318	833
0.030	7_n472 772	185	0.080	7_n488 976	460	0.130	7_n517 403	668	0.180	7_n554 204	792	0.230	7_n595 151	834
0.031	7_n472 957	191	0.081	7_n489 436	465	0.131	7_n518 071	672	0.181	7_n554 996	794	0.231	7_n595 985	833
0.032	7_n473 148	197	0.082	7_n489 901	469	0.132	7_n518 743	674	182	7_n555 790	795	0.232	7_n596 818	834
0.033	7_n473 345	203	0.083	7_n490 370	475	0.133	7_n519 417	679	0.183	7_n556 585	797	0.233	7_n597 652	834
0.034	7_n473 548	209	0.084	7_n490 845	480	0.134	7_n520 096	681	0.184	7_n557 382	799	0.234	7_n598 486	833
0.035	7_n473 757	214	0.085	7_n491 325	484	0.135	7_n520 777	684	0.185	7_n558 181	800	0.235	7_n599 319	834
0.036	7_n473 971	221	0.086	7_n491 809	489	0.136	7_n521 461	688	0.186	7_n558 981	801	0.236	7_n600 153	833
0.037	7_n474 192	226	0.087	7_n492 298	493	0.137	7_n522 149	690	0.187	7_n559 782	803	0.237	7_n600 986	833
0.038	7_n474 418	232	0.088	7_n492 791	499	0.138	7_n522 839	694	0.188	7_n560 585	804	0.238	7_n601 819	833
0.039	7_n474 650	238	0.089	7_n493 290	503	0.139	7_n523 533	696	0.189	7_n561 389	805	0.239	7_n602 652	833
0.040	7_n474 888	244	0.090	7_n493 793	508	0.140	7_n524 229	700	0.190	7_n562 194	807	0.240	7_n603 485	833
0.041	7_n475 132	250	0.091	7_n494 301	513	0.141	7_n524 929	703	0.191	7_n563 001	808	0.241	7_n604 318	833
0.042	7_n475 382	255	0.092	7_n494 814	516	0.142	7_n525 632	705	0.192	7_n563 809	810	0.242	7_n605 151	832
0.043	7_n475 637	262	0.093	7_n495 330	522	0.143	7_n526 337	709	0.193	7_n564 619	810	0.243	7_n605 983	832
0.044	7_n475 899	267	0.094	7_n495 852	526	0.144	7_n527 046	712	0.194	7_n565 429	812	0.244	7_n606 815	831
0.045	7_n476 166	272	0.095	7_n496 378	531	0.145	7_n527 758	714	0.195	7_n566 241	813	0.245	7_n607 646	832
0.046	7_n476 438	279	0.096	7_n496 909	535	0.146	7_n528 472	717	0.196	7_n567 054	814	0.246	7_n608 478	831
0.047	7_n476 717	284	0.097	7_n497 444	539	0.147	7_n529 189	720	0.197	7_n567 868	815	0.247	7_n609 309	830
0.048	7_n477 001	290	0.098	7_n497 983	545	0.148	7_n529 909	723	0.198	7_n568 683	816	0.248	7_n610 139	830
0.049	7_n477 291	295	0.099	7_n498 528	548	0.149	7_n530 632	725	0.199	7_n569 499	817	0.249	7_n610 969	830
0.050	7_n477 586		0.100	7_n499 076		0.150	7_n531 357		0.200	7_n570 316		0.250	7_n611 799	

Tafel VII.

$\log \{P_1^{\,1} m)\}$.

± m	P	− Δ	± m	P	− Δ	± m	P	− Δ	± m	P	− Δ	± m	P	− Δ
0.000	8.369 911		0.050	8.368 301		0.100	8.363 445		0.150	8.355 269		0.200	8.343 644	
0.001	8.369 911	0	0.051	8.368 236	65	0.101	8.363 314	131	0.151	8.355 071	198	0.201	8.343 375	269
0.002	8.369 909	2	0.052	8.368 169	67	0.102	8.363 182	132	0.152	8.354 871	200	0.202	8.343 105	270
0.003	8.369 906	3	0.053	8.368 102	67	0.103	8.363 049	133	0.153	8.354 670	201	0.203	8.342 833	272
0.004	8.369 901	5	0.054	8.368 032	70	0.104	8.362 914	135	0.154	8.354 468	202	0.204	8.342 560	273
0.005	8.369 895	6	0.055	8.367 962	70	0.105	8.362 778	136	0.155	8.354 264	204	0.205	8.342 285	275
0.006	8.369 888	7	0.056	8.367 891	71	0.106	8.362 641	137	0.156	8.354 059	205	0.206	8.342 009	276
0.007	8.369 880	8	0.057	8.367 818	73	0.107	8.362 502	139	0.157	8.353 853	206	0.207	8.341 731	278
0.008	8.369 870	10	0.058	8.367 743	75	0.108	8.362 363	139	0.158	8.353 645	208	0.208	8.341 452	279
0.009	8.369 859	11	0.059	8.367 668	75	0.109	8.362 221	142	0.159	8.353 436	209	0.209	8.341 171	281
		12			77			142			211			282
0.010	8.369 847		0.060	8.367 591		0.110	8.362 079		0.160	8.353 225		0.210	8.340 889	
0.011	8.369 833	14	0.061	8.367 513	78	0.111	8.361 935	144	0.161	8.353 013	212	0.211	8.340 606	283
0.012	8.369 819	14	0.062	8.367 433	80	0.112	8.361 789	146	0.162	8.352 800	213	0.212	8.340 321	285
0.013	8.369 803	16	0.063	8.367 353	80	0.113	8.361 643	146	0.163	8.352 585	215	0.213	8.340 034	287
0.014	8.369 785	18	0.064	8.367 271	82	0.114	8.361 495	148	0.164	8.352 369	216	0.214	8.339 746	288
0.015	8.369 767	18	0.065	8.367 187	84	0.115	8.361 346	149	0.165	8.352 151	218	0.215	8.339 457	289
0.016	8.369 747	20	0.066	8.367 103	84	0.116	8.361 195	151	0.166	8.351 932	219	0.216	8.339 166	291
0.017	8.369 725	22	0.067	8.367 017	86	0.117	8.361 043	152	0.167	8.351 712	220	0.217	8.338 874	292
0.018	8.369 703	22	0.068	8.366 929	88	0.118	8.360 890	153	0.168	8.351 490	222	0.218	8.338 580	294
0.019	8.369 679	24	0.069	8.366 841	88	0.119	8.360 735	155	0.169	8.351 267	223	0.219	8.338 284	296
		25			90			156			225			296
0.020	8.369 654		0.070	8.366 751		0.120	8.360 579		0.170	8.351 042		0.220	8.337 988	
0.021	8.369 628	26	0.071	8.366 660	91	0.121	8.360 421	158	0.171	8.350 816	226	0.221	8.337 689	299
0.022	8.369 600	28	0.072	8.366 567	93	0.122	8.360 263	158	0.172	8.350 589	227	0.222	8.337 389	300
0.023	8.369 571	29	0.073	8.366 474	93	0.123	8.360 103	160	0.173	8.350 360	229	0.223	8.337 088	301
0.024	8.369 541	30	0.074	8.366 378	96	0.124	8.359 941	162	0.174	8.350 130	230	0.224	8.336 785	303
0.025	8.369 509	32	0.075	8.366 282	96	0.125	8.359 779	162	0.175	8.349 898	232	0.225	8.336 481	304
0.026	8.369 476	33	0.076	8.366 184	98	0.126	8.359 615	164	0.176	8.349 665	233	0.226	8.336 175	306
0.027	8.369 442	34	0.077	8.366 085	99	0.127	8.359 449	166	0.177	8.349 430	235	0.227	8.335 867	308
0.028	8.369 407	35	0.078	8.365 985	100	0.128	8.359 282	167	0.178	8.349 195	235	0.228	8.335 559	308
0.029	8.369 370	37	0.079	8.365 883	102	0.129	8.359 114	168	0.179	8.348 957	238	0.229	8.335 248	311
		38			103			169			239			312
0.030	8.369 332		0.080	8.365 780		0.130	8.358 945		0.180	8.348 718		0.230	8.334 936	
0.031	8.369 293	39	0.081	8.365 676	104	0.131	8.358 774	171	0.181	8.348 478	240	0.231	8.334 623	313
0.032	8.369 252	41	0.082	8.365 570	106	0.132	8.358 602	172	0.182	8.348 237	241	0.232	8.334 308	315
0.033	8.369 210	42	0.083	8.365 464	106	0.133	8.358 428	174	0.183	8.347 994	243	0.233	8.333 992	316
0.034	8.369 167	43	0.084	8.365 355	109	0.134	8.358 253	175	0.184	8.347 749	245	0.234	8.333 674	318
0.035	8.369 123	44	0.085	8.365 246	109	0.135	8.358 077	176	0.185	8.347 504	245	0.235	8.333 354	320
0.036	8.369 077	46	0.086	8.365 135	111	0.136	8.357 899	178	0.186	8.347 256	248	0.236	8.333 033	321
0.037	8.369 030	47	0.087	8.365 023	112	0.137	8.357 720	179	0.187	8.347 008	248	0.237	8.332 711	322
0.038	8.368 982	48	0.088	8.364 909	114	0.138	8.357 540	180	0.188	8.346 758	250	0.238	8.332 387	324
0.039	8.368 932	50	0.089	8.364 795	114	0.139	8.357 358	182	0.189	8.346 506	252	0.239	8.332 061	326
		51			116			183			253			327
0.040	8.368 881		0.090	8.364 679		0.140	8.357 175		0.190	8.346 253		0.240	8.331 734	
0.041	8.368 829	52	0.091	8.364 561	118	0.141	8.356 991	184	0.191	8.345 999	254	0.241	8.331 405	329
0.042	8.368 775	54	0.092	8.364 442	119	0.142	8.356 805	186	0.192	8.345 743	256	0.242	8.331 075	330
0.043	8.368 721	54	0.093	8.364 322	120	0.143	8.356 618	187	0.193	8.345 485	258	0.243	8.330 743	332
0.044	8.368 665	56	0.094	8.364 201	121	0.144	8.356 429	189	0.194	8.345 227	258	0.244	8.330 410	333
0.045	8.368 607	58	0.095	8.364 078	123	0.145	8.356 239	190	0.195	8.344 966	261	0.245	8.330 075	335
0.046	8.368 548	59	0.096	8.363 954	124	0.146	8.356 048	191	0.196	8.344 705	261	0.246	8.329 739	336
0.047	8.368 488	60	0.097	8.363 829	125	0.147	8.355 855	193	0.197	8.344 442	263	0.247	8.329 401	338
0.048	8.368 427	61	0.098	8.363 702	127	0.148	8.355 661	194	0.198	8.344 177	265	0.248	8.329 062	339
0.049	8.368 365	62	0.099	8.363 574	128	0.149	8.355 466	195	0.199	8.343 911	266	0.249	8.328 720	342
0.050	8.368 301	64	0.100	8.363 445	129	0.150	8.355 269	197	0.200	8.343 644	267	0.250	8.328 378	342

Tafel VII.

$\log \{P_1^{5}(m)\}$.

$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$
0.000	6.578 934		0.050	6.585 556		0.100	6.604 416		0.150	6.632 833		0.200	6.667 232	
0.001	6.578 937	3	0.051	6.585 820	264	0.101	6.604 902	486	0.151	6.633 475	642	0.201	6.667 955	723
0.002	6.578 945	8	0.052	6.586 089	269	0.102	6.605 391	489	0.152	6.634 119	644	0.202	6.668 679	724
0.003	6.578 959	14	0.053	6.586 362	273	0.103	6.605 884	493	0.153	6.634 766	647	0.203	6.669 404	725
0.004	6.578 977	18	0.054	6.586 641	279	0.104	6.606 382	498	0.154	6.635 415	649	0.204	6.670 130	726
0.005	6.579 001	24	0.055	6.586 925	284	0.105	6.606 882	500	0.155	6.636 066	651	0.205	6.670 856	726
0.006	6.579 031	30	0.056	6.587 213	288	0.106	6.607 387	505	0.156	6.636 719	653	0.206	6.671 584	728
0.007	6.579 066	35	0.057	6.587 506	293	0.107	6.607 895	508	0.157	6.637 375	656	0.207	6.672 312	728
0.008	6.579 106	40	0.058	6.587 804	298	0.108	6.608 407	512	0.158	6.638 033	658	0.208	6.673 040	728
0.009	6.579 152	46	0.059	6.588 107	303	0.109	6.608 923	516	0.159	6.638 693	660	0.209	6.673 770	730
		51			308			519			662			730
0.010	6.579 203		0.060	6.588 415		0.110	6.609 442		0.160	6.639 355		0.210	6.674 500	
0.011	6.579 259	56	0.061	6.588 727	312	0.111	6.609 965	523	0.161	6.640 019	664	0.211	6.675 231	731
0.012	6.579 320	61	0.062	6.589 045	318	0.112	6.610 491	526	0.162	6.640 685	666	0.212	6.675 962	731
0.013	6.579 387	67	0.063	6.589 367	322	0.113	6.611 021	537	0.163	6.641 354	669	0.213	6.676 694	732
0.014	6.579 460	73	0.064	6.589 693	326	0.114	6.611 554	533	0.164	6.642 024	670	0.214	6.677 426	732
0.015	6.579 538	78	0.065	6.590 025	332	0.115	6.612 091	537	0.165	6.642 696	672	0.215	6.678 159	733
0.016	6.579 621	83	0.066	6.590 361	336	0.116	6.612 631	540	0.166	6.643 370	674	0.216	6.678 893	734
0.017	6.579 709	88	0.067	6.590 701	340	0.117	6.613 174	543	0.167	6.644 046	676	0.217	6.679 627	734
0.018	6.579 802	93	0.068	6.591 047	346	0.118	6.613 721	547	0.168	6.644 724	678	0.218	6.680 361	734
0.019	6.579 901	99	0.069	6.591 397	350	0.119	6.614 272	551	0.169	6.645 404	680	0.219	6.681 096	735
		105			354			553			682			735
0.020	6.580 006		0.070	6.591 751		0.120	6.614 825		0.170	6.646 086		0.220	6.681 831	
0.021	6.580 115	109	0.071	6.592 111	360	0.121	6.615 382	557	0.171	6.646 769	683	0.221	6.682 566	735
0.022	6.580 230	115	0.072	6.592 474	363	0.122	6.615 942	560	0.172	6.647 454	685	0.222	6.683 302	736
0.023	6.580 350	120	0.073	6.592 843	369	0.123	6.616 506	564	0.173	6.648 141	687	0.223	6.684 038	736
0.024	6.580 475	125	0.074	6.593 215	372	0.124	6.617 073	567	0.174	6.648 830	689	0.224	6.684 774	736
0.025	6.580 606	131	0.075	6.593 593	378	0.125	6.617 642	569	0.175	6.649 520	690	0.225	6.685 511	737
0.026	6.580 742	136	0.076	6.593 974	381	0.126	6.618 215	573	0.176	6.650 212	692	0.226	6.686 247	736
0.027	6.580 883	141	0.077	6.594 360	386	0.127	6.618 791	576	0.177	6.650 905	693	0.227	6.686 984	737
0.028	6.581 030	147	0.078	6.594 751	391	0.128	6.619 371	580	0.178	6.651 600	695	0.228	6.687 721	737
0.029	6.581 181	151	0.079	6.595 146	395	0.129	6.619 953	582	0.179	6.652 297	697	0.229	6.688 458	737
		157			399			585			698			738
0.030	6.581 338		0.080	6.595 545		0.130	6.620 538		0.180	6.652 995		0.230	6.689 196	
0.031	6.581 500	162	0.081	6.595 949	404	0.131	6.621 126	588	0.181	6.653 695	700	0.231	6.689 933	737
0.032	6.581 668	168	0.082	6.596 357	408	0.132	6.621 718	592	0.182	6.654 396	701	0.232	6.690 670	737
0.033	6.581 840	172	0.083	6.596 770	413	0.133	6.622 312	594	0.183	6.655 098	702	0.233	6.691 408	738
0.034	6.582 018	178	0.084	6.597 186	416	0.134	6.622 909	597	0.184	6.655 802	704	0.234	6.692 145	737
0.035	6.582 201	183	0.085	6.597 607	421	0.135	6.623 509	600	0.185	6.656 508	706	0.235	6.692 883	738
0.036	6.582 389	188	0.086	6.598 032	425	0.136	6.624 112	603	0.186	6.657 214	706	0.236	6.693 620	737
0.037	6.582 582	193	0.087	6.598 462	430	0.137	6.624 717	605	0.187	6.657 922	708	0.237	6.694 358	738
0.038	6.582 780	198	0.088	6.598 895	433	0.138	6.625 326	609	0.188	6.658 631	709	0.238	6.695 095	737
0.039	6.582 984	204	0.089	6.599 333	438	0.139	6.625 937	611	0.189	6.659 342	711	0.239	6.695 832	737
		208			442			614			712			737
0.040	6.583 192		0.090	6.599 775		0.140	6.626 551		0.190	6.660 054		0.240	6.696 569	
0.041	6.583 406	214	0.091	6.600 221	446	0.141	6.627 167	616	0.191	6.660 767	713	0.241	6.697 306	737
0.042	6.583 625	219	0.092	6.600 671	450	0.142	6.627 786	619	0.192	6.661 481	714	0.242	6.698 042	736
0.043	6.583 848	223	0.093	6.601 125	454	0.143	6.628 408	622	0.193	6.662 196	715	0.243	6.698 778	736
0.044	6.584 077	229	0.094	6.601 583	458	0.144	6.629 033	625	0.194	6.662 912	716	0.244	6.699 514	736
0.045	6.584 311	234	0.095	6.602 046	463	0.145	6.629 660	627	0.195	6.663 630	718	0.245	6.700 250	736
0.046	6.584 550	239	0.096	6.602 512	466	0.146	6.630 290	630	0.196	6.664 348	718	0.246	6.700 986	736
0.047	6.584 794	244	0.097	6.602 982	470	0.147	6.630 922	632	0.197	6.665 067	719	0.247	6.701 721	735
0.048	6.585 043	249	0.098	6.603 456	474	0.148	6.631 556	634	0.198	6.665 788	721	0.248	6.702 456	735
0.049	6.585 297	254	0.099	6.603 934	478	0.149	6.632 193	637	0.199	6.666 509	721	0.249	6.703 190	734
0.050	6.585 556	259	0.100	6.604 416	482	0.150	6.632 833	640	0.200	6.667 232	723	0.250	6.703 924	734

Tafel VII.

log $\{P_1{}^6\, m\}$.

± m	P	Δ	± m	P	Δ	± m	P	− Δ	± m	P	− Δ	± m	P	− Δ
0.000	7_n688 670	1	0.050	7_n687 002	68	0.100	7_n681 975	135	0.150	7_n673 520	204	0.200	7_n661 521	277
0.001	7_n688 669	2	0.051	7_n686 934	68	0.101	7_n681 840	137	0.151	7_n673 316	207	0.201	7_n661 244	279
0.002	7_n688 667	3	0.052	7_n686 866	71	0.102	7_n681 703	138	0.152	7_n673 109	207	0.202	7_n660 965	280
0.003	7_n688 664	5	0.053	7_n686 795	71	0.103	7_n681 565	139	0.153	7_n672 902	209	0.203	7_n660 685	282
0.004	7_n688 659	6	0.054	7_n686 724	73	0.104	7_n681 426	141	0.154	7_n672 693	211	0.204	7_n660 403	283
0.005	7_n688 653	7	0.055	7_n686 651	74	0.105	7_n681 285	142	0.155	7_n672 482	211	0.205	7_n660 120	285
0.006	7_n688 646	9	0.056	7_n686 577	76	0.106	7_n681 143	143	0.156	7_n672 271	214	0.206	7_n659 835	286
0.007	7_n688 637	10	0.057	7_n686 501	76	0.107	7_n681 000	145	0.157	7_n672 057	214	0.207	7_n659 549	287
0.008	7_n688 627	11	0.058	7_n686 425	79	0.108	7_n680 855	146	0.158	7_n671 843	216	0.208	7_n659 262	290
0.009	7_n688 616		0.059	7_n686 346		0.109	7_n680 709		0.159	7_n671 627		0.209	7_n658 972	
		13			79			148			218			290
0.010	7_n688 603	14	0.060	7_n686 267	81	0.110	7_n680 561	149	0.160	7_n671 409	219	0.210	7_n658 682	292
0.011	7_n688 589	15	0.061	7_n686 186	82	0.111	7_n680 412	150	0.161	7_n671 190	220	0.211	7_n658 390	294
0.012	7_n688 574	17	0.062	7_n686 104	84	0.112	7_n680 262	152	0.162	7_n670 970	222	0.212	7_n658 096	295
0.013	7_n688 557	18	0.063	7_n686 020	85	0.113	7_n680 110	153	0.163	7_n670 748	224	0.213	7_n657 801	297
0.014	7_n688 539	19	0.064	7_n685 935	86	0.114	7_n679 957	154	0.164	7_n670 524	224	0.214	7_n657 504	298
0.015	7_n688 520	21	0.065	7_n685 849	88	0.115	7_n679 803	156	0.165	7_n670 300	226	0.215	7_n657 206	300
0.016	7_n688 499	22	0.066	7_n685 761	89	0.116	7_n679 647	157	0.166	7_n670 074	228	0.216	7_n656 906	301
0.017	7_n688 477	23	0.067	7_n685 672	90	0.117	7_n679 490	159	0.167	7_n669 846	229	0.217	7_n656 605	303
0.018	7_n688 454	25	0.068	7_n685 582	92	0.118	7_n679 331	160	0.168	7_n669 617	230	0.218	7_n656 302	304
0.019	7_n688 429		0.069	7_n685 490		0.119	7_n679 171		0.169	7_n669 387		0.219	7_n655 998	
		26			93			161			232			306
0.020	7_n688 403	27	0.070	7_n685 397	95	0.120	7_n679 010	163	0.170	7_n669 155	234	0.220	7_n655 692	307
0.021	7_n688 376	29	0.071	7_n685 302	95	0.121	7_n678 847	164	0.171	7_n668 921	234	0.221	7_n655 385	309
0.022	7_n688 347	30	0.072	7_n685 207	97	0.122	7_n678 683	166	0.172	7_n668 687	237	0.222	7_n655 076	311
0.023	7_n688 317	31	0.073	7_n685 110	99	0.123	7_n678 517	167	0.173	7_n668 450	237	0.223	7_n654 765	311
0.024	7_n688 286	33	0.074	7_n685 011	100	0.124	7_n678 350	168	0.174	7_n668 213	239	0.224	7_n654 454	314
0.025	7_n688 253	34	0.075	7_n684 911	101	0.125	7_n678 182	170	0.175	7_n667 974	241	0.225	7_n654 140	315
0.026	7_n688 219	35	0.076	7_n684 810	102	0.126	7_n678 012	171	0.176	7_n667 733	242	0.226	7_n653 825	316
0.027	7_n688 184	37	0.077	7_n684 708	104	0.127	7_n677 841	172	0.177	7_n667 491	244	0.227	7_n653 509	318
0.028	7_n688 147	38	0.078	7_n684 604	105	0.128	7_n677 669	174	0.178	7_n667 247	244	0.228	7_n653 191	320
0.029	7_n688 109		0.079	7_n684 499		0.129	7_n677 495		0.179	7_n667 003		0.229	7_n652 871	
		39			107			175			247			321
0.030	7_n688 070	41	0.080	7_n684 392	108	0.130	7_n677 320	177	0.180	7_n666 756	248	0.230	7_n652 550	322
0.031	7_n688 029	42	0.081	7_n684 284	109	0.131	7_n677 143	178	0.181	7_n666 508	249	0.231	7_n652 228	325
0.032	7_n687 987	43	0.082	7_n684 175	111	0.132	7_n676 965	179	0.182	7_n666 259	251	0.232	7_n651 903	325
0.033	7_n687 944	45	0.083	7_n684 064	112	0.133	7_n676 786	181	0.183	7_n666 008	252	0.233	7_n651 578	328
0.034	7_n687 899	46	0.084	7_n683 952	113	0.134	7_n676 605	182	0.184	7_n665 756	254	0.234	7_n651 250	328
0.035	7_n687 853	47	0.085	7_n683 839	115	0.135	7_n676 423	184	0.185	7_n665 502	255	0.235	7_n650 922	331
0.036	7_n687 806	49	0.086	7_n683 724	116	0.136	7_n676 239	185	0.186	7_n665 247	256	0.236	7_n650 591	332
0.037	7_n687 757	50	0.087	7_n683 608	118	0.137	7_n676 054	186	0.187	7_n664 991	258	0.237	7_n650 259	333
0.038	7_n687 707	51	0.088	7_n683 490	118	0.138	7_n675 868	188	0.188	7_n664 733	260	0.238	7_n649 926	335
0.039	7_n687 656		0.089	7_n683 372		0.139	7_n675 680		0.189	7_n664 473		0.239	7_n649 591	
		53			121			190			261			337
0.040	7_n687 603	54	0.090	7_n683 251	121	0.140	7_n675 490	190	0.190	7_n664 212	262	0.240	7_n649 254	338
0.041	7_n687 549	56	0.091	7_n683 130	123	0.141	7_n675 300	192	0.191	7_n663 950	264	0.241	7_n648 916	339
0.042	7_n687 493	56	0.092	7_n683 007	124	0.142	7_n675 108	194	0.192	7_n663 686	266	0.242	7_n648 577	342
0.043	7_n687 437	59	0.093	7_n682 883	126	0.143	7_n674 914	195	0.193	7_n663 420	266	0.243	7_n648 235	343
0.044	7_n687 378	59	0.094	7_n682 757	127	0.144	7_n674 719	196	0.194	7_n663 154	269	0.244	7_n647 892	344
0.045	7_n687 319	61	0.095	7_n682 630	128	0.145	7_n674 523	198	0.195	7_n662 885	270	0.245	7_n647 548	346
0.046	7_n687 258	62	0.096	7_n682 502	130	0.146	7_n674 325	199	0.196	7_n662 615	271	0.246	7_n647 202	347
0.047	7_n687 196	63	0.097	7_n682 372	131	0.147	7_n674 126	200	0.197	7_n662 344	273	0.247	7_n646 855	350
0.048	7_n687 133	65	0.098	7_n682 241	132	0.148	7_n673 926	202	0.198	7_n662 071	274	0.248	7_n646 505	350
0.049	7_n687 068	66	0.099	7_n682 109	134	0.149	7_n673 724	204	0.199	7_n661 797	276	0.249	7_n646 155	353
0.050	7_n687 002		0.100	7_n681 975		0.150	7_n673 520		0.200	7_n661 521		0.250	7_n645 802	

Tafel VII.

$\log \{P_1^7(m)\}$.

$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$
0.000	5_n777 993	2	0.050	5_n784 225	248	0.100	5_n801 992	458	0.150	5_n828 803	607	0.200	5_n861 312	684
0.001	5_n777 995	8	0.051	5_n784 473	253	0.101	5_n802 450	461	0.151	5_n829 410	608	0.201	5_n861 996	684
0.002	5_n778 003	12	0.052	5_n784 726	258	0.102	5_n802 911	466	0.152	5_n830 018	611	0.202	5_n862 680	686
0.003	5_n778 015	18	0.053	5_n784 984	262	0.103	5_n803 377	468	0.153	5_n830 629	612	0.203	5_n863 366	686
0.004	5_n778 033	23	0.054	5_n785 246	267	0.104	5_n803 845	472	0.154	5_n831 241	615	0.204	5_n864 052	688
0.005	5_n778 056	27	0.055	5_n785 513	272	0.105	5_n804 317	476	0.155	5_n831 856	617	0.205	5_n864 740	688
0.006	5_n778 083	33	0.056	5_n785 785	276	0.106	5_n804 793	479	0.156	5_n832 473	620	0.206	5_n865 428	688
0.007	5_n778 116	39	0.057	5_n786 061	281	0.107	5_n805 272	483	0.157	5_n833 093	621	0.207	5_n866 116	690
0.008	5_n778 155	42	0.058	5_n786 342	285	0.108	5_n805 755	486	0.158	5_n833 714	623	0.208	5_n866 806	690
0.009	5_n778 197	48	0.059	5_n786 627	290	0.109	5_n806 241	490	0.159	5_n834 337	626	0.209	5_n867 496	690
0.010	5_n778 245	53	0.060	5_n786 917	294	0.110	5_n806 731	493	0.160	5_n834 963	627	0.210	5_n868 186	691
0.011	5_n778 298	58	0.061	5_n787 211	299	0.111	5_n807 224	496	0.161	5_n835 590	630	0.211	5_n868 877	692
0.012	5_n778 356	63	0.062	5_n787 510	303	0.112	5_n807 720	499	0.162	5_n836 220	631	0.212	5_n869 569	693
0.013	5_n778 419	68	0.063	5_n787 813	307	0.113	5_n808 219	503	0.163	5_n836 851	633	0.213	5_n870 262	693
0.014	5_n778 487	73	0.064	5_n788 120	312	0.114	5_n808 722	507	0.164	5_n837 484	635	0.214	5_n870 955	693
0.015	5_n778 560	78	0.065	5_n788 432	317	0.115	5_n809 229	509	0.165	5_n838 119	637	0.215	5_n871 648	694
0.016	5_n778 638	83	0.066	5_n788 749	321	0.116	5_n809 738	513	0.166	5_n838 756	639	0.216	5_n872 342	694
0.017	5_n778 721	88	0.067	5_n789 070	325	0.117	5_n810 251	516	0.167	5_n839 395	640	0.217	5_n873 036	695
0.018	5_n778 809	94	0.068	5_n789 395	330	0.118	5_n810 767	519	0.168	5_n840 035	643	0.218	5_n873 731	695
0.019	5_n778 903	98	0.069	5_n789 725	334	0.119	5_n811 286	522	0.169	5_n840 678	644	0.219	5_n874 426	695
0.020	5_n779 001	103	0.070	5_n790 059	338	0.120	5_n811 808	525	0.170	5_n841 322	645	0.220	5_n875 121	696
0.021	5_n779 104	108	0.071	5_n790 397	343	0.121	5_n812 333	529	0.171	5_n841 967	648	0.221	5_n875 817	696
0.022	5_n779 212	113	0.072	5_n790 740	346	0.122	5_n812 862	532	0.172	5_n842 615	649	0.222	5_n876 513	697
0.023	5_n779 325	118	0.073	5_n791 086	351	0.123	5_n813 394	534	0.173	5_n843 264	651	0.223	5_n877 210	696
0.024	5_n779 443	123	0.074	5_n791 437	356	0.124	5_n813 928	537	0.174	5_n843 915	652	0.224	5_n877 906	697
0.025	5_n779 566	128	0.075	5_n791 793	359	0.125	5_n814 465	541	0.175	5_n844 567	654	0.225	5_n878 603	697
0.026	5_n779 694	133	0.076	5_n792 152	364	0.126	5_n815 006	544	0.176	5_n845 221	655	0.226	5_n879 300	698
0.027	5_n779 827	137	0.077	5_n792 516	368	0.127	5_n815 550	546	0.177	5_n845 876	657	0.227	5_n879 998	697
0.028	5_n779 964	143	0.078	5_n792 884	372	0.128	5_n816 096	549	0.178	5_n846 533	659	0.228	5_n880 695	698
0.029	5_n780 107	148	0.079	5_n793 256	377	0.129	5_n816 645	553	0.179	5_n847 192	659	0.229	5_n881 393	698
0.030	5_n780 255	152	0.080	5_n793 633	380	0.130	5_n817 198	555	0.180	5_n847 851	662	0.230	5_n882 091	697
0.031	5_n780 407	158	0.081	5_n794 013	384	0.131	5_n817 753	558	0.181	5_n848 513	662	0.231	5_n882 788	698
0.032	5_n780 565	162	0.082	5_n794 397	389	0.132	5_n818 311	561	0.182	5_n849 175	665	0.232	5_n883 486	698
0.033	5_n780 727	168	0.083	5_n794 786	393	0.133	5_n818 872	563	0.183	5_n849 840	665	0.233	5_n884 184	698
0.034	5_n780 895	172	0.084	5_n795 179	396	0.134	5_n819 435	566	0.184	5_n850 505	667	0.234	5_n884 882	698
0.035	5_n781 067	177	0.085	5_n795 575	401	0.135	5_n820 001	569	0.185	5_n851 172	668	0.235	5_n885 580	698
0.036	5_n781 244	181	0.086	5_n795 976	404	0.136	5_n820 570	571	0.186	5_n851 840	669	0.236	5_n886 278	698
0.037	5_n781 425	187	0.087	5_n796 380	409	0.137	5_n821 141	575	0.187	5_n852 509	671	0.237	5_n886 976	697
0.038	5_n781 612	192	0.088	5_n796 789	412	0.138	5_n821 716	577	0.188	5_n853 180	671	0.238	5_n887 673	698
0.039	5_n781 804	196	0.089	5_n797 201	417	0.139	5_n822 293	579	0.189	5_n853 851	673	0.239	5_n888 371	698
0.040	5_n782 000	201	0.090	5_n797 618	420	0.140	5_n822 872	582	0.190	5_n854 524	674	0.240	5_n889 069	697
0.041	5_n782 201	206	0.091	5_n798 038	424	0.141	5_n823 454	585	0.191	5_n855 198	675	0.241	5_n889 766	697
0.042	5_n782 407	210	0.092	5_n798 462	428	0.142	5_n824 039	587	0.192	5_n855 873	677	0.242	5_n890 463	697
0.043	5_n782 617	216	0.093	5_n798 890	432	0.143	5_n824 626	589	0.193	5_n856 550	677	0.243	5_n891 160	697
0.044	5_n782 833	220	0.094	5_n799 322	436	0.144	5_n825 215	592	0.194	5_n857 227	678	0.244	5_n891 857	696
0.045	5_n783 053	225	0.095	5_n799 758	439	0.145	5_n825 807	595	0.195	5_n857 905	680	0.245	5_n892 553	696
0.046	5_n783 278	230	0.096	5_n800 197	443	0.146	5_n826 402	597	0.196	5_n858 585	680	0.246	5_n893 249	696
0.047	5_n783 508	234	0.097	5_n800 640	447	0.147	5_n826 999	599	0.197	5_n859 265	681	0.247	5_n893 945	695
0.048	5_n783 742	239	0.098	5_n801 087	451	0.148	5_n827 598	601	0.198	5_n859 946	682	0.248	5_n894 640	696
0.049	5_n783 981	244	0.099	5_n801 538	454	0.149	5_n828 199	604	0.199	5_n860 628	684	0.249	5_n895 336	694
0.050	5_n784 225		0.100	5_n801 992		0.150	5_n828 803		0.200	5_n861 312		0.250	5_n896 030	

Tafel VII.

$\log\{P_1^{S}(m)\}$.

± m	P	Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ
0.000	7.028 618	1	0.050	7.026 920	68	0.100	7.021 806	137	0.150	7.013 210	208	0.200	7.001 021	282
0.001	7.028 617	2	0.051	7.026 852	70	0.101	7.021 669	139	0.151	7.013 002	210	0.201	7.000 739	283
0.002	7.028 615	3	0.052	7.026 782	72	0.102	7.021 530	141	0.152	7.012 792	211	0.202	7.000 456	284
0.003	7.028 612	5	0.053	7.026 710	72	0.103	7.021 389	141	0.153	7.012 581	212	0.203	7.000 172	286
0.004	7.028 607	6	0.054	7.026 638	75	0.104	7.021 248	143	0.154	7.012 369	214	0.204	6.999 886	288
0.005	7.028 601	7	0.055	7.026 563	75	0.105	7.021 105	145	0.155	7.012 155	215	0.205	6.999 598	289
0.006	7.028 594	9	0.056	7.026 488	77	0.106	7.020 960	146	0.156	7.011 940	217	0.206	6.999 309	290
0.007	7.028 585	10	0.057	7.026 411	78	0.107	7.020 814	147	0.157	7.011 723	218	0.207	6.999 019	292
0.008	7.028 575	12	0.058	7.026 333	80	0.108	7.020 667	149	0.158	7.011 505	220	0.208	6.998 727	294
0.009	7.028 563	13	0.059	7.026 253	81	0.109	7.020 518	150	0.159	7.011 285	221	0.209	6.998 433	295
0.010	7.028 550	14	0.060	7.026 172	82	0.110	7.020 368	151	0.160	7.011 064	222	0.210	6.998 138	297
0.011	7.028 536	16	0.061	7.026 090	84	0.111	7.020 217	153	0.161	7.010 842	224	0.211	6.997 841	298
0.012	7.028 520	16	0.062	7.026 006	85	0.112	7.020 064	154	0.162	7.010 618	226	0.212	6.997 543	299
0.013	7.028 504	19	0.063	7.025 921	86	0.113	7.019 910	156	0.163	7.010 392	227	0.213	6.997 244	301
0.014	7.028 485	19	0.064	7.025 835	88	0.114	7.019 754	157	0.164	7.010 165	228	0.214	6.996 943	303
0.015	7.028 466	21	0.065	7.025 747	89	0.115	7.019 597	159	0.165	7.009 937	230	0.215	6.996 640	304
0.016	7.028 445	23	0.066	7.025 658	91	0.116	7.019 438	159	0.166	7.009 707	231	0.216	6.996 336	306
0.017	7.028 422	24	0.067	7.025 567	92	0.117	7.019 279	162	0.167	7.009 476	233	0.217	6.996 030	307
0.018	7.028 398	25	0.068	7.025 475	93	0.118	7.019 117	162	0.168	7.009 243	234	0.218	6.995 723	309
0.019	7.028 373	26	0.069	7.025 382	95	0.119	7.018 955	164	0.169	7.009 009	235	0.219	6.995 414	310
0.020	7.028 347	28	0.070	7.025 287	96	0.120	7.018 791	166	0.170	7.008 774	238	0.220	6.995 104	312
0.021	7.028 319	29	0.071	7.025 191	97	0.121	7.018 625	167	0.171	7.008 536	238	0.221	6.994 792	314
0.022	7.028 290	31	0.072	7.025 094	99	0.122	7.018 458	168	0.172	7.008 298	240	0.222	6.994 478	315
0.023	7.028 259	32	0.073	7.024 995	100	0.123	7.018 290	170	0.173	7.008 058	242	0.223	6.994 163	316
0.024	7.028 227	33	0.074	7.024 895	102	0.124	7.018 120	171	0.174	7.007 816	242	0.224	6.993 847	318
0.025	7.028 194	35	0.075	7.024 793	103	0.125	7.017 949	172	0.175	7.007 574	245	0.225	6.993 529	320
0.026	7.028 159	36	0.076	7.024 690	104	0.126	7.017 777	174	0.176	7.007 329	246	0.226	6.993 209	321
0.027	7.028 123	37	0.077	7.024 586	106	0.127	7.017 603	176	0.177	7.007 083	247	0.227	6.992 888	322
0.028	7.028 086	39	0.078	7.024 480	107	0.128	7.017 427	176	0.178	7.006 836	249	0.228	6.992 566	325
0.029	7.028 047	40	0.079	7.024 373	108	0.129	7.017 251	179	0.179	7.006 587	250	0.229	6.992 241	325
0.030	7.028 007	41	0.080	7.024 265	110	0.130	7.017 072	179	0.180	7.006 337	252	0.230	6.991 916	328
0.031	7.027 966	43	0.081	7.024 155	111	0.131	7.016 893	181	0.181	7.006 085	253	0.231	6.991 588	329
0.032	7.027 923	44	0.082	7.024 044	113	0.132	7.016 712	183	0.182	7.005 832	255	0.232	6.991 259	330
0.033	7.027 879	45	0.083	7.023 931	114	0.133	7.016 529	184	0.183	7.005 577	256	0.233	6.990 929	332
0.034	7.027 834	47	0.084	7.023 817	115	0.134	7.016 345	185	0.184	7.005 321	257	0.234	6.990 597	333
0.035	7.027 787	48	0.085	7.023 702	117	0.135	7.016 160	187	0.185	7.005 064	260	0.235	6.990 264	336
0.036	7.027 739	50	0.086	7.023 585	118	0.136	7.015 973	188	0.186	7.004 804	260	0.236	6.989 928	336
0.037	7.027 689	51	0.087	7.023 467	119	0.137	7.015 785	189	0.187	7.004 544	262	0.237	6.989 592	338
0.038	7.027 638	52	0.088	7.023 348	121	0.138	7.015 596	191	0.188	7.004 282	264	0.238	6.989 254	340
0.039	7.027 586	54	0.089	7.023 227	122	0.139	7.015 405	193	0.189	7.004 018	265	0.239	6.988 914	342
0.040	7.027 532	55	0.090	7.023 105	124	0.140	7.015 212	193	0.190	7.003 753	266	0.240	6.988 572	342
0.041	7.027 477	56	0.091	7.022 981	125	0.141	7.015 019	196	0.191	7.003 487	268	0.241	6.988 230	345
0.042	7.027 421	58	0.092	7.022 856	126	0.142	7.014 823	196	0.192	7.003 219	270	0.242	6.987 885	346
0.043	7.027 363	59	0.093	7.022 730	128	0.143	7.014 627	198	0.193	7.002 949	271	0.243	6.987 539	348
0.044	7.027 304	61	0.094	7.022 602	129	0.144	7.014 429	200	0.194	7.002 678	272	0.244	6.987 191	349
0.045	7.027 243	62	0.095	7.022 473	131	0.145	7.014 229	201	0.195	7.002 406	274	0.245	6.986 842	351
0.046	7.027 181	63	0.096	7.022 342	132	0.146	7.014 028	202	0.196	7.002 132	276	0.246	6.986 491	352
0.047	7.027 118	64	0.097	7.022 210	133	0.147	7.013 826	204	0.197	7.001 856	277	0.247	6.986 139	354
0.048	7.027 054	66	0.098	7.022 077	135	0.148	7.013 622	205	0.198	7.001 579	278	0.248	6.985 785	356
0.049	7.026 988	68	0.099	7.021 942	136	0.149	7.013 417	207	0.199	7.001 301	280	0.249	6.985 429	357
0.050	7.026 920		0.100	7.021 806		0.150	7.013 210		0.200	7.001 021		0.250	6.985 072	

Tafel VII.

$\log\{P_1^0(m)\}$.

± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ
0.000	5.023 962	3	0.050	5.029 981	240	0.100	5.047 150	443	0.150	5.073 082	587	0.200	5.104 555	663
0.001	5.023 965	7	0.051	5.030 221	245	0.101	5.047 593	446	0.151	5.073 669	589	0.201	5.105 218	663
0.002	5.023 972	12	0.052	5.030 466	249	0.102	5.048 039	450	0.152	5.074 258	591	0.202	5.105 881	664
0.003	5.023 984	17	0.053	5.030 715	253	0.103	5.048 489	453	0.153	5.074 849	593	0.203	5.106 545	665
0.004	5.024 001	22	0.054	5.030 968	258	0.104	5.048 942	456	0.154	5.075 442	595	0.204	5.107 210	666
0.005	5.024 023	27	0.055	5.031 226	262	0.105	5.049 398	460	0.155	5.076 037	597	0.205	5.107 876	666
0.006	5.024 050	32	0.056	5.031 488	267	0.106	5.049 858	464	0.156	5.076 634	599	0.206	5.108 542	667
0.007	5.024 082	36	0.057	5.031 755	271	0.107	5.050 322	466	0.157	5.077 233	602	0.207	5.109 209	668
0.008	5.024 118	42	0.058	5.032 026	276	0.108	5.050 788	470	0.158	5.077 835	603	0.208	5.109 877	669
0.009	5.024 160		0.059	5.032 302		0.109	5.051 258		0.159	5.078 438		0.209	5.110 546	
		46			279			474			605			669
0.010	5.024 206	51	0.060	5.032 581	285	0.110	5.051 732	476	0.160	5.079 043	607	0.210	5.111 215	669
0.011	5.024 257	56	0.061	5.032 866	288	0.111	5.052 208	480	0.161	5.079 650	610	0.211	5.111 884	670
0.012	5.024 313	61	0.062	5.033 154	293	0.112	5.052 688	483	0.162	5.080 260	611	0.212	5.112 554	671
0.013	5.024 374	66	0.063	5.033 447	297	0.113	5.053 171	486	0.163	5.080 871	613	0.213	5.113 225	671
0.014	5.024 440	70	0.064	5.033 744	302	0.114	5.053 657	490	0.164	5.081 484	614	0.214	5.113 896	672
0.015	5.024 510	76	0.065	5.034 046	306	0.115	5.054 147	493	0.165	5.082 098	617	0.215	5.114 568	672
0.016	5.024 586	80	0.066	5.034 352	310	0.116	5.054 640	495	0.166	5.082 715	618	0.216	5.115 240	673
0.017	5.024 666	85	0.067	5.034 662	314	0.117	5.055 135	499	0.167	5.083 333	620	0.217	5.115 913	673
0.018	5.024 751	90	0.068	5.034 976	319	0.118	5.055 634	502	0.168	5.083 953	622	0.218	5.116 586	673
0.019	5.024 841		0.069	5.035 295		0.119	5.056 136		0.169	5.084 575		0.219	5.117 259	
		95			322			505			623			674
0.020	5.024 936	99	0.070	5.035 617	327	0.120	5.056 641	508	0.170	5.085 198	625	0.220	5.117 933	674
0.021	5.025 035	105	0.071	5.035 944	331	0.121	5.057 149	512	0.171	5.085 823	627	0.221	5.118 607	675
0.022	5.025 140	109	0.072	5.036 275	335	0.122	5.057 661	514	0.172	5.086 450	629	0.222	5.119 282	675
0.023	5.025 249	114	0.073	5.036 610	340	0.123	5.058 175	517	0.173	5.087 079	630	0.223	5.119 957	675
0.024	5.025 363	118	0.074	5.036 950	343	0.124	5.058 692	520	0.174	5.087 709	631	0.224	5.120 632	675
0.025	5.025 481	124	0.075	5.037 293	347	0.125	5.059 212	522	0.175	5.088 340	633	0.225	5.121 307	675
0.026	5.025 605	128	0.076	5.037 640	352	0.126	5.059 734	526	0.176	5.088 973	635	0.226	5.121 982	676
0.027	5.025 733	133	0.077	5.037 992	356	0.127	5.060 260	529	0.177	5.089 608	636	0.227	5.122 658	676
0.028	5.025 866	138	0.078	5.038 348	359	0.128	5.060 789	531	0.178	5.090 244	637	0.228	5.123 334	676
0.029	5.026 004		0.079	5.038 707		0.129	5.061 320		0.179	5.090 881		0.229	5.124 010	
		143			364			534			639			676
0.030	5.026 147	147	0.080	5.039 071	367	0.130	5.061 854	537	0.180	5.091 520	640	0.230	5.124 686	676
0.031	5.026 294	152	0.081	5.039 438	372	0.131	5.062 391	540	0.181	5.092 160	642	0.231	5.125 362	676
0.032	5.026 446	157	0.082	5.039 810	375	0.132	5.062 931	542	0.182	5.092 802	643	0.232	5.126 038	677
0.033	5.026 603	162	0.083	5.040 185	380	0.133	5.063 473	545	0.183	5.093 445	645	0.233	5.126 715	676
0.034	5.026 765	166	0.084	5.040 565	383	0.134	5.064 018	548	0.184	5.094 090	645	0.234	5.127 391	676
0.035	5.026 931	171	0.085	5.040 948	387	0.135	5.064 566	550	0.185	5.094 735	647	0.235	5.128 067	677
0.036	5.027 102	175	0.086	5.041 335	391	0.136	5.065 116	553	0.186	5.095 382	648	0.236	5.128 744	676
0.037	5.027 277	181	0.087	5.041 726	395	0.137	5.065 669	556	0.187	5.096 030	650	0.237	5.129 420	676
0.038	5.027 458	185	0.088	5.042 121	399	0.138	5.066 225	558	0.188	5.096 680	650	0.238	5.130 096	676
0.039	5.027 643		0.089	5.042 520		0.139	5.066 783		0.189	5.097 330		0.239	5.130 772	
		189			402			560			652			676
0.040	5.027 832	194	0.090	5.042 922	407	0.140	5.067 343	564	0.190	5.097 982	652	0.240	5.131 448	676
0.041	5.028 026	199	0.091	5.043 329	410	0.141	5.067 907	565	0.191	5.098 634	654	0.241	5.132 124	676
0.042	5.028 225	204	0.092	5.043 739	413	0.142	5.068 472	568	0.192	5.099 288	655	0.242	5.132 800	675
0.043	5.028 429	208	0.093	5.044 152	418	0.143	5.069 040	571	0.193	5.099 943	656	0.243	5.133 475	675
0.044	5.028 637	213	0.094	5.044 570	421	0.144	5.069 611	572	0.194	5.100 599	657	0.244	5.134 150	675
0.045	5.028 850	217	0.095	5.044 991	424	0.145	5.070 183	576	0.195	5.101 256	658	0.245	5.134 825	675
0.046	5.029 067	222	0.096	5.045 415	429	0.146	5.070 759	577	0.196	5.101 914	659	0.246	5.135 500	674
0.047	5.029 289	226	0.097	5.045 844	432	0.147	5.071 336	580	0.197	5.102 573	660	0.247	5.136 174	674
0.048	5.029 515	231	0.098	5.046 276	435	0.148	5.071 916	582	0.198	5.103 233	661	0.248	5.136 848	674
0.049	5.029 746	235	0.099	5.046 711	439	0.149	5.072 498	584	0.199	5.103 894	661	0.249	5.137 522	673
0.050	5.029 981		0.100	5.047 150		0.150	5.073 082		0.200	5.104 555		0.250	5.138 195	

Tafel VII.

$\log\{P_1^{10}(m)\}$

$\pm m$	P	Δ	$\pm m$	P	Δ	$\pm m$	P	$-\Delta$	$\pm m$	P	$-\Delta$	$\pm m$	P	$-\Delta$
0.000	6_n380 801	1	0.050	6_n379 085	69	0.100	6_n373 918	139	0.150	6_n365 236	210	0.200	6_n352 932	284
0.001	6_n380 800	2	0.051	6_n379 016	71	0.101	6_n373 779	140	0.151	6_n365 026	211	0.201	6_n352 648	286
0.002	6_n380 798	3	0.052	6_n378 945	72	0.102	6_n373 639	142	0.152	6_n364 815	213	0.202	6_n352 362	287
0.003	6_n380 795	5	0.053	6_n378 873	74	0.103	6_n373 497	143	0.153	6_n364 602	215	0.203	6_n352 075	288
0.004	6_n380 790	6	0.054	6_n378 799	75	0.104	6_n373 354	145	0.154	6_n364 387	216	0.204	6_n351 787	290
0.005	6_n380 784	8	0.055	6_n378 724	76	0.105	6_n373 209	146	0.155	6_n364 171	217	0.205	6_n351 497	292
0.006	6_n380 776	9	0.056	6_n378 648	77	0.106	6_n373 063	147	0.156	6_n363 954	219	0.206	6_n351 205	293
0.007	6_n380 767	10	0.057	6_n378 571	80	0.107	6_n372 916	149	0.157	6_n363 735	220	0.207	6_n350 912	295
0.008	6_n380 757	12	0.058	6_n378 491	80	0.108	6_n372 767	150	0.158	6_n363 515	222	0.208	6_n350 617	296
0.009	6_n380 745		0.059	6_n378 411		0.109	6_n372 617		0.159	6_n363 293		0.209	6_n350 321	
		13			82			151			223			298
0.010	6_n380 732	14	0.060	6_n378 329	83	0.110	6_n372 466	153	0.160	6_n363 070	225	0.210	6_n350 023	299
0.011	6_n380 718	16	0.061	6_n378 246	85	0.111	6_n372 313	155	0.161	6_n362 845	226	0.211	6_n349 724	301
0.012	6_n380 702	17	0.062	6_n378 161	85	0.112	6_n372 158	155	0.162	6_n362 619	228	0.212	6_n349 423	302
0.013	6_n380 685	19	0.063	6_n378 076	88	0.113	6_n372 003	158	0.163	6_n362 391	229	0.213	6_n349 121	304
0.014	6_n380 666	20	0.064	6_n377 988	89	0.114	6_n371 845	158	0.164	6_n362 162	230	0.214	6_n348 817	305
0.015	6_n380 646	21	0.065	6_n377 899	90	0.115	6_n371 687	160	0.165	6_n361 932	232	0.215	6_n348 512	307
0.016	6_n380 625	22	0.066	6_n377 809	91	0.116	6_n371 527	162	0.166	6_n361 700	234	0.216	6_n348 205	309
0.017	6_n380 603	24	0.067	6_n377 718	93	0.117	6_n371 365	163	0.167	6_n361 466	235	0.217	6_n347 896	309
0.018	6_n380 579	26	0.068	6_n377 625	94	0.118	6_n371 202	164	0.168	6_n361 231	236	0.218	6_n347 587	312
0.019	6_n380 553		0.069	6_n377 531		0.119	6_n371 038		0.169	6_n360 995		0.219	6_n347 275	
		27			96			166			238			313
0.020	6_n380 526	28	0.070	6_n377 435	97	0.120	6_n370 872	167	0.170	6_n360 757	239	0.220	6_n346 962	315
0.021	6_n380 498	29	0.071	6_n377 338	98	0.121	6_n370 705	169	0.171	6_n360 518	241	0.221	6_n346 647	316
0.022	6_n380 469	31	0.072	6_n377 240	100	0.122	6_n370 536	170	0.172	6_n360 277	242	0.222	6_n346 331	317
0.023	6_n380 438	32	0.073	6_n377 140	101	0.123	6_n370 366	171	0.173	6_n360 035	244	0.223	6_n346 014	320
0.024	6_n380 406	34	0.074	6_n377 039	103	0.124	6_n370 195	173	0.174	6_n359 791	245	0.224	6_n345 694	320
0.025	6_n380 372	35	0.075	6_n376 936	104	0.125	6_n370 022	174	0.175	6_n359 546	247	0.225	6_n345 374	323
0.026	6_n380 337	36	0.076	6_n376 832	105	0.126	6_n369 848	176	0.176	6_n359 299	248	0.226	6_n345 051	324
0.027	6_n380 301	38	0.077	6_n376 727	107	0.127	6_n369 672	177	0.177	6_n359 051	250	0.227	6_n344 727	325
0.028	6_n380 263	39	0.078	6_n376 620	108	0.128	6_n369 495	178	0.178	6_n358 801	251	0.228	6_n344 402	327
0.029	6_n380 224		0.079	6_n376 512		0.129	6_n369 317		0.179	6_n358 550		0.229	6_n344 075	
		41			110			180			253			329
0.030	6_n380 183	41	0.080	6_n376 402	111	0.130	6_n369 137	182	0.180	6_n358 297	254	0.230	6_n343 746	330
0.031	6_n380 142	44	0.081	6_n376 291	112	0.131	6_n368 955	183	0.181	6_n358 043	255	0.231	6_n343 416	332
0.032	6_n380 098	44	0.082	6_n376 179	114	0.132	6_n368 772	184	0.182	6_n357 788	257	0.232	6_n343 084	333
0.033	6_n380 054	46	0.083	6_n376 065	115	0.133	6_n368 588	185	0.183	6_n357 531	259	0.233	6_n342 751	335
0.034	6_n380 008	48	0.084	6_n375 950	116	0.134	6_n368 403	188	0.184	6_n357 272	260	0.234	6_n342 416	336
0.035	6_n379 960	48	0.085	6_n375 834	118	0.135	6_n368 215	188	0.185	6_n357 012	261	0.235	6_n342 080	338
0.036	6_n379 912	50	0.086	6_n375 716	120	0.136	6_n368 027	190	0.186	6_n356 751	263	0.236	6_n341 742	340
0.037	6_n379 862	52	0.087	6_n375 596	120	0.137	6_n367 837	192	0.187	6_n356 488	265	0.237	6_n341 402	341
0.038	6_n379 810	53	0.088	6_n375 476	123	0.138	6_n367 645	192	0.188	6_n356 223	266	0.238	6_n341 061	343
0.039	6_n379 757		0.089	6_n375 353		0.139	6_n367 453		0.189	6_n355 957		0.239	6_n340 718	
		54			123			195			267			344
0.040	6_n379 703	55	0.090	6_n375 230	125	0.140	6_n367 258	195	0.190	6_n355 690	269	0.240	6_n340 374	346
0.041	6_n379 648	57	0.091	6_n375 105	126	0.141	6_n367 063	198	0.191	6_n355 421	271	0.241	6_n340 028	347
0.042	6_n379 591	59	0.092	6_n374 979	128	0.142	6_n366 865	198	0.192	6_n355 150	272	0.242	6_n339 681	349
0.043	6_n379 532	60	0.093	6_n374 851	129	0.143	6_n366 667	200	0.193	6_n354 878	273	0.243	6_n339 332	351
0.044	6_n379 472	61	0.094	6_n374 722	130	0.144	6_n366 467	202	0.194	6_n354 605	275	0.244	6_n338 981	352
0.045	6_n379 411	62	0.095	6_n374 592	132	0.145	6_n366 265	202	0.195	6_n354 330	277	0.245	6_n338 629	354
0.046	6_n379 349	64	0.096	6_n374 460	134	0.146	6_n366 063	205	0.196	6_n354 053	278	0.246	6_n338 275	355
0.047	6_n379 285	65	0.097	6_n374 326	134	0.147	6_n365 858	206	0.197	6_n353 775	279	0.247	6_n337 920	357
0.048	6_n379 220	67	0.098	6_n374 192	136	0.148	6_n365 652	207	0.198	6_n353 496	282	0.248	6_n337 563	358
0.049	6_n379 153	68	0.099	6_n374 056	138	0.149	6_n365 445	209	0.199	6_n353 214	282	0.249	6_n337 205	360
0.050	6_n379 085		0.100	6_n373 918		0.150	6_n365 236		0.200	6_n352 932		0.250	6_n336 845	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2^0(n)\}$.

vergl. pag. 56.

± n	Q	+ Δ	± n	Q	+ Δ	± n	Q	+ Δ	± n	Q	+ Δ	± n	Q	+ Δ
0.000	8.920 819	2	0.050	8.927 285	259	0.100	8.946 125	494	0.150	8.975 815	690	0.200	9.014 240	842
0.001	8.920 821	8	0.051	8.927 544	264	0.101	8.946 619	498	0.151	8.976 505	694	0.201	9.015 082	845
0.002	8.920 829	13	0.052	8.927 808	269	0.102	8.947 117	502	0.152	8.977 199	698	0.202	9.015 927	847
0.003	8.920 842	19	0.053	8.928 077	274	0.103	8.947 619	507	0.153	8.977 897	700	0.203	9.016 774	849
0.004	8.920 861	23	0.054	8.928 351	280	0.104	8.948 126	511	0.154	8.978 597	705	0.204	9.017 623	852
0.005	8.920 884	29	0.055	8.928 631	284	0.105	8.948 637	515	0.155	8.979 302	707	0.205	9.018 475	855
0.006	8.920 913	33	0.056	8.928 915	288	0.106	8.949 152	520	0.156	8.980 009	712	0.206	9.019 330	857
0.007	8.920 946	40	0.057	8.929 203	294	0.107	8.949 672	524	0.157	8.980 721	714	0.207	9.020 187	859
0.008	8.920 986	44	0.058	8.929 497	299	0.108	8.950 196	528	0.158	8.981 435	718	0.208	9.021 046	862
0.009	8.921 030	49	0.059	8.929 796	304	0.109	8.950 724	533	0.159	8.982 153	721	0.209	9.021 908	864
0.010	8.921 079	55	0.060	8.930 100	308	0.110	8.951 257	536	0.160	8.982 874	725	0.210	9.022 772	867
0.011	8.921 134	60	0.061	8.930 408	314	0.111	8.951 793	541	0.161	8.983 599	727	0.211	9.023 639	869
0.012	8.921 194	65	0.062	8.930 722	318	0.112	8.952 334	545	0.162	8.984 326	731	0.212	9.024 508	871
0.013	8.921 259	70	0.063	8.931 040	323	0.113	8.952 879	549	0.163	8.985 057	735	0.213	9.025 379	874
0.014	8.921 329	76	0.064	8.931 363	328	0.114	8.953 428	553	0.164	8.985 792	737	0.214	9.026 253	876
0.015	8.921 405	80	0.065	8.931 691	333	0.115	8.953 981	557	0.165	8.986 529	741	0.215	9.027 129	878
0.016	8.921 485	86	0.066	8.932 024	337	0.116	8.954 538	562	0.166	8.987 270	744	0.216	9.028 007	881
0.017	8.921 571	91	0.067	8.932 361	343	0.117	8.955 100	565	0.167	8.988 014	747	0.217	9.028 888	883
0.018	8.921 662	96	0.068	8.932 704	347	0.118	8.955 665	570	0.168	8.988 761	750	0.218	9.029 771	885
0.019	8.921 758	102	0.069	8.933 051	352	0.119	8.956 235	574	0.169	8.989 511	754	0.219	9.030 656	887
0.020	8.921 860	106	0.070	8.933 403	357	0.120	8.956 809	577	0.170	8.990 265	757	0.220	9.031 543	890
0.021	8.921 966	112	0.071	8.933 760	361	0.121	8.957 386	582	0.171	8.991 022	759	0.221	9.032 433	892
0.022	8.922 078	117	0.072	8.934 121	367	0.122	8.957 968	586	0.172	8.991 781	763	0.222	9.033 325	894
0.023	8.922 195	122	0.073	8.934 488	371	0.123	8.958 554	589	0.173	8.992 544	766	0.223	9.034 219	896
0.024	8.922 317	127	0.074	8.934 859	375	0.124	8.959 143	594	0.174	8.993 310	769	0.224	9.035 115	898
0.025	8.922 444	133	0.075	8.935 234	381	0.125	8.959 737	597	0.175	8.994 079	772	0.225	9.036 013	901
0.026	8.922 577	137	0.076	8.935 615	385	0.126	8.960 334	602	0.176	8.994 851	775	0.226	9.036 914	902
0.027	8.922 714	143	0.077	8.936 000	390	0.127	8.960 936	605	0.177	8.995 626	778	0.227	9.037 816	905
0.028	8.922 857	148	0.078	8.936 390	394	0.128	8.961 541	610	0.178	8.996 404	781	0.228	9.038 721	907
0.029	8.923 005	153	0.079	8.936 784	400	0.129	8.962 151	613	0.179	8.997 185	784	0.229	9.039 628	908
0.030	8.923 158	158	0.080	8.937 184	403	0.130	8.962 764	617	0.180	8.997 969	787	0.230	9.040 536	911
0.031	8.923 316	163	0.081	8.937 587	409	0.131	8.963 381	621	0.181	8.998 756	789	0.231	9.041 447	913
0.032	8.923 479	168	0.082	8.937 996	413	0.132	8.964 002	625	0.182	8.999 545	793	0.232	9.042 360	915
0.033	8.923 647	174	0.083	8.938 409	418	0.133	8.964 627	628	0.183	9.000 338	796	0.233	9.043 275	917
0.034	8.923 821	178	0.084	8.938 827	422	0.134	8.965 255	632	0.184	9.001 134	798	0.234	9.044 192	919
0.035	8.923 999	184	0.085	8.939 249	427	0.135	8.965 887	637	0.185	9.001 932	801	0.235	9.045 111	921
0.036	8.924 183	189	0.086	8.939 676	431	0.136	8.966 524	639	0.186	9.002 733	804	0.236	9.046 032	923
0.037	8.924 372	193	0.087	8.940 107	436	0.137	8.967 163	644	0.187	9.003 537	807	0.237	9.046 955	925
0.038	8.924 565	199	0.088	8.940 543	441	0.138	8.967 807	647	0.188	9.004 344	810	0.238	9.047 880	926
0.039	8.924 764	204	0.089	8.940 984	445	0.139	8.968 454	651	0.189	9.005 154	813	0.239	9.048 806	929
0.040	8.924 968	209	0.090	8.941 429	449	0.140	8.969 105	655	0.190	9.005 967	815	0.240	9.049 735	930
0.041	8.925 177	214	0.091	8.941 878	454	0.141	8.969 760	658	0.191	9.006 782	818	0.241	9.050 665	933
0.042	8.925 391	219	0.092	8.942 332	459	0.142	8.970 418	662	0.192	9.007 600	821	0.242	9.051 598	934
0.043	8.925 610	224	0.093	8.942 791	463	0.143	8.971 080	666	0.193	9.008 421	823	0.243	9.052 532	936
0.044	8.925 834	230	0.094	8.943 254	467	0.144	8.971 746	669	0.194	9.009 244	826	0.244	9.053 468	938
0.045	8.926 064	234	0.095	8.943 721	472	0.145	8.972 415	673	0.195	9.010 070	829	0.245	9.054 406	939
0.046	8.926 298	239	0.096	8.944 193	476	0.146	8.973 088	676	0.196	9.010 899	831	0.246	9.055 345	942
0.047	8.926 537	244	0.097	8.944 669	481	0.147	8.973 764	680	0.197	9.011 730	835	0.247	9.056 287	943
0.048	8.926 781	250	0.098	8.945 150	485	0.148	8.974 444	684	0.198	9.012 565	836	0.248	9.057 230	945
0.049	8.927 031	254	0.099	8.945 635	490	0.149	8.975 128	687	0.199	9.013 401	839	0.249	9.058 175	946
0.050	8.927 285		0.100	8.946 125		0.150	8.975 815		0.200	9.014 240		0.250	9.059 121	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2^1(n)\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	8,,920 819	1	0.050	8,,918 642	88	0.100	8,,912 045	178	0.150	8,,900 822	274	0.200	8,,884 607	379
0.001	8,,920 818	3	0.051	8,,918 554	90	0.101	8,,911 867	180	0.151	8,,900 548	276	0.201	8,,884 228	381
0.002	8,,920 815	4	0.052	8,,918 464	92	0.102	8,,911 687	182	0.152	8,,900 272	277	0.202	8,,883 847	383
0.003	8,,920 811	6	0.053	8,,918 372	93	0.103	8,,911 505	184	0.153	8,,899 995	280	0.203	8,,883 464	386
0.004	8,,920 805	8	0.054	8,,918 279	96	0.104	8,,911 321	186	0.154	8,,899 715	282	0.204	8,,883 078	388
0.005	8,,920 797	9	0.055	8,,918 183	97	0.105	8,,911 135	187	0.155	8,,899 433	284	0.205	8,,882 690	390
0.006	8,,920 788	12	0.056	8,,918 086	98	0.106	8,,910 948	189	0.156	8,,899 149	286	0.206	8,,882 300	392
0.007	8,,920 776	13	0.057	8,,917 988	101	0.107	8,,910 759	191	0.157	8,,898 863	288	0.207	8,,881 908	394
0.008	8,,920 763	15	0.058	8,,917 887	102	0.108	8,,910 568	194	0.158	8,,898 575	290	0.208	8,,881 514	397
0.009	8,,920 748	16	0.059	8,,917 785	104	0.109	8,,910 374	194	0.159	8,,898 285	291	0.209	8,,881 117	399
0.010	8,,920 732	18	0.060	8,,917 681	106	0.110	8,,910 180	197	0.160	8,,897 994	294	0.210	8,,880 718	401
0.011	8,,920 714	20	0.061	8,,917 575	108	0.111	8,,909 983	199	0.161	8,,897 700	296	0.211	8,,880 317	403
0.012	8,,920 694	22	0.062	8,,917 467	109	0.112	8,,909 784	200	0.162	8,,897 404	298	0.212	8,,879 914	406
0.013	8,,920 672	23	0.063	8,,917 358	112	0.113	8,,909 584	203	0.163	8,,897 106	301	0.213	8,,879 508	408
0.014	8,,920 649	26	0.064	8,,917 246	113	0.114	8,,909 381	204	0.164	8,,896 805	302	0.214	8,,879 100	411
0.015	8,,920 623	27	0.065	8,,917 133	114	0.115	8,,909 177	206	0.165	8,,896 503	304	0.215	8,,878 689	412
0.016	8,,920 596	28	0.066	8,,917 019	117	0.116	8,,908 971	208	0.166	8,,896 199	306	0.216	8,,878 277	415
0.017	8,,920 568	31	0.067	8,,916 902	118	0.117	8,,908 763	210	0.167	8,,895 893	308	0.217	8,,877 862	418
0.018	8,,920 537	32	0.068	8,,916 784	120	0.118	8,,908 553	212	0.168	8,,895 585	311	0.218	8,,877 444	419
0.019	8,,920 505	34	0.069	8,,916 664	122	0.119	8,,908 341	214	0.169	8,,895 274	312	0.219	8,,877 025	422
0.020	8,,920 471	35	0.070	8,,916 542	124	0.120	8,,908 127	215	0.170	8,,894 962	315	0.220	8,,876 603	425
0.021	8,,920 436	38	0.071	8,,916 418	125	0.121	8,,907 912	218	0.171	8,,894 647	316	0.221	8,,876 178	426
0.022	8,,920 398	39	0.072	8,,916 293	128	0.122	8,,907 694	219	0.172	8,,894 331	319	0.222	8,,875 752	429
0.023	8,,920 359	41	0.073	8,,916 165	129	0.123	8,,907 475	221	0.173	8,,894 012	320	0.223	8,,875 323	432
0.024	8,,920 318	42	0.074	8,,916 036	131	0.124	8,,907 254	223	0.174	8,,893 692	323	0.224	8,,874 891	433
0.025	8,,920 276	45	0.075	8,,915 905	132	0.125	8,,907 031	226	0.175	8,,893 369	325	0.225	8,,874 458	436
0.026	8,,920 231	46	0.076	8,,915 773	135	0.126	8,,906 805	227	0.176	8,,893 044	327	0.226	8,,874 022	439
0.027	8,,920 185	48	0.077	8,,915 638	136	0.127	8,,906 578	229	0.177	8,,892 717	329	0.227	8,,873 583	441
0.028	8,,920 137	49	0.078	8,,915 502	138	0.128	8,,906 349	230	0.178	8,,892 388	331	0.228	8,,873 142	443
0.029	8,,920 088	52	0.079	8,,915 364	140	0.129	8,,906 119	233	0.179	8,,892 057	334	0.229	8,,872 699	446
0.030	8,,920 036	53	0.080	8,,915 224	142	0.130	8,,905 886	235	0.180	8,,891 723	335	0.230	8,,872 253	448
0.031	8,,919 983	55	0.081	8,,915 082	143	0.131	8,,905 651	236	0.181	8,,891 388	338	0.231	8,,871 805	450
0.032	8,,919 928	56	0.082	8,,914 939	146	0.132	8,,905 415	239	0.182	8,,891 050	339	0.232	8,,871 355	453
0.033	8,,919 872	58	0.083	8,,914 793	147	0.133	8,,905 176	240	0.183	8,,890 711	342	0.233	8,,870 902	455
0.034	8,,919 814	61	0.084	8,,914 646	149	0.134	8,,904 936	243	0.184	8,,890 369	344	0.234	8,,870 447	458
0.035	8,,919 753	61	0.085	8,,914 497	150	0.135	8,,904 693	244	0.185	8,,890 025	346	0.235	8,,869 989	460
0.036	8,,919 692	64	0.086	8,,914 347	153	0.136	8,,904 449	247	0.186	8,,889 679	348	0.236	8,,869 529	463
0.037	8,,919 628	65	0.087	8,,914 194	154	0.137	8,,904 202	248	0.187	8,,889 331	351	0.237	8,,869 066	465
0.038	8,,919 563	67	0.088	8,,914 040	156	0.138	8,,903 954	250	0.188	8,,888 980	352	0.238	8,,868 601	467
0.039	8,,919 496	69	0.089	8,,913 884	158	0.139	8,,903 704	252	0.189	8,,888 628	355	0.239	8,,868 134	470
0.040	8,,919 427	71	0.090	8,,913 726	160	0.140	8,,903 452	254	0.190	8,,888 273	357	0.240	8,,867 664	473
0.041	8,,919 356	72	0.091	8,,913 566	162	0.141	8,,903 198	256	0.191	8,,887 916	359	0.241	8,,867 191	474
0.042	8,,919 284	74	0.092	8,,913 404	163	0.142	8,,902 942	258	0.192	8,,887 557	361	0.242	8,,866 717	478
0.043	8,,919 210	76	0.093	8,,913 241	166	0.143	8,,902 684	260	0.193	8,,887 196	363	0.243	8,,866 239	480
0.044	8,,919 134	78	0.094	8,,913 075	167	0.144	8,,902 424	262	0.194	8,,886 833	366	0.244	8,,865 759	482
0.045	8,,919 056	79	0.095	8,,912 908	169	0.145	8,,902 162	264	0.195	8,,886 467	367	0.245	8,,865 277	485
0.046	8,,918 977	81	0.096	8,,912 739	171	0.146	8,,901 898	266	0.196	8,,886 100	370	0.246	8,,864 792	488
0.047	8,,918 896	83	0.097	8,,912 568	172	0.147	8,,901 632	268	0.197	8,,885 730	372	0.247	8,,864 304	489
0.048	8,,918 813	85	0.098	8,,912 396	175	0.148	8,,901 364	270	0.198	8,,885 358	375	0.248	8,,863 815	493
0.049	8,,918 728	86	0.099	8,,912 221	176	0.149	8,,901 094	272	0.199	8,,884 983	376	0.249	8,,863 322	495
0.050	8,,918 642		0.100	8,,912 045		0.150	8,,900 822		0.200	8,,884 607		0.250	8,,862 827	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2{}^2(n)\}$.

$\pm n$	Q	$-\Delta$	$\pm n$	Q	$-\Delta$	$\pm n$	Q	$-\Delta$	$\pm n$	Q	$-\Delta$	$\pm n$	Q	$-\Delta$
0.000	$7_n619\ 789$	0	0.050	$7_n619\ 762$	3	0.100	$7_n619\ 354$	17	0.150	$7_n617\ 585$	60	0.200	$7_n612\ 784$	142
0.001	$7_n619\ 789$	0	0.051	$7_n619\ 759$	2	0.101	$7_n619\ 337$	19	0.151	$7_n617\ 525$	61	0.201	$7_n612\ 642$	145
0.002	$7_n619\ 789$	0	0.052	$7_n619\ 757$	3	0.102	$7_n619\ 318$	18	0.152	$7_n617\ 464$	62	0.202	$7_n612\ 497$	147
0.003	$7_n619\ 789$	0	0.053	$7_n619\ 754$	2	0.103	$7_n619\ 300$	20	0.153	$7_n617\ 402$	63	0.203	$7_n612\ 350$	149
0.004	$7_n619\ 789$	0	0.054	$7_n619\ 752$	3	0.104	$7_n619\ 280$	19	0.154	$7_n617\ 339$	64	0.204	$7_n612\ 201$	151
0.005	$7_n619\ 789$	0	0.055	$7_n619\ 749$	3	0.105	$7_n619\ 261$	21	0.155	$7_n617\ 275$	66	0.205	$7_n612\ 050$	153
0.006	$7_n619\ 789$	0	0.056	$7_n619\ 746$	3	0.106	$7_n619\ 240$	21	0.156	$7_n617\ 209$	67	0.206	$7_n611\ 897$	156
0.007	$7_n619\ 789$	0	0.057	$7_n619\ 743$	3	0.107	$7_n619\ 219$	21	0.157	$7_n617\ 142$	68	0.207	$7_n611\ 741$	158
0.008	$7_n619\ 789$	0	0.058	$7_n619\ 740$	4	0.108	$7_n619\ 198$	23	0.158	$7_n617\ 074$	70	0.208	$7_n611\ 583$	161
0.009	$7_n619\ 789$	0	0.059	$7_n619\ 736$	3	0.109	$7_n619\ 175$	22	0.159	$7_n617\ 004$	71	0.209	$7_n611\ 422$	163
0.010	$7_n619\ 789$	0	0.060	$7_n619\ 733$	4	0.110	$7_n619\ 153$	24	0.160	$7_n616\ 933$	72	0.210	$7_n611\ 259$	165
0.011	$7_n619\ 789$	0	0.061	$7_n619\ 729$	4	0.111	$7_n619\ 129$	24	0.161	$7_n616\ 861$	74	0.211	$7_n611\ 094$	168
0.012	$7_n619\ 789$	0	0.062	$7_n619\ 725$	4	0.112	$7_n619\ 105$	25	0.162	$7_n616\ 787$	75	0.212	$7_n610\ 926$	170
0.013	$7_n619\ 789$	0	0.063	$7_n619\ 721$	5	0.113	$7_n619\ 080$	25	0.163	$7_n616\ 712$	76	0.213	$7_n610\ 756$	172
0.014	$7_n619\ 789$	0	0.064	$7_n619\ 716$	5	0.114	$7_n619\ 055$	26	0.164	$7_n616\ 636$	78	0.214	$7_n610\ 584$	176
0.015	$7_n619\ 789$	1	0.065	$7_n619\ 711$	5	0.115	$7_n619\ 029$	27	0.165	$7_n616\ 558$	79	0.215	$7_n610\ 408$	177
0.016	$7_n619\ 788$	0	0.066	$7_n619\ 706$	5	0.116	$7_n619\ 002$	28	0.166	$7_n616\ 479$	81	0.216	$7_n610\ 231$	180
0.017	$7_n619\ 788$	0	0.067	$7_n619\ 701$	5	0.117	$7_n618\ 974$	28	0.167	$7_n616\ 398$	83	0.217	$7_n610\ 051$	183
0.018	$7_n619\ 788$	0	0.068	$7_n619\ 696$	6	0.118	$7_n618\ 946$	29	0.168	$7_n616\ 315$	83	0.218	$7_n609\ 868$	186
0.019	$7_n619\ 788$	0	0.069	$7_n619\ 690$	5	0.119	$7_n618\ 917$	30	0.169	$7_n616\ 232$	86	0.219	$7_n609\ 682$	188
0.020	$7_n619\ 788$	0	0.070	$7_n619\ 685$	7	0.120	$7_n618\ 887$	30	0.170	$7_n616\ 146$	87	0.220	$7_n609\ 494$	191
0.021	$7_n619\ 788$	0	0.071	$7_n619\ 678$	6	0.121	$7_n618\ 857$	31	0.171	$7_n616\ 059$	88	0.221	$7_n609\ 303$	193
0.022	$7_n619\ 788$	0	0.072	$7_n619\ 672$	6	0.122	$7_n618\ 826$	32	0.172	$7_n615\ 971$	90	0.222	$7_n609\ 110$	196
0.023	$7_n619\ 788$	1	0.073	$7_n619\ 666$	7	0.123	$7_n618\ 794$	33	0.173	$7_n615\ 881$	91	0.223	$7_n608\ 914$	199
0.024	$7_n619\ 787$	0	0.074	$7_n619\ 659$	8	0.124	$7_n618\ 761$	34	0.174	$7_n615\ 790$	94	0.224	$7_n608\ 715$	202
0.025	$7_n619\ 787$	0	0.075	$7_n619\ 651$	7	0.125	$7_n618\ 727$	34	0.175	$7_n615\ 696$	94	0.225	$7_n608\ 513$	204
0.026	$7_n619\ 787$	1	0.076	$7_n619\ 644$	8	0.126	$7_n618\ 693$	35	0.176	$7_n615\ 602$	97	0.226	$7_n608\ 309$	208
0.027	$7_n619\ 786$	0	0.077	$7_n619\ 636$	8	0.127	$7_n618\ 658$	37	0.177	$7_n615\ 505$	98	0.227	$7_n608\ 101$	210
0.028	$7_n619\ 786$	0	0.078	$7_n619\ 628$	8	0.128	$7_n618\ 621$	36	0.178	$7_n615\ 407$	100	0.228	$7_n607\ 891$	213
0.029	$7_n619\ 786$	1	0.079	$7_n619\ 620$	9	0.129	$7_n618\ 585$	38	0.179	$7_n615\ 307$	101	0.229	$7_n607\ 678$	216
0.030	$7_n619\ 785$	0	0.080	$7_n619\ 611$	9	0.130	$7_n618\ 547$	39	0.180	$7_n615\ 206$	104	0.230	$7_n607\ 462$	219
0.031	$7_n619\ 785$	1	0.081	$7_n619\ 602$	10	0.131	$7_n618\ 508$	40	0.181	$7_n615\ 102$	105	0.231	$7_n607\ 243$	222
0.032	$7_n619\ 784$	0	0.082	$7_n619\ 592$	9	0.132	$7_n618\ 468$	40	0.182	$7_n614\ 997$	106	0.232	$7_n607\ 021$	225
0.033	$7_n619\ 784$	1	0.083	$7_n619\ 583$	10	0.133	$7_n618\ 428$	42	0.183	$7_n614\ 891$	109	0.233	$7_n606\ 796$	227
0.034	$7_n619\ 783$	1	0.084	$7_n619\ 573$	11	0.134	$7_n618\ 386$	42	0.184	$7_n614\ 782$	110	0.234	$7_n606\ 569$	231
0.035	$7_n619\ 782$	1	0.085	$7_n619\ 562$	11	0.135	$7_n618\ 344$	43	0.185	$7_n614\ 672$	112	0.235	$7_n606\ 338$	235
0.036	$7_n619\ 781$	0	0.086	$7_n619\ 551$	11	0.136	$7_n618\ 301$	45	0.186	$7_n614\ 560$	115	0.236	$7_n606\ 103$	237
0.037	$7_n619\ 781$	1	0.087	$7_n619\ 540$	12	0.137	$7_n618\ 256$	45	0.187	$7_n614\ 445$	115	0.237	$7_n605\ 866$	240
0.038	$7_n619\ 780$	1	0.088	$7_n619\ 528$	12	0.138	$7_n618\ 211$	46	0.188	$7_n614\ 330$	118	0.238	$7_n605\ 626$	244
0.039	$7_n619\ 779$	1	0.089	$7_n619\ 516$	12	0.139	$7_n618\ 165$	48	0.189	$7_n614\ 212$	120	0.239	$7_n605\ 382$	246
0.040	$7_n619\ 778$	2	0.090	$7_n619\ 504$	13	0.140	$7_n618\ 117$	48	0.190	$7_n614\ 092$	122	0.240	$7_n605\ 136$	250
0.041	$7_n619\ 776$	1	0.091	$7_n619\ 491$	13	0.141	$7_n618\ 069$	50	0.191	$7_n613\ 970$	123	0.241	$7_n604\ 886$	254
0.042	$7_n619\ 775$	1	0.092	$7_n619\ 478$	14	0.142	$7_n618\ 019$	50	0.192	$7_n613\ 847$	126	0.242	$7_n604\ 632$	256
0.043	$7_n619\ 774$	1	0.093	$7_n619\ 464$	14	0.143	$7_n617\ 969$	52	0.193	$7_n613\ 721$	128	0.243	$7_n604\ 376$	260
0.044	$7_n619\ 773$	2	0.094	$7_n619\ 450$	15	0.144	$7_n617\ 917$	52	0.194	$7_n613\ 593$	129	0.244	$7_n604\ 116$	264
0.045	$7_n619\ 771$	2	0.095	$7_n619\ 435$	15	0.145	$7_n617\ 865$	54	0.195	$7_n613\ 464$	132	0.245	$7_n603\ 852$	266
0.046	$7_n619\ 769$	1	0.096	$7_n619\ 420$	16	0.146	$7_n617\ 811$	55	0.196	$7_n613\ 332$	134	0.246	$7_n603\ 586$	271
0.047	$7_n619\ 768$	2	0.097	$7_n619\ 404$	16	0.147	$7_n617\ 756$	56	0.197	$7_n613\ 198$	136	0.247	$7_n603\ 315$	273
0.048	$7_n619\ 766$	2	0.098	$7_n619\ 388$	17	0.148	$7_n617\ 700$	57	0.198	$7_n613\ 062$	138	0.248	$7_n603\ 042$	277
0.049	$7_n619\ 764$	2	0.099	$7_n619\ 371$	17	0.149	$7_n617\ 643$	58	0.199	$7_n612\ 924$	140	0.249	$7_n602\ 765$	281
0.050	$7_n619\ 762$		0.100	$7_n619\ 354$		0.150	$7_n617\ 585$		0.200	$7_n612\ 784$		0.250	$7_n602\ 484$	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2^3(n)\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	8.184 060	1	0.050	8.182 083	80	0.100	8.176 115	160	0.150	8.166 045	244	0.200	8.151 676	333
0.001	8.184 059	2	0.051	8.182 003	81	0.101	8.175 955	163	0.151	8.165 801	247	0.201	8.151 343	335
0.002	8.184 057	4	0.052	8.181 922	84	0.102	8.175 792	164	0.152	8.165 554	247	0.202	8.151 008	336
0.003	8.184 053	5	0.053	8.181 838	84	0.103	8.175 628	165	0.153	8.165 307	250	0.203	8.150 672	339
0.004	8.184 048	8	0.054	8.181 754	87	0.104	8.175 463	167	0.154	8.165 057	251	0.204	8.150 333	340
0.005	8.184 040	8	0.055	8.181 667	88	0.105	8.175 296	169	0.155	8.164 806	253	0.205	8.149 993	343
0.006	8.184 032	11	0.056	8.181 579	89	0.106	8.175 127	171	0.156	8.164 553	255	0.206	8.149 650	344
0.007	8.184 021	11	0.057	8.181 490	92	0.107	8.174 956	172	0.157	8.164 298	257	0.207	8.149 306	346
0.008	8.184 010	14	0.058	8.181 398	92	0.108	8.174 784	174	0.158	8.164 041	258	0.208	8.148 960	348
0.009	8.183 996	15	0.059	8.181 306	95	0.109	8.174 610	175	0.159	8.163 783	260	0.209	8.148 612	349
0.010	8.183 981	16	0.060	8.181 211	96	0.110	8.174 435	177	0.160	8.163 523	262	0.210	8.148 263	352
0.011	8.183 965	18	0.061	8.181 115	97	0.111	8.174 258	179	0.161	8.163 261	263	0.211	8.147 911	353
0.012	8.183 947	20	0.062	8.181 018	99	0.112	8.174 079	181	0.162	8.162 998	265	0.212	8.147 558	355
0.013	8.183 927	22	0.063	8.180 919	101	0.113	8.173 898	182	0.163	8.162 733	267	0.213	8.147 203	358
0.014	8.183 905	22	0.064	8.180 818	103	0.114	8.173 716	184	0.164	8.162 466	269	0.214	8.146 845	359
0.015	8.183 883	25	0.065	8.180 715	104	0.115	8.173 532	185	0.165	8.162 197	270	0.215	8.146 486	360
0.016	8.183 858	26	0.066	8.180 611	105	0.116	8.173 347	187	0.166	8.161 927	273	0.216	8.146 126	363
0.017	8.183 832	28	0.067	8.180 506	107	0.117	8.173 160	189	0.167	8.161 654	273	0.217	8.145 763	365
0.018	8.183 804	29	0.068	8.180 399	109	0.118	8.172 971	190	0.168	8.161 381	276	0.218	8.145 398	366
0.019	8.183 775	31	0.069	8.180 290	111	0.119	8.172 781	192	0.169	8.161 105	278	0.219	8.145 032	369
0.020	8.183 744	32	0.070	8.180 179	112	0.120	8.172 589	194	0.170	8.160 827	279	0.220	8.144 663	370
0.021	8.183 712	34	0.071	8.180 067	113	0.121	8.172 395	196	0.171	8.160 548	281	0.221	8.144 293	372
0.022	8.183 678	36	0.072	8.179 954	115	0.122	8.172 199	197	0.172	8.160 267	283	0.222	8.143 921	374
0.023	8.183 642	37	0.073	8.179 839	117	0.123	8.172 002	198	0.173	8.159 984	284	0.223	8.143 547	377
0.024	8.183 605	38	0.074	8.179 722	119	0.124	8.171 804	201	0.174	8.159 700	286	0.224	8.143 170	377
0.025	8.183 567	41	0.075	8.179 603	120	0.125	8.171 603	202	0.175	8.159 414	288	0.225	8.142 793	380
0.026	8.183 526	42	0.076	8.179 483	121	0.126	8.171 401	204	0.176	8.159 126	290	0.226	8.142 413	382
0.027	8.183 484	43	0.077	8.179 362	124	0.127	8.171 197	205	0.177	8.158 836	292	0.227	8.142 031	384
0.028	8.183 441	45	0.078	8.179 238	125	0.128	8.170 992	207	0.178	8.158 544	293	0.228	8.141 647	385
0.029	8.183 396	47	0.079	8.179 113	126	0.129	8.170 785	209	0.179	8.158 251	295	0.229	8.141 262	388
0.030	8.183 349	48	0.080	8.178 987	128	0.130	8.170 576	210	0.180	8.157 956	297	0.230	8.140 874	389
0.031	8.183 301	50	0.081	8.178 859	130	0.131	8.170 366	213	0.181	8.157 659	299	0.231	8.140 485	392
0.032	8.183 251	51	0.082	8.178 729	131	0.132	8.170 153	213	0.182	8.157 360	300	0.232	8.140 093	393
0.033	8.183 200	53	0.083	8.178 598	133	0.133	8.169 940	216	0.183	8.157 060	302	0.233	8.139 700	395
0.034	8.183 147	55	0.084	8.178 465	135	0.134	8.169 724	217	0.184	8.156 758	304	0.234	8.139 305	397
0.035	8.183 092	56	0.085	8.178 330	136	0.135	8.169 507	219	0.185	8.156 454	306	0.235	8.138 908	399
0.036	8.183 036	58	0.086	8.178 194	138	0.136	8.169 288	221	0.186	8.156 148	308	0.236	8.138 509	402
0.037	8.182 978	59	0.087	8.178 056	140	0.137	8.169 067	222	0.187	8.155 840	309	0.237	8.138 107	403
0.038	8.182 919	61	0.088	8.177 916	141	0.138	8.168 845	224	0.188	8.155 531	312	0.238	8.137 704	405
0.039	8.182 858	62	0.089	8.177 775	143	0.139	8.168 621	226	0.189	8.155 219	313	0.239	8.137 299	406
0.040	8.182 796	64	0.090	8.177 632	144	0.140	8.168 395	227	0.190	8.154 906	315	0.240	8.136 893	409
0.041	8.182 732	66	0.091	8.177 488	146	0.141	8.168 168	229	0.191	8.154 591	316	0.241	8.136 484	411
0.042	8.182 666	67	0.092	8.177 342	148	0.142	8.167 939	231	0.192	8.154 275	319	0.242	8.136 073	413
0.043	8.182 599	69	0.093	8.177 194	149	0.143	8.167 708	232	0.193	8.153 956	320	0.243	8.135 660	415
0.044	8.182 530	71	0.094	8.177 045	151	0.144	8.167 476	234	0.194	8.153 636	322	0.244	8.135 245	417
0.045	8.182 459	72	0.095	8.176 894	152	0.145	8.167 242	236	0.195	8.153 314	324	0.245	8.134 828	418
0.046	8.182 387	73	0.096	8.176 742	154	0.146	8.167 006	238	0.196	8.152 990	326	0.246	8.134 410	421
0.047	8.182 314	76	0.097	8.176 588	156	0.147	8.166 768	239	0.197	8.152 664	327	0.247	8.133 989	423
0.048	8.182 238	76	0.098	8.176 432	157	0.148	8.166 529	241	0.198	8.152 337	330	0.248	8.133 566	424
0.049	8.182 162	79	0.099	8.176 275	160	0.149	8.166 288	243	0.199	8.152 007	331	0.249	8.133 142	427
0.050	8.182 083		0.100	8.176 115		0.150	8.166 045		0.200	8.151 676		0.250	8.132 715	

Tafel VIII.

log $\{Q_2{}^4(n)\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	6.709 750	0	0.050	6.709 732	2	0.100	6.709 457	12	0.150	6.708 271	39	0.200	6.705 093	93
0.001	6.709 750	0	0.051	6.709 730	1	0.101	6.709 445	12	0.151	6.708 232	41	0.201	6.705 000	95
0.002	6.709 750	0	0.052	6.709 729	2	0.102	6.709 433	13	0.152	6.708 191	41	0.202	6.704 905	97
0.003	6.709 750	0	0.053	6.709 727	2	0.103	6.709 420	13	0.153	6.708 150	42	0.203	6.704 808	98
0.004	6.709 750	0	0.054	6.709 725	2	0.104	6.709 407	13	0.154	6.708 108	43	0.204	6.704 710	99
0.005	6.709 750	0	0.055	6.709 723	2	0.105	6.709 394	14	0.155	6.708 065	44	0.205	6.704 611	101
0.006	6.709 750	0	0.056	6.709 721	2	0.106	6.709 380	14	0.156	6.708 021	44	0.206	6.704 510	102
0.007	6.709 750	0	0.057	6.709 719	2	0.107	6.709 366	15	0.157	6.707 977	46	0.207	6.704 408	104
0.008	6.709 750	0	0.058	6.709 717	3	0.108	6.709 351	14	0.158	6.707 931	46	0.208	6.704 304	105
0.009	6.709 750		0.059	6.709 714		0.109	6.709 337		0.159	6.707 885		0.209	6.704 199	
		0			2			16			47			106
0.010	6.709 750	0	0.060	6.709 712	3	0.110	6.709 321	16	0.160	6.707 838	49	0.210	6.704 093	109
0.011	6.709 750	0	0.061	6.709 709	3	0.111	6.709 305	16	0.161	6.707 789	49	0.211	6.703 984	110
0.012	6.709 750	0	0.062	6.709 706	2	0.112	6.709 289	16	0.162	6.707 740	50	0.212	6.703 874	111
0.013	6.709 750	0	0.063	6.709 704	3	0.113	6.709 273	18	0.163	6.707 690	50	0.213	6.703 763	113
0.014	6.709 750	0	0.064	6.709 701	3	0.114	6.709 255	17	0.164	6.707 640	52	0.214	6.703 650	114
0.015	6.709 750	0	0.065	6.709 698	4	0.115	6.709 238	18	0.165	6.707 588	53	0.215	6.703 536	117
0.016	6.709 750	0	0.066	6.709 694	3	0.116	6.709 220	19	0.166	6.707 535	54	0.216	6.703 419	117
0.017	6.709 750	0	0.067	6.709 691	4	0.117	6.709 201	19	0.167	6.707 481	54	0.217	6.703 302	120
0.018	6.709 750	0	0.068	6.709 687	4	0.118	6.709 182	19	0.168	6.707 427	56	0.218	6.703 182	121
0.019	6.709 750		0.069	6.709 683		0.119	6.709 163		0.169	6.707 371		0.219	6.703 061	
		1			4			20			57			123
0.020	6.709 749	0	0.070	6.709 679	4	0.120	6.709 143	21	0.170	6.707 314	57	0.220	6.702 938	124
0.021	6.709 749	0	0.071	6.709 675	4	0.121	6.709 122	20	0.171	6.707 257	59	0.221	6.702 814	126
0.022	6.709 749	0	0.072	6.709 671	4	0.122	6.709 102	22	0.172	6.707 198	60	0.222	6.702 688	128
0.023	6.709 749	0	0.073	6.709 667	5	0.123	6.709 080	22	0.173	6.707 138	60	0.223	6.702 560	130
0.024	6.709 749	0	0.074	6.709 662	5	0.124	6.709 058	22	0.174	6.707 078	62	0.224	6.702 430	131
0.025	6.709 749	0	0.075	6.709 657	5	0.125	6.709 036	24	0.175	6.707 016	63	0.225	6.702 299	133
0.026	6.709 749	1	0.076	6.709 652	5	0.126	6.709 012	23	0.176	6.706 953	64	0.226	6.702 166	135
0.027	6.709 748	0	0.077	6.709 647	6	0.127	6.708 989	24	0.177	6.706 889	65	0.227	6.702 031	137
0.028	6.709 748	0	0.078	6.709 641	5	0.128	6.708 965	25	0.178	6.706 824	66	0.228	6.701 894	138
0.029	6.709 748		0.079	6.709 636		0.129	6.708 940		0.179	6.706 758		0.229	6.701 756	
		0			6			25			67			140
0.030	6.709 748	1	0.080	6.709 630	6	0.130	6.708 915	26	0.180	6.706 691	68	0.230	6.701 616	143
0.031	6.709 747	0	0.081	6.709 624	7	0.131	6.708 889	27	0.181	6.706 623	70	0.231	6.701 473	144
0.032	6.709 747	1	0.082	6.709 617	6	0.132	6.708 862	27	0.182	6.706 553	71	0.232	6.701 329	146
0.033	6.709 746	0	0.083	6.709 611	7	0.133	6.708 835	28	0.183	6.706 482	71	0.233	6.701 183	147
0.034	6.709 746	1	0.084	6.709 604	7	0.134	6.708 807	28	0.184	6.706 411	73	0.234	6.701 036	150
0.035	6.709 745	0	0.085	6.709 597	8	0.135	6.708 779	29	0.185	6.706 338	75	0.235	6.700 886	152
0.036	6.709 745	1	0.086	6.709 589	7	0.136	6.708 750	30	0.186	6.706 263	75	0.236	6.700 734	153
0.037	6.709 744	0	0.087	6.709 582	8	0.137	6.708 720	30	0.187	6.706 188	76	0.237	6.700 581	156
0.038	6.709 744	1	0.088	6.709 574	8	0.138	6.708 690	31	0.188	6.706 112	78	0.238	6.700 425	158
0.039	6.709 743		0.089	6.709 566		0.139	6.708 659		0.189	6.706 034		0.239	6.700 267	
		1			8			32			79			159
0.040	6.709 742	0	0.090	6.709 558	9	0.140	6.708 627	32	0.190	6.705 955	81	0.240	6.700 108	162
0.041	6.709 742	1	0.091	6.709 549	9	0.141	6.708 595	33	0.191	6.705 874	81	0.241	6.699 946	163
0.042	6.709 741	1	0.092	6.709 540	9	0.142	6.708 562	34	0.192	6.705 793	83	0.242	6.699 783	166
0.043	6.709 740	1	0.093	6.709 531	10	0.143	6.708 528	34	0.193	6.705 710	84	0.243	6.699 617	168
0.044	6.709 739	1	0.094	6.709 521	10	0.144	6.708 494	36	0.194	6.705 626	85	0.244	6.699 449	170
0.045	6.709 738	1	0.095	6.709 511	10	0.145	6.708 458	35	0.195	6.705 541	87	0.245	6.699 279	172
0.046	6.709 737	1	0.096	6.709 501	11	0.146	6.708 423	37	0.196	6.705 454	88	0.246	6.699 107	174
0.047	6.709 736	2	0.097	6.709 490	10	0.147	6.708 386	37	0.197	6.705 366	90	0.247	6.698 933	176
0.048	6.709 734	1	0.098	6.709 480	12	0.148	6.708 349	39	0.198	6.705 276	91	0.248	6.698 757	178
0.049	6.709 733	1	0.099	6.709 468	11	0.149	6.708 310	39	0.199	6.705 185	92	0.249	6.698 579	181
0.050	6.709 732		0.100	6.709 457		0.150	6.708 271		0.200	6.705 093		0.250	6.698 398	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2{}^5\, n\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	7_n499 422	1	0.050	7_n497 509	77	0.100	7_n491 743	155	0.150	7_n482 033	235	0.200	7_n468 224	319
0.001	7_n499 421	2	0.051	7_n497 432	79	0.101	7_n491 588	157	0.151	7_n481 798	237	0.201	7_n467 905	321
0.002	7_n499 419	4	0.052	7_n497 353	80	0.102	7_n491 431	158	0.152	7_n481 561	239	0.202	7_n467 584	323
0.003	7_n499 415	6	0.053	7_n497 273	82	0.103	7_n491 273	160	0.153	7_n481 322	240	0.203	7_n467 261	325
0.004	7_n499 409	6	0.054	7_n497 191	84	0.104	7_n491 113	162	0.154	7_n481 082	242	0.204	7_n466 936	326
0.005	7_n499 403	9	0.055	7_n497 107	85	0.105	7_n490 951	163	0.155	7_n480 840	244	0.205	7_n466 610	328
0.006	7_n499 394	10	0.056	7_n497 022	87	0.106	7_n490 788	164	0.156	7_n480 596	245	0.206	7_n466 282	330
0.007	7_n499 384	11	0.057	7_n496 935	88	0.107	7_n490 624	167	0.157	7_n480 351	247	0.207	7_n465 952	332
0.008	7_n499 373	13	0.058	7_n496 847	89	0.108	7_n490 457	167	0.158	7_n480 104	248	0.208	7_n465 620	333
0.009	7_n499 360	15	0.059	7_n496 758	92	0.109	7_n490 290	170	0.159	7_n479 856	251	0.209	7_n465 287	335
0.010	7_n499 345	16	0.060	7_n496 666	93	0.110	7_n490 120	171	0.160	7_n479 605	251	0.210	7_n464 952	337
0.011	7_n499 329	17	0.061	7_n496 573	94	0.111	7_n489 949	172	0.161	7_n479 354	254	0.211	7_n464 615	339
0.012	7_n499 312	19	0.062	7_n496 479	96	0.112	7_n489 777	174	0.162	7_n479 100	255	0.212	7_n464 276	340
0.013	7_n499 293	21	0.063	7_n496 383	97	0.113	7_n489 603	176	0.163	7_n478 845	257	0.213	7_n463 936	342
0.014	7_n499 272	22	0.064	7_n496 286	99	0.114	7_n489 427	177	0.164	7_n478 588	258	0.214	7_n463 594	344
0.015	7_n499 250	24	0.065	7_n496 187	101	0.115	7_n489 250	179	0.165	7_n478 330	260	0.215	7_n463 250	346
0.016	7_n499 226	25	0.066	7_n496 086	102	0.116	7_n489 071	181	0.166	7_n478 070	262	0.216	7_n462 904	347
0.017	7_n499 201	27	0.067	7_n495 984	103	0.117	7_n488 890	182	0.167	7_n477 808	264	0.217	7_n462 557	349
0.018	7_n499 174	28	0.068	7_n495 881	106	0.118	7_n488 708	183	0.168	7_n477 544	265	0.218	7_n462 208	351
0.019	7_n499 146	30	0.069	7_n495 775	106	0.119	7_n488 525	186	0.169	7_n477 279	267	0.219	7_n461 857	353
0.020	7_n499 116	31	0.070	7_n495 669	109	0.120	7_n488 339	187	0.170	7_n477 012	268	0.220	7_n461 504	354
0.021	7_n499 085	33	0.071	7_n495 560	109	0.121	7_n488 152	188	0.171	7_n476 744	270	0.221	7_n461 150	357
0.022	7_n499 052	35	0.072	7_n495 451	112	0.122	7_n487 964	190	0.172	7_n476 474	272	0.222	7_n460 793	357
0.023	7_n499 017	36	0.073	7_n495 339	113	0.123	7_n487 774	192	0.173	7_n476 202	273	0.223	7_n460 436	360
0.024	7_n498 981	37	0.074	7_n495 226	114	0.124	7_n487 582	193	0.174	7_n475 929	275	0.224	7_n460 076	362
0.025	7_n498 944	39	0.075	7_n495 112	116	0.125	7_n487 389	195	0.175	7_n475 654	277	0.225	7_n459 714	363
0.026	7_n498 905	41	0.076	7_n494 996	118	0.126	7_n487 194	197	0.176	7_n475 377	279	0.226	7_n459 351	366
0.027	7_n498 864	42	0.077	7_n494 878	119	0.127	7_n486 997	198	0.177	7_n475 098	280	0.227	7_n458 985	367
0.028	7_n498 822	43	0.078	7_n494 759	121	0.128	7_n486 799	199	0.178	7_n474 818	282	0.228	7_n458 618	368
0.029	7_n498 779	45	0.079	7_n494 638	122	0.129	7_n486 600	202	0.179	7_n474 536	283	0.229	7_n458 250	371
0.030	7_n498 734	47	0.080	7_n494 516	124	0.130	7_n486 398	202	0.180	7_n474 253	286	0.230	7_n457 879	372
0.031	7_n498 687	48	0.081	7_n494 392	125	0.131	7_n486 196	205	0.181	7_n473 967	287	0.231	7_n457 507	375
0.032	7_n498 639	50	0.082	7_n494 267	127	0.132	7_n485 991	206	0.182	7_n473 680	288	0.232	7_n457 132	375
0.033	7_n498 589	51	0.083	7_n494 140	128	0.133	7_n485 785	208	0.183	7_n473 392	290	0.233	7_n456 757	378
0.034	7_n498 538	53	0.084	7_n494 012	131	0.134	7_n485 577	209	0.184	7_n473 102	292	0.234	7_n456 379	380
0.035	7_n498 485	54	0.085	7_n493 881	131	0.135	7_n485 368	211	0.185	7_n472 810	294	0.235	7_n455 999	381
0.036	7_n498 431	56	0.086	7_n493 750	133	0.136	7_n485 157	213	0.186	7_n472 516	296	0.236	7_n455 618	384
0.037	7_n498 375	57	0.087	7_n493 617	135	0.137	7_n484 944	214	0.187	7_n472 220	297	0.237	7_n455 234	385
0.038	7_n498 318	59	0.088	7_n493 482	136	0.138	7_n484 730	216	0.188	7_n471 923	299	0.238	7_n454 849	387
0.039	7_n498 259	61	0.089	7_n493 346	138	0.139	7_n484 514	217	0.189	7_n471 624	300	0.239	7_n454 462	388
0.040	7_n498 198	62	0.090	7_n493 208	140	0.140	7_n484 297	219	0.190	7_n471 324	302	0.240	7_n454 074	391
0.041	7_n498 136	63	0.091	7_n493 068	141	0.141	7_n484 078	221	0.191	7_n471 022	304	0.241	7_n453 683	392
0.042	7_n498 073	65	0.092	7_n492 927	142	0.142	7_n483 857	222	0.192	7_n470 718	306	0.242	7_n453 291	394
0.043	7_n498 008	67	0.093	7_n492 785	144	0.143	7_n483 635	224	0.193	7_n470 412	307	0.243	7_n452 897	397
0.044	7_n497 941	68	0.094	7_n492 641	146	0.144	7_n483 411	226	0.194	7_n470 105	309	0.244	7_n452 500	397
0.045	7_n497 873	70	0.095	7_n492 495	147	0.145	7_n483 185	227	0.195	7_n469 796	311	0.245	7_n452 103	400
0.046	7_n497 803	71	0.096	7_n492 348	149	0.146	7_n482 958	229	0.196	7_n469 485	313	0.246	7_n451 703	402
0.047	7_n497 732	73	0.097	7_n492 199	151	0.147	7_n482 729	230	0.197	7_n469 172	314	0.247	7_n451 301	403
0.048	7_n497 659	74	0.098	7_n492 048	152	0.148	7_n482 499	232	0.198	7_n468 858	316	0.248	7_n450 898	405
0.049	7_n497 585	76	0.099	7_n491 896	153	0.149	7_n482 267	234	0.199	7_n468 542	318	0.249	7_n450 493	408
0.050	7_n497 509		0.100	7_n491 743		0.150	7_n482 033		0.200	7_n468 224		0.250	7_n450 085	

Tafel VIII.

$\log\{Q_2^6(n)\}$.

$\pm n$	Q	$-\Delta$	$\pm n$	Q	$-\Delta$	$\pm n$	Q	$-\Delta$	$\pm n$	Q	$-\Delta$	$\pm n$	Q	$-\Delta$
0.000	5_n901 135	0	0.050	5_n901 119	1	0.100	5_n900 884	11	0.150	5_n899 869	34	0.200	5_n897 158	80
0.001	5_n901 135	0	0.051	5_n901 118	2	0.101	5_n900 873	10	0.151	5_n899 835	34	0.201	5_n897 078	81
0.002	5_n901 135	0	0.052	5_n901 116	1	0.102	5_n900 863	11	0.152	5_n899 801	36	0.202	5_n896 997	82
0.003	5_n901 135	0	0.053	5_n901 115	2	0.103	5_n900 852	11	0.153	5_n899 765	36	0.203	5_n896 915	83
0.004	5_n901 135	0	0.054	5_n901 113	1	0.104	5_n900 841	11	0.154	5_n899 729	36	0.204	5_n896 832	85
0.005	5_n901 135	0	0.055	5_n901 112	2	0.105	5_n900 830	12	0.155	5_n899 693	38	0.205	5_n896 747	85
0.006	5_n901 135	0	0.056	5_n901 110	2	0.106	5_n900 818	12	0.156	5_n899 655	38	0.206	5_n896 662	87
0.007	5_n901 135	0	0.057	5_n901 108	2	0.107	5_n900 806	13	0.157	5_n899 617	39	0.207	5_n896 575	89
0.008	5_n901 135	0	0.058	5_n901 106	2	0.108	5_n900 793	13	0.158	5_n899 578	39	0.208	5_n896 486	89
0.009	5_n901 135		0.059	5_n901 104		0.109	5_n900 780		0.159	5_n899 539		0.209	5_n896 397	
		0			2			13			41			91
0.010	5_n901 135	0	0.060	5_n901 102	2	0.110	5_n900 767	13	0.160	5_n899 498	41	0.210	5_n896 306	92
0.011	5_n901 135	0	0.061	5_n901 100	2	0.111	5_n900 754	14	0.161	5_n899 457	42	0.211	5_n896 214	94
0.012	5_n901 135	0	0.062	5_n901 098	3	0.112	5_n900 740	14	0.162	5_n899 415	42	0.212	5_n896 120	94
0.013	5_n901 135	0	0.063	5_n901 095	2	0.113	5_n900 726	15	0.163	5_n899 373	44	0.213	5_n896 026	96
0.014	5_n901 135	0	0.064	5_n901 093	3	0.114	5_n900 711	15	0.164	5_n899 329	44	0.214	5_n895 930	98
0.015	5_n901 135	0	0.065	5_n901 090	3	0.115	5_n900 696	15	0.165	5_n899 285	45	0.215	5_n895 832	99
0.016	5_n901 135	0	0.066	5_n901 087	3	0.116	5_n900 681	16	0.166	5_n899 240	46	0.216	5_n895 733	100
0.017	5_n901 135	0	0.067	5_n901 084	3	0.117	5_n900 665	16	0.167	5_n899 194	46	0.217	5_n895 633	101
0.018	5_n901 135	0	0.068	5_n901 081	3	0.118	5_n900 649	17	0.168	5_n899 148	48	0.218	5_n895 532	103
0.019	5_n901 135		0.069	5_n901 078		0.119	5_n900 632		0.169	5_n899 100		0.219	5_n895 429	
		0			4			17			48			105
0.020	5_n901 135	1	0.070	5_n901 074	3	0.120	5_n900 615	18	0.170	5_n899 052	49	0.220	5_n895 324	105
0.021	5_n901 134	0	0.071	5_n901 071	4	0.121	5_n900 597	18	0.171	5_n899 003	51	0.221	5_n895 219	108
0.022	5_n901 134	0	0.072	5_n901 067	4	0.122	5_n900 579	18	0.172	5_n898 952	51	0.222	5_n895 111	108
0.023	5_n901 134	0	0.073	5_n901 063	4	0.123	5_n900 561	19	0.173	5_n898 901	51	0.223	5_n895 003	110
0.024	5_n901 134	0	0.074	5_n901 059	4	0.124	5_n900 542	19	0.174	5_n898 850	53	0.224	5_n894 893	112
0.025	5_n901 134	0	0.075	5_n901 055	4	0.125	5_n900 523	20	0.175	5_n898 797	54	0.225	5_n894 781	113
0.026	5_n901 134	0	0.076	5_n901 051	5	0.126	5_n900 503	20	0.176	5_n898 743	54	0.226	5_n894 668	115
0.027	5_n901 134	1	0.077	5_n901 046	4	0.127	5_n900 483	21	0.177	5_n898 689	56	0.227	5_n894 553	116
0.028	5_n901 133	0	0.078	5_n901 042	5	0.128	5_n900 462	21	0.178	5_n898 633	56	0.228	5_n894 437	117
0.029	5_n901 133		0.079	5_n901 037		0.129	5_n900 441		0.179	5_n898 577		0.229	5_n894 320	
		0			5			22			57			119
0.030	5_n901 133	0	0.080	5_n901 032	5	0.130	5_n900 419	22	0.180	5_n898 520	59	0.230	5_n894 201	121
0.031	5_n901 133	1	0.081	5_n901 027	6	0.131	5_n900 397	23	0.181	5_n898 461	59	0.231	5_n894 080	122
0.032	5_n901 132	0	0.082	5_n901 021	5	0.132	5_n900 374	23	0.182	5_n898 402	60	0.232	5_n893 958	124
0.033	5_n901 132	1	0.083	5_n901 016	6	0.133	5_n900 351	24	0.183	5_n898 342	61	0.233	5_n893 834	126
0.034	5_n901 131	0	0.084	5_n901 010	6	0.134	5_n900 327	24	0.184	5_n898 281	63	0.234	5_n893 708	127
0.035	5_n901 131	0	0.085	5_n901 004	7	0.135	5_n900 303	25	0.185	5_n898 218	63	0.235	5_n893 581	128
0.036	5_n901 131	1	0.086	5_n900 997	6	0.136	5_n900 278	25	0.186	5_n898 155	64	0.236	5_n893 453	131
0.037	5_n901 130	0	0.087	5_n900 991	7	0.137	5_n900 253	26	0.187	5_n898 091	66	0.237	5_n893 322	132
0.038	5_n901 130	1	0.088	5_n900 984	7	0.138	5_n900 227	26	0.188	5_n898 025	66	0.238	5_n893 190	133
0.039	5_n901 129		0.089	5_n900 977		0.139	5_n900 201		0.189	5_n897 959		0.239	5_n893 057	
		1			7			28			67			136
0.040	5_n901 128	0	0.090	5_n900 970	8	0.140	5_n900 173	27	0.190	5_n897 892	69	0.240	5_n892 921	137
0.041	5_n901 128	1	0.091	5_n900 962	7	0.141	5_n900 146	28	0.191	5_n897 823	69	0.241	5_n892 784	138
0.042	5_n901 127	1	0.092	5_n900 955	8	0.142	5_n900 118	29	0.192	5_n897 754	71	0.242	5_n892 646	141
0.043	5_n901 126	1	0.093	5_n900 947	8	0.143	5_n900 089	30	0.193	5_n897 683	71	0.243	5_n892 505	142
0.044	5_n901 125	0	0.094	5_n900 939	9	0.144	5_n900 059	30	0.194	5_n897 612	73	0.244	5_n892 363	144
0.045	5_n901 125	1	0.095	5_n900 930	9	0.145	5_n900 029	31	0.195	5_n897 539	74	0.245	5_n892 219	146
0.046	5_n901 124	1	0.096	5_n900 921	9	0.146	5_n899 998	31	0.196	5_n897 465	75	0.246	5_n892 073	147
0.047	5_n901 123	2	0.097	5_n900 912	9	0.147	5_n899 967	32	0.197	5_n897 390	76	0.247	5_n891 926	149
0.048	5_n901 121	1	0.098	5_n900 903	10	0.148	5_n899 935	32	0.198	5_n897 314	78	0.248	5_n891 777	152
0.049	5_n901 120	1	0.099	5_n900 893	9	0.149	5_n899 903	34	0.199	5_n897 236	78	0.249	5_n891 625	153
0.050	5_n901 119		0.100	5_n900 884		0.150	5_n899 869		0.200	5_n897 158		0.250	5_n891 472	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2^7\, n\}$.

± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ	± n	Q	− Δ
0.000	6.837 656	1	0.050	6.835 775	76	0.100	6.830 107	152	0.150	6.820 573	231	0.200	6.807 035	313
0.001	6.837 655	2	0.051	6.835 699	78	0.101	6.829 955	154	0.151	6.820 342	232	0.201	6.806 722	315
0.002	6.837 653	4	0.052	6.835 621	79	0.102	6.829 801	156	0.152	6.820 110	235	0.202	6.806 407	316
0.003	6.837 649	5	0.053	6.835 542	80	0.103	6.829 645	157	0.153	6.819 875	235	0.203	6.806 091	318
0.004	6.837 644	7	0.054	6.835 462	82	0.104	6.829 488	158	0.154	6.819 640	238	0.204	6.805 773	320
0.005	6.837 637	8	0.055	6.835 380	84	0.105	6.829 330	160	0.155	6.819 402	239	0.205	6.805 453	321
0.006	6.837 629	10	0.056	6.835 296	85	0.106	6.829 170	162	0.156	6.819 163	240	0.206	6.805 132	323
0.007	6.837 619	11	0.057	6.835 211	87	0.107	6.829 008	163	0.157	6.818 923	242	0.207	6.804 809	325
0.008	6.837 608	13	0.058	6.835 124	88	0.108	6.828 845	165	0.158	6.818 681	244	0.208	6.804 484	326
0.009	6.837 595		0.059	6.835 036		0.109	6.828 680		0.159	6.818 437		0.209	6.804 158	
		15			90			167			246			328
0.010	6.837 580	15	0.060	6.834 946	91	0.110	6.828 513	168	0.160	6.818 191	247	0.210	6.803 830	330
0.011	6.837 565	18	0.061	6.834 855	93	0.111	6.828 345	169	0.161	6.817 944	248	0.211	6.803 500	331
0.012	6.837 547	18	0.062	6.834 762	94	0.112	6.828 176	171	0.162	6.817 696	251	0.212	6.803 169	334
0.013	6.837 529	21	0.063	6.834 668	96	0.113	6.828 005	173	0.163	6.817 445	251	0.213	6.802 835	335
0.014	6.837 508	21	0.064	6.834 572	97	0.114	6.827 832	174	0.164	6.817 194	254	0.214	6.802 500	336
0.015	6.837 487	24	0.065	6.834 475	99	0.115	6.827 658	176	0.165	6.816 940	255	0.215	6.802 164	339
0.016	6.837 463	25	0.066	6.834 376	100	0.116	6.827 482	177	0.166	6.816 685	257	0.216	6.801 825	340
0.017	6.837 438	26	0.067	6.834 276	102	0.117	6.827 305	179	0.167	6.816 428	258	0.217	6.801 485	341
0.018	6.837 412	28	0.068	6.834 174	104	0.118	6.827 126	180	0.168	6.816 170	260	0.218	6.801 144	344
0.019	6.837 384		0.069	6.834 070		0.119	6.826 946		0.169	6.815 910		0.219	6.800 800	
		29			104			182			262			345
0.020	6.837 355	31	0.070	6.833 966	107	0.120	6.826 764	183	0.170	6.815 648	263	0.220	6.800 455	347
0.021	6.837 324	32	0.071	6.833 859	108	0.121	6.826 581	186	0.171	6.815 385	265	0.221	6.800 108	349
0.022	6.837 292	34	0.072	6.833 751	109	0.122	6.826 395	186	0.172	6.815 120	266	0.222	6.799 759	350
0.023	6.837 258	35	0.073	6.833 642	111	0.123	6.826 209	188	0.173	6.814 854	269	0.223	6.799 409	352
0.024	6.837 223	37	0.074	6.833 531	113	0.124	6.826 021	190	0.174	6.814 585	269	0.224	6.799 057	354
0.025	6.837 186	38	0.075	6.833 418	114	0.125	6.825 831	192	0.175	6.814 316	272	0.225	6.798 703	356
0.026	6.837 148	40	0.076	6.833 304	115	0.126	6.825 639	193	0.176	6.814 044	273	0.226	6.798 347	357
0.027	6.837 108	42	0.077	6.833 189	118	0.127	6.825 446	194	0.177	6.813 771	275	0.227	6.797 990	359
0.028	6.837 066	43	0.078	6.833 071	118	0.128	6.825 252	196	0.178	6.813 496	276	0.228	6.797 631	361
0.029	6.837 023		0.079	6.832 953		0.129	6.825 056		0.179	6.813 220		0.229	6.797 270	
		44			120			198			278			362
0.030	6.836 979	46	0.080	6.832 833	122	0.130	6.824 858	199	0.180	6.812 942	280	0.230	6.796 908	365
0.031	6.836 933	47	0.081	6.832 711	123	0.131	6.824 659	201	0.181	6.812 662	281	0.231	6.796 543	366
0.032	6.836 886	49	0.082	6.832 588	125	0.132	6.824 458	202	0.182	6.812 381	283	0.232	6.796 177	367
0.033	6.836 837	51	0.083	6.832 463	126	0.133	6.824 256	204	0.183	6.812 098	284	0.233	6.795 810	370
0.034	6.836 786	51	0.084	6.832 337	128	0.134	6.824 052	206	0.184	6.811 814	287	0.234	6.795 440	371
0.035	6.836 735	54	0.085	6.832 209	129	0.135	6.823 846	207	0.185	6.811 527	287	0.235	6.795 069	373
0.036	6.836 681	55	0.086	6.832 080	131	0.136	6.823 639	208	0.186	6.811 240	290	0.236	6.794 696	375
0.037	6.836 626	56	0.087	6.831 949	133	0.137	6.823 431	211	0.187	6.810 950	291	0.237	6.794 321	377
0.038	6.836 570	58	0.088	6.831 816	134	0.138	6.823 220	211	0.188	6.810 659	293	0.238	6.793 944	378
0.039	6.836 512		0.089	6.831 682		0.139	6.823 009		0.189	6.810 366		0.239	6.793 566	
		60			135			214			295			380
0.040	6.836 452	60	0.090	6.831 547	137	0.140	6.822 795	215	0.190	6.810 071	296	0.240	6.793 186	382
0.041	6.836 392	63	0.091	6.831 410	139	0.141	6.822 580	217	0.191	6.809 775	298	0.241	6.792 804	383
0.042	6.836 329	64	0.092	6.831 271	140	0.142	6.822 363	218	0.192	6.809 477	299	0.242	6.792 421	386
0.043	6.836 265	65	0.093	6.831 131	141	0.143	6.822 145	220	0.193	6.809 178	301	0.243	6.792 035	387
0.044	6.836 200	67	0.094	6.830 990	144	0.144	6.821 925	221	0.194	6.808 877	303	0.244	6.791 648	389
0.045	6.836 133	69	0.095	6.830 846	144	0.145	6.821 704	223	0.195	6.808 574	304	0.245	6.791 259	391
0.046	6.836 064	70	0.096	6.830 702	147	0.146	6.821 481	225	0.196	6.808 270	307	0.246	6.790 868	392
0.047	6.835 994	71	0.097	6.830 555	147	0.147	6.821 256	226	0.197	6.807 963	307	0.247	6.790 476	394
0.048	6.835 923	73	0.098	6.830 408	150	0.148	6.821 030	227	0.198	6.807 656	310	0.248	6.790 082	397
0.049	6.835 850	75	0.099	6.830 258	151	0.149	6.820 803	230	0.199	6.807 346	311	0.249	6.789 685	397
0.050	6.835 775		0.100	6.830 107		0.150	6.820 573		0.200	6.807 035		0.250	6.789 288	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2, n\}$

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	5.142 942	0	0.050	5.142 927	1	0.100	5.142 710	9	0.150	5.141 777	31	0.200	5.139 287	73
0.001	5.142 942	0	0.051	5.142 926	1	0.101	5.142 701	10	0.151	5.141 746	32	0.201	5.139 214	75
0.002	5.142 942	0	0.052	5.142 925	2	0.102	5.142 691	10	0.152	5.141 714	32	0.202	5.139 139	75
0.003	5.142 942	0	0.053	5.142 923	1	0.103	5.142 681	10	0.153	5.141 682	33	0.203	5.139 064	76
0.004	5.142 942	0	0.054	5.142 922	2	0.104	5.142 671	10	0.154	5.141 649	34	0.204	5.138 988	78
0.005	5.142 942	0	0.055	5.142 920	1	0.105	5.142 661	11	0.155	5.141 615	34	0.205	5.138 910	79
0.006	5.142 942	0	0.056	5.142 919	2	0.106	5.142 650	11	0.156	5.141 581	35	0.206	5.138 831	79
0.007	5.142 942	0	0.057	5.142 917	2	0.107	5.142 639	12	0.157	5.141 546	36	0.207	5.138 752	81
0.008	5.142 942	0	0.058	5.142 915	1	0.108	5.142 627	12	0.158	5.141 510	36	0.208	5.138 671	83
0.009	5.142 942		0.059	5.142 914		0.109	5.142 615		0.159	5.141 474		0.209	5.138 588	
		0			2			12			38			83
0.010	5.142 942	0	0.060	5.142 912	3	0.110	5.142 603	12	0.160	5.141 436	37	0.210	5.138 505	84
0.011	5.142 942	0	0.061	5.142 909	2	0.111	5.142 591	13	0.161	5.141 399	39	0.211	5.138 421	86
0.012	5.142 942	0	0.062	5.142 907	2	0.112	5.142 578	13	0.162	5.141 360	39	0.212	5.138 335	87
0.013	5.142 942	0	0.063	5.142 905	2	0.113	5.142 565	14	0.163	5.141 321	40	0.213	5.138 248	88
0.014	5.142 942	0	0.064	5.142 903	3	0.114	5.142 551	13	0.164	5.141 281	41	0.214	5.138 160	90
0.015	5.142 942	1	0.065	5.142 900	2	0.115	5.142 538	15	0.165	5.141 240	41	0.215	5.138 070	90
0.016	5.142 941	0	0.066	5.142 898	3	0.116	5.142 523	14	0.166	5.141 199	42	0.216	5.137 980	92
0.017	5.142 941	0	0.067	5.142 895	3	0.117	5.142 509	15	0.167	5.141 157	43	0.217	5.137 888	93
0.018	5.142 941	0	0.068	5.142 892	3	0.118	5.142 494	15	0.168	5.141 114	44	0.218	5.137 795	95
0.019	5.142 941		0.069	5.142 889		0.119	5.142 479		0.169	5.141 070		0.219	5.137 700	
		0			3			16			44			95
0.020	5.142 941	0	0.070	5.142 886	3	0.120	5.142 463	16	0.170	5.141 026	45	0.220	5.137 605	97
0.021	5.142 941	0	0.071	5.142 883	4	0.121	5.142 447	17	0.171	5.140 981	46	0.221	5.137 508	99
0.022	5.142 941	0	0.072	5.142 879	3	0.122	5.142 430	17	0.172	5.140 935	47	0.222	5.137 409	99
0.023	5.142 941	0	0.073	5.142 876	4	0.123	5.142 413	17	0.173	5.140 888	48	0.223	5.137 310	101
0.024	5.142 941	0	0.074	5.142 872	4	0.124	5.142 396	18	0.174	5.140 840	48	0.224	5.137 209	102
0.025	5.142 941	0	0.075	5.142 868	4	0.125	5.142 378	18	0.175	5.140 792	49	0.225	5.137 107	104
0.026	5.142 941	1	0.076	5.142 864	4	0.126	5.142 360	18	0.176	5.140 743	51	0.226	5.137 003	105
0.027	5.142 940	0	0.077	5.142 860	4	0.127	5.142 342	19	0.177	5.140 692	50	0.227	5.136 898	107
0.028	5.142 940	0	0.078	5.142 856	5	0.128	5.142 323	20	0.178	5.140 642	52	0.228	5.136 791	107
0.029	5.142 940		0.079	5.142 851		0.129	5.142 303		0.179	5.140 590		0.229	5.136 684	
		0			4			20			53			110
0.030	5.142 940	1	0.080	5.142 847	5	0.130	5.142 283	20	0.180	5.140 537	54	0.230	5.136 574	110
0.031	5.142 939	0	0.081	5.142 842	5	0.131	5.142 263	21	0.181	5.140 483	54	0.231	5.136 464	112
0.032	5.142 939	0	0.082	5.142 837	5	0.132	5.142 242	22	0.182	5.140 429	55	0.232	5.136 352	114
0.033	5.142 939	0	0.083	5.142 832	6	0.133	5.142 220	21	0.183	5.140 374	56	0.233	5.136 238	115
0.034	5.142 939	1	0.084	5.142 826	5	0.134	5.142 199	23	0.184	5.140 318	58	0.234	5.136 123	116
0.035	5.142 938	0	0.085	5.142 821	6	0.135	5.142 176	22	0.185	5.140 260	58	0.235	5.136 007	118
0.036	5.142 938	1	0.086	5.142 815	6	0.136	5.142 154	24	0.186	5.140 202	59	0.236	5.135 889	120
0.037	5.142 937	0	0.087	5.142 809	6	0.137	5.142 130	24	0.187	5.140 143	60	0.237	5.135 769	121
0.038	5.142 937	1	0.088	5.142 803	7	0.138	5.142 106	24	0.188	5.140 083	61	0.238	5.135 648	122
0.039	5.142 936		0.089	5.142 796		0.139	5.142 082		0.189	5.140 022		0.239	5.135 526	
		0			6			25			61			124
0.040	5.142 936	1	0.090	5.142 790	7	0.140	5.142 057	25	0.190	5.139 961	63	0.240	5.135 402	125
0.041	5.142 935	1	0.091	5.142 783	7	0.141	5.142 032	26	0.191	5.139 898	64	0.241	5.135 277	127
0.042	5.142 934	0	0.092	5.142 776	8	0.142	5.142 006	27	0.192	5.139 834	65	0.242	5.135 150	129
0.043	5.142 934	1	0.093	5.142 768	7	0.143	5.141 979	27	0.193	5.139 769	66	0.243	5.135 021	130
0.044	5.142 933	1	0.094	5.142 761	8	0.144	5.141 952	28	0.194	5.139 703	67	0.244	5.134 891	132
0.045	5.142 932	1	0.095	5.142 753	8	0.145	5.141 924	28	0.195	5.139 636	67	0.245	5.134 759	134
0.046	5.142 931	1	0.096	5.142 745	8	0.146	5.141 896	29	0.196	5.139 569	69	0.246	5.134 625	135
0.047	5.142 930	1	0.097	5.142 737	9	0.147	5.141 867	29	0.197	5.139 500	70	0.247	5.134 490	136
0.048	5.142 929	1	0.098	5.142 728	9	0.148	5.141 838	30	0.198	5.139 430	71	0.248	5.134 354	139
0.049	5.142 928	1	0.099	5.142 719	9	0.149	5.141 808	31	0.199	5.139 359	72	0.249	5.134 215	140
0.050	5.142 927		0.100	5.142 710		0.150	5.141 777		0.200	5.139 287		0.250	5.134 075	

Tafel VIII.

log $\{Q_2^0(u)\}$

±u	Q	−Δ
0.000	6,,188 807	1
0.001	6,,188 806	2
0.002	6,,188 804	4
0.003	6,,188 800	5
0.004	6,,188 795	7
0.005	6,,188 788	8
0.006	6,,188 780	10
0.007	6,,188 770	11
0.008	6,,188 759	13
0.009	6,,188 746	14
0.010	6,,188 732	15
0.011	6,,188 717	17
0.012	6,,188 700	19
0.013	6,,188 681	20
0.014	6,,188 661	22
0.015	6,,188 639	23
0.016	6,,188 616	24
0.017	6,,188 592	26
0.018	6,,188 566	28
0.019	6,,188 538	29
0.020	6,,188 509	30
0.021	6,,188 479	32
0.022	6,,188 447	34
0.023	6,,188 413	35
0.024	6,,188 378	36
0.025	6,,188 342	38
0.026	6,,188 304	40
0.027	6,,188 264	41
0.028	6,,188 223	42
0.029	6,,188 181	44
0.030	6,,188 137	45
0.031	6,,188 092	47
0.032	6,,188 045	49
0.033	6,,187 996	50
0.034	6,,187 946	51
0.035	6,,187 895	53
0.036	6,,187 842	54
0.037	6,,187 788	56
0.038	6,,187 732	57
0.039	6,,187 675	59
0.040	6,,187 616	61
0.041	6,,187 555	61
0.042	6,,187 494	64
0.043	6,,187 430	65
0.044	6,,187 365	66
0.045	6,,187 299	68
0.046	6,,187 231	69
0.047	6,,187 162	71
0.048	6,,187 091	72
0.049	6,,187 019	74
0.050	6,,186 945	

±u	Q	−Δ
0.050	6,,186 945	75
0.051	6,,186 870	77
0.052	6,,186 793	78
0.053	6,,186 715	80
0.054	6,,186 635	81
0.055	6,,186 554	83
0.056	6,,186 471	84
0.057	6,,186 387	86
0.058	6,,186 301	87
0.059	6,,186 214	89
0.060	6,,186 125	91
0.061	6,,186 034	91
0.062	6,,185 943	94
0.063	6,,185 849	94
0.064	6,,185 755	97
0.065	6,,185 658	97
0.066	6,,185 561	100
0.067	6,,185 461	101
0.068	6,,185 360	102
0.069	6,,185 258	104
0.070	6,,185 154	105
0.071	6,,185 049	107
0.072	6,,184 942	108
0.073	6,,184 834	110
0.074	6,,184 724	111
0.075	6,,184 613	113
0.076	6,,184 500	115
0.077	6,,184 385	116
0.078	6,,184 269	117
0.079	6,,184 152	119
0.080	6,,184 033	120
0.081	6,,183 913	122
0.082	6,,183 791	124
0.083	6,,183 667	125
0.084	6,,183 542	126
0.085	6,,183 416	128
0.086	6,,183 288	130
0.087	6,,183 158	131
0.088	6,,183 027	132
0.089	6,,182 895	135
0.090	6,,182 760	135
0.091	6,,182 625	137
0.092	6,,182 488	139
0.093	6,,182 349	140
0.094	6,,182 209	142
0.095	6,,182 067	143
0.096	6,,181 924	145
0.097	6,,181 779	146
0.098	6,,181 633	148
0.099	6,,181 485	149
0.100	6,,181 336	

±u	Q	−Δ
0.100	6,,181 336	151
0.101	6,,181 185	152
0.102	6,,181 033	154
0.103	6,,180 879	155
0.104	6,,180 724	157
0.105	6,,180 567	159
0.106	6,,180 408	160
0.107	6,,180 248	161
0.108	6,,180 087	163
0.109	6,,179 924	165
0.110	6,,179 759	166
0.111	6,,179 593	168
0.112	6,,179 425	169
0.113	6,,179 256	171
0.114	6,,179 085	172
0.115	6,,178 913	174
0.116	6,,178 739	175
0.117	6,,178 564	177
0.118	6,,178 387	179
0.119	6,,178 208	180
0.120	6,,178 028	181
0.121	6,,177 847	183
0.122	6,,177 664	185
0.123	6,,177 479	186
0.124	6,,177 293	188
0.125	6,,177 105	189
0.126	6,,176 916	191
0.127	6,,176 725	192
0.128	6,,176 533	194
0.129	6,,176 339	196
0.130	6,,176 143	197
0.131	6,,175 946	198
0.132	6,,175 748	200
0.133	6,,175 548	202
0.134	6,,175 346	203
0.135	6,,175 143	205
0.136	6,,174 938	207
0.137	6,,174 731	208
0.138	6,,174 523	209
0.139	6,,174 314	211
0.140	6,,174 103	213
0.141	6,,173 890	214
0.142	6,,173 676	216
0.143	6,,173 460	217
0.144	6,,173 243	219
0.145	6,,173 024	221
0.146	6,,172 803	222
0.147	6,,172 581	223
0.148	6,,172 358	225
0.149	6,,172 133	227
0.150	6,,171 906	

±u	Q	−Δ
0.150	6,,171 906	229
0.151	6,,171 677	230
0.152	6,,171 447	231
0.153	6,,171 216	233
0.154	6,,170 983	235
0.155	6,,170 748	236
0.156	6,,170 512	238
0.157	6,,170 274	239
0.158	6,,170 035	242
0.159	6,,169 793	242
0.160	6,,169 551	244
0.161	6,,169 307	246
0.162	6,,169 061	247
0.163	6,,168 814	249
0.164	6,,168 565	251
0.165	6,,168 314	252
0.166	6,,168 062	254
0.167	6,,167 808	255
0.168	6,,167 553	257
0.169	6,,167 296	259
0.170	6,,167 037	260
0.171	6,,166 777	262
0.172	6,,166 515	263
0.173	6,,166 252	265
0.174	6,,165 987	267
0.175	6,,165 720	268
0.176	6,,165 452	270
0.177	6,,165 182	272
0.178	6,,164 910	273
0.179	6,,164 637	274
0.180	6,,164 363	277
0.181	6,,164 086	278
0.182	6,,163 808	279
0.183	6,,163 529	281
0.184	6,,163 248	283
0.185	6,,162 965	285
0.186	6,,162 680	286
0.187	6,,162 394	287
0.188	6,,162 107	290
0.189	6,,161 817	291
0.190	6,,161 526	292
0.191	6,,161 234	295
0.192	6,,160 939	295
0.193	6,,160 644	298
0.194	6,,160 346	299
0.195	6,,160 047	301
0.196	6,,159 746	302
0.197	6,,159 444	304
0.198	6,,159 140	306
0.199	6,,158 834	308
0.200	6,,158 526	

±u	Q	−Δ
0.200	6,,158 526	309
0.201	6,,158 217	310
0.202	6,,157 907	313
0.203	6,,157 594	314
0.204	6,,157 280	316
0.205	6,,156 964	317
0.206	6,,156 647	319
0.207	6,,156 328	321
0.208	6,,156 007	322
0.209	6,,155 685	324
0.210	6,,155 361	326
0.211	6,,155 035	327
0.212	6,,154 708	329
0.213	6,,154 379	331
0.214	6,,154 048	332
0.215	6,,153 716	334
0.216	6,,153 382	336
0.217	6,,153 046	337
0.218	6,,152 709	339
0.219	6,,152 370	341
0.220	6,,152 029	343
0.221	6,,151 686	344
0.222	6,,151 342	346
0.223	6,,150 996	347
0.224	6,,150 649	350
0.225	6,,150 299	351
0.226	6,,149 948	352
0.227	6,,149 596	355
0.228	6,,149 241	356
0.229	6,,148 885	358
0.230	6,,148 527	359
0.231	6,,148 168	362
0.232	6,,147 806	362
0.233	6,,147 444	365
0.234	6,,147 079	367
0.235	6,,146 712	368
0.236	6,,146 344	370
0.237	6,,145 974	371
0.238	6,,145 603	373
0.239	6,,145 230	375
0.240	6,,144 855	377
0.241	6,,144 478	379
0.242	6,,144 099	380
0.243	6,,143 719	382
0.244	6,,143 337	384
0.245	6,,142 953	385
0.246	6,,142 568	387
0.247	6,,142 181	389
0.248	6,,141 792	391
0.249	6,,141 401	393
0.250	6,,141 008	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2^{10}(n)\}$.

± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ	± n	Q	−Δ
0.000	4_n415 201	0	0.050	4_n415 188	2	0.100	4_n414 982	9	0.150	4_n414 096	29	0.200	4_n411 734	69
0.001	4_n415 201	0	0.051	4_n415 186	1	0.101	4_n414 973	9	0.151	4_n414 067	30	0.201	4_n411 665	71
0.002	4_n415 201	0	0.052	4_n415 185	1	0.102	4_n414 964	10	0.152	4_n414 037	31	0.202	4_n411 594	71
0.003	4_n415 201	0	0.053	4_n415 184	1	0.103	4_n414 954	9	0.153	4_n414 006	32	0.203	4_n411 523	72
0.004	4_n415 201	0	0.054	4_n415 183	2	0.104	4_n414 945	10	0.154	4_n413 974	32	0.204	4_n411 451	74
0.005	4_n415 201	0	0.055	4_n415 181	1	0.105	4_n414 935	11	0.155	4_n413 942	32	0.205	4_n411 377	75
0.006	4_n415 201	0	0.056	4_n415 180	2	0.106	4_n414 924	10	0.156	4_n413 910	34	0.206	4_n411 302	75
0.007	4_n415 201	0	0.057	4_n415 178	2	0.107	4_n414 914	11	0.157	4_n413 876	33	0.207	4_n411 227	77
0.008	4_n415 201	0	0.058	4_n415 176	1	0.108	4_n414 903	11	0.158	4_n413 843	35	0.208	4_n411 150	78
0.009	4_n415 201		0.059	4_n415 175		0.109	4_n414 892		0.159	4_n413 808		0.209	4_n411 072	
		0			2			12			35			79
0.010	4_n415 201	0	0.060	4_n415 173	2	0.110	4_n414 880	12	0.160	4_n413 773	36	0.210	4_n410 993	80
0.011	4_n415 201	0	0.061	4_n415 171	2	0.111	4_n414 868	12	0.161	4_n413 737	37	0.211	4_n410 913	81
0.012	4_n415 201	0	0.062	4_n415 169	2	0.112	4_n414 856	12	0.162	4_n413 700	37	0.212	4_n410 832	82
0.013	4_n415 201	0	0.063	4_n415 167	3	0.113	4_n414 844	13	0.163	4_n413 663	38	0.213	4_n410 750	84
0.014	4_n415 201	0	0.064	4_n415 164	2	0.114	4_n414 831	13	0.164	4_n413 625	38	0.214	4_n410 666	85
0.015	4_n415 201	0	0.065	4_n415 162	2	0.115	4_n414 818	14	0.165	4_n413 587	39	0.215	4_n410 581	85
0.016	4_n415 201	0	0.066	4_n415 160	3	0.116	4_n414 804	13	0.166	4_n413 548	40	0.216	4_n410 496	87
0.017	4_n415 201	0	0.067	4_n415 157	3	0.117	4_n414 791	15	0.167	4_n413 508	41	0.217	4_n410 409	89
0.018	4_n415 201	0	0.068	4_n415 154	3	0.118	4_n414 776	14	0.168	4_n413 467	41	0.218	4_n410 320	89
0.019	4_n415 201		0.069	4_n415 151		0.119	4_n414 762		0.169	4_n413 426		0.219	4_n410 231	
		0			3			15			43			91
0.020	4_n415 201	0	0.070	4_n415 148	3	0.120	4_n414 747	15	0.170	4_n413 383	43	0.220	4_n410 140	92
0.021	4_n415 201	0	0.071	4_n415 145	3	0.121	4_n414 732	16	0.171	4_n413 340	43	0.221	4_n410 048	93
0.022	4_n415 201	0	0.072	4_n415 142	3	0.122	4_n414 716	16	0.172	4_n413 297	45	0.222	4_n409 955	94
0.023	4_n415 201	0	0.073	4_n415 139	4	0.123	4_n414 700	16	0.173	4_n413 252	45	0.223	4_n409 861	96
0.024	4_n415 201	1	0.074	4_n415 135	3	0.124	4_n414 684	17	0.174	4_n413 207	46	0.224	4_n409 765	97
0.025	4_n415 200	0	0.075	4_n415 132	4	0.125	4_n414 667	18	0.175	4_n413 161	46	0.225	4_n409 668	98
0.026	4_n415 200	0	0.076	4_n415 128	4	0.126	4_n414 649	17	0.176	4_n413 115	48	0.226	4_n409 570	99
0.027	4_n415 200	0	0.077	4_n415 124	4	0.127	4_n414 632	18	0.177	4_n413 067	48	0.227	4_n409 471	101
0.028	4_n415 200	0	0.078	4_n415 120	4	0.128	4_n414 614	19	0.178	4_n413 019	49	0.228	4_n409 370	102
0.029	4_n415 200		0.079	4_n415 116		0.129	4_n414 595		0.179	4_n412 970		0.229	4_n409 268	
		0			5			19			50			104
0.030	4_n415 200	1	0.080	4_n415 111	4	0.130	4_n414 576	19	0.180	4_n412 920	51	0.230	4_n409 164	105
0.031	4_n415 199	0	0.081	4_n415 107	5	0.131	4_n414 557	20	0.181	4_n412 869	52	0.231	4_n409 059	106
0.032	4_n415 199	0	0.082	4_n415 102	5	0.132	4_n414 537	20	0.182	4_n412 817	52	0.232	4_n408 953	107
0.033	4_n415 199	1	0.083	4_n415 097	5	0.133	4_n414 517	21	0.183	4_n412 765	53	0.233	4_n408 846	109
0.034	4_n415 198	0	0.084	4_n415 092	5	0.134	4_n414 496	21	0.184	4_n412 712	55	0.234	4_n408 737	110
0.035	4_n415 198	0	0.085	4_n415 087	6	0.135	4_n414 475	22	0.185	4_n412 657	55	0.235	4_n408 627	112
0.036	4_n415 198	1	0.086	4_n415 081	6	0.136	4_n414 453	22	0.186	4_n412 602	56	0.236	4_n408 515	113
0.037	4_n415 197	0	0.087	4_n415 075	5	0.137	4_n414 431	23	0.187	4_n412 546	57	0.237	4_n408 402	115
0.038	4_n415 197	1	0.088	4_n415 070	7	0.138	4_n414 408	23	0.188	4_n412 489	57	0.238	4_n408 287	116
0.039	4_n415 196		0.089	4_n415 063		0.139	4_n414 385		0.189	4_n412 432		0.239	4_n408 171	
		0			6			23			59			117
0.040	4_n415 196	1	0.090	4_n415 057	6	0.140	4_n414 362	24	0.190	4_n412 373	59	0.240	4_n408 054	119
0.041	4_n415 195	1	0.091	4_n415 051	7	0.141	4_n414 338	25	0.191	4_n412 314	61	0.241	4_n407 935	120
0.042	4_n415 194	0	0.092	4_n415 044	7	0.142	4_n414 313	25	0.192	4_n412 253	61	0.242	4_n407 815	122
0.043	4_n415 194	1	0.093	4_n415 037	7	0.143	4_n414 288	26	0.193	4_n412 192	63	0.243	4_n407 693	123
0.044	4_n415 193	1	0.094	4_n415 030	8	0.144	4_n414 262	26	0.194	4_n412 129	63	0.244	4_n407 570	125
0.045	4_n415 192	1	0.095	4_n415 022	7	0.145	4_n414 236	27	0.195	4_n412 066	64	0.245	4_n407 445	126
0.046	4_n415 191	0	0.096	4_n415 015	8	0.146	4_n414 209	27	0.196	4_n412 002	66	0.246	4_n407 319	128
0.047	4_n415 191	1	0.097	4_n415 007	8	0.147	4_n414 182	28	0.197	4_n411 936	66	0.247	4_n407 191	130
0.048	4_n415 190	1	0.098	4_n414 999	9	0.148	4_n414 154	29	0.198	4_n411 870	67	0.248	4_n407 061	131
0.049	4_n415 189	1	0.099	4_n414 990	8	0.149	4_n414 125	29	0.199	4_n411 803	69	0.249	4_n406 930	132
0.050	4_n415 188		0.100	4_n414 982		0.150	4_n414 096		0.200	4_n411 734		0.250	4_n406 798	

Tafel IX.

$\log \{P_2^0(m)\}$.

vergl. pag. 58.

$\pm m$	P	$-\Delta$	$\pm m$	P	$-\Delta$	$\pm m$	P	$-\Delta$	$\pm m$	P	$-\Delta$	$\pm m$	P	$-\Delta$
0.000	8_n619 789	5	0.050	8_n606 561	543	0.100	8_n564 271	1192	0.150	8_n483 112	2155	0.200	8_n335 792	4037
0.001	8_n619 784	16	0.051	8_n606 018	555	0.101	8_n563 079	1207	0.151	8_n480 957	2179	0.201	8_n331 755	4096
0.002	8_n619 768	26	0.052	8_n605 463	566	0.102	8_n561 872	1222	0.152	8_n478 778	2205	0.202	8_n327 659	4156
0.003	8_n619 742	37	0.053	8_n604 897	577	0.103	8_n560 650	1238	0.153	8_n476 573	2231	0.203	8_n323 503	4216
0.004	8_n619 705	46	0.054	8_n604 320	589	0.104	8_n559 412	1254	0.154	8_n474 342	2256	0.204	8_n319 287	4279
0.005	8_n619 659	58	0.055	8_n603 731	601	0.105	8_n558 158	1269	0.155	8_n472 086	2284	0.205	8_n315 008	4343
0.006	8_n619 601	68	0.056	8_n603 130	612	0.106	8_n556 889	1285	0.156	8_n469 802	2310	0.206	8_n310 665	4408
0.007	8_n619 533	78	0.057	8_n602 518	624	0.107	8_n555 604	1301	0.157	8_n467 492	2337	0.207	8_n306 257	4475
0.008	8_n619 455	89	0.058	8_n601 894	636	0.108	8_n554 303	1317	0.158	8_n465 155	2365	0.208	8_n301 782	4543
0.009	8_n619 366	99	0.059	8_n601 258	648	0.109	8_n552 986	1333	0.159	8_n462 790	2393	0.209	8_n297 239	4614
0.010	8_n619 267	109	0.060	8_n600 610	660	0.110	8_n551 653	1349	0.160	8_n460 397	2422	0.210	8_n292 625	4685
0.011	8_n619 158	120	0.061	8_n599 950	671	0.111	8_n550 304	1366	0.161	8_n457 975	2450	0.211	8_n287 940	4759
0.012	8_n619 038	131	0.062	8_n599 279	683	0.112	8_n548 938	1383	0.162	8_n455 525	2479	0.212	8_n283 181	4835
0.013	8_n618 907	141	0.063	8_n598 596	696	0.113	8_n547 555	1399	0.163	8_n453 046	2509	0.213	8_n278 346	4913
0.014	8_n618 766	151	0.064	8_n597 900	708	0.114	8_n546 156	1416	0.164	8_n450 537	2540	0.214	8_n273 433	4991
0.015	8_n618 615	162	0.065	8_n597 192	719	0.115	8_n544 740	1434	0.165	8_n447 997	2569	0.215	8_n268 442	5074
0.016	8_n618 453	173	0.066	8_n596 473	732	0.116	8_n543 306	1450	0.166	8_n445 428	2601	0.216	8_n263 368	5158
0.017	8_n618 280	183	0.067	8_n595 741	745	0.117	8_n541 856	1468	0.167	8_n442 827	2632	0.217	8_n258 210	5244
0.018	8_n618 097	194	0.068	8_n594 996	756	0.118	8_n540 388	1485	0.168	8_n440 195	2664	0.218	8_n252 966	5332
0.019	8_n617 903	204	0.069	8_n594 240	769	0.119	8_n538 903	1504	0.169	8_n437 531	2696	0.219	8_n247 634	5424
0.020	8_n617 699	215	0.070	8_n593 471	782	0.120	8_n537 399	1521	0.170	8_n434 835	2729	0.220	8_n242 210	5517
0.021	8_n617 484	225	0.071	8_n592 689	794	0.121	8_n535 878	1539	0.171	8_n432 106	2763	0.221	8_n236 693	5614
0.022	8_n617 259	236	0.072	8_n591 895	806	0.122	8_n534 339	1557	0.172	8_n429 343	2796	0.222	8_n231 079	5714
0.023	8_n617 023	246	0.073	8_n591 089	819	0.123	8_n532 782	1576	0.173	8_n426 547	2832	0.223	8_n225 365	5815
0.024	8_n616 777	258	0.074	8_n590 270	832	0.124	8_n531 206	1594	0.174	8_n423 715	2866	0.224	8_n219 550	5922
0.025	8_n616 519	268	0.075	8_n589 438	845	0.125	8_n529 612	1613	0.175	8_n420 849	2901	0.225	8_n213 628	6030
0.026	8_n616 251	278	0.076	8_n588 593	858	0.126	8_n527 999	1632	0.176	8_n417 948	2938	0.226	8_n207 598	6142
0.027	8_n615 973	289	0.077	8_n587 735	870	0.127	8_n526 367	1651	0.177	8_n415 010	2975	0.227	8_n201 456	6258
0.028	8_n615 684	300	0.078	8_n586 865	884	0.128	8_n524 716	1670	0.178	8_n412 035	3012	0.228	8_n195 198	6377
0.029	8_n615 384	311	0.079	8_n585 981	896	0.129	8_n523 046	1690	0.179	8_n409 023	3051	0.229	8_n188 821	6501
0.030	8_n615 073	322	0.080	8_n585 085	910	0.130	8_n521 356	1710	0.180	8_n405 972	3089	0.230	8_n182 320	6629
0.031	8_n614 751	332	0.081	8_n584 175	923	0.131	8_n519 646	1729	0.181	8_n402 883	3128	0.231	8_n175 691	6762
0.032	8_n614 419	343	0.082	8_n583 252	937	0.132	8_n517 917	1750	0.182	8_n399 755	3169	0.232	8_n168 929	6898
0.033	8_n614 076	354	0.083	8_n582 315	949	0.133	8_n516 167	1770	0.183	8_n396 586	3210	0.233	8_n162 031	7039
0.034	8_n613 722	365	0.084	8_n581 366	964	0.134	8_n514 397	1790	0.184	8_n393 376	3251	0.234	8_n154 992	7187
0.035	8_n613 357	375	0.085	8_n580 402	977	0.135	8_n512 607	1812	0.185	8_n390 125	3293	0.235	8_n147 805	7339
0.036	8_n612 982	387	0.086	8_n579 425	990	0.136	8_n510 795	1832	0.186	8_n386 832	3337	0.236	8_n140 466	7497
0.037	8_n612 595	398	0.087	8_n578 435	1004	0.137	8_n508 963	1854	0.187	8_n383 495	3380	0.237	8_n132 969	7661
0.038	8_n612 197	408	0.088	8_n577 431	1019	0.138	8_n507 109	1875	0.188	8_n380 115	3425	0.238	8_n125 308	7832
0.039	8_n611 789	420	0.089	8_n576 412	1032	0.139	8_n505 234	1897	0.189	8_n376 690	3471	0.239	8_n117 476	8010
0.040	8_n611 369	430	0.090	8_n575 380	1046	0.140	8_n503 337	1919	0.190	8_n373 219	3518	0.240	8_n109 466	8194
0.041	8_n610 939	442	0.091	8_n574 334	1060	0.141	8_n501 418	1942	0.191	8_n369 701	3564	0.241	8_n101 272	8388
0.042	8_n610 497	453	0.092	8_n573 274	1074	0.142	8_n499 476	1964	0.192	8_n366 137	3614	0.242	8_n092 884	8588
0.043	8_n610 044	464	0.093	8_n572 200	1089	0.143	8_n497 512	1986	0.193	8_n362 523	3662	0.243	8_n084 296	8798
0.044	8_n609 580	475	0.094	8_n571 111	1103	0.144	8_n495 526	2010	0.194	8_n358 861	3713	0.244	8_n075 498	9016
0.045	8_n609 105	486	0.095	8_n570 008	1118	0.145	8_n493 516	2033	0.195	8_n355 148	3764	0.245	8_n066 482	9246
0.046	8_n608 619	498	0.096	8_n568 890	1133	0.146	8_n491 483	2057	0.196	8_n351 384	3816	0.246	8_n057 236	9487
0.047	8_n608 121	509	0.097	8_n567 757	1147	0.147	8_n489 426	2080	0.197	8_n347 568	3871	0.247	8_n047 749	9739
0.048	8_n607 612	520	0.098	8_n566 610	1162	0.148	8_n487 346	2105	0.198	8_n343 697	3924	0.248	8_n038 010	10001
0.049	8_n607 092	531	0.099	8_n565 448	1177	0.149	8_n485 241	2129	0.199	8_n339 773	3981	0.249	8_n028 009	10280
0.050	8_n606 561		0.100	8_n564 271		0.150	8_n483 112		0.200	8_n335 792		0.250	8_n017 729	

Tafel IX.

$\log\{P_2{}^1\, m\}$.

$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$
0.000	8.619 789		0.050	8.624 110		0.100	8.636 822		0.150	8.657 215		0.200	8.684 247	
0.001	8.619 791	2	0.051	8.624 284	174	0.101	8.637 158	336	0.151	8.657 695	480	0.201	8.684 847	600
0.002	8.619 796	5	0.052	8.624 461	177	0.102	8.637 496	338	0.152	8.658 177	482	0.202	8.685 449	602
0.003	8.619 805	9	0.053	8.624 641	180	0.103	8.637 838	342	0.153	8.658 662	485	0.203	8.686 054	605
0.004	8.619 817	12	0.054	8.624 825	184	0.104	8.638 183	345	0.154	8.659 149	487	0.204	8.686 660	606
0.005	8.619 832	15	0.055	8.625 012	187	0.105	8.638 531	348	0.155	8.659 639	490	0.205	8.687 269	609
0.006	8.619 851	19	0.056	8.625 203	191	0.106	8.638 882	351	0.156	8.660 132	493	0.206	8.687 880	611
0.007	8.619 874	23	0.057	8.625 397	194	0.107	8.639 236	354	0.157	8.660 627	495	0.207	8.688 493	613
0.008	8.619 900	26	0.058	8.625 594	197	0.108	8.639 593	357	0.158	8.661 125	498	0.208	8.689 108	615
0.009	8.619 930	30	0.059	8.625 794	200	0.109	8.639 953	360	0.159	8.661 625	500	0.209	8.689 725	617
		33			204			363			503			619
0.010	8.619 963		0.060	8.625 998		0.110	8.640 316		0.160	8.662 128		0.210	8.690 344	
0.011	8.619 999	36	0.061	8.626 205	207	0.111	8.640 682	366	0.161	8.662 634	506	0.211	8.690 965	621
0.012	8.620 039	40	0.062	8.626 416	211	0.112	8.641 051	369	0.162	8.663 142	508	0.212	8.691 588	623
0.013	8.620 082	43	0.063	8.626 630	214	0.113	8.641 423	372	0.163	8.663 652	510	0.213	8.692 214	626
0.014	8.620 129	47	0.064	8.626 847	217	0.114	8.641 798	375	0.164	8.664 165	513	0.214	8.692 841	627
0.015	8.620 180	51	0.065	8.627 067	220	0.115	8.642 176	378	0.165	8.664 681	516	0.215	8.693 471	630
0.016	8.620 233	53	0.066	8.627 291	224	0.116	8.642 557	381	0.166	8.665 199	518	0.216	8.694 102	631
0.017	8.620 291	58	0.067	8.627 518	227	0.117	8.642 941	384	0.167	8.665 720	521	0.217	8.694 735	633
0.018	8.620 351	60	0.068	8.627 748	230	0.118	8.643 328	387	0.168	8.666 243	523	0.218	8.695 371	636
0.019	8.620 416	65	0.069	8.627 982	234	0.119	8.643 718	390	0.169	8.666 769	526	0.219	8.696 008	637
		67			237			392			528			640
0.020	8.620 483		0.070	8.628 219		0.120	8.644 110		0.170	8.667 297		0.220	8.696 648	
0.021	8.620 554	71	0.071	8.628 459	240	0.121	8.644 506	396	0.171	8.667 828	531	0.221	8.697 289	641
0.022	8.620 629	75	0.072	8.628 702	243	0.122	8.644 905	399	0.172	8.668 361	533	0.222	8.697 932	643
0.023	8.620 707	78	0.073	8.628 949	247	0.123	8.645 306	401	0.173	8.668 897	536	0.223	8.698 578	646
0.024	8.620 788	81	0.074	8.629 199	250	0.124	8.645 710	404	0.174	8.669 435	538	0.224	8.699 225	647
0.025	8.620 873	85	0.075	8.629 452	253	0.125	8.646 118	408	0.175	8.669 975	540	0.225	8.699 874	649
0.026	8.620 962	89	0.076	8.629 709	257	0.126	8.646 528	410	0.176	8.670 518	543	0.226	8.700 525	651
0.027	8.621 053	91	0.077	8.629 968	259	0.127	8.646 941	413	0.177	8.671 063	545	0.227	8.701 178	653
0.028	8.621 149	96	0.078	8.630 231	263	0.128	8.647 357	416	0.178	8.671 611	548	0.228	8.701 833	655
0.029	8.621 247	98	0.079	8.630 497	266	0.129	8.647 776	419	0.179	8.672 161	550	0.229	8.702 490	657
		102			270			421			552			658
0.030	8.621 349		0.080	8.630 767		0.130	8.648 197		0.180	8.672 713		0.230	8.703 148	
0.031	8.621 455	106	0.081	8.631 039	272	0.131	8.648 622	425	0.181	8.673 268	555	0.231	8.703 809	661
0.032	8.621 564	109	0.082	8.631 315	276	0.132	8.649 049	427	0.182	8.673 825	557	0.232	8.704 471	662
0.033	8.621 676	112	0.083	8.631 594	279	0.133	8.649 479	430	0.183	8.674 385	560	0.233	8.705 135	664
0.034	8.621 792	116	0.084	8.631 877	283	0.134	8.649 912	433	0.184	8.674 947	562	0.234	8.705 801	666
0.035	8.621 912	120	0.085	8.632 162	285	0.135	8.650 348	436	0.185	8.675 511	564	0.235	8.706 469	668
0.036	8.622 034	122	0.086	8.632 451	289	0.136	8.650 787	439	0.186	8.676 078	567	0.236	8.707 139	670
0.037	8.622 161	127	0.087	8.632 742	291	0.137	8.651 228	441	0.187	8.676 646	568	0.237	8.707 810	671
0.038	8.622 290	129	0.088	8.633 037	295	0.138	8.651 672	444	0.188	8.677 218	572	0.238	8.708 483	673
0.039	8.622 423	133	0.089	8.633 336	299	0.139	8.652 119	447	0.189	8.677 791	573	0.239	8.709 158	675
		136			301			450			576			677
0.040	8.622 559		0.090	8.633 637		0.140	8.652 569		0.190	8.678 367		0.240	8.709 835	
0.041	8.622 699	140	0.091	8.633 941	304	0.141	8.653 021	452	0.191	8.678 945	578	0.241	8.710 514	679
0.042	8.622 842	143	0.092	8.634 249	308	0.142	8.653 476	455	0.192	8.679 525	580	0.242	8.711 194	680
0.043	8.622 989	147	0.093	8.634 560	311	0.143	8.653 934	458	0.193	8.680 107	582	0.243	8.711 876	682
0.044	8.623 139	150	0.094	8.634 873	313	0.144	8.654 395	461	0.194	8.680 692	585	0.244	8.712 560	684
0.045	8.623 292	153	0.095	8.635 190	317	0.145	8.654 858	463	0.195	8.681 279	587	0.245	8.713 246	686
0.046	8.623 449	157	0.096	8.635 511	321	0.146	8.655 324	466	0.196	8.681 868	589	0.246	8.713 933	687
0.047	8.623 609	160	0.097	8.635 834	323	0.147	8.655 793	469	0.197	8.682 460	592	0.247	8.714 622	689
0.048	8.623 773	164	0.098	8.636 160	326	0.148	8.656 264	471	0.198	8.683 053	593	0.248	8.715 313	691
0.049	8.623 940	167	0.099	8.636 490	330	0.149	8.656 738	474	0.199	8.683 649	596	0.249	8.716 005	692
0.050	8.624 110	170	0.100	8.636 822	332	0.150	8.657 215	477	0.200	8.684 247	598	0.250	8.716 699	694

Tafel IX.

$\log \{P_2^2/m\}$.

± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ
0.000	7.947 148	3	0.050	7.939 428	314	0.100	7.915 576	654	0.150	7.873 263	1062	0.200	7.807 591	1607
0.001	7.947 145	10	0.051	7.939 114	321	0.101	7.914 922	662	0.151	7.872 201	1071	0.201	7.805 984	1620
0.002	7.947 135	15	0.052	7.938 793	327	0.102	7.914 260	669	0.152	7.871 130	1081	0.202	7.804 364	1634
0.003	7.947 120	21	0.053	7.938 466	333	0.103	7.913 591	676	0.153	7.870 049	1090	0.203	7.802 730	1647
0.004	7.947 099	28	0.054	7.938 133	340	0.104	7.912 915	684	0.154	7.868 959	1099	0.204	7.801 083	1660
0.005	7.947 071	34	0.055	7.937 793	346	0.105	7.912 231	691	0.155	7.867 860	1109	0.205	7.799 423	1674
0.006	7.947 037	40	0.056	7.937 447	353	0.106	7.911 540	699	0.156	7.866 751	1119	0.206	7.797 749	1688
0.007	7.946 997	46	0.057	7.937 094	360	0.107	7.910 841	706	0.157	7.865 632	1128	0.207	7.796 061	1701
0.008	7.946 951	52	0.058	7.936 734	366	0.108	7.910 135	713	0.158	7.864 504	1137	0.208	7.794 360	1716
0.009	7.946 899	58	0.059	7.936 368	372	0.109	7.909 422	722	0.159	7.863 367	1148	0.209	7.792 644	1729
0.010	7.946 841	64	0.060	7.935 996	379	0.110	7.908 700	728	0.160	7.862 219	1157	0.210	7.790 915	1744
0.011	7.946 777	71	0.061	7.935 617	385	0.111	7.907 972	737	0.161	7.861 062	1167	0.211	7.789 171	1758
0.012	7.946 706	77	0.062	7.935 232	392	0.112	7.907 235	744	0.162	7.859 895	1176	0.212	7.787 413	1772
0.013	7.946 629	82	0.063	7.934 840	399	0.113	7.906 491	752	0.163	7.858 719	1187	0.213	7.785 641	1787
0.014	7.946 547	89	0.064	7.934 441	405	0.114	7.905 739	759	0.164	7.857 532	1197	0.214	7.783 854	1802
0.015	7.946 458	96	0.065	7.934 036	412	0.115	7.904 980	767	0.165	7.856 335	1206	0.215	7.782 052	1816
0.016	7.946 362	101	0.066	7.933 624	418	0.116	7.904 213	775	0.166	7.855 129	1217	0.216	7.780 236	1832
0.017	7.946 261	107	0.067	7.933 206	425	0.117	7.903 438	783	0.167	7.853 912	1227	0.217	7.778 404	1846
0.018	7.946 154	114	0.068	7.932 781	432	0.118	7.902 655	790	0.168	7.852 685	1238	0.218	7.776 558	1862
0.019	7.946 040	120	0.069	7.932 349	438	0.119	7.901 865	799	0.169	7.851 447	1247	0.219	7.774 696	1878
0.020	7.945 920	126	0.070	7.931 911	445	0.120	7.901 066	806	0.170	7.850 200	1258	0.220	7.772 818	1893
0.021	7.945 794	132	0.071	7.931 466	451	0.121	7.900 260	814	0.171	7.848 942	1269	0.221	7.770 925	1908
0.022	7.945 662	138	0.072	7.931 015	459	0.122	7.899 446	823	0.172	7.847 673	1279	0.222	7.769 017	1925
0.023	7.945 524	145	0.073	7.930 556	465	0.123	7.898 623	830	0.173	7.846 394	1289	0.223	7.767 092	1940
0.024	7.945 379	151	0.074	7.930 091	472	0.124	7.897 793	838	0.174	7.845 105	1300	0.224	7.765 152	1957
0.025	7.945 228	157	0.075	7.929 619	478	0.125	7.896 955	847	0.175	7.843 805	1311	0.225	7.763 195	1973
0.026	7.945 071	163	0.076	7.929 141	486	0.126	7.896 108	854	0.176	7.842 494	1322	0.226	7.761 222	1989
0.027	7.944 908	169	0.077	7.928 655	492	0.127	7.895 254	863	0.177	7.841 172	1333	0.227	7.759 233	2007
0.028	7.944 739	176	0.078	7.928 163	499	0.128	7.894 391	871	0.178	7.839 839	1344	0.228	7.757 226	2023
0.029	7.944 563	181	0.079	7.927 664	505	0.129	7.893 520	879	0.179	7.838 495	1355	0.229	7.755 203	2040
0.030	7.944 382	188	0.080	7.927 159	513	0.130	7.892 641	888	0.180	7.837 140	1365	0.230	7.753 163	2057
0.031	7.944 194	195	0.081	7.926 646	520	0.131	7.891 753	895	0.181	7.835 775	1378	0.231	7.751 106	2075
0.032	7.943 999	200	0.082	7.926 126	526	0.132	7.890 858	904	0.182	7.834 397	1388	0.232	7.749 031	2093
0.033	7.943 799	207	0.083	7.925 600	533	0.133	7.889 954	913	0.183	7.833 009	1400	0.233	7.746 938	2110
0.034	7.943 592	213	0.084	7.925 067	541	0.134	7.889 041	921	0.184	7.831 609	1411	0.234	7.744 828	2128
0.035	7.943 379	219	0.085	7.924 526	547	0.135	7.888 120	929	0.185	7.830 198	1423	0.235	7.742 700	2146
0.036	7.943 160	226	0.086	7.923 979	554	0.136	7.887 191	938	0.186	7.828 775	1434	0.236	7.740 554	2165
0.037	7.942 934	231	0.087	7.923 425	561	0.137	7.886 253	947	0.187	7.827 341	1447	0.237	7.738 389	2183
0.038	7.942 703	238	0.088	7.922 864	568	0.138	7.885 306	955	0.188	7.825 894	1458	0.238	7.736 206	2202
0.039	7.942 465	245	0.089	7.922 296	576	0.139	7.884 351	964	0.189	7.824 436	1470	0.239	7.734 004	2221
0.040	7.942 220	251	0.090	7.921 720	582	0.140	7.883 387	972	0.190	7.822 966	1481	0.240	7.731 783	2240
0.041	7.941 969	257	0.091	7.921 138	589	0.141	7.882 415	981	0.191	7.821 485	1494	0.241	7.729 543	2260
0.042	7.941 712	263	0.092	7.920 549	597	0.142	7.881 434	990	0.192	7.819 991	1507	0.242	7.727 283	2279
0.043	7.941 449	269	0.093	7.919 952	603	0.143	7.880 444	999	0.193	7.818 484	1518	0.243	7.725 004	2299
0.044	7.941 180	276	0.094	7.919 349	611	0.144	7.879 445	1008	0.194	7.816 966	1531	0.244	7.722 705	2320
0.045	7.940 904	283	0.095	7.918 738	618	0.145	7.878 437	1017	0.195	7.815 435	1543	0.245	7.720 385	2339
0.046	7.940 621	288	0.096	7.918 120	625	0.146	7.877 420	1025	0.196	7.813 892	1556	0.246	7.718 046	2361
0.047	7.940 333	295	0.097	7.917 495	633	0.147	7.876 395	1035	0.197	7.812 336	1569	0.247	7.715 685	2381
0.048	7.940 038	302	0.098	7.916 862	639	0.148	7.875 360	1044	0.198	7.810 767	1581	0.248	7.713 304	2402
0.049	7.939 736	308	0.099	7.916 223	647	0.149	7.874 316	1053	0.199	7.809 186	1595	0.249	7.710 902	2424
0.050	7.939 428		0.100	7.915 576		0.150	7.873 263		0.200	7.807 591		0.250	7.708 478	

Tafel IX.

$\log \{P_2^3 m\}$.

±m	P	+Δ
0.000	7,,470 026	1
0.001	7,,470 027	4
0.002	7,,470 031	5
0.003	7,,470 036	7
0.004	7,,470 043	9
0.005	7,,470 052	11
0.006	7,,470 063	14
0.007	7,,470 077	15
0.008	7,,470 092	17
0.009	7,,470 109	
		20
0.010	7,,470 129	21
0.011	7,,470 150	24
0.012	7,,470 174	25
0.013	7,,470 199	28
0.014	7,,470 227	29
0.015	7,,470 256	32
0.016	7,,470 288	34
0.017	7,,470 322	35
0.018	7,,470 357	38
0.019	7,,470 395	
		40
0.020	7,,470 435	42
0.021	7,,470 477	43
0.022	7,,470 520	46
0.023	7,,470 566	48
0.024	7,,470 614	50
0.025	7,,470 664	52
0.026	7,,470 716	54
0.027	7,,470 770	56
0.028	7,,470 826	58
0.029	7,,470 884	
		60
0.030	7,,470 944	62
0.031	7,,471 006	64
0.032	7,,471 070	66
0.033	7,,471 136	69
0.034	7,,471 205	70
0.035	7,,471 275	72
0.036	7,,471 347	74
0.037	7,,471 421	76
0.038	7,,471 497	78
0.039	7,,471 575	
		80
0.040	7,,471 655	82
0.041	7,,471 737	85
0.042	7,,471 822	86
0.043	7,,471 908	88
0.044	7,,471 996	90
0.045	7,,472 086	92
0.046	7,,472 178	94
0.047	7,,472 272	96
0.048	7,,472 368	98
0.049	7,,472 466	100
0.050	7,,472 566	

±m	P	+Δ
0.050	7,,472 566	102
0.051	7,,472 668	104
0.052	7,,472 772	106
0.053	7,,472 878	108
0.054	7,,472 986	110
0.055	7,,473 096	111
0.056	7,,473 207	114
0.057	7,,473 321	116
0.058	7,,473 437	117
0.059	7,,473 554	
		120
0.060	7,,473 674	121
0.061	7,,473 795	124
0.062	7,,473 919	125
0.063	7,,474 044	128
0.064	7,,474 172	129
0.065	7,,474 301	131
0.066	7,,474 432	133
0.067	7,,474 565	135
0.068	7,,474 700	137
0.069	7,,474 837	
		139
0.070	7,,474 976	141
0.071	7,,475 117	142
0.072	7,,475 259	145
0.073	7,,475 404	146
0.074	7,,475 550	149
0.075	7,,475 699	150
0.076	7,,475 849	152
0.077	7,,476 001	154
0.078	7,,476 155	156
0.079	7,,476 311	
		157
0.080	7,,476 468	160
0.081	7,,476 628	161
0.082	7,,476 789	163
0.083	7,,476 952	166
0.084	7,,477 118	167
0.085	7,,477 285	168
0.086	7,,477 453	171
0.087	7,,477 624	172
0.088	7,,477 796	175
0.089	7,,477 971	
		176
0.090	7,,478 147	178
0.091	7,,478 325	180
0.092	7,,478 505	181
0.093	7,,478 686	184
0.094	7,,478 870	185
0.095	7,,479 055	186
0.096	7,,479 241	189
0.097	7,,479 430	191
0.098	7,,479 621	192
0.099	7,,479 813	194
0.100	7,,480 007	

±m	P	+Δ
0.100	7,,480 007	196
0.101	7,,480 203	197
0.102	7,,480 400	200
0.103	7,,480 600	201
0.104	7,,480 801	203
0.105	7,,481 004	204
0.106	7,,481 208	207
0.107	7,,481 415	208
0.108	7,,481 623	209
0.109	7,,481 832	
		212
0.110	7,,482 044	213
0.111	7,,482 257	215
0.112	7,,482 472	216
0.113	7,,482 688	219
0.114	7,,482 907	220
0.115	7,,483 127	221
0.116	7,,483 348	224
0.117	7,,483 572	225
0.118	7,,483 797	226
0.119	7,,484 023	
		229
0.120	7,,484 252	229
0.121	7,,484 481	232
0.122	7,,484 713	233
0.123	7,,484 946	235
0.124	7,,485 181	237
0.125	7,,485 418	238
0.126	7,,485 656	240
0.127	7,,485 896	241
0.128	7,,486 137	243
0.129	7,,486 380	
		245
0.130	7,,486 625	246
0.131	7,,486 871	247
0.132	7,,487 118	250
0.133	7,,487 368	251
0.134	7,,487 619	252
0.135	7,,487 871	254
0.136	7,,488 125	256
0.137	7,,488 381	257
0.138	7,,488 638	258
0.139	7,,488 896	
		260
0.140	7,,489 156	262
0.141	7,,489 418	263
0.142	7,,489 681	265
0.143	7,,489 946	266
0.144	7,,490 212	268
0.145	7,,490 480	269
0.146	7,,490 749	271
0.147	7,,491 020	272
0.148	7,,491 292	274
0.149	7,,491 566	275
0.150	7,,491 841	

±m	P	+Δ
0.150	7,,491 841	276
0.151	7,,492 117	278
0.152	7,,492 395	280
0.153	7,,492 675	280
0.154	7,,492 955	283
0.155	7,,493 238	283
0.156	7,,493 521	285
0.157	7,,493 806	287
0.158	7,,494 093	288
0.159	7,,494 381	
		289
0.160	7,,494 670	291
0.161	7,,494 961	292
0.162	7,,495 253	293
0.163	7,,495 546	295
0.164	7,,495 841	296
0.165	7,,496 137	298
0.166	7,,496 435	298
0.167	7,,496 733	301
0.168	7,,497 034	301
0.169	7,,497 335	
		303
0.170	7,,497 638	304
0.171	7,,497 942	305
0.172	7,,498 247	307
0.173	7,,498 554	308
0.174	7,,498 862	309
0.175	7,,499 171	310
0.176	7,,499 481	312
0.177	7,,499 793	313
0.178	7,,500 106	314
0.179	7,,500 420	
		316
0.180	7,,500 736	317
0.181	7,,501 053	318
0.182	7,,501 371	319
0.183	7,,501 690	320
0.184	7,,502 010	322
0.185	7,,502 332	322
0.186	7,,502 654	324
0.187	7,,502 978	326
0.188	7,,503 304	326
0.189	7,,503 630	
		327
0.190	7,,503 957	329
0.191	7,,504 286	330
0.192	7,,504 616	330
0.193	7,,504 946	332
0.194	7,,505 278	334
0.195	7,,505 612	334
0.196	7,,505 946	335
0.197	7,,506 281	336
0.198	7,,506 617	338
0.199	7,,506 955	339
0.200	7,,507 294	

±m	P	+Δ
0.200	7,,507 294	339
0.201	7,,507 633	341
0.202	7,,507 974	342
0.203	7,,508 316	343
0.204	7,,508 659	343
0.205	7,,509 002	345
0.206	7,,509 347	346
0.207	7,,509 693	347
0.208	7,,510 040	348
0.209	7,,510 388	
		349
0.210	7,,510 737	350
0.211	7,,511 087	351
0.212	7,,511 438	352
0.213	7,,511 790	352
0.214	7,,512 142	354
0.215	7,,512 496	355
0.216	7,,512 851	356
0.217	7,,513 207	356
0.218	7,,513 563	358
0.219	7,,513 921	
		358
0.220	7,,514 279	360
0.221	7,,514 639	360
0.222	7,,514 999	361
0.223	7,,515 360	362
0.224	7,,515 722	363
0.225	7,,516 085	364
0.226	7,,516 449	364
0.227	7,,516 813	366
0.228	7,,517 179	366
0.229	7,,517 545	
		367
0.230	7,,517 912	368
0.231	7,,518 280	369
0.232	7,,518 649	369
0.233	7,,519 018	371
0.234	7,,519 389	371
0.235	7,,519 760	372
0.236	7,,520 132	373
0.237	7,,520 505	373
0.238	7,,520 878	374
0.239	7,,521 252	
		375
0.240	7,,521 627	376
0.241	7,,522 003	376
0.242	7,,522 379	378
0.243	7,,522 757	378
0.244	7,,523 135	378
0.245	7,,523 513	379
0.246	7,,523 892	380
0.247	7,,524 272	381
0.248	7,,524 653	381
0.249	7,,525 034	382
0.250	7,,525 416	

Tafel IX.

$\log \{P_2{}^1 m\}$.

± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ
0.000	7,,277 904		0.050	7,,271 155		0.100	7,,250 412		0.150	7,,214 047		0.200	7,,158 766	
0.001	7,,277 902	2	0.051	7,,270 881	274	0.101	7,,249 846	566	0.151	7,,213 142	905	0.201	7,,157 431	1335
0.002	7,,277 894	8	0.052	7,,270 601	280	0.102	7,,249 273	573	0.152	7,,212 229	913	0.202	7,,156 087	1344
0.003	7,,277 880	14	0.053	7,,270 315	286	0.103	7,,248 694	579	0.153	7,,211 308	921	0.203	7,,154 732	1355
0.004	7,,277 861	19	0.054	7,,270 024	291	0.104	7,,248 109	585	0.154	7,,210 380	928	0.204	7,,153 368	1364
0.005	7,,277 837	24	0.055	7,,269 727	297	0.105	7,,247 517	592	0.155	7,,209 444	936	0.205	7,,151 993	1375
0.006	7,,277 808	29	0.056	7,,269 425	302	0.106	7,,246 919	598	0.156	7,,208 501	943	0.206	7,,150 608	1385
0.007	7,,277 773	35	0.057	7,,269 117	308	0.107	7,,246 315	604	0.157	7,,207 550	951	0.207	7,,149 213	1395
0.008	7,,277 733	40	0.058	7,,268 804	313	0.108	7,,245 705	610	0.158	7,,206 591	959	0.208	7,,147 807	1406
0.009	7,,277 687	46	0.059	7,,268 484	320	0.109	7,,245 088	617	0.159	7,,205 624	967	0.209	7,,146 391	1416
		51			324			623			974			1427
0.010	7,,277 636		0.060	7,,268 160		0.110	7,,244 465		0.160	7,,204 650		0.210	7,,144 964	
0.011	7,,277 579	57	0.061	7,,267 829	331	0.111	7,,243 836	629	0.161	7,,203 668	982	0.211	7,,143 527	1437
0.012	7,,277 518	61	0.062	7,,267 493	336	0.112	7,,243 200	636	0.162	7,,202 678	990	0.212	7,,142 079	1448
0.013	7,,277 451	67	0.063	7,,267 151	342	0.113	7,,242 557	643	0.163	7,,201 680	998	0.213	7,,140 621	1458
0.014	7,,277 378	73	0.064	7,,266 804	347	0.114	7,,241 908	649	0.164	7,,200 674	1006	0.214	7,,139 151	1470
0.015	7,,277 300	78	0.065	7,,266 451	353	0.115	7,,241 253	655	0.165	7,,199 660	1014	0.215	7,,137 670	1481
0.016	7,,277 217	83	0.066	7,,266 092	359	0.116	7,,240 591	662	0.166	7,,198 637	1023	0.216	7,,136 179	1491
0.017	7,,277 128	89	0.067	7,,265 727	365	0.117	7,,239 923	668	0.167	7,,197 607	1030	0.217	7,,134 676	1503
0.018	7,,277 034	94	0.068	7,,265 357	370	0.118	7,,239 248	675	0.168	7,,196 569	1038	0.218	7,,133 163	1513
0.019	7,,276 935	99	0.069	7,,264 981	376	0.119	7,,238 567	681	0.169	7,,195 523	1046	0.219	7,,131 638	1525
		105			382			688			1055			1537
0.020	7,,276 830		0.070	7,,264 599		0.120	7,,237 879		0.170	7,,194 468		0.220	7,,130 101	
0.021	7,,276 719	111	0.071	7,,264 212	387	0.121	7,,237 184	695	0.171	7,,193 405	1063	0.221	7,,128 554	1547
0.022	7,,276 604	115	0.072	7,,263 818	394	0.122	7,,236 483	701	0.172	7,,192 334	1071	0.222	7,,126 994	1560
0.023	7,,276 483	121	0.073	7,,263 419	399	0.123	7,,235 775	708	0.173	7,,191 254	1080	0.223	7,,125 424	1570
0.024	7,,276 356	127	0.074	7,,263 015	404	0.124	7,,235 061	714	0.174	7,,190 166	1088	0.224	7,,123 841	1583
0.025	7,,276 224	132	0.075	7,,262 604	411	0.125	7,,234 339	722	0.175	7,,189 070	1096	0.225	7,,122 247	1594
0.026	7,,276 087	137	0.076	7,,262 187	417	0.126	7,,233 611	728	0.176	7,,187 965	1105	0.226	7,,120 641	1606
0.027	7,,275 944	143	0.077	7,,261 765	422	0.127	7,,232 876	735	0.177	7,,186 851	1114	0.227	7,,119 022	1619
0.028	7,,275 796	148	0.078	7,,261 337	428	0.128	7,,232 135	741	0.178	7,,185 730	1121	0.228	7,,117 392	1630
0.029	7,,275 643	153	0.079	7,,260 903	434	0.129	7,,231 386	749	0.179	7,,184 599	1131	0.229	7,,115 750	1642
		159			440			755			1140			1655
0.030	7,,275 484		0.080	7,,260 463		0.130	7,,230 631		0.180	7,,183 459		0.230	7,,114 095	
0.031	7,,275 319	165	0.081	7,,260 018	445	0.131	7,,229 869	762	0.181	7,,182 311	1148	0.231	7,,112 428	1667
0.032	7,,275 149	170	0.082	7,,259 566	452	0.132	7,,229 100	769	0.182	7,,181 154	1157	0.232	7,,110 748	1680
0.033	7,,274 974	175	0.083	7,,259 109	457	0.133	7,,228 324	776	0.183	7,,179 989	1165	0.233	7,,109 056	1692
0.034	7,,274 793	181	0.084	7,,258 645	464	0.134	7,,227 542	782	0.184	7,,178 814	1175	0.234	7,,107 351	1705
0.035	7,,274 607	186	0.085	7,,258 176	469	0.135	7,,226 752	790	0.185	7,,177 631	1183	0.235	7,,105 633	1718
0.036	7,,274 415	192	0.086	7,,257 700	476	0.136	7,,225 955	797	0.186	7,,176 438	1193	0.236	7,,103 902	1731
0.037	7,,274 218	197	0.087	7,,257 219	481	0.137	7,,225 151	804	0.187	7,,175 236	1202	0.237	7,,102 159	1743
0.038	7,,274 016	202	0.088	7,,256 732	487	0.138	7,,224 340	811	0.188	7,,174 026	1210	0.238	7,,100 402	1757
0.039	7,,273 808	208	0.089	7,,256 238	494	0.139	7,,223 522	818	0.189	7,,172 806	1220	0.239	7,,098 632	1770
		214			499			825			1229			1784
0.040	7,,273 594		0.090	7,,255 739		0.140	7,,222 697		0.190	7,,171 577		0.240	7,,096 848	
0.041	7,,273 375	219	0.091	7,,255 234	505	0.141	7,,221 865	832	0.191	7,,170 338	1239	0.241	7,,095 052	1796
0.042	7,,273 150	225	0.092	7,,254 722	512	0.142	7,,221 025	840	0.192	7,,169 091	1247	0.242	7,,093 241	1811
0.043	7,,272 920	230	0.093	7,,254 205	517	0.143	7,,220 179	846	0.193	7,,167 834	1257	0.243	7,,091 417	1824
0.044	7,,272 685	235	0.094	7,,253 682	523	0.144	7,,219 325	854	0.194	7,,166 567	1267	0.244	7,,089 579	1838
0.045	7,,272 444	241	0.095	7,,253 152	530	0.145	7,,218 464	861	0.195	7,,165 291	1276	0.245	7,,087 727	1852
0.046	7,,272 197	247	0.096	7,,252 616	536	0.146	7,,217 595	869	0.196	7,,164 005	1286	0.246	7,,085 860	1867
0.047	7,,271 945	252	0.097	7,,252 074	542	0.147	7,,216 719	876	0.197	7,,162 710	1295	0.247	7,,083 980	1880
0.048	7,,271 687	258	0.098	7,,251 526	548	0.148	7,,215 836	883	0.198	7,,161 405	1305	0.248	7,,082 085	1895
0.049	7,,271 424	263	0.099	7,,250 972	554	0.149	7,,214 945	891	0.199	7,,160 090	1315	0.249	7,,080 176	1909
0.050	7,,271 155	269	0.100	7,,250 412	560	0.150	7,,214 047	898	0.200	7,,158 766	1324	0.250	7,,078 252	1924

Tafel IX.

$\log \{P_2^5\, m\}$.

$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$
0.000	6.578 934	1	0.050	6.581 158	89	0.100	6.587 673	172	0.150	6.598 036	242	0.200	6.611 568	297
0.001	6.578 935	3	0.051	6.581 247	91	0.101	6.587 845	173	0.151	6.598 278	243	0.201	6.611 865	299
0.002	6.578 938	4	0.052	6.581 338	93	0.102	6.588 018	174	0.152	6.598 521	245	0.202	6.612 164	299
0.003	6.578 942	7	0.053	6.581 431	94	0.103	6.588 192	176	0.153	6.598 766	246	0.203	6.612 463	300
0.004	6.578 949	8	0.054	6.581 525	96	0.104	6.588 368	178	0.154	6.599 012	247	0.204	6.612 763	301
0.005	6.578 957	9	0.055	6.581 621	98	0.105	6.588 546	179	0.155	6.599 259	248	0.205	6.613 064	302
0.006	6.578 966	12	0.056	6.581 719	100	0.106	6.588 725	181	0.156	6.599 507	250	0.206	6.613 366	303
0.007	6.578 978	14	0.057	6.581 819	101	0.107	6.588 906	182	0.157	6.599 757	251	0.207	6.613 669	304
0.008	6.578 992	15	0.058	6.581 920	103	0.108	6.589 088	183	0.158	6.600 008	252	0.208	6.613 973	304
0.009	6.579 007	17	0.059	6.582 023	105	0.109	6.589 271	186	0.159	6.600 260	253	0.209	6.614 277	306
0.010	6.579 024	19	0.060	6.582 128	106	0.110	6.589 457	186	0.160	6.600 513	255	0.210	6.614 583	306
0.011	6.579 043	20	0.061	6.582 234	108	0.111	6.589 643	188	0.161	6.600 768	256	0.211	6.614 889	307
0.012	6.579 063	22	0.062	6.582 342	110	0.112	6.589 831	190	0.162	6.601 024	257	0.212	6.615 196	309
0.013	6.579 085	25	0.063	6.582 452	111	0.113	6.590 021	191	0.163	6.601 281	258	0.213	6.615 505	309
0.014	6.579 110	26	0.064	6.582 563	114	0.114	6.590 212	193	0.164	6.601 539	259	0.214	6.615 814	309
0.015	6.579 136	27	0.065	6.582 677	114	0.115	6.590 405	194	0.165	6.601 798	261	0.215	6.616 123	311
0.016	6.579 163	30	0.066	6.582 791	117	0.116	6.590 599	196	0.166	6.602 059	261	0.216	6.616 434	311
0.017	6.579 193	31	0.067	6.582 908	118	0.117	6.590 795	197	0.167	6.602 320	263	0.217	6.616 745	312
0.018	6.579 224	33	0.068	6.583 026	120	0.118	6.590 992	198	0.168	6.602 583	264	0.218	6.617 057	313
0.019	6.579 257	35	0.069	6.583 146	122	0.119	6.591 190	200	0.169	6.602 847	266	0.219	6.617 370	314
0.020	6.579 292	36	0.070	6.583 268	123	0.120	6.591 390	201	0.170	6.603 113	266	0.220	6.617 684	315
0.021	6.579 328	39	0.071	6.583 391	125	0.121	6.591 591	203	0.171	6.603 379	267	0.221	6.617 999	315
0.022	6.579 367	40	0.072	6.583 516	126	0.122	6.591 794	204	0.172	6.603 646	269	0.222	6.618 314	316
0.023	6.579 407	42	0.073	6.583 642	129	0.123	6.591 998	206	0.173	6.603 915	269	0.223	6.618 630	317
0.024	6.579 449	44	0.074	6.583 771	129	0.124	6.592 204	207	0.174	6.604 184	271	0.224	6.618 947	318
0.025	6.579 493	45	0.075	6.583 900	132	0.125	6.592 411	209	0.175	6.604 455	272	0.225	6.619 265	319
0.026	6.579 538	47	0.076	6.584 032	133	0.126	6.592 620	210	0.176	6.604 727	273	0.226	6.619 584	319
0.027	6.579 585	50	0.077	6.584 165	135	0.127	6.592 830	211	0.177	6.605 000	274	0.227	6.619 903	320
0.028	6.579 635	50	0.078	6.584 300	136	0.128	6.593 041	213	0.178	6.605 274	275	0.228	6.620 223	320
0.029	6.579 685	53	0.079	6.584 436	138	0.129	6.593 254	214	0.179	6.605 549	277	0.229	6.620 543	322
0.030	6.579 738	54	0.080	6.584 574	140	0.130	6.593 468	216	0.180	6.605 826	277	0.230	6.620 865	322
0.031	6.579 792	56	0.081	6.584 714	141	0.131	6.593 684	217	0.181	6.606 103	278	0.231	6.621 187	323
0.032	6.579 848	58	0.082	6.584 855	143	0.132	6.593 901	218	0.182	6.606 381	280	0.232	6.621 510	323
0.033	6.579 906	60	0.083	6.584 998	145	0.133	6.594 119	220	0.183	6.606 661	280	0.233	6.621 833	324
0.034	6.579 966	61	0.084	6.585 143	146	0.134	6.594 339	221	0.184	6.606 941	282	0.234	6.622 157	325
0.035	6.580 027	63	0.085	6.585 289	148	0.135	6.594 560	222	0.185	6.607 223	283	0.235	6.622 482	326
0.036	6.580 090	65	0.086	6.585 437	149	0.136	6.594 782	224	0.186	6.607 506	283	0.236	6.622 808	326
0.037	6.580 155	67	0.087	6.585 586	151	0.137	6.595 006	225	0.187	6.607 789	285	0.237	6.623 134	327
0.038	6.580 222	68	0.088	6.585 737	153	0.138	6.595 231	226	0.188	6.608 074	286	0.238	6.623 461	327
0.039	6.580 290	70	0.089	6.585 890	154	0.139	6.595 457	228	0.189	6.608 360	286	0.239	6.623 788	329
0.040	6.580 360	72	0.090	6.586 044	156	0.140	6.595 685	229	0.190	6.608 646	288	0.240	6.624 117	328
0.041	6.580 432	74	0.091	6.586 200	157	0.141	6.595 914	231	0.191	6.608 934	289	0.241	6.624 415	330
0.042	6.580 506	75	0.092	6.586 357	159	0.142	6.596 145	232	0.192	6.609 223	290	0.242	6.624 775	330
0.043	6.580 581	77	0.093	6.586 516	161	0.143	6.596 377	233	0.193	6.609 513	290	0.243	6.625 105	331
0.044	6.580 658	79	0.094	6.586 677	162	0.144	6.596 610	234	0.194	6.609 803	292	0.244	6.625 436	331
0.045	6.580 737	81	0.095	6.586 839	164	0.145	6.596 844	236	0.195	6.610 095	293	0.245	6.625 767	332
0.046	6.580 818	82	0.096	6.587 003	165	0.146	6.597 080	237	0.196	6.610 388	293	0.246	6.626 099	333
0.047	6.580 900	84	0.097	6.587 168	167	0.147	6.597 317	238	0.197	6.610 681	295	0.247	6.626 432	333
0.048	6.580 984	86	0.098	6.587 335	168	0.148	6.597 555	240	0.198	6.610 976	295	0.248	6.626 765	333
0.049	6.581 070	88	0.099	6.587 503	170	0.149	6.597 795	241	0.199	6.611 271	297	0.249	6.627 098	335
0.050	6.581 158		0.100	6.587 673		0.150	6.598 036		0.200	6.611 568		0.250	6.627 433	

Tafel IX.

$\log \{P_2^6(m)\}$.

$\pm m$	P	$-\Delta$
0.000	6.623 091	3
0.001	6.623 088	7
0.002	6.623 081	13
0.003	6.623 068	18
0.004	6.623 050	22
0.005	6.623 028	28
0.006	6.623 000	33
0.007	6.622 967	38
0.008	6.622 929	43
0.009	6.622 886	48
0.010	6.622 838	53
0.011	6.622 785	58
0.012	6.622 727	63
0.013	6.622 664	69
0.014	6.622 595	73
0.015	6.622 522	78
0.016	6.622 444	84
0.017	6.622 360	88
0.018	6.622 272	94
0.019	6.622 178	98
0.020	6.622 080	104
0.021	6.621 976	109
0.022	6.621 867	114
0.023	6.621 753	119
0.024	6.621 634	124
0.025	6.621 510	129
0.026	6.621 381	134
0.027	6.621 247	140
0.028	6.621 107	144
0.029	6.620 963	150
0.030	6.620 813	154
0.031	6.620 659	160
0.032	6.620 499	165
0.033	6.620 334	170
0.034	6.620 164	175
0.035	6.619 989	180
0.036	6.619 809	186
0.037	6.619 623	190
0.038	6.619 433	196
0.039	6.619 237	201
0.040	6.619 036	206
0.041	6.618 830	211
0.042	6.618 619	216
0.043	6.618 403	222
0.044	6.618 181	227
0.045	6.617 954	232
0.046	6.617 722	237
0.047	6.617 485	242
0.048	6.617 243	247
0.049	6.616 996	253
0.050	6.616 743	

$\pm m$	P	$-\Delta$
0.050	6.616 743	258
0.051	6.616 485	263
0.052	6.616 222	268
0.053	6.615 954	274
0.054	6.615 680	279
0.055	6.615 401	284
0.056	6.615 117	289
0.057	6.614 828	295
0.058	6.614 533	300
0.059	6.614 233	305
0.060	6.613 928	310
0.061	6.613 618	316
0.062	6.613 302	321
0.063	6.612 981	326
0.064	6.612 655	332
0.065	6.612 323	337
0.066	6.611 986	343
0.067	6.611 643	347
0.068	6.611 296	353
0.069	6.610 943	359
0.070	6.610 584	364
0.071	6.610 220	369
0.072	6.609 851	375
0.073	6.609 476	380
0.074	6.609 096	385
0.075	6.608 711	391
0.076	6.608 320	396
0.077	6.607 924	402
0.078	6.607 522	408
0.079	6.607 114	412
0.080	6.606 702	418
0.081	6.606 284	424
0.082	6.605 860	429
0.083	6.605 431	435
0.084	6.604 996	441
0.085	6.604 555	445
0.086	6.604 110	452
0.087	6.603 658	457
0.088	6.603 201	462
0.089	6.602 739	469
0.090	6.602 270	473
0.091	6.601 797	480
0.092	6.601 317	485
0.093	6.600 832	491
0.094	6.600 341	496
0.095	6.599 845	502
0.096	6.599 343	508
0.097	6.598 835	513
0.098	6.598 322	519
0.099	6.597 803	525
0.100	6.597 278	

$\pm m$	P	$-\Delta$
0.100	6.597 278	531
0.101	6.596 747	537
0.102	6.596 210	542
0.103	6.595 668	548
0.104	6.595 120	554
0.105	6.594 566	559
0.106	6.594 007	566
0.107	6.593 441	571
0.108	6.592 870	578
0.109	6.592 292	583
0.110	6.591 709	589
0.111	6.591 120	595
0.112	6.590 525	601
0.113	6.589 924	607
0.114	6.589 317	613
0.115	6.588 704	619
0.116	6.588 085	625
0.117	6.587 460	631
0.118	6.586 829	637
0.119	6.586 192	644
0.120	6.585 548	649
0.121	6.584 899	655
0.122	6.584 244	662
0.123	6.583 582	668
0.124	6.582 914	674
0.125	6.582 240	680
0.126	6.581 560	686
0.127	6.580 874	693
0.128	6.580 181	699
0.129	6.579 482	705
0.130	6.578 777	712
0.131	6.578 065	718
0.132	6.577 347	724
0.133	6.576 623	731
0.134	6.575 892	737
0.135	6.575 155	743
0.136	6.574 412	750
0.137	6.573 662	757
0.138	6.572 905	763
0.139	6.572 142	769
0.140	6.571 373	776
0.141	6.570 597	783
0.142	6.569 814	789
0.143	6.569 025	796
0.144	6.568 229	802
0.145	6.567 427	809
0.146	6.566 618	816
0.147	6.565 802	823
0.148	6.564 979	829
0.149	6.564 150	837
0.150	6.563 313	

$\pm m$	P	$-\Delta$
0.150	6.563 313	843
0.151	6.562 470	849
0.152	6.561 621	857
0.153	6.560 764	864
0.154	6.559 900	871
0.155	6.559 029	877
0.156	6.558 152	885
0.157	6.557 267	891
0.158	6.556 376	899
0.159	6.555 477	906
0.160	6.554 571	913
0.161	6.553 658	920
0.162	6.552 738	927
0.163	6.551 811	935
0.164	6.550 876	942
0.165	6.549 934	949
0.166	6.548 985	956
0.167	6.548 029	964
0.168	6.547 065	971
0.169	6.546 094	979
0.170	6.545 115	986
0.171	6.544 129	993
0.172	6.543 136	1002
0.173	6.542 134	1008
0.174	6.541 126	1017
0.175	6.540 109	1024
0.176	6.539 085	1032
0.177	6.538 053	1039
0.178	6.537 014	1047
0.179	6.535 967	1055
0.180	6.534 912	1063
0.181	6.533 849	1071
0.182	6.532 778	1079
0.183	6.531 699	1087
0.184	6.530 612	1095
0.185	6.529 517	1102
0.186	6.528 415	1111
0.187	6.527 304	1120
0.188	6.526 184	1127
0.189	6.525 057	1136
0.190	6.523 921	1144
0.191	6.522 777	1152
0.192	6.521 625	1161
0.193	6.520 464	1169
0.194	6.519 295	1178
0.195	6.518 117	1186
0.196	6.516 931	1195
0.197	6.515 736	1203
0.198	6.514 533	1212
0.199	6.513 321	1221
0.200	6.512 100	

$\pm m$	P	$-\Delta$
0.200	6.512 100	1230
0.201	6.510 870	1238
0.202	6.509 632	1248
0.203	6.508 384	1256
0.204	6.507 128	1266
0.205	6.505 862	1274
0.206	6.504 588	1284
0.207	6.503 304	1293
0.208	6.502 011	1302
0.209	6.500 709	1311
0.210	6.499 398	1321
0.211	6.498 077	1330
0.212	6.496 747	1340
0.213	6.495 407	1349
0.214	6.494 058	1359
0.215	6.492 699	1369
0.216	6.491 330	1378
0.217	6.489 952	1388
0.218	6.488 564	1398
0.219	6.487 166	1408
0.220	6.485 758	1418
0.221	6.484 340	1428
0.222	6.482 912	1439
0.223	6.481 473	1448
0.224	6.480 025	1459
0.225	6.478 566	1469
0.226	6.477 097	1480
0.227	6.475 617	1490
0.228	6.474 127	1501
0.229	6.472 626	1511
0.230	6.471 115	1523
0.231	6.469 592	1533
0.232	6.468 059	1544
0.233	6.466 515	1555
0.234	6.464 960	1566
0.235	6.463 394	1577
0.236	6.461 817	1589
0.237	6.460 228	1600
0.238	6.458 628	1611
0.239	6.457 017	1623
0.240	6.455 394	1635
0.241	6.453 759	1646
0.242	6.452 113	1658
0.243	6.450 455	1670
0.244	6.448 785	1682
0.245	6.447 103	1694
0.246	6.445 409	1707
0.247	6.443 702	1718
0.248	6.441 984	1732
0.249	6.440 252	1743
0.250	6.438 509	

Tafel IX.

$\log \{P_2{}^7\, m\}$.

$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$	$\pm m$	P	$+\Delta$
0.000	5″777 993	0	0.050	5″780 085	84	0.100	5″786 216	162	0.150	5″795 971	228	0.200	5″808 711	280
0.001	5″777 993	3	0.051	5″780 169	85	0.101	5″786 378	163	0.151	5″796 199	229	0.201	5″808 991	281
0.002	5″777 996	4	0.052	5″780 254	88	0.102	5″786 541	164	0.152	5″796 428	230	0.202	5″809 272	282
0.003	5″778 000	6	0.053	5″780 342	89	0.103	5″786 705	166	0.153	5″796 658	232	0.203	5″809 554	282
0.004	5″778 006	8	0.054	5″780 431	90	0.104	5″786 871	167	0.154	5″796 890	232	0.204	5″809 836	284
0.005	5″778 014	9	0.055	5″780 521	92	0.105	5″787 038	168	0.155	5″797 122	234	0.205	5″810 120	284
0.006	5″778 023	11	0.056	5″780 613	94	0.106	5″787 206	170	0.156	5″797 356	235	0.206	5″810 404	285
0.007	5″778 034	12	0.057	5″780 707	95	0.107	5″787 376	172	0.157	5″797 591	236	0.207	5″810 689	286
0.008	5″778 046	15	0.058	5″780 802	97	0.108	5″787 548	173	0.158	5″797 827	238	0.208	5″810 975	287
0.009	5″778 061	16	0.059	5″780 899	99	0.109	5″787 721	174	0.159	5″798 065	238	0.209	5″811 262	288
0.010	5″778 077	17	0.060	5″780 998	100	0.110	5″787 895	176	0.160	5″798 303	240	0.210	5″811 550	288
0.011	5″778 094	20	0.061	5″781 098	102	0.111	5″788 071	177	0.161	5″798 543	241	0.211	5″811 838	290
0.012	5″778 114	21	0.062	5″781 200	103	0.112	5″788 248	178	0.162	5″798 784	242	0.212	5″812 128	290
0.013	5″778 135	22	0.063	5″781 303	105	0.113	5″788 426	180	0.163	5″799 026	243	0.213	5″812 418	291
0.014	5″778 157	25	0.064	5″781 408	106	0.114	5″788 606	181	0.164	5″799 269	244	0.214	5″812 709	291
0.015	5″778 182	26	0.065	5″781 514	108	0.115	5″788 787	183	0.165	5″799 513	245	0.215	5″813 000	293
0.016	5″778 208	28	0.066	5″781 622	110	0.116	5″788 970	184	0.166	5″799 758	246	0.216	5″813 293	293
0.017	5″778 236	29	0.067	5″781 732	111	0.117	5″789 154	186	0.167	5″800 004	248	0.217	5″813 586	294
0.018	5″778 265	31	0.068	5″781 843	113	0.118	5″789 340	186	0.168	5″800 252	248	0.218	5″813 880	295
0.019	5″778 296	33	0.069	5″781 956	114	0.119	5″789 526	189	0.169	5″800 500	250	0.219	5″814 175	295
0.020	5″778 329	34	0.070	5″782 070	116	0.120	5″789 715	189	0.170	5″800 750	251	0.220	5″814 470	296
0.021	5″778 363	36	0.071	5″782 186	118	0.121	5″789 904	191	0.171	5″801 001	251	0.221	5″814 766	297
0.022	5″778 399	38	0.072	5″782 304	119	0.122	5″790 095	192	0.172	5″801 252	253	0.222	5″815 063	298
0.023	5″778 437	40	0.073	5″782 423	121	0.123	5″790 287	194	0.173	5″801 505	254	0.223	5″815 361	299
0.024	5″778 477	41	0.074	5″782 544	122	0.124	5″790 481	195	0.174	5″801 759	255	0.224	5″815 660	299
0.025	5″778 518	43	0.075	5″782 666	124	0.125	5″790 676	196	0.175	5″802 014	256	0.225	5″815 959	299
0.026	5″778 561	44	0.076	5″782 790	125	0.126	5″790 872	198	0.176	5″802 270	257	0.226	5″816 258	301
0.027	5″778 605	46	0.077	5″782 915	127	0.127	5″791 070	199	0.177	5″802 527	258	0.227	5″816 559	301
0.028	5″778 651	48	0.078	5″783 042	128	0.128	5″791 269	200	0.178	5″802 785	259	0.228	5″816 860	302
0.029	5″778 699	50	0.079	5″783 170	130	0.129	5″791 469	202	0.179	5″803 044	260	0.229	5″817 162	303
0.030	5″778 749	51	0.080	5″783 300	132	0.130	5″791 671	203	0.180	5″803 304	262	0.230	5″817 465	303
0.031	5″778 800	52	0.081	5″783 432	133	0.131	5″791 874	204	0.181	5″803 566	262	0.231	5″817 768	304
0.032	5″778 852	55	0.082	5″783 565	134	0.132	5″792 078	205	0.182	5″803 828	263	0.232	5″818 072	305
0.033	5″778 907	56	0.083	5″783 699	136	0.133	5″792 283	207	0.183	5″804 091	264	0.233	5″818 377	305
0.034	5″778 963	58	0.084	5″783 835	138	0.134	5″792 490	208	0.184	5″804 355	265	0.234	5″818 682	306
0.035	5″779 021	59	0.085	5″783 973	139	0.135	5″792 698	210	0.185	5″804 620	266	0.235	5″818 988	306
0.036	5″779 080	61	0.086	5″784 112	140	0.136	5″792 908	210	0.186	5″804 886	267	0.236	5″819 294	308
0.037	5″779 141	63	0.087	5″784 252	142	0.137	5″793 118	212	0.187	5″805 153	268	0.237	5″819 602	308
0.038	5″779 204	64	0.088	5″784 394	144	0.138	5″793 330	214	0.188	5″805 421	269	0.238	5″819 910	308
0.039	5″779 268	66	0.089	5″784 538	145	0.139	5″793 544	214	0.189	5″805 690	270	0.239	5″820 218	309
0.040	5″779 334	68	0.090	5″784 683	147	0.140	5″793 758	216	0.190	5″805 960	271	0.240	5″820 527	310
0.041	5″779 402	69	0.091	5″784 830	148	0.141	5″793 974	217	0.191	5″806 231	272	0.241	5″820 837	310
0.042	5″779 471	71	0.092	5″784 978	150	0.142	5″794 191	218	0.192	5″806 503	273	0.242	5″821 147	311
0.043	5″779 542	73	0.093	5″785 128	151	0.143	5″794 409	219	0.193	5″806 776	274	0.243	5″821 458	311
0.044	5″779 615	74	0.094	5″785 279	152	0.144	5″794 628	221	0.194	5″807 050	274	0.244	5″821 769	312
0.045	5″779 689	76	0.095	5″785 431	154	0.145	5″794 849	222	0.195	5″807 324	276	0.245	5″822 081	313
0.046	5″779 765	77	0.096	5″785 585	156	0.146	5″795 071	223	0.196	5″807 600	276	0.246	5″822 394	313
0.047	5″779 842	80	0.097	5″785 741	157	0.147	5″795 294	224	0.197	5″807 876	278	0.247	5″822 707	314
0.048	5″779 922	80	0.098	5″785 898	158	0.148	5″795 518	226	0.198	5″808 154	278	0.248	5″823 021	314
0.049	5″780 002	83	0.099	5″786 056	160	0.149	5″795 744	227	0.199	5″808 432	279	0.249	5″823 335	315
0.050	5″780 085		0.100	5″786 216		0.150	5″795 971		0.200	5″808 711		0.250	5″823 650	

Tafel IX.

$\log\{P_2^S m\}$.

± m	P	Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ
0.000	5,,978 205		0.050	5,,972 077		0.100	5,,953 307		0.150	5,,920 640		0.200	5,,871 595	
		3			249			511			810			1174
0.001	5,,978 202		0.051	5,,971 828		0.101	5,,952 796		0.151	5,,919 830		0.201	5,,870 421	
		7			254			517			816			1183
0.002	5,,978 195		0.052	5,,971 574		0.102	5,,952 279		0.152	5,,919 014		0.202	5,,869 238	
		12			259			523			822			1191
0.003	5,,978 183		0.053	5,,971 315		0.103	5,,951 756		0.153	5,,918 192		0.203	5,,868 047	
		17			264			527			829			1199
0.004	5,,978 166		0.054	5,,971 051		0.104	5,,951 229		0.154	5,,917 363		0.204	5,,866 848	
		22			269			534			836			1208
0.005	5,,978 144		0.055	5,,970 782		0.105	5,,950 695		0.155	5,,916 527		0.205	5,,865 640	
		27			274			539			842			1216
0.006	5,,978 117		0.056	5,,970 508		0.106	5,,950 156		0.156	5,,915 685		0.206	5,,864 424	
		32			280			545			849			1225
0.007	5,,978 085		0.057	5,,970 228		0.107	5,,949 611		0.157	5,,914 836		0.207	5,,863 199	
		36			284			550			856			1233
0.008	5,,978 049		0.058	5,,969 944		0.108	5,,949 061		0.158	5,,913 980		0.208	5,,861 966	
		42			289			556			862			1242
0.009	5,,978 007		0.059	5,,969 655		0.109	5,,948 505		0.159	5,,913 118		0.209	5,,860 724	
		46			295			562			869			1251
0.010	5,,977 961		0.060	5,,969 360		0.110	5,,947 943		0.160	5,,912 249		0.210	5,,859 473	
		52			299			567			876			1259
0.011	5,,977 909		0.061	5,,969 061		0.111	5,,947 376		0.161	5,,911 373		0.211	5,,858 214	
		56			305			573			883			1269
0.012	5,,977 853		0.062	5,,968 756		0.112	5,,946 803		0.162	5,,910 490		0.212	5,,856 945	
		61			310			578			889			1277
0.013	5,,977 792		0.063	5,,968 446		0.113	5,,946 225		0.163	5,,909 601		0.213	5,,855 668	
		66			315			585			896			1286
0.014	5,,977 726		0.064	5,,968 131		0.114	5,,945 640		0.164	5,,908 705		0.214	5,,854 382	
		70			320			590			903			1295
0.015	5,,977 656		0.065	5,,967 811		0.115	5,,945 050		0.165	5,,907 802		0.215	5,,853 087	
		76			325			596			910			1304
0.016	5,,977 580		0.066	5,,967 486		0.116	5,,944 454		0.166	5,,906 892		0.216	5,,851 783	
		81			330			601			917			1313
0.017	5,,977 499		0.067	5,,967 156		0.117	5,,943 853		0.167	5,,905 975		0.217	5,,850 470	
		85			335			608			924			1322
0.018	5,,977 414		0.068	5,,966 821		0.118	5,,943 245		0.168	5,,905 051		0.218	5,,849 148	
		90			341			613			931			1331
0.019	5,,977 324		0.069	5,,966 480		0.119	5,,942 632		0.169	5,,904 120		0.219	5,,847 817	
		96			346			619			938			1341
0.020	5,,977 228		0.070	5,,966 134		0.120	5,,942 013		0.170	5,,903 182		0.220	5,,846 476	
		100			351			625			945			1350
0.021	5,,977 128		0.071	5,,965 783		0.121	5,,941 388		0.171	5,,902 237		0.221	5,,845 126	
		105			356			630			952			1359
0.022	5,,977 023		0.072	5,,965 427		0.122	5,,940 758		0.172	5,,901 285		0.222	5,,843 767	
		110			361			637			960			1369
0.023	5,,976 913		0.073	5,,965 066		0.123	5,,940 121		0.173	5,,900 325		0.223	5,,842 398	
		115			367			642			966			1379
0.024	5,,976 798		0.074	5,,964 699		0.124	5,,939 479		0.174	5,,899 359		0.224	5,,841 019	
		120			372			649			974			1387
0.025	5,,976 678		0.075	5,,964 327		0.125	5,,938 830		0.175	5,,898 385		0.225	5,,839 632	
		124			377			654			981			1398
0.026	5,,976 554		0.076	5,,963 950		0.126	5,,938 176		0.176	5,,897 404		0.226	5,,838 234	
		130			382			660			988			1407
0.027	5,,976 424		0.077	5,,963 568		0.127	5,,937 516		0.177	5,,896 416		0.227	5,,836 827	
		134			387			667			995			1417
0.028	5,,976 290		0.078	5,,963 181		0.128	5,,936 849		0.178	5,,895 421		0.228	5,,835 410	
		140			393			672			1003			1427
0.029	5,,976 150		0.079	5,,962 788		0.129	5,,936 177		0.179	5,,894 418		0.229	5,,833 983	
		144			398			678			1010			1437
0.030	5,,976 006		0.080	5,,962 390		0.130	5,,935 499		0.180	5,,893 408		0.230	5,,832 546	
		150			403			684			1018			1447
0.031	5,,975 856		0.081	5,,961 987		0.131	5,,934 815		0.181	5,,892 390		0.231	5,,831 099	
		154			409			691			1025			1456
0.032	5,,975 702		0.082	5,,961 578		0.132	5,,934 124		0.182	5,,891 365		0.232	5,,829 643	
		159			414			696			1032			1467
0.033	5,,975 543		0.083	5,,961 164		0.133	5,,933 428		0.183	5,,890 333		0.233	5,,828 176	
		164			419			703			1040			1477
0.034	5,,975 379		0.084	5,,960 745		0.134	5,,932 725		0.184	5,,889 293		0.234	5,,826 699	
		169			424			708			1048			1488
0.035	5,,975 210		0.085	5,,960 321		0.135	5,,932 017		0.185	5,,888 245		0.235	5,,825 211	
		174			430			715			1055			1497
0.036	5,,975 036		0.086	5,,959 891		0.136	5,,931 302		0.186	5,,887 190		0.236	5,,823 714	
		179			435			721			1063			1508
0.037	5,,974 857		0.087	5,,959 456		0.137	5,,930 581		0.187	5,,886 127		0.237	5,,822 206	
		184			441			727			1071			1519
0.038	5,,974 673		0.088	5,,959 015		0.138	5,,929 854		0.188	5,,885 056		0.238	5,,820 687	
		189			446			733			1078			1529
0.039	5,,974 484		0.089	5,,958 569		0.139	5,,929 121		0.189	5,,883 978		0.239	5,,819 158	
		194			451			739			1086			1540
0.040	5,,974 290		0.090	5,,958 118		0.140	5,,928 382		0.190	5,,882 892		0.240	5,,817 618	
		199			457			746			1094			1550
0.041	5,,974 091		0.091	5,,957 661		0.141	5,,927 636		0.191	5,,881 798		0.241	5,,816 068	
		204			462			752			1101			1561
0.042	5,,973 887		0.092	5,,957 199		0.142	5,,926 884		0.192	5,,880 697		0.242	5,,814 507	
		209			467			758			1110			1572
0.043	5,,973 678		0.093	5,,956 732		0.143	5,,926 126		0.193	5,,879 587		0.243	5,,812 935	
		213			473			765			1118			1584
0.044	5,,973 465		0.094	5,,956 259		0.144	5,,925 361		0.194	5,,878 469		0.244	5,,811 351	
		219			478			771			1125			1594
0.045	5,,973 246		0.095	5,,955 781		0.145	5,,924 590		0.195	5,,877 344		0.245	5,,809 757	
		224			484			777			1134			1605
0.046	5,,973 022		0.096	5,,955 297		0.146	5,,923 813		0.196	5,,876 210		0.246	5,,808 152	
		229			489			784			1141			1616
0.047	5,,972 793		0.097	5,,954 808		0.147	5,,923 029		0.197	5,,875 069		0.247	5,,806 536	
		234			495			790			1150			1628
0.048	5,,972 559		0.098	5,,954 313		0.148	5,,922 239		0.198	5,,873 919		0.248	5,,804 908	
		239			500			796			1158			1639
0.049	5,,972 320		0.099	5,,953 813		0.149	5,,921 443		0.199	5,,872 761		0.249	5,,803 269	
		243			506			803			1166			1651
0.050	5,,972 077		0.100	5,,953 307		0.150	5,,920 640		0.200	5,,871 595		0.250	5,,801 618	

Tafel IX.

$\log \{P_2{}^0\, m\}$.

± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ	± m	P	+ Δ
0.000	5.023 962	1	0.050	5.025 983	81	0.100	5.031 904	156	0.150	5.041 326	220	0.200	5.053 634	271
0.001	5.023 963	2	0.051	5.026 064	82	0.101	5.032 060	157	0.151	5.041 546	222	0.201	5.053 905	271
0.002	5.023 965	4	0.052	5.026 146	85	0.102	5.032 217	159	0.152	5.041 768	222	0.202	5.054 176	273
0.003	5.023 969	6	0.053	5.026 231	85	0.103	5.032 376	160	0.153	5.041 990	224	0.203	5.054 449	273
0.004	5.023 975	7	0.054	5.026 316	88	0.104	5.032 536	162	0.154	5.042 214	225	0.204	5.054 722	274
0.005	5.023 982	9	0.055	5.026 404	89	0.105	5.032 698	162	0.155	5.042 439	226	0.205	5.054 996	274
0.006	5.023 991	11	0.056	5.026 493	90	0.106	5.032 860	165	0.156	5.042 665	227	0.206	5.055 270	276
0.007	5.024 002	12	0.057	5.026 583	92	0.107	5.033 025	165	0.157	5.042 892	228	0.207	5.055 546	276
0.008	5.024 014	14	0.058	5.026 675	94	0.108	5.033 190	167	0.158	5.043 120	229	0.208	5.055 822	277
0.009	5.024 028		0.059	5.026 769		0.109	5.033 357		0.159	5.043 349		0.209	5.056 099	
		15			95			169			231			278
0.010	5.024 043	17	0.060	5.026 864	97	0.110	5.033 526	169	0.160	5.043 580	231	0.210	5.056 377	279
0.011	5.024 060	19	0.061	5.026 961	98	0.111	5.033 695	171	0.161	5.043 811	233	0.211	5.056 656	279
0.012	5.024 079	20	0.062	5.027 059	100	0.112	5.033 866	173	0.162	5.044 044	233	0.212	5.056 935	281
0.013	5.024 099	22	0.063	5.027 159	101	0.113	5.034 039	174	0.163	5.044 277	235	0.213	5.057 216	281
0.014	5.024 121	24	0.064	5.027 260	103	0.114	5.034 213	175	0.164	5.044 512	236	0.214	5.057 497	282
0.015	5.024 145	25	0.065	5.027 363	104	0.115	5.034 388	176	0.165	5.044 748	237	0.215	5.057 779	282
0.016	5.024 170	27	0.066	5.027 467	106	0.116	5.034 564	178	0.166	5.044 985	238	0.216	5.058 061	283
0.017	5.024 197	28	0.067	5.027 573	108	0.117	5.034 742	179	0.167	5.045 223	239	0.217	5.058 344	284
0.018	5.024 225	30	0.068	5.027 681	109	0.118	5.034 921	180	0.168	5.045 462	240	0.218	5.058 628	285
0.019	5.024 255		0.069	5.027 790		0.119	5.035 101		0.169	5.045 702		0.219	5.058 913	
		32			110			182			241			286
0.020	5.024 287	33	0.070	5.027 900	112	0.120	5.035 283	183	0.170	5.045 943	242	0.220	5.059 199	286
0.021	5.024 320	35	0.071	5.028 012	114	0.121	5.035 466	185	0.171	5.046 185	244	0.221	5.059 485	287
0.022	5.024 355	37	0.072	5.028 126	115	0.122	5.035 651	185	0.172	5.046 429	244	0.222	5.059 772	288
0.023	5.024 392	38	0.073	5.028 241	116	0.123	5.035 836	187	0.173	5.046 673	245	0.223	5.060 060	288
0.024	5.024 430	39	0.074	5.028 357	118	0.124	5.036 023	189	0.174	5.046 918	246	0.224	5.060 348	289
0.025	5.024 469	42	0.075	5.028 475	120	0.125	5.036 212	189	0.175	5.047 164	248	0.225	5.060 637	290
0.026	5.024 511	43	0.076	5.028 595	121	0.126	5.036 401	191	0.176	5.047 412	248	0.226	5.060 927	290
0.027	5.024 554	44	0.077	5.028 716	122	0.127	5.036 592	192	0.177	5.047 660	249	0.227	5.061 217	291
0.028	5.024 598	46	0.078	5.028 838	124	0.128	5.036 784	194	0.178	5.047 909	251	0.228	5.061 508	292
0.029	5.024 644		0.079	5.028 962		0.129	5.036 978		0.179	5.048 160		0.229	5.061 800	
		48			126			195			251			293
0.030	5.024 692	50	0.080	5.029 088	127	0.130	5.037 173	196	0.180	5.048 411	252	0.230	5.062 093	293
0.031	5.024 742	51	0.081	5.029 215	128	0.131	5.037 369	197	0.181	5.048 663	253	0.231	5.062 386	293
0.032	5.024 793	52	0.082	5.029 343	130	0.132	5.037 566	198	0.182	5.048 916	255	0.232	5.062 679	295
0.033	5.024 845	54	0.083	5.029 473	131	0.133	5.037 764	200	0.183	5.049 171	255	0.233	5.062 974	295
0.034	5.024 899	56	0.084	5.029 604	133	0.134	5.037 964	201	0.184	5.049 426	256	0.234	5.063 269	295
0.035	5.024 955	58	0.085	5.029 737	135	0.135	5.038 165	202	0.185	5.049 682	257	0.235	5.063 564	296
0.036	5.025 013	58	0.086	5.029 872	135	0.136	5.038 367	204	0.186	5.049 939	258	0.236	5.063 860	297
0.037	5.025 071	61	0.087	5.030 007	138	0.137	5.038 571	205	0.187	5.050 197	259	0.237	5.064 157	298
0.038	5.025 132	62	0.088	5.030 145	138	0.138	5.038 776	206	0.188	5.050 456	260	0.238	5.064 455	298
0.039	5.025 194		0.089	5.030 283		0.139	5.038 982		0.189	5.050 716		0.239	5.064 753	
		64			141			207			261			298
0.040	5.025 258	65	0.090	5.030 424	141	0.140	5.039 189	208	0.190	5.050 977	262	0.240	5.065 051	299
0.041	5.025 323	67	0.091	5.030 565	143	0.141	5.039 397	210	0.191	5.051 239	262	0.241	5.065 350	300
0.042	5.025 390	69	0.092	5.030 708	145	0.142	5.039 607	210	0.192	5.051 501	264	0.242	5.065 650	301
0.043	5.025 459	70	0.093	5.030 853	146	0.143	5.039 817	212	0.193	5.051 765	264	0.243	5.065 951	301
0.044	5.025 529	72	0.094	5.030 999	147	0.144	5.040 029	214	0.194	5.052 029	266	0.244	5.066 252	301
0.045	5.025 601	73	0.095	5.031 146	149	0.145	5.040 243	214	0.195	5.052 295	266	0.245	5.066 553	302
0.046	5.025 674	75	0.096	5.031 295	150	0.146	5.040 457	216	0.196	5.052 561	267	0.246	5.066 855	303
0.047	5.025 749	76	0.097	5.031 445	152	0.147	5.040 673	216	0.197	5.052 828	268	0.247	5.067 158	303
0.048	5.025 825	78	0.098	5.031 597	153	0.148	5.040 889	218	0.198	5.053 096	269	0.248	5.067 461	303
0.049	5.025 903	80	0.099	5.031 750	154	0.149	5.041 107	219	0.199	5.053 365	269	0.249	5.067 764	305
0.050	5.025 983		0.100	5.031 904		0.150	5.041 326		0.200	5.053 634		0.250	5.068 069	

Tafel IX.

$\log \{P_2^{10} m\}$.

± m	P	Δ	± m	P	Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ	± m	P	−Δ
0.000	5.340 229	3	0.050	5.334 239	243	0.100	5.315 907	499	0.150	5.284 052	789	0.200	5.236 355	1140
0.001	5.340 226	7	0.051	5.333 996	248	0.101	5.315 408	505	0.151	5.283 263	795	0.201	5.235 215	1148
0.002	5.340 219	12	0.052	5.333 748	253	0.102	5.314 903	510	0.152	5.282 468	801	0.202	5.234 067	1156
0.003	5.340 207	16	0.053	5.333 495	258	0.103	5.314 393	515	0.153	5.281 667	807	0.203	5.232 911	1164
0.004	5.340 191	22	0.054	5.333 237	263	0.104	5.313 878	520	0.154	5.280 860	814	0.204	5.231 747	1172
0.005	5.340 169	26	0.055	5.332 974	268	0.105	5.313 358	527	0.155	5.280 046	820	0.205	5.230 575	1180
0.006	5.340 143	31	0.056	5.332 706	273	0.106	5.312 831	531	0.156	5.279 226	827	0.206	5.229 395	1188
0.007	5.340 112	36	0.057	5.332 433	278	0.107	5.312 300	537	0.157	5.278 399	833	0.207	5.228 207	1197
0.008	5.340 076	40	0.058	5.332 155	283	0.108	5.311 763	543	0.158	5.277 566	840	0.208	5.227 010	1205
0.009	5.340 036		0.059	5.331 872		0.109	5.311 220		0.159	5.276 726		0.209	5.225 805	
		46			287			548			846			1213
0.010	5.339 990	50	0.060	5.331 585	293	0.110	5.310 672	553	0.160	5.275 880	852	0.210	5.224 592	1222
0.011	5.339 940	55	0.061	5.331 292	298	0.111	5.310 119	559	0.161	5.275 028	860	0.211	5.223 370	1230
0.012	5.339 885	59	0.062	5.330 994	302	0.112	5.309 560	565	0.162	5.274 168	865	0.212	5.222 140	1238
0.013	5.339 826	65	0.063	5.330 692	308	0.113	5.308 995	570	0.163	5.273 303	873	0.213	5.220 902	1247
0.014	5.339 761	69	0.064	5.330 384	312	0.114	5.308 425	576	0.164	5.272 430	879	0.214	5.219 655	1256
0.015	5.339 692	74	0.065	5.330 072	318	0.115	5.307 849	581	0.165	5.271 551	886	0.215	5.218 399	1264
0.016	5.339 618	79	0.066	5.329 754	323	0.116	5.307 268	587	0.166	5.270 665	892	0.216	5.217 135	1273
0.017	5.339 539	83	0.067	5.329 431	327	0.117	5.306 681	593	0.167	5.269 773	899	0.217	5.215 862	1281
0.018	5.339 456	89	0.068	5.329 104	333	0.118	5.306 088	598	0.168	5.268 874	906	0.218	5.214 581	1291
0.019	5.339 367		0.069	5.328 771		0.119	5.305 490		0.169	5.267 968		0.219	5.213 290	
		93			338			604			913			1299
0.020	5.339 274	98	0.070	5.328 433	343	0.120	5.304 886	609	0.170	5.267 055	919	0.220	5.211 991	1308
0.021	5.339 176	102	0.071	5.328 090	348	0.121	5.304 277	615	0.171	5.266 136	927	0.221	5.210 683	1317
0.022	5.339 074	108	0.072	5.327 742	353	0.122	5.303 662	621	0.172	5.265 209	933	0.222	5.209 366	1326
0.023	5.338 966	112	0.073	5.327 389	358	0.123	5.303 041	627	0.173	5.264 276	940	0.223	5.208 040	1336
0.024	5.338 854	117	0.074	5.327 031	363	0.124	5.302 414	632	0.174	5.263 336	947	0.224	5.206 704	1344
0.025	5.338 737	122	0.075	5.326 668	368	0.125	5.301 782	638	0.175	5.262 389	954	0.225	5.205 360	1353
0.026	5.338 615	127	0.076	5.326 300	374	0.126	5.301 144	644	0.176	5.261 435	961	0.226	5.204 007	1363
0.027	5.338 488	131	0.077	5.325 926	378	0.127	5.300 500	650	0.177	5.260 474	968	0.227	5.202 644	1372
0.028	5.338 357	137	0.078	5.325 548	384	0.128	5.299 850	655	0.178	5.259 506	975	0.228	5.201 272	1382
0.029	5.338 220		0.079	5.325 164		0.129	5.299 195		0.179	5.258 531		0.229	5.199 890	
		141			388			662			983			1391
0.030	5.338 079	146	0.080	5.324 776	394	0.130	5.298 533	667	0.180	5.257 548	989	0.230	5.198 499	1400
0.031	5.337 933	151	0.081	5.324 382	399	0.131	5.297 866	673	0.181	5.256 559	997	0.231	5.197 099	1410
0.032	5.337 782	155	0.082	5.323 983	404	0.132	5.297 193	679	0.182	5.255 562	1003	0.232	5.195 689	1419
0.033	5.337 627	161	0.083	5.323 579	410	0.133	5.296 514	685	0.183	5.254 559	1011	0.233	5.194 270	1430
0.034	5.337 466	165	0.084	5.323 169	414	0.134	5.295 829	690	0.184	5.253 548	1019	0.234	5.192 840	1439
0.035	5.337 301	170	0.085	5.322 755	420	0.135	5.295 139	697	0.185	5.252 529	1025	0.235	5.191 401	1448
0.036	5.337 131	175	0.086	5.322 335	425	0.136	5.294 442	703	0.186	5.251 504	1033	0.236	5.189 953	1459
0.037	5.336 956	180	0.087	5.321 910	430	0.137	5.293 739	709	0.187	5.250 471	1041	0.237	5.188 494	1469
0.038	5.336 776	184	0.088	5.321 480	436	0.138	5.293 030	714	0.188	5.249 430	1047	0.238	5.187 025	1478
0.039	5.336 592		0.089	5.321 044		0.139	5.292 316		0.189	5.248 383		0.239	5.185 547	
		190			440			721			1056			1489
0.040	5.336 402	194	0.090	5.320 604	446	0.140	5.291 595	727	0.190	5.247 327	1063	0.240	5.184 058	1499
0.041	5.336 208	199	0.091	5.320 158	451	0.141	5.290 868	733	0.191	5.246 264	1070	0.241	5.182 559	1509
0.042	5.336 009	205	0.092	5.319 707	457	0.142	5.290 135	738	0.192	5.245 194	1078	0.242	5.181 050	1520
0.043	5.335 804	208	0.093	5.319 250	461	0.143	5.289 397	745	0.193	5.244 116	1085	0.243	5.179 530	1530
0.044	5.335 596	214	0.094	5.318 789	467	0.144	5.288 652	752	0.194	5.243 031	1093	0.244	5.178 000	1540
0.045	5.335 382	219	0.095	5.318 322	473	0.145	5.287 902	757	0.195	5.241 938	1101	0.245	5.176 460	1551
0.046	5.335 163	224	0.096	5.317 849	477	0.146	5.287 143	764	0.196	5.240 837	1109	0.246	5.174 909	1562
0.047	5.334 939	228	0.097	5.317 372	483	0.147	5.286 379	769	0.197	5.239 728	1116	0.247	5.173 347	1572
0.048	5.334 711	234	0.098	5.316 889	489	0.148	5.285 612	776	0.198	5.238 612	1125	0.248	5.171 775	1583
0.049	5.334 477	238	0.099	5.316 400	493	0.149	5.284 834	782	0.199	5.237 487	1132	0.249	5.170 192	1594
0.050	5.334 239		0.100	5.315 907		0.150	5.284 052		0.200	5.236 355		0.250	5.168 598	

Tafel X.

vergl. pag. 38.

T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$	T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$	T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$
0.00	+ 0.000 0000 000	0.50	+ 0.461 2810 064	1.00	+ 0.746 8241 328
0.01	+ 0.009 9996 667	0.51	+ 0.469 0299 460	1.01	+ 0.750 4662 625
0.02	+ 0.019 9973 336	0.52	+ 0.476 7002 495	1.02	+ 0.754 0355 604
0.03	+ 0.029 9910 024	0.53	+ 0.484 2911 965	1.03	+ 0.757 5327 836
0.04	+ 0.039 9786 768	0.54	+ 0.491 8021 058	1.04	+ 0.760 9587 021
0.05	+ 0.049 9583 645	0.55	+ 0.499 2323 350	1.05	+ 0.764 3140 986
0.06	+ 0.059 9280 776	0.56	+ 0.506 5812 809	1.06	+ 0.767 5997 677
0.07	+ 0.069 8858 345	0.57	+ 0.513 8483 792	1.07	+ 0.770 8165 149
0.08	+ 0.079 8296 605	0.58	+ 0.521 0331 044	1.08	+ 0.773 9651 562
0.09	+ 0.089 7575 894	0.59	+ 0.528 1349 697	1.09	+ 0.777 0465 172
0.10	+ 0.099 6676 643	0.60	+ 0.535 1535 268	1.10	+ 0.780 0614 325
0.11	+ 0.109 5579 392	0.61	+ 0.542 0883 659	1.11	+ 0.783 0107 451
0.12	+ 0.119 4264 798	0.62	+ 0.548 9391 154	1.12	+ 0.785 8953 054
0.13	+ 0.129 2713 647	0.63	+ 0.555 7054 416	1.13	+ 0.788 7159 709
0.14	+ 0.139 0906 865	0.64	+ 0.562 3870 483	1.14	+ 0.791 4736 054
0.15	+ 0.148 8825 532	0.65	+ 0.568 9836 768	1.15	+ 0.794 1690 781
0.16	+ 0.158 6450 888	0.66	+ 0.575 4951 056	1.16	+ 0.796 8032 635
0.17	+ 0.168 3764 347	0.67	+ 0.581 9211 497	1.17	+ 0.799 3770 403
0.18	+ 0.178 0747 508	0.68	+ 0.588 2616 607	1.18	+ 0.801 8912 908
0.19	+ 0.187 7382 163	0.69	+ 0.594 5165 257	1.19	+ 0.804 3469 007
0.20	+ 0.197 3650 309	0.70	+ 0.600 6856 679	1.20	+ 0.806 7447 580
0.21	+ 0.206 9534 158	0.71	+ 0.606 7690 454	1.21	+ 0.809 0857 528
0.22	+ 0.216 5016 146	0.72	+ 0.612 7666 508	1.22	+ 0.811 3707 764
0.23	+ 0.226 0078 943	0.73	+ 0.618 6785 109	1.23	+ 0.813 6007 211
0.24	+ 0.235 4705 463	0.74	+ 0.624 5046 863	1.24	+ 0.815 7764 793
0.25	+ 0.244 8878 871	0.75	+ 0.630 2452 707	1.25	+ 0.817 8989 431
0.26	+ 0.254 2582 596	0.76	+ 0.635 9003 903	1.26	+ 0.819 9690 039
0.27	+ 0.263 5800 333	0.77	+ 0.641 4702 035	1.27	+ 0.821 9875 519
0.28	+ 0.272 8516 060	0.78	+ 0.646 9549 001	1.28	+ 0.823 9554 753
0.29	+ 0.282 0714 038	0.79	+ 0.652 3547 007	1.29	+ 0.825 8736 600
0.30	+ 0.291 2378 826	0.80	+ 0.657 6698 563	1.30	+ 0.827 7429 893
0.31	+ 0.300 3495 280	0.81	+ 0.662 9006 476	1.31	+ 0.829 5643 433
0.32	+ 0.309 4048 569	0.82	+ 0.668 0473 841	1.32	+ 0.831 3385 982
0.33	+ 0.318 4024 177	0.83	+ 0.673 1104 039	1.33	+ 0.833 0666 265
0.34	+ 0.327 3407 911	0.84	+ 0.678 0900 727	1.34	+ 0.834 7492 959
0.35	+ 0.336 2185 908	0.85	+ 0.682 9867 832	1.35	+ 0.836 3874 694
0.36	+ 0.345 0344 640	0.86	+ 0.687 8009 546	1.36	+ 0.837 9820 047
0.37	+ 0.353 7870 918	0.87	+ 0.692 5330 316	1.37	+ 0.839 5337 539
0.38	+ 0.362 4751 904	0.88	+ 0.697 1834 841	1.38	+ 0.841 0435 631
0.39	+ 0.371 0975 108	0.89	+ 0.701 7528 060	1.39	+ 0.842 5122 720
0.40	+ 0.379 6528 398	0.90	+ 0.706 2415 149	1.40	+ 0.843 9407 138
0.41	+ 0.388 1400 003	0.91	+ 0.710 6501 512	1.41	+ 0.845 3297 146
0.42	+ 0.396 5578 518	0.92	+ 0.714 9792 774	1.42	+ 0.846 6800 934
0.43	+ 0.404 9052 906	0.93	+ 0.719 2294 773	1.43	+ 0.847 9926 615
0.44	+ 0.413 1812 505	0.94	+ 0.723 4013 554	1.44	+ 0.849 2682 225
0.45	+ 0.421 3847 026	0.95	+ 0.727 4955 362	1.45	+ 0.850 5075 719
0.46	+ 0.429 5146 561	0.96	+ 0.731 5126 632	1.46	+ 0.851 7114 969
0.47	+ 0.437 5701 583	0.97	+ 0.735 4533 983	1.47	+ 0.852 8807 761
0.48	+ 0.445 5502 949	0.98	+ 0.739 3184 212	1.48	+ 0.854 0161 796
0.49	+ 0.453 4541 899	0.99	+ 0.743 1084 284	1.49	+ 0.855 1184 681
0.50	+ 0.461 2810 064	1.00	+ 0.746 8241 328	1.50	+ 0.856 1883 936

Tafel X.

T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$	T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$	T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$
1.50	+ 0.856 1883 936	2.00	+ 0.882 0813 908	2.50	+ 0.885 8662 738
1.51	+ 0.857 2266 985	2.01	+ 0.882 2609 265	2.51	+ 0.885 8851 030
1.52	+ 0.858 2341 160	2.02	+ 0.882 4333 881	2.52	+ 0.885 9030 104
1.53	+ 0.859 2113 692	2.03	+ 0.882 5990 212	2.53	+ 0.885 9200 376
1.54	+ 0.860 1591 718	2.04	+ 0.882 7580 644	2.54	+ 0.885 9362 247
1.55	+ 0.861 0782 276	2.05	+ 0.882 9107 494	2.55	+ 0.885 9516 100
1.56	+ 0.861 9692 302	2.06	+ 0.883 0573 010	2.56	+ 0.885 9662 304
1.57	+ 0.862 8328 632	2.07	+ 0.883 1979 374	2.57	+ 0.885 9801 210
1.58	+ 0.863 6697 998	2.08	+ 0.883 3328 705	2.58	+ 0.885 9933 157
1.59	+ 0.864 4807 032	2.09	+ 0.883 4623 056	2.59	+ 0.886 0058 469
1.60	+ 0.865 2662 260	2.10	+ 0.883 5864 419	2.60	+ 0.886 0177 455
1.61	+ 0.866 0270 104	2.11	+ 0.883 7054 725	2.61	+ 0.886 0290 412
1.62	+ 0.866 7636 881	2.12	+ 0.883 8195 846	2.62	+ 0.886 0397 623
1.63	+ 0.867 4768 803	2.13	+ 0.883 9289 596	2.63	+ 0.886 0499 362
1.64	+ 0.868 1671 978	2.14	+ 0.884 0337 732	2.64	+ 0.886 0595 888
1.65	+ 0.868 8352 405	2.15	+ 0.884 1341 954	2.65	+ 0.886 0687 449
1.66	+ 0.869 4815 979	2.16	+ 0.884 2303 911	2.66	+ 0.886 0774 284
1.67	+ 0.870 1068 490	2.17	+ 0.884 3225 197	2.67	+ 0.886 0856 620
1.68	+ 0.870 7115 619	2.18	+ 0.884 4177 355	2.68	+ 0.886 0934 675
1.69	+ 0.871 2962 943	2.19	+ 0.884 4951 878	2.69	+ 0.886 1008 657
1.70	+ 0.871 8615 934	2.20	+ 0.884 5760 210	2.70	+ 0.886 1078 763
1.71	+ 0.872 4079 957	2.21	+ 0.884 6533 747	2.71	+ 0.886 1145 184
1.72	+ 0.872 9360 272	2.22	+ 0.884 7273 838	2.72	+ 0.886 1208 101
1.73	+ 0.873 4462 037	2.23	+ 0.884 7981 789	2.73	+ 0.886 1267 686
1.74	+ 0.873 9390 302	2.24	+ 0.884 8658 859	2.74	+ 0.886 1324 106
1.75	+ 0.874 4150 016	2.25	+ 0.884 9306 267	2.75	+ 0.886 1377 517
1.76	+ 0.874 8746 025	2.26	+ 0.884 9925 188	2.76	+ 0.886 1428 070
1.77	+ 0.875 3183 070	2.27	+ 0.885 0516 756	2.77	+ 0.886 1475 908
1.78	+ 0.875 7465 794	2.28	+ 0.885 1082 069	2.78	+ 0.886 1521 168
1.79	+ 0.876 1598 738	2.29	+ 0.885 1622 182	2.79	+ 0.886 1563 980
1.80	+ 0.876 5586 342	2.30	+ 0.885 2138 117	2.80	+ 0.886 1604 469
1.81	+ 0.876 9432 948	2.31	+ 0.885 2630 857	2.81	+ 0.886 1642 753
1.82	+ 0.877 3142 799	2.32	+ 0.885 3101 350	2.82	+ 0.886 1678 944
1.83	+ 0.877 6720 042	2.33	+ 0.885 3550 511	2.83	+ 0.886 1713 151
1.84	+ 0.878 0168 727	2.34	+ 0.885 3979 222	2.84	+ 0.886 1745 475
1.85	+ 0.878 3492 809	2.35	+ 0.885 4388 332	2.85	+ 0.886 1776 015
1.86	+ 0.878 6696 149	2.36	+ 0.885 4778 659	2.86	+ 0.886 1804 863
1.87	+ 0.878 9782 517	2.37	+ 0.885 5150 991	2.87	+ 0.886 1832 107
1.88	+ 0.879 2755 588	2.38	+ 0.885 5506 086	2.88	+ 0.886 1857 831
1.89	+ 0.879 5618 949	2.39	+ 0.885 5844 675	2.89	+ 0.886 1882 115
1.90	+ 0.879 8376 097	2.40	+ 0.885 6167 460	2.90	+ 0.886 1905 036
1.91	+ 0.880 1030 440	2.41	+ 0.885 6475 118	2.91	+ 0.886 1926 665
1.92	+ 0.880 3585 302	2.42	+ 0.885 6768 299	2.92	+ 0.886 1947 071
1.93	+ 0.880 6043 918	2.43	+ 0.885 7047 628	2.93	+ 0.886 1966 320
1.94	+ 0.880 8409 442	2.44	+ 0.885 7313 706	2.94	+ 0.886 1984 472
1.95	+ 0.881 0684 942	2.45	+ 0.885 7567 112	2.95	+ 0.886 2001 589
1.96	+ 0.881 2873 407	2.46	+ 0.885 7808 401	2.96	+ 0.886 2017 725
1.97	+ 0.881 4977 746	2.47	+ 0.885 8038 105	2.97	+ 0.886 2032 933
1.98	+ 0.881 7000 787	2.48	+ 0.885 8256 738	2.98	+ 0.886 2047 264
1.99	+ 0.881 8945 283	2.49	+ 0.885 8464 792	2.99	+ 0.886 2060 766
2.00	+ 0.882 0813 908	2.50	+ 0.885 8662 738	3.00	+ 0.886 2073 485

Tafel X.

T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$	T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$	T	$\int_0^T e^{-tt}\,dt$
3.00	+ 0.886 2073 485	3.50	+ 0.886 2262 670	4.00	+ 0.886 2269 118
3.01	+ 0.886 2085 463	3.51	+ 0.886 2263 132	4.01	+ 0.886 2269 129
3.02	+ 0.886 2096 741	3.52	+ 0.886 2263 563	4.02	+ 0.886 2269 139
3.03	+ 0.886 2107 357	3.53	+ 0.886 2263 965	4.03	+ 0.886 2269 149
3.04	+ 0.886 2117 350	3.54	+ 0.886 2264 339	4.04	+ 0.886 2269 157
3.05	+ 0.886 2126 753	3.55	+ 0.886 2264 688	4.05	+ 0.886 2269 165
3.06	+ 0.886 2135 600	3.56	+ 0.886 2265 012	4.06	+ 0.886 2269 172
3.07	+ 0.886 2143 921	3.57	+ 0.886 2265 315	4.07	+ 0.886 2269 179
3.08	+ 0.886 2151 747	3.58	+ 0.886 2265 596	4.08	+ 0.886 2269 185
3.09	+ 0.886 2159 105	3.59	+ 0.886 2265 858	4.09	+ 0.886 2269 190
3.10	+ 0.886 2166 023	3.60	+ 0.886 2266 102	4.10	+ 0.886 2269 195
3.11	+ 0.886 2172 525	3.61	+ 0.886 2266 329	4.11	+ 0.886 2269 200
3.12	+ 0.886 2178 634	3.62	+ 0.886 2266 540	4.12	+ 0.886 2269 204
3.13	+ 0.886 2184 374	3.63	+ 0.886 2266 737	4.13	+ 0.886 2269 209
3.14	+ 0.886 2189 765	3.64	+ 0.886 2266 919	4.14	+ 0.886 2269 212
3.15	+ 0.886 2194 829	3.65	+ 0.886 2267 089	4.15	+ 0.886 2269 216
3.16	+ 0.886 2199 583	3.66	+ 0.886 2267 247	4.16	+ 0.886 2269 219
3.17	+ 0.886 2204 046	3.67	+ 0.886 2267 394	4.17	+ 0.886 2269 222
3.18	+ 0.886 2208 235	3.68	+ 0.886 2267 531	4.18	+ 0.886 2269 224
3.19	+ 0.886 2212 166	3.69	+ 0.886 2267 657	4.19	+ 0.886 2269 227
3.20	+ 0.886 2215 854	3.70	+ 0.886 2267 775	4.20	+ 0.886 2269 229
3.21	+ 0.886 2219 313	3.71	+ 0.886 2267 884	4.21	+ 0.886 2269 231
3.22	+ 0.886 2222 558	3.72	+ 0.886 2267 986	4.22	+ 0.886 2269 233
3.23	+ 0.886 2225 600	3.73	+ 0.886 2268 080	4.23	+ 0.886 2269 235
3.24	+ 0.886 2228 451	3.74	+ 0.886 2268 167	4.24	+ 0.886 2269 236
3.25	+ 0.886 2231 124	3.75	+ 0.886 2268 248	4.25	+ 0.886 2269 238
3.26	+ 0.886 2233 628	3.76	+ 0.886 2268 323	4.26	+ 0.886 2269 239
3.27	+ 0.886 2235 975	3.77	+ 0.886 2268 393	4.27	+ 0.886 2269 241
3.28	+ 0.886 2238 173	3.78	+ 0.886 2268 457	4.28	+ 0.886 2269 242
3.29	+ 0.886 2240 231	3.79	+ 0.886 2268 517	4.29	+ 0.886 2269 243
3.30	+ 0.886 2242 158	3.80	+ 0.886 2268 573	4.30	+ 0.886 2269 244
3.31	+ 0.886 2243 962	3.81	+ 0.886 2268 625	4.31	+ 0.886 2269 245
3.32	+ 0.886 2245 651	3.82	+ 0.886 2268 672	4.32	+ 0.886 2269 245
3.33	+ 0.886 2247 231	3.83	+ 0.886 2268 717	4.33	+ 0.886 2269 246
3.34	+ 0.886 2248 709	3.84	+ 0.886 2268 758	4.34	+ 0.886 2269 247
3.35	+ 0.886 2250 092	3.85	+ 0.886 2268 796	4.35	+ 0.886 2269 247
3.36	+ 0.886 2251 385	3.86	+ 0.886 2268 831	4.36	+ 0.886 2269 247
3.37	+ 0.886 2252 594	3.87	+ 0.886 2268 863	4.37	+ 0.886 2269 248
3.38	+ 0.886 2253 724	3.88	+ 0.886 2268 894	4.38	+ 0.886 2269 249
3.39	+ 0.886 2254 781	3.89	+ 0.886 2268 921	4.39	+ 0.886 2269 250
3.40	+ 0.886 2255 768	3.90	+ 0.886 2268 947	4.40	+ 0.886 2269 250
3.41	+ 0.886 2256 690	3.91	+ 0.886 2268 971	4.41	+ 0.886 2269 250
3.42	+ 0.886 2257 551	3.92	+ 0.886 2268 992	4.42	+ 0.886 2269 251
3.43	+ 0.886 2258 356	3.93	+ 0.886 2269 013	4.43	+ 0.886 2269 251
3.44	+ 0.886 2259 107	3.94	+ 0.886 2269 031	4.44	+ 0.886 2269 252
3.45	+ 0.886 2259 808	3.95	+ 0.886 2269 049	4.45	+ 0.886 2269 252
3.46	+ 0.886 2260 462	3.96	+ 0.886 2269 065	4.46	+ 0.886 2269 252
3.47	+ 0.886 2261 073	3.97	+ 0.886 2269 080	4.47	+ 0.886 2269 252
3.48	+ 0.886 2261 643	3.98	+ 0.886 2269 094	4.48	+ 0.886 2269 253
3.49	+ 0.886 2262 174	3.99	+ 0.886 2269 106	4.49	+ 0.886 2269 253
3.50	+ 0.886 2262 670	4.00	+ 0.886 2269 118	von 4.52 bis $+\infty$	+ 0.886 2269 254

Tafel XI.

f-Tafel.

vergl. pag. 77.

q	$\log f$	Diff.
— 0.030 0000	0.510 798	
		— 116
— 0.029 9000	0.510 682	
		— 116
— 0.029 8000	0.510 566	
		— 116
— 0.029 7000	0.510 450	
		— 116
— 0.029 6000	0.510 334	
		— 116
— 0.029 5000	0.510 218	
		— 116
— 0.029 4000	0.510 102	
		— 116
— 0.029 3000	0.509 986	
		— 116
— 0.029 2000	0.509 870	
		— 116
— 0.029 1000	0.509 754	
		— 116
— 0.029 0000	0.509 638	
		— 115
— 0.028 9000	0.509 523	
		— 116
— 0.028 8000	0.509 407	
		— 116
— 0.028 7000	0.509 291	
		— 116
— 0.028 6000	0.509 175	
		— 115
— 0.028 5000	0.509 060	
		— 116
— 0.028 4000	0.508 944	
		— 116
— 0.028 3000	0.508 828	
		— 115
— 0.028 2000	0.508 713	
		— 116
— 0.028 1000	0.508 597	
		— 116
— 0.028 0000	0.508 481	
		— 115
— 0.027 9000	0.508 366	
		— 116
— 0.027 8000	0.508 250	
		— 115
— 0.027 7000	0.508 135	
		— 116
— 0.027 6000	0.508 019	
		— 115
— 0.027 5000	0.507 904	
		— 116
— 0.027 4000	0.507 788	
		— 115
— 0.027 3000	0.507 673	
		— 115
— 0.027 2000	0.507 558	
		— 116
— 0.027 1000	0.507 442	
		— 115
— 0.027 0000	0.507 327	
		— 115
— 0.026 9000	0.507 212	
		— 116
— 0.026 8000	0.507 096	
		— 115
— 0.026 7000	0.506 981	
		— 115
— 0.026 6000	0.506 866	
		— 115
— 0.026 5000	0.506 751	
		— 115
— 0.026 4000	0.506 636	
		— 115
— 0.026 3000	0.506 521	
		— 116
— 0.026 2000	0.506 405	
		— 115
— 0.026 1000	0.506 290	
		— 115
— 0.026 0000	0.506 175	
		— 115
— 0.025 9000	0.506 060	
		— 115
— 0.025 8000	0.505 945	
		— 115
— 0.025 7000	0.505 830	
		— 115
— 0.025 6000	0.505 715	
		— 115
— 0.025 5000	0.505 600	
		— 114
— 0.025 4000	0.505 486	
		— 115
— 0.025 3000	0.505 371	
		— 115
— 0.025 2000	0.505 256	
		— 115
— 0.025 1000	0.505 141	
		— 115
— 0.025 0000	0.505 026	

P. p.		
— 116		
1	—	11.6
2	—	23.2
3	—	34.8
4	—	46.4
5	—	58.0
6	—	69.6
7	—	81.2
8	—	92.8
9	—	104.4
— 115		
1	—	11.5
2	—	23.0
3	—	34.5
4	—	46.0
5	—	57.5
6	—	69.0
7	—	80.5
8	—	92.0
9	—	103.5
— 114		
1	—	11.4
2	—	22.8
3	—	34.2
4	—	45.6
5	—	57.0
6	—	68.4
7	—	79.8
8	—	91.2
9	—	102.6
— 113		
1	—	11.3
2	—	22.6
3	—	33.9
4	—	45.2
5	—	56.5
6	—	67.8
7	—	79.1
8	—	90.4
9	—	101.7

q	$\log f$	Diff.
— 0.025 0000	0.505 026	
		— 115
— 0.024 9000	0.504 911	
		— 114
— 0.024 8000	0.504 797	
		— 115
— 0.024 7000	0.504 682	
		— 115
— 0.024 6000	0.504 567	
		— 114
— 0.024 5000	0.504 453	
		— 115
— 0.024 4000	0.504 338	
		— 115
— 0.024 3000	0.504 223	
		— 114
— 0.024 2000	0.504 109	
		— 115
— 0.024 1000	0.503 994	
		— 114
— 0.024 0000	0.503 880	
		— 115
— 0.023 9000	0.503 765	
		— 114
— 0.023 8000	0.503 651	
		— 115
— 0.023 7000	0.503 536	
		— 114
— 0.023 6000	0.503 422	
		— 114
— 0.023 5000	0.503 308	
		— 115
— 0.023 4000	0.503 193	
		— 114
— 0.023 3000	0.503 079	
		— 114
— 0.023 2000	0.502 965	
		— 115
— 0.023 1000	0.502 850	
		— 114
— 0.023 0000	0.502 736	
		— 114
— 0.022 9000	0.502 622	
		— 115
— 0.022 8000	0.502 507	
		— 114
— 0.022 7000	0.502 393	
		— 114
— 0.022 6000	0.502 279	
		— 114
— 0.022 5000	0.502 165	
		— 114
— 0.022 4000	0.502 051	
		— 114
— 0.022 3000	0.501 937	
		— 114
— 0.022 2000	0.501 823	
		— 114
— 0.022 1000	0.501 709	
		— 114
— 0.022 0000	0.501 595	
		— 114
— 0.021 9000	0.501 481	
		— 114
— 0.021 8000	0.501 367	
		— 114
— 0.021 7000	0.501 253	
		— 114
— 0.021 6000	0.501 139	
		— 114
— 0.021 5000	0.501 025	
		— 114
— 0.021 4000	0.500 911	
		— 114
— 0.021 3000	0.500 797	
		— 113
— 0.021 2000	0.500 684	
		— 114
— 0.021 1000	0.500 570	
		— 114
— 0.021 0000	0.500 456	
		— 114
— 0.020 9000	0.500 342	
		— 113
— 0.020 8000	0.500 229	
		— 114
— 0.020 7000	0.500 115	
		— 114
— 0.020 6000	0.500 001	
		— 113
— 0.020 5000	0.499 888	
		— 114
— 0.020 4000	0.499 774	
		— 114
— 0.020 3000	0.499 660	
		— 113
— 0.020 2000	0.499 547	
		— 114
— 0.020 1000	0.499 433	
		— 113
— 0.020 0000	0.499 320	

Tafel XI.

f-Tafel.

q	log f	Diff.
— 0.020 0000	0.499 320	
		— 114
— 0.019 9000	0.499 206	
		— 113
— 0.019 8000	0.499 093	
		— 113
— 0.019 7000	0.498 980	
		— 114
— 0.019 6000	0.498 866	
		— 113
— 0.019 5000	0.498 753	
		— 114
— 0.019 4000	0.498 639	
		— 113
— 0.019 3000	0.498 526	
		— 113
— 0.019 2000	0.498 413	
		— 113
— 0.019 1000	0.498 300	
		— 114
— 0.019 0000	0.498 186	
		— 113
— 0.018 9000	0.498 073	
		— 113
— 0.018 8000	0.497 960	
		— 113
— 0.018 7000	0.497 847	
		— 113
— 0.018 6000	0.497 734	
		— 113
— 0.018 5000	0.497 621	
		— 114
— 0.018 4000	0.497 507	
		— 113
— 0.018 3000	0.497 394	
		— 113
— 0.018 2000	0.497 281	
		— 113
— 0.018 1000	0.497 168	
		— 113
— 0.018 0000	0.497 055	
		— 113
— 0.017 9000	0.496 942	
		— 113
— 0.017 8000	0.496 829	
		— 112
— 0.017 7000	0.496 717	
		— 113
— 0.017 6000	0.496 604	
		— 113
— 0.017 5000	0.496 491	
		— 113
— 0.017 4000	0.496 378	
		— 113
— 0.017 3000	0.496 265	
		— 113
— 0.017 2000	0.496 152	
		— 112
— 0.017 1000	0.496 040	
		— 113
— 0.017 0000	0.495 927	
		— 113
— 0.016 9000	0.495 814	
		— 112
— 0.016 8000	0.495 702	
		— 113
— 0.016 7000	0.495 589	
		— 113
— 0.016 6000	0.495 476	
		— 112
— 0.016 5000	0.495 364	
		— 113
— 0.016 4000	0.495 251	
		— 113
— 0.016 3000	0.495 138	
		— 112
— 0.016 2000	0.495 026	
		— 113
— 0.016 1000	0.494 913	
		— 112
— 0.016 0000	0.494 801	
		— 112
— 0.015 9000	0.494 689	
		— 113
— 0.015 8000	0.494 576	
		— 112
— 0.015 7000	0.494 464	
		— 113
— 0.015 6000	0.494 351	
		— 112
— 0.015 5000	0.494 239	
		— 112
— 0.015 4000	0.494 127	
		— 113
— 0.015 3000	0.494 014	
		— 112
— 0.015 2000	0.493 902	
		— 112
— 0.015 1000	0.493 790	
		— 112
— 0.015 0000	0.493 678	

P. p.	
— 114	
1	11.4
2	22.8
3	34.2
4	45.6
5	57.0
6	68.4
7	79.8
8	91.2
9	102.6
— 113	
1	11.3
2	22.6
3	33.9
4	45.2
5	56.5
6	67.8
7	79.1
8	90.4
9	101.7
— 112	
1	11.2
2	22.4
3	33.6
4	44.8
5	56.0
6	67.2
7	78.4
8	89.6
9	100.8
— 111	
1	11.1
2	22.2
3	33.3
4	44.4
5	55.5
6	66.6
7	77.7
8	88.8
9	99.9

q	log f	Diff.
— 0.015 0000	0.493 678	
		— 113
— 0.014 9000	0.493 565	
		— 112
— 0.014 8000	0.493 453	
		— 112
— 0.014 7000	0.493 341	
		— 112
— 0.014 6000	0.493 229	
		— 112
— 0.014 5000	0.493 117	
		— 112
— 0.014 4000	0.493 005	
		— 112
— 0.014 3000	0.492 893	
		— 112
— 0.014 2000	0.492 781	
		— 112
— 0.014 1000	0.492 669	
		— 112
— 0.014 0000	0.492 557	
		— 112
— 0.013 9000	0.492 445	
		— 112
— 0.013 8000	0.492 333	
		— 112
— 0.013 7000	0.492 221	
		— 112
— 0.013 6000	0.492 109	
		— 112
— 0.013 5000	0.491 997	
		— 112
— 0.013 4000	0.491 885	
		— 111
— 0.013 3000	0.491 774	
		— 112
— 0.013 2000	0.491 662	
		— 112
— 0.013 1000	0.491 550	
		— 112
— 0.013 0000	0.491 438	
		— 111
— 0.012 9000	0.491 327	
		— 112
— 0.012 8000	0.491 215	
		— 112
— 0.012 7000	0.491 103	
		— 111
— 0.012 6000	0.490 992	
		— 112
— 0.012 5000	0.490 880	
		— 112
— 0.012 4000	0.490 768	
		— 111
— 0.012 3000	0.490 657	
		— 112
— 0.012 2000	0.490 545	
		— 111
— 0.012 1000	0.490 434	
		— 112
— 0.012 0000	0.490 322	
		— 111
— 0.011 9000	0.490 211	
		— 112
— 0.011 8000	0.490 099	
		— 111
— 0.011 7000	0.489 988	
		— 111
— 0.011 6000	0.489 877	
		— 112
— 0.011 5000	0.489 765	
		— 111
— 0.011 4000	0.489 654	
		— 111
— 0.011 3000	0.489 543	
		— 112
— 0.011 2000	0.489 431	
		— 111
— 0.011 1000	0.489 320	
		— 111
— 0.011 0000	0.489 209	
		— 111
— 0.010 9000	0.489 098	
		— 112
— 0.010 8000	0.488 986	
		— 111
— 0.010 7000	0.488 875	
		— 111
— 0.010 6000	0.488 764	
		— 111
— 0.010 5000	0.488 653	
		— 111
— 0.010 4000	0.488 542	
		— 111
— 0.010 3000	0.488 431	
		— 111
— 0.010 2000	0.488 320	
		— 111
— 0.010 1000	0.488 209	
		— 111
— 0.010 0000	0.488 098	

Tafel XI.

f-Tafel.

q	$\log f$	Diff.	*P. p.*	q	$\log f$	Diff.
0.010 0000	0.488 098		— 111	— 0.005 0000	0.482 580	
		— 111	1 — 11.1			— 110
0.009 9000	0.487 987		2 — 22.2	— 0.004 9000	0.482 470	
		— 111				— 110
0.009 8000	0.487 876			— 0.004 8000	0.482 360	
		— 111	3 — 33.3			— 110
— 0.009 7000	0.487 765			— 0.004 7000	0.482 250	
		— 111				— 109
— 0.009 6000	0.487 654		4 — 44.4	— 0.004 6000	0.482 141	
		— 111				— 110
— 0.009 5000	0.487 543			0.004 5000	0.482 031	
		— 111	5 — 55.5			— 110
0.009 4000	0.487 432		6 — 66.6	— 0.004 4000	0.481 921	
		— 110				— 109
— 0.009 3000	0.487 322			— 0.004 3000	0.481 812	
		— 111				— 110
— 0.009 2000	0.487 211		7 — 77.7	— 0.004 2000	0.481 702	
		— 111				— 109
— 0.009 1000	0.487 100		8 — 88.8	— 0.004 1000	0.481 593	
		— 111				— 110
— 0.009 0000	0.486 989		9 — 99.9	— 0.004 0000	0.481 483	
		— 110				— 109
— 0.008 9000	0.486 879			— 0.003 9000	0.481 374	
		— 111	— 110			— 110
— 0.008 8000	0.486 768			— 0.003 8000	0.481 264	
		— 111				— 109
— 0.008 7000	0.486 657			— 0.003 7000	0.481 155	
		— 110				— 110
— 0.008 6000	0.486 547		1 — 11.0	— 0.003 6000	0.481 045	
		— 111				— 109
— 0.008 5000	0.486 436		2 — 22.0	— 0.003 5000	0.480 936	
		— 111				— 110
— 0.008 4000	0.486 325		3 — 33.0	— 0.003 4000	0.480 826	
		— 110				— 109
— 0.008 3000	0.486 215			— 0.003 3000	0.480 717	
		— 111				— 109
— 0.008 2000	0.486 104		4 — 44.0	— 0.003 2000	0.480 608	
		— 110				— 110
— 0.008 1000	0.485 994		5 — 55.0	— 0.003 1000	0.480 498	
		— 111				— 109
— 0.008 0000	0.485 883		6 — 66.0	— 0.003 0000	0.480 389	
		— 110				— 109
— 0.007 9000	0.485 773		7 — 77.0	— 0.002 9000	0.480 280	
		— 111	8 — 88.0			— 109
— 0.007 8000	0.485 662			— 0.002 8000	0.480 171	
		— 110	9 — 99.0			— 110
0.007 7000	0.485 552			— 0.002 7000	0.480 061	
		— 110				— 109
— 0.007 6000	0.485 442			— 0.002 6000	0.479 952	
		— 111				— 109
0.007 5000	0.485 331			— 0.002 5000	0.479 843	
		— 110	— 109			— 109
0.007 4000	0.485 221			— 0.002 4000	0.479 734	
		— 111				— 109
— 0.007 3000	0.485 110			— 0.002 3000	0.479 625	
		— 110				— 109
— 0.007 2000	0.485 000		1 — 10.9	— 0.002 2000	0.479 516	
		— 110				— 109
— 0.007 1000	0.484 890		2 — 21.8	— 0.002 1000	0.479 407	
		— 110				— 110
— 0.007 0000	0.484 780		3 — 32.7	— 0.002 0000	0.479 297	
		— 111	4 — 43.6			— 109
0.006 9000	0.484 669			— 0.001 9000	0.479 188	
		— 110	5 — 54.5			— 109
— 0.006 8000	0.484 559		6 — 65.4	— 0.001 8000	0.479 079	
		— 110				— 109
0.006 7000	0.484 449			— 0.001 7000	0.478 970	
		— 110				— 109
0.006 6000	0.484 339			— 0.001 6000	0.478 861	
		— 110	7 — 76.3			— 108
— 0.006 5000	0.484 229		8 — 87.2	— 0.001 5000	0.478 753	
		— 110				— 109
0.006 4000	0.484 119		9 — 98.1	— 0.001 4000	0.478 644	
		— 111				— 109
— 0.006 3000	0.484 008			— 0.001 3000	0.478 535	
		— 110				— 109
— 0.006 2000	0.483 898			— 0.001 2000	0.478 426	
		— 110				— 109
— 0.006 1000	0.483 788		— 108	— 0.001 1000	0.478 317	
		— 110				— 109
— 0.006 0000	0.483 678			— 0.001 0000	0.478 208	
		— 110	1 — 10.8			— 109
— 0.005 9000	0.483 568		2 — 21.6	— 0.000 9000	0.478 099	
		— 110				— 108
— 0.005 8000	0.483 458		3 — 32.4	— 0.000 8000	0.477 991	
		— 110				— 109
— 0.005 7000	0.483 348			— 0.000 7000	0.477 882	
		— 109				— 109
— 0.005 6000	0.483 239		4 — 43.2	— 0.000 6000	0.477 773	
		— 110				— 109
— 0.005 5000	0.483 129		5 — 54.0	— 0.000 5000	0.477 664	
		— 110				— 108
0.005 4000	0.483 019		6 — 64.8	— 0.000 4000	0.477 556	
		— 110				— 109
— 0.005 3000	0.482 909			— 0.000 3000	0.477 447	
		— 110				— 109
0.005 2000	0.482 799		7 — 75.6	— 0.000 2000	0.477 338	
		— 110				— 108
— 0.005 1000	0.482 689		8 — 86.4	— 0.000 1000	0.477 230	
		— 109				— 109
— 0.005 0000	0.482 580		9 — 97.2	0.000 0000	0.477 121	

Tafel XI.

f-Tafel.

q	$\log f$	Diff.
0.000 0000	0.477 121	— 108
+ 0.000 1000	0.477 013	— 109
+ 0.000 2000	0.476 904	— 108
+ 0.000 3000	0.476 796	— 109
+ 0.000 4000	0.476 687	— 108
+ 0.000 5000	0.476 579	— 109
+ 0.000 6000	0.476 470	— 108
+ 0.000 7000	0.476 362	— 109
+ 0.000 8000	0.476 253	— 108
+ 0.000 9000	0.476 145	— 108
+ 0.001 0000	0.476 037	— 109
+ 0.001 1000	0.475 928	— 108
+ 0.001 2000	0.475 820	— 108
+ 0.001 3000	0.475 712	— 108
+ 0.001 4000	0.475 604	— 109
+ 0.001 5000	0.475 495	— 108
+ 0.001 6000	0.475 387	— 108
+ 0.001 7000	0.475 279	— 108
+ 0.001 8000	0.475 171	— 108
+ 0.001 9000	0.475 063	— 109
+ 0.002 0000	0.474 954	— 108
+ 0.002 1000	0.474 846	— 108
+ 0.002 2000	0.474 738	— 108
+ 0.002 3000	0.474 630	— 108
+ 0.002 4000	0.474 522	— 108
+ 0.002 5000	0.474 414	— 108
+ 0.002 6000	0.474 306	— 108
+ 0.002 7000	0.474 198	— 108
+ 0.002 8000	0.474 090	— 108
+ 0.002 9000	0.473 982	— 107
+ 0.003 0000	0.473 875	— 108
+ 0.003 1000	0.473 767	— 108
+ 0.003 2000	0.473 659	— 108
+ 0.003 3000	0.473 551	— 108
+ 0.003 4000	0.473 443	— 107
+ 0.003 5000	0.473 336	— 108
+ 0.003 6000	0.473 228	— 108
+ 0.003 7000	0.473 120	— 108
+ 0.003 8000	0.473 012	— 107
+ 0.003 9000	0.472 905	— 108
+ 0.004 0000	0.472 797	— 108
+ 0.004 1000	0.472 689	— 107
+ 0.004 2000	0.472 582	— 108
+ 0.004 3000	0.472 474	— 107
+ 0.004 4000	0.472 367	— 108
+ 0.004 5000	0.472 259	— 107
+ 0.004 6000	0.472 152	— 108
+ 0.004 7000	0.472 044	— 107
+ 0.004 8000	0.471 937	— 108
+ 0.004 9000	0.471 829	— 107
+ 0.005 0000	0.471 722	

P. p.

— 109	— 108	— 107	— 106
1 — 10.9	1 — 10.8	1 — 10.7	1 — 10.6
2 — 21.8	2 — 21.6	2 — 21.4	2 — 21.2
3 — 32.7	3 — 32.4	3 — 32.1	3 — 31.8
4 — 43.6	4 — 43.2	4 — 42.8	4 — 42.4
5 — 54.5	5 — 54.0	5 — 53.5	5 — 53.0
6 — 65.4	6 — 64.8	6 — 64.2	6 — 63.6
7 — 76.3	7 — 75.6	7 — 74.9	7 — 74.2
8 — 87.2	8 — 86.4	8 — 85.6	8 — 84.8
9 — 98.1	9 — 97.2	9 — 96.3	9 — 95.4

q	$\log f$	Diff.
+ 0.005 0000	0.471 722	— 108
+ 0.005 1000	0.471 614	— 107
+ 0.005 2000	0.471 507	— 107
+ 0.005 3000	0.471 400	— 108
+ 0.005 4000	0.471 292	— 107
+ 0.005 5000	0.471 185	— 107
+ 0.005 6000	0.471 078	— 108
+ 0.005 7000	0.470 970	— 107
+ 0.005 8000	0.470 863	— 107
+ 0.005 9000	0.470 756	— 107
+ 0.006 0000	0.470 649	— 107
+ 0.006 1000	0.470 542	— 107
+ 0.006 2000	0.470 435	— 108
+ 0.006 3000	0.470 327	— 107
+ 0.006 4000	0.470 220	— 107
+ 0.006 5000	0.470 113	— 107
+ 0.006 6000	0.470 006	— 107
+ 0.006 7000	0.469 899	— 107
+ 0.006 8000	0.469 792	— 107
+ 0.006 9000	0.469 685	— 107
+ 0.007 0000	0.469 578	— 107
+ 0.007 1000	0.469 471	— 107
+ 0.007 2000	0.469 364	— 107
+ 0.007 3000	0.469 257	— 106
+ 0.007 4000	0.469 151	— 107
+ 0.007 5000	0.469 044	— 107
+ 0.007 6000	0.468 937	— 107
+ 0.007 7000	0.468 830	— 107
+ 0.007 8000	0.468 723	— 106
+ 0.007 9000	0.468 617	— 107
+ 0.008 0000	0.468 510	— 107
+ 0.008 1000	0.468 403	— 107
+ 0.008 2000	0.468 296	— 106
+ 0.008 3000	0.468 190	— 107
+ 0.008 4000	0.468 083	— 107
+ 0.008 5000	0.467 976	— 106
+ 0.008 6000	0.467 870	— 107
+ 0.008 7000	0.467 763	— 106
+ 0.008 8000	0.467 657	— 107
+ 0.008 9000	0.467 550	— 106
+ 0.009 0000	0.467 444	— 107
+ 0.009 1000	0.467 337	— 106
+ 0.009 2000	0.467 231	— 107
+ 0.009 3000	0.467 124	— 106
+ 0.009 4000	0.467 018	— 106
+ 0.009 5000	0.466 912	— 107
+ 0.009 6000	0.466 805	— 106
+ 0.009 7000	0.466 699	— 107
+ 0.009 8000	0.466 592	— 106
+ 0.009 9000	0.466 486	— 106
+ 0.010 0000	0.466 380	

Tafel XI.

f-Tafel.

q	$\log f$	Diff.	P. p.	q	$\log f$	Diff.
+ 0.010 0000	0.466 380		— 107	+ 0.015 0000	0.461 094	
+ 0.010 1000	0.466 274	— 106	1 — 10.7	+ 0.015 1000	0.460 989	— 105
+ 0.010 2000	0.466 167	— 107	2 — 21.4	+ 0.015 2000	0.460 884	— 105
+ 0.010 3000	0.466 061	— 106	3 — 32.1	+ 0.015 3000	0.460 779	— 105
+ 0.010 4000	0.465 955	— 106	4 — 42.8	+ 0.015 4000	0.460 674	— 105
+ 0.010 5000	0.465 849	— 106	5 — 53.5	+ 0.015 5000	0.460 569	— 105
+ 0.010 6000	0.465 743	— 106	6 — 64.2	+ 0.015 6000	0.460 464	— 105
+ 0.010 7000	0.465 637	— 106		+ 0.015 7000	0.460 359	— 105
+ 0.010 8000	0.465 530	— 107	7 — 74.9	+ 0.015 8000	0.460 254	— 105
+ 0.010 9000	0.465 424	— 106	8 — 85.6	+ 0.015 9000	0.460 149	— 105
+ 0.011 0000	0.465 318	— 106	9 — 96.3	+ 0.016 0000	0.460 044	— 105
+ 0.011 1000	0.465 212	— 106	— 106	+ 0.016 1000	0.459 939	— 105
+ 0.011 2000	0.465 106	— 106		+ 0.016 2000	0.459 834	— 105
+ 0.011 3000	0.465 000	— 106		+ 0.016 3000	0.459 729	— 105
+ 0.011 4000	0.464 894	— 106	1 — 10.6	+ 0.016 4000	0.459 625	— 104
+ 0.011 5000	0.464 788	— 106	2 — 21.2	+ 0.016 5000	0.459 520	— 105
+ 0.011 6000	0.464 682	— 106	3 — 31.8	+ 0.016 6000	0.459 415	— 105
+ 0.011 7000	0.464 577	— 105		+ 0.016 7000	0.459 310	— 105
+ 0.011 8000	0.464 471	— 106	4 — 42.4	+ 0.016 8000	0.459 205	— 105
+ 0.011 9000	0.464 365	— 106	5 — 53.0	+ 0.016 9000	0.459 101	— 104
+ 0.012 0000	0.464 259	— 106	6 — 63.6	+ 0.017 0000	0.458 996	— 105
+ 0.012 1000	0.464 153	— 106	7 — 74.2	+ 0.017 1000	0.458 891	— 105
+ 0.012 2000	0.464 047	— 106	8 — 84.8	+ 0.017 2000	0.458 786	— 105
+ 0.012 3000	0.463 942	— 105	9 — 95.4	+ 0.017 3000	0.458 682	— 104
+ 0.012 4000	0.463 836	— 106		+ 0.017 4000	0.458 577	— 105
+ 0.012 5000	0.463 730	— 106		+ 0.017 5000	0.458 473	— 104
+ 0.012 6000	0.463 625	— 105	— 105	+ 0.017 6000	0.458 368	— 105
+ 0.012 7000	0.463 519	— 106		+ 0.017 7000	0.458 263	— 105
+ 0.012 8000	0.463 413	— 106	1 — 10.5	+ 0.017 8000	0.458 159	— 104
+ 0.012 9000	0.463 308	— 105	2 — 21.0	+ 0.017 9000	0.458 054	— 105
+ 0.013 0000	0.463 202	— 106	3 — 31.5	+ 0.018 0000	0.457 950	— 104
+ 0.013 1000	0.463 096	— 106	4 — 42.0	+ 0.018 1000	0.457 845	— 105
+ 0.013 2000	0.462 991	— 105	5 — 52.5	+ 0.018 2000	0.457 741	— 104
+ 0.013 3000	0.462 885	— 106	6 — 63.0	+ 0.018 3000	0.457 636	— 105
+ 0.013 4000	0.462 780	— 105		+ 0.018 4000	0.457 532	— 104
+ 0.013 5000	0.462 674	— 106	7 — 73.5	+ 0.018 5000	0.457 428	— 104
+ 0.013 6000	0.462 569	— 105	8 — 84.0	+ 0.018 6000	0.457 323	— 105
+ 0.013 7000	0.462 463	— 106	9 — 94.5	+ 0.018 7000	0.457 219	— 104
+ 0.013 8000	0.462 358	— 105		+ 0.018 8000	0.457 115	— 104
+ 0.013 9000	0.462 252	— 106		+ 0.018 9000	0.457 010	— 105
+ 0.014 0000	0.462 147	— 105	— 104	+ 0.019 0000	0.456 906	— 104
+ 0.014 1000	0.462 042	— 105	1 — 10.4	+ 0.019 1000	0.456 802	— 104
+ 0.014 2000	0.461 936	— 106	2 — 20.8	+ 0.019 2000	0.456 698	— 104
+ 0.014 3000	0.461 831	— 105	3 — 31.2	+ 0.019 3000	0.456 593	— 105
+ 0.014 4000	0.461 726	— 105	4 — 41.6	+ 0.019 4000	0.456 489	— 104
+ 0.014 5000	0.461 621	— 105	5 — 52.0	+ 0.019 5000	0.456 385	— 104
+ 0.014 6000	0.461 515	— 106	6 — 62.4	+ 0.019 6000	0.456 281	— 104
+ 0.014 7000	0.461 410	— 105		+ 0.019 7000	0.456 177	— 104
+ 0.014 8000	0.461 305	— 105	7 — 72.8	+ 0.019 8000	0.456 073	— 104
+ 0.014 9000	0.461 200	— 105	8 — 83.2	+ 0.019 9000	0.455 968	— 105
+ 0.015 0000	0.461 094	— 106	9 — 93.6	+ 0.020 0000	0.455 864	— 104

Tafel XI.

f-Tafel.

q	$\log f$	Diff.	P. p.	q	$\log f$	Diff.
+ 0.020 0000	0.455 864			+ 0.025 0000	0.450 688	
		— 104				— 102
+ 0.020 1000	0.455 760	— 104		+ 0.025 1000	0.450 586	— 103
+ 0.020 2000	0.455 656	— 104		+ 0.025 2000	0.450 483	— 103
+ 0.020 3000	0.455 552	— 104		+ 0.025 3000	0.450 380	— 103
+ 0.020 4000	0.455 448	— 104		+ 0.025 4000	0.450 277	— 103
+ 0.020 5000	0.455 344	— 104		+ 0.025 5000	0.450 174	— 103
+ 0.020 6000	0.455 240	— 103	104	+ 0.025 6000	0.450 071	— 103
+ 0.020 7000	0.455 137	— 104		+ 0.025 7000	0.449 968	— 103
+ 0.020 8000	0.455 033	— 104	1 — 10.4	+ 0.025 8000	0.449 865	— 103
+ 0.020 9000	0.454 929	— 104	2 — 20.8	+ 0.025 9000	0.449 762	— 102
+ 0.021 0000	0.454 825		3 — 31.2	+ 0.026 0000	0.449 660	
		— 104	4 — 41.6			— 103
+ 0.021 1000	0.454 721	— 104	5 — 52.0	+ 0.026 1000	0.449 557	— 103
+ 0.021 2000	0.454 617	— 104	6 — 62.4	+ 0.026 2000	0.449 454	— 103
+ 0.021 3000	0.454 513	— 103		+ 0.026 3000	0.449 351	— 102
+ 0.021 4000	0.454 410	— 104	7 — 72.8	+ 0.026 4000	0.449 249	— 103
+ 0.021 5000	0.454 306	— 104	8 — 83.2	+ 0.026 5000	0.449 146	— 103
+ 0.021 6000	0.454 202	— 103	9 — 93.6	+ 0.026 6000	0.449 043	— 102
+ 0.021 7000	0.454 099	— 104		+ 0.026 7000	0.448 941	— 103
+ 0.021 8000	0.453 995	— 104		+ 0.026 8000	0.448 838	— 102
+ 0.021 9000	0.453 891	— 103	— 103	+ 0.026 9000	0.448 736	— 103
+ 0.022 0000	0.453 788			+ 0.027 0000	0.448 633	
		— 104	1 — 10.3			— 102
+ 0.022 1000	0.453 684	— 104	2 — 20.6	+ 0.027 1000	0.448 531	— 103
+ 0.022 2000	0.453 580	— 103	3 — 30.9	+ 0.027 2000	0.448 428	— 103
+ 0.022 3000	0.453 477	— 104		+ 0.027 3000	0.448 325	— 102
+ 0.022 4000	0.453 373	— 103	4 — 41.2	+ 0.027 4000	0.448 223	— 102
+ 0.022 5000	0.453 270	— 104	5 — 51.5	+ 0.027 5000	0.448 121	— 103
+ 0.022 6000	0.453 166	— 103	6 — 61.8	+ 0.027 6000	0.448 018	— 102
+ 0.022 7000	0.453 063	— 104		+ 0.027 7000	0.447 916	— 103
+ 0.022 8000	0.452 959	— 103	7 — 72.1	+ 0.027 8000	0.447 813	— 102
+ 0.022 9000	0.452 856	— 104	8 — 82.4	+ 0.027 9000	0.447 711	— 102
+ 0.023 0000	0.452 752		9 — 92.7	+ 0.028 0000	0.447 609	
		— 103				— 103
+ 0.023 1000	0.452 649	— 103	— 102	+ 0.028 1000	0.447 506	— 102
+ 0.023 2000	0.452 546	— 104		+ 0.028 2000	0.447 404	— 102
+ 0.023 3000	0.452 442	— 103		+ 0.028 3000	0.447 302	— 103
+ 0.023 4000	0.452 339	— 103	1 — 10.2	+ 0.028 4000	0.447 199	— 102
+ 0.023 5000	0.452 236	— 104	2 — 20.4	+ 0.028 5000	0.447 097	— 102
+ 0.023 6000	0.452 132	— 103	3 — 30.6	+ 0.028 6000	0.446 995	— 102
+ 0.023 7000	0.452 029	— 103		+ 0.028 7000	0.446 893	— 103
+ 0.023 8000	0.451 926	— 103	4 — 40.8	+ 0.028 8000	0.446 790	— 102
+ 0.023 9000	0.451 823	— 104	5 — 51.0	+ 0.028 9000	0.446 688	— 102
+ 0.024 0000	0.451 719		6 — 61.2	+ 0.029 0000	0.446 586	
		— 103	7 — 71.4			— 102
+ 0.024 1000	0.451 616	— 103	8 — 81.6	+ 0.029 1000	0.446 484	— 102
+ 0.024 2000	0.451 513	— 103	9 — 91.8	+ 0.029 2000	0.446 382	— 102
+ 0.024 3000	0.451 410	— 103		+ 0.029 3000	0.446 280	— 102
+ 0.024 4000	0.451 307	— 103		+ 0.029 4000	0.446 178	— 102
+ 0.024 5000	0.451 204	— 103		+ 0.029 5000	0.446 076	— 102
+ 0.024 6000	0.451 101	— 103		+ 0.029 6000	0.445 974	— 102
+ 0.024 7000	0.450 998	— 104		+ 0.029 7000	0.445 872	— 102
+ 0.024 8000	0.450 894	— 103		+ 0.029 8000	0.445 770	— 102
+ 0.024 9000	0.450 791	— 103		+ 0.029 9000	0.445 668	— 102
+ 0.025 0000	0.450 688			+ 0.030 0000	0.445 566	

Tafel XII.

vergl. pag. 108.

$w = 40.$

	$1 : m_1$		$\log (wk)^2 m_1 10^7$	$\log (wk'') m_1$
Merkur	7636440	Asten.	9.7024—10	8.2692—10
Venus	401830		1.0712	9.5480—10
Erde und Mond	355499		1.1244	9.6012—10
Mars	2680337		0.2471	8.7239—10
Jupiter	1047.879		3.654072	2.131755
Saturn	3501.6		3.13102	1.60780
Uranus	22600		2.3329	0.8096
Neptun	19700		2.3808	0.8576

$\log k$ 8.235 5814 414 }
$\log k''$ 3.550 0065 746 } Gauss

vergl. pag. 35, 53, 54.

Uebersicht der Hauptformeln der mechanischen Quadraturen.

Untere Grenze: $a - \frac{1}{2}w$

$${}^{I}f(a - \tfrac{1}{2}w) = -\frac{1}{24} f^{I}(a - \tfrac{1}{2}w) + \frac{17}{5760} f^{III}(a - \tfrac{1}{2}w) - \frac{367}{967680} f^{V}(a - \tfrac{1}{2}w) + \dots$$

$${}^{II}f(a) = +\frac{1}{24} f(a - w) - \frac{17}{5760}\{2f^{II}(a - w) + f^{II}(a)\} + \frac{367}{967680}\{3f^{IV}(a - w) + 2f^{IV}(a)\} - \dots$$

Untere Grenze: a

$${}^{I}f(a - \tfrac{1}{2}w) = -\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{12} f^{I}(a) - \frac{11}{720} f^{III}(a) + \frac{191}{60480} f^{V}(a) - \dots$$

$${}^{II}f(a) = -\frac{1}{12} f(a) + \frac{1}{240} f^{II}(a) - \frac{31}{60480} f^{IV}(a) + \dots$$

Obere Grenze: $a + (i + \frac{1}{2})w = x$

$$\int^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(t)\,dt = w\left\{{}^{I}f(x) + \frac{1}{24} f^{I}(x) - \frac{17}{5760} f^{III}(x) + \frac{367}{967680} f^{V}(x) - \dots\right\}$$

$$\iint^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(t)\,dt^2 = w^2\left\{{}^{II}f(x) - \frac{1}{24} f(x) + \frac{17}{1920} f^{II}(x) - \frac{367}{193536} f^{IV}(x) + \dots\right\}$$

Obere Grenze: $a + iw = y$

$$\int^{a+iw} f(t)\,dt = w\left\{{}^{I}f(y) - \frac{1}{12} f^{I}(y) + \frac{11}{720} f^{III}(y) - \frac{191}{60480} f^{V}(y) + \dots\right\}$$

$$\iint^{a+iw} f(t)\,dt^2 = w^2\left\{{}^{II}f(y) + \frac{1}{12} f(y) - \frac{1}{240} f^{II}(y) + \frac{31}{60480} f^{IV}(y) - \dots\right\}$$

Tafel XIII.

σ-Tafel.

vergl. pag. 118.

r	log σ	Diff.
— 0.030 0000	4.922 983	— 68
— 0.029 9000	4.922 915	— 67
— 0.029 8000	4.922 848	— 68
— 0.029 7000	4.922 780	— 67
— 0.029 6000	4.922 713	— 68
— 0.029 5000	4.922 645	— 67
— 0.029 4000	4.922 578	— 68
— 0.029 3000	4.922 510	— 67
— 0.029 2000	4.922 443	— 67
— 0.029 1000	4.922 376	— 68
— 0.029 0000	4.922 308	— 67
— 0.028 9000	4.922 241	— 68
— 0.028 8000	4.922 173	— 67
— 0.028 7000	4.922 106	— 67
— 0.028 6000	4.922 039	— 68
— 0.028 5000	4.921 971	— 67
— 0.028 4000	4.921 904	— 68
— 0.028 3000	4.921 836	— 67
— 0.028 2000	4.921 769	— 67
— 0.028 1000	4.921 702	— 68
— 0.028 0000	4.921 634	— 67
— 0.027 9000	4.921 567	— 67
— 0.027 8000	4.921 500	— 68
— 0.027 7000	4.921 432	— 67
— 0.027 6000	4.921 365	— 67
— 0.027 5000	4.921 298	— 68
— 0.027 4000	4.921 230	— 67
— 0.027 3000	4.921 163	— 67
— 0.027 2000	4.921 096	— 67
— 0.027 1000	4.921 029	— 68
— 0.027 0000	4.920 961	— 67
— 0.026 9000	4.920 894	— 67
— 0.026 8000	4.920 827	— 67
— 0.026 7000	4.920 760	— 68
— 0.026 6000	4.920 692	— 67
— 0.026 5000	4.920 625	— 67
— 0.026 4000	4.920 558	— 67
— 0.026 3000	4.920 491	— 67
— 0.026 2000	4.920 424	— 68
— 0.026 1000	4.920 356	— 67
— 0.026 0000	4.920 289	— 67
— 0.025 9000	4.920 222	— 67
— 0.025 8000	4.920 155	— 67
— 0.025 7000	4.920 088	— 67
— 0.025 6000	4.920 021	— 68
— 0.025 5000	4.919 953	— 67
— 0.025 4000	4.919 886	— 67
— 0.025 3000	4.919 819	— 67
— 0.025 2000	4.919 752	— 67
— 0.025 1000	4.919 685	— 67
— 0.025 0000	4.919 618	

P. p.	— 68	— 67	— 66
1	6.8	6.7	6.6
2	13.6	13.4	13.2
3	20.4	20.1	19.8
4	27.2	26.8	26.4
5	34.0	33.5	33.0
6	40.8	40.2	39.6
7	47.6	46.9	46.2
8	54.4	53.6	52.8
9	61.2	60.3	59.4

r	log σ	Diff.
— 0.025 0000	4.919 618	— 67
— 0.024 9000	4.919 551	— 67
— 0.024 8000	4.919 484	— 67
— 0.024 7000	4.919 417	— 67
— 0.024 6000	4.919 350	— 68
— 0.024 5000	4.919 282	— 67
— 0.024 4000	4.919 215	— 67
— 0.024 3000	4.919 148	— 67
— 0.024 2000	4.919 081	— 67
— 0.024 1000	4.919 014	— 67
— 0.024 0000	4.918 947	— 67
— 0.023 9000	4.918 880	— 67
— 0.023 8000	4.918 813	— 67
— 0.023 7000	4.918 746	— 67
— 0.023 6000	4.918 679	— 67
— 0.023 5000	4.918 612	— 67
— 0.023 4000	4.918 545	— 67
— 0.023 3000	4.918 478	— 67
— 0.023 2000	4.918 411	— 67
— 0.023 1000	4.918 344	— 66
— 0.023 0000	4.918 278	— 67
— 0.022 9000	4.918 211	— 67
— 0.022 8000	4.918 144	— 67
— 0.022 7000	4.918 077	— 67
— 0.022 6000	4.918 010	— 67
— 0.022 5000	4.917 943	— 67
— 0.022 4000	4.917 876	— 67
— 0.022 3000	4.917 809	— 67
— 0.022 2000	4.917 742	— 67
— 0.022 1000	4.917 675	— 66
— 0.022 0000	4.917 609	— 67
— 0.021 9000	4.917 542	— 67
— 0.021 8000	4.917 475	— 67
— 0.021 7000	4.917 408	— 67
— 0.021 6000	4.917 341	— 67
— 0.021 5000	4.917 274	— 66
— 0.021 4000	4.917 208	— 67
— 0.021 3000	4.917 141	— 67
— 0.021 2000	4.917 074	— 67
— 0.021 1000	4.917 007	— 67
— 0.021 0000	4.916 940	— 66
— 0.020 9000	4.916 874	— 67
— 0.020 8000	4.916 807	— 67
— 0.020 7000	4.916 740	— 67
— 0.020 6000	4.916 673	— 66
— 0.020 5000	4.916 607	— 67
— 0.020 4000	4.916 540	— 67
— 0.020 3000	4.916 473	— 67
— 0.020 2000	4.916 406	— 66
— 0.020 1000	4.916 340	— 67
— 0.020 0000	4.916 273	

Tafel XIII.

σ-Tafel.

r	log *σ*	Diff.	*P. p.*	*r*	log *σ*	Diff.
— 0.020 0000	4.916 273	— 67		— 0.015 0000	4.912 948	— 66
0.019 9000	4.916 206	66		— 0.014 9000	4.912 882	— 67
0.019 8000	4.916 140	67		— 0.014 8000	4.912 815	— 66
0.019 7000	4.916 073	67		— 0.014 7000	4.912 749	— 66
— 0.019 6000	4.916 006	66		— 0.014 6000	4.912 683	— 66
0.019 5000	4.915 940	67		— 0.014 5000	4.912 617	— 67
0.019 4000	4.915 873	67		— 0.014 4000	4.912 550	— 66
0.019 3000	4.915 806	— 66	— 67	— 0.014 3000	4.912 484	— 66
0.019 2000	4.915 740	— 67		— 0.014 2000	4.912 418	— 66
0.019 1000	4.915 673	— 67	1 — 6.7	— 0.014 1000	4.912 352	— 67
— 0.019 0000	4.915 606	— 66	2 — 13.4	— 0.014 0000	4.912 285	— 66
0.018 9000	4.915 540	— 67	3 — 20.1	— 0.013 9000	4.912 219	— 66
0.018 8000	4.915 473	— 66	4 — 26.8	— 0.013 8000	4.912 153	— 66
0.018 7000	4.915 407	— 67	5 — 33.5	— 0.013 7000	4.912 087	— 66
0.018 6000	4.915 340	— 67	6 — 40.2	— 0.013 6000	4.912 021	— 67
0.018 5000	4.915 273	— 66		— 0.013 5000	4.911 954	— 66
0.018 4000	4.915 207	— 67	7 — 46.9	— 0.013 4000	4.911 888	— 66
0.018 3000	4.915 140	— 66	8 — 53.6	— 0.013 3000	4.911 822	— 66
0.018 2000	4.915 074	— 67	9 — 60.3	— 0.013 2000	4.911 756	— 66
— 0.018 1000	4.915 007	— 66		— 0.013 1000	4.911 690	— 66
— 0.018 0000	4.914 941	— 67	— 66	— 0.013 0000	4.911 624	— 67
— 0.017 9000	4.914 874	— 66	1 — 6.6	— 0.012 9000	4.911 557	— 66
— 0.017 8000	4.914 808	— 67	2 — 13.2	— 0.012 8000	4.911 491	— 66
— 0.017 7000	4.914 741	— 66	3 — 19.8	— 0.012 7000	4.911 425	— 66
— 0.017 6000	4.914 675	— 67		— 0.012 6000	4.911 359	— 66
0.017 5000	4.914 608	— 66	4 — 26.4	— 0.012 5000	4.911 293	— 66
0.017 4000	4.914 542	— 67	5 — 33.0	— 0.012 4000	4.911 227	— 66
0.017 3000	4.914 475	— 66	6 — 39.6	— 0.012 3000	4.911 161	— 66
0.017 2000	4.914 409	— 67		— 0.012 2000	4.911 095	— 66
— 0.017 1000	4.914 342	— 66	7 — 46.2	— 0.012 1000	4.911 029	— 67
0.017 0000	4.914 276	— 67	8 — 52.8	— 0.012 0000	4.910 962	— 66
0.016 9000	4.914 209	— 66	9 — 59.4	— 0.011 9000	4.910 896	— 66
0.016 8000	4.914 143	— 67		— 0.011 8000	4.910 830	— 66
0.016 7000	4.914 076	— 66	— 65	— 0.011 7000	4.910 764	— 66
0.016 6000	4.914 010	— 67		— 0.011 6000	4.910 698	— 66
0.016 5000	4.913 943	66	1 — 6.5	— 0.011 5000	4.910 632	— 66
0.016 4000	4.913 877	— 66	2 — 13.0	— 0.011 4000	4.910 566	— 66
0.016 3000	4.913 811	— 67	3 — 19.5	— 0.011 3000	4.910 500	— 66
0.016 2000	4.913 744	— 66		— 0.011 2000	4.910 434	— 66
0.016 1000	4.913 678	— 67	4 — 26.0	— 0.011 1000	4.910 368	— 66
0.016 0000	4.913 611	— 66	5 — 32.5	— 0.011 0000	4.910 302	— 66
0.015 9000	4.913 545	— 66	6 — 39.0	— 0.010 9000	4.910 236	— 66
0.015 8000	4.913 479	— 67	7 — 45.5	— 0.010 8000	4.910 170	— 66
0.015 7000	4.913 412	— 66	8 — 52.0	— 0.010 7000	4.910 104	— 66
0.015 6000	4.913 346	— 66	9 — 58.5	— 0.010 6000	4.910 038	— 66
0.015 5000	4.913 280	— 67		— 0.010 5000	4.909 972	— 66
0.015 4000	4.913 213	— 66		— 0.010 4000	4.909 906	— 66
0.015 3000	4.913 147	— 66		— 0.010 3000	4.909 840	— 65
0.015 2000	4.913 081	— 67		— 0.010 2000	4.909 775	— 66
0.015 1000	4.913 014	— 66		— 0.010 1000	4.909 709	— 66
0.015 0000	4.912 948			— 0.010 0000	4.909 643	

Tafel XIII.

σ - Tafel.

v	log σ	Diff.	P. p.	v	log σ	Diff.
— 0.010 0000	4.909 643			— 0.005 0000	4.906 357	
		— 66				— 66
— 0.009 9000	4.909 577			— 0.004 9000	4.906 291	
		— 66				— 65
— 0.009 8000	4.909 511			— 0.004 8000	4.906 226	
		— 66				— 66
— 0.009 7000	4.909 445			— 0.004 7000	4.906 160	
		— 66				— 65
— 0.009 6000	4.909 379			— 0.004 6000	4.906 095	
		— 66				— 66
— 0.009 5000	4.909 313			— 0.004 5000	4.906 029	
		— 66				— 65
— 0.009 4000	4.909 247			— 0.004 4000	4.905 964	
		— 66				— 66
— 0.009 3000	4.909 181			— 0.004 3000	4.905 898	
		— 65				— 65
— 0.009 2000	4.909 116			— 0.004 2000	4.905 833	
		— 66				— 66
— 0.009 1000	4.909 050			— 0.004 1000	4.905 767	
		— 66				— 65
— 0.009 0000	4.908 984			— 0.004 0000	4.905 702	
		— 66				— 66
— 0.008 9000	4.908 918			— 0.003 9000	4.905 636	
		— 66				— 65
— 0.008 8000	4.908 852			— 0.003 8000	4.905 571	
		— 66	— 66			— 65
— 0.008 7000	4.908 786			— 0.003 7000	4.905 506	
		— 65				— 66
— 0.008 6000	4.908 721			— 0.003 6000	4.905 440	
		— 66				— 65
— 0.008 5000	4.908 655		1 6.6	— 0.003 5000	4.905 375	
		— 66				— 66
— 0.008 4000	4.908 589		2 13.2	— 0.003 4000	4.905 309	
		— 66				— 65
— 0.008 3000	4.908 523		3 19.8	— 0.003 3000	4.905 244	
		— 65				— 65
— 0.008 2000	4.908 458			— 0.003 2000	4.905 179	
		— 66				— 66
— 0.008 1000	4.908 392		4 — 26.4	— 0.003 1000	4.905 113	
		— 66				— 65
— 0.008 0000	4.908 326		5 — 33.0	0.003 0000	4.905 048	
		— 66	6 — 39.6			— 66
— 0.007 9000	4.908 260			— 0.002 9000	4.904 982	
		— 66				— 65
— 0.007 8000	4.908 194		7 — 46.2	0.002 8000	4.904 917	
		— 65				— 65
— 0.007 7000	4.908 129		8 — 52.8	0.002 7000	4.904 852	
		— 66				— 66
— 0.007 6000	4.908 063		9 — 59.4	— 0.002 6000	4.904 786	
		— 66				— 65
— 0.007 5000	4.907 997			0.002 5000	4.904 721	
		— 65				— 65
— 0.007 4000	4.907 932			— 0.002 4000	4.904 656	
		— 66	— 65			— 66
— 0.007 3000	4.907 866			— 0.002 3000	4.904 590	
		— 66				— 65
— 0.007 2000	4.907 800			0.002 2000	4.904 525	
		— 66				— 65
— 0.007 1000	4.907 734		1 — 6.5	0.002 1000	4.904 460	
		— 65				— 66
— 0.007 0000	4.907 669		2 — 13.0	0.002 0000	4.904 394	
		— 66	3 — 19.5			— 65
— 0.006 9000	4.907 603			0.001 9000	4.904 329	
		— 66	4 — 26.0			— 65
— 0.006 8000	4.907 537			— 0.001 8000	4.904 264	
		— 65	5 — 32.5			— 65
— 0.006 7000	4.907 472			— 0.001 7000	4.904 199	
		— 66	6 — 39.0			— 66
— 0.006 6000	4.907 406			— 0.001 6000	4.904 133	
		— 66				— 65
— 0.006 5000	4.907 340			— 0.001 5000	4.904 068	
		— 65	7 — 45.5			— 65
— 0.006 4000	4.907 275			— 0.001 4000	4.904 003	
		— 66	8 — 52.0			— 65
— 0.006 3000	4.907 209			— 0.001 3000	4.903 938	
		— 65	9 — 58.5			— 66
— 0.006 2000	4.907 144			— 0.001 2000	4.903 872	
		— 66				— 65
— 0.006 1000	4.907 078			— 0.001 1000	4.903 807	
		— 66				— 65
— 0.006 0000	4.907 012			— 0.001 0000	4.903 742	
		— 65				— 65
— 0.005 9000	4.906 947			— 0.000 9000	4.903 677	
		— 66				— 66
— 0.005 8000	4.906 881			— 0.000 8000	4.903 611	
		— 65				— 65
— 0.005 7000	4.906 816			— 0.000 7000	4.903 546	
		— 66				— 65
— 0.005 6000	4.906 750			— 0.000 6000	4.903 481	
		— 66				— 65
— 0.005 5000	4.906 684			— 0.000 5000	4.903 416	
		— 65				— 65
— 0.005 4000	4.906 619			— 0.000 4000	4.903 351	
		— 66				— 66
— 0.005 3000	4.906 553			— 0.000 3000	4.903 285	
		— 65				— 65
— 0.005 2000	4.906 488			— 0.000 2000	4.903 220	
		— 66				— 65
— 0.005 1000	4.906 422			— 0.000 1000	4.903 155	
		— 65				— 65
— 0.005 0000	4.906 357			0.000 0000	4.903 090	

Tafel XIII.

σ - Tafel.

r	$\log \sigma$	Diff.	r	$\log \sigma$	Diff.
0.000 0000	4.903 090		+ 0.005 0000	4.899 842	
		— 65			— 65
+ 0.000 1000	4.903 025	65	+ 0.005 1000	4.899 777	— 64
+ 0.000 2000	4.902 960	65	+ 0.005 2000	4.899 713	— 65
+ 0.000 3000	4.902 895	66	+ 0.005 3000	4.899 648	— 65
+ 0.000 4000	4.902 829	65	+ 0.005 4000	4.899 583	— 64
+ 0.000 5000	4.902 764	65	+ 0.005 5000	4.899 519	— 65
+ 0.000 6000	4.902 699	— 65	+ 0.005 6000	4.899 454	— 65
+ 0.000 7000	4.902 634	65	+ 0.005 7000	4.899 389	— 65
+ 0.000 8000	4.902 569	65	+ 0.005 8000	4.899 324	— 64
+ 0.000 9000	4.902 504	— 65	+ 0.005 9000	4.899 260	— 65
+ 0.001 0000	4.902 439		+ 0.006 0000	4.899 195	
		— 65			— 65
+ 0.001 1000	4.902 374	— 65	+ 0.006 1000	4.899 130	— 64
+ 0.001 2000	4.902 309	65	+ 0.006 2000	4.899 066	— 65
+ 0.001 3000	4.902 244	65	+ 0.006 3000	4.899 001	— 65
+ 0.001 4000	4.902 179	65	+ 0.006 4000	4.898 936	— 64
+ 0.001 5000	4.902 114	65	+ 0.006 5000	4.898 872	— 65
+ 0.001 6000	4.902 049	65	+ 0.006 6000	4.898 807	— 65
+ 0.001 7000	4.901 984	— 65	+ 0.006 7000	4.898 742	— 64
+ 0.001 8000	4.901 919	65	+ 0.006 8000	4.898 678	— 65
+ 0.001 9000	4.901 854	65	+ 0.006 9000	4.898 613	— 65
+ 0.002 0000	4.901 789		+ 0.007 0000	4.898 548	
		65			— 64
+ 0.002 1000	4.901 724	65	+ 0.007 1000	4.898 484	— 65
+ 0.002 2000	4.901 659	65	+ 0.007 2000	4.898 419	— 64
+ 0.002 3000	4.901 594	65	+ 0.007 3000	4.898 355	— 65
+ 0.002 4000	4.901 529	65	+ 0.007 4000	4.898 290	— 65
+ 0.002 5000	4.901 464	65	+ 0.007 5000	4.898 225	— 64
+ 0.002 6000	4.901 399	65	+ 0.007 6000	4.898 161	— 65
+ 0.002 7000	4.901 334	65	+ 0.007 7000	4.898 096	— 64
+ 0.002 8000	4.901 269	65	+ 0.007 8000	4.898 032	— 65
+ 0.002 9000	4.901 204	65	+ 0.007 9000	4.897 967	— 64
+ 0.003 0000	4.901 139		+ 0.008 0000	4.897 903	
		— 65			— 65
+ 0.003 1000	4.901 074	65	+ 0.008 1000	4.897 838	— 64
+ 0.003 2000	4.901 009	65	+ 0.008 2000	4.897 774	— 65
+ 0.003 3000	[illegible]	65	+ 0.008 3000	4.897 709	— 64
+ 0.003 4000	4.900 879	64	+ 0.008 4000	4.897 645	— 65
+ 0.003 5000	4.900 815	65	+ 0.008 5000	4.897 580	— 64
+ 0.003 6000	4.900 750	65	+ 0.008 6000	4.897 516	— 65
+ 0.003 7000	4.900 685	65	+ 0.008 7000	4.897 451	— 64
+ 0.003 8000	4.900 620	65	+ 0.008 8000	4.897 387	— 65
+ 0.003 9000	4.900 555	65	+ 0.008 9000	4.897 322	— 64
+ 0.004 0000	4.900 490		+ 0.009 0000	4.897 258	
		65			— 65
+ 0.004 1000	4.900 425	64	+ 0.009 1000	4.897 193	— 64
+ 0.004 2000	4.900 361	65	+ 0.009 2000	4.897 129	— 65
+ 0.004 3000	4.900 296	— 65	+ 0.009 3000	4.897 064	— 64
+ 0.004 4000	4.900 231	— 65	+ 0.009 4000	4.897 000	— 65
+ 0.004 5000	4.900 166	— 65	+ 0.009 5000	4.896 935	— 64
+ 0.004 6000	4.900 101	— 64	+ 0.009 6000	4.896 871	— 64
+ 0.004 7000	4.900 037	— 65	+ 0.009 7000	4.896 807	— 65
+ 0.004 8000	4.899 972	— 65	+ 0.009 8000	4.896 742	— 64
+ 0.004 9000	4.899 907	65	+ 0.009 9000	4.896 678	— 65
+ 0.005 0000	4.899 842		+ 0.010 0000	4.896 613	

P. p.	— 66	— 65	— 64
1	6.6	6.5	6.4
2	13.2	13.0	12.8
3	19.8	19.5	19.2
4	26.4	26.0	25.6
5	33.0	32.5	32.0
6	39.6	39.0	38.4
7	46.2	45.5	44.8
8	52.8	52.0	51.2
9	59.4	58.5	57.6

Tafel XIII.

σ-Tafel.

r	log σ	Diff.	r	log σ	Diff.
+ 0.010 0000	4.896 613	— 64	+ 0.015 0000	4.893 403	— 64
+ 0.010 1000	4.896 549	— 64	+ 0.015 1000	4.893 339	— 64
+ 0.010 2000	4.896 485	— 65	+ 0.015 2000	4.893 275	— 64
+ 0.010 3000	4.896 420	— 64	+ 0.015 3000	4.893 211	— 64
+ 0.010 4000	4.896 356	— 65	+ 0.015 4000	4.893 147	— 64
+ 0.010 5000	4.896 291	— 64	+ 0.015 5000	4.893 083	— 64
+ 0.010 6000	4.896 227	— 64	+ 0.015 6000	4.893 019	— 64
+ 0.010 7000	4.896 163	— 65	+ 0.015 7000	4.892 955	— 64
+ 0.010 8000	4.896 098	— 64	+ 0.015 8000	4.892 891	— 64
+ 0.010 9000	4.896 034	— 64	+ 0.015 9000	4.892 827	— 64
+ 0.011 0000	4.895 970	— 65	+ 0.016 0000	4.892 763	— 64
+ 0.011 1000	4.895 905	— 64	+ 0.016 1000	4.892 699	— 64
+ 0.011 2000	4.895 841	— 64	+ 0.016 2000	4.892 635	— 64
+ 0.011 3000	4.895 777	— 64	+ 0.016 3000	4.892 571	— 64
+ 0.011 4000	4.895 713	— 65	+ 0.016 4000	4.892 507	— 64
+ 0.011 5000	4.895 648	— 64	+ 0.016 5000	4.892 443	— 63
+ 0.011 6000	4.895 584	— 64	+ 0.016 6000	4.892 380	— 64
+ 0.011 7000	4.895 520	— 65	+ 0.016 7000	4.892 316	— 64
+ 0.011 8000	4.895 455	— 64	+ 0.016 8000	4.892 252	— 64
+ 0.011 9000	4.895 391	— 64	+ 0.016 9000	4.892 188	— 64
+ 0.012 0000	4.895 327	— 64	+ 0.017 0000	4.892 124	— 64
+ 0.012 1000	4.895 263	— 65	+ 0.017 1000	4.892 060	— 64
+ 0.012 2000	4.895 198	— 64	+ 0.017 2000	4.891 996	— 64
+ 0.012 3000	4.895 134	— 64	+ 0.017 3000	4.891 932	— 63
+ 0.012 4000	4.895 070	— 64	+ 0.017 4000	4.891 869	— 64
+ 0.012 5000	4.895 006	— 64	+ 0.017 5000	4.891 805	— 64
+ 0.012 6000	4.894 942	— 65	+ 0.017 6000	4.891 741	— 64
+ 0.012 7000	4.894 877	— 64	+ 0.017 7000	4.891 677	— 64
+ 0.012 8000	4.894 813	— 64	+ 0.017 8000	4.891 613	— 64
+ 0.012 9000	4.894 749	— 64	+ 0.017 9000	4.891 549	— 63
+ 0.013 0000	4.894 685	— 64	+ 0.018 0000	4.891 486	— 64
+ 0.013 1000	4.894 621	— 64	+ 0.018 1000	4.891 422	— 64
+ 0.013 2000	4.894 557	— 65	+ 0.018 2000	4.891 358	— 64
+ 0.013 3000	4.894 492	— 64	+ 0.018 3000	4.891 294	— 64
+ 0.013 4000	4.894 428	— 64	+ 0.018 4000	4.891 230	— 63
+ 0.013 5000	4.894 364	— 64	+ 0.018 5000	4.891 167	— 64
+ 0.013 6000	4.894 300	— 64	+ 0.018 6000	4.891 103	— 64
+ 0.013 7000	4.894 236	— 64	+ 0.018 7000	4.891 039	— 64
+ 0.013 8000	4.894 172	— 64	+ 0.018 8000	4.890 975	— 63
+ 0.013 9000	4.894 108	— 64	+ 0.018 9000	4.890 912	— 64
+ 0.014 0000	4.894 044	— 65	+ 0.019 0000	4.890 848	— 64
+ 0.014 1000	4.893 979	— 64	+ 0.019 1000	4.890 784	— 64
+ 0.014 2000	4.893 915	— 64	+ 0.019 2000	4.890 720	— 63
+ 0.014 3000	4.893 851	— 64	+ 0.019 3000	4.890 657	— 64
+ 0.014 4000	4.893 787	— 64	+ 0.019 4000	4.890 593	— 64
+ 0.014 5000	4.893 723	— 64	+ 0.019 5000	4.890 529	— 63
+ 0.014 6000	4.893 659	— 64	+ 0.019 6000	4.890 466	— 64
+ 0.014 7000	4.893 595	— 64	+ 0.019 7000	4.890 402	— 64
+ 0.014 8000	4.893 531	— 64	+ 0.019 8000	4.890 338	— 63
+ 0.014 9000	4.893 467	— 64	+ 0.019 9000	4.890 275	— 64
+ 0.015 0000	4.893 403		+ 0.020 0000	4.890 211	

P. p.	65	64	— 63
1	6.5	6.4	6.3
2	13.0	12.8	12.6
3	19.5	19.2	18.9
4	26.0	25.6	25.2
5	32.5	32.0	31.5
6	39.0	38.4	37.8
7	45.5	44.8	44.1
8	52.0	51.2	50.4
9	58.5	57.6	56.7

Tafel XIII.

σ-Tafel.

r	$\log \sigma$	Diff.	r	$\log \sigma$	Diff.
+ 0.020 0000	4.890 211	— 64	+ 0.025 0000	4.887 037	— 63
+ 0.020 1000	4.890 147	— 63	+ 0.025 1000	4.886 974	— 63
+ 0.020 2000	4.890 084	— 64	+ 0.025 2000	4.886 911	— 64
+ 0.020 3000	4.890 020	— 64	+ 0.025 3000	4.886 847	— 63
+ 0.020 4000	4.889 956	— 63	+ 0.025 4000	4.886 784	— 63
+ 0.020 5000	4.889 893	— 64	+ 0.025 5000	4.886 721	— 63
+ 0.020 6000	4.889 829	— 63	+ 0.025 6000	4.886 658	— 64
+ 0.020 7000	4.889 766	— 64	+ 0.025 7000	4.886 594	— 63
+ 0.020 8000	4.889 702	— 64	+ 0.025 8000	4.886 531	— 63
+ 0.020 9000	4.889 638	— 63	+ 0.025 9000	4.886 468	— 63
+ 0.021 0000	4.889 575	— 64	+ 0.026 0000	4.886 405	— 64
+ 0.021 1000	4.889 511	— 63	+ 0.026 1000	4.886 341	— 63
+ 0.021 2000	4.889 448	— 64	+ 0.026 2000	4.886 278	— 63
+ 0.021 3000	4.889 384	— 63	+ 0.026 3000	4.886 215	— 63
+ 0.021 4000	4.889 321	— 64	+ 0.026 4000	4.886 152	— 63
+ 0.021 5000	4.889 257	— 64	+ 0.026 5000	4.886 089	— 63
+ 0.021 6000	4.889 193	— 63	+ 0.026 6000	4.886 026	— 64
+ 0.021 7000	4.889 130	— 64	+ 0.026 7000	4.885 962	— 63
+ 0.021 8000	4.889 066	— 63	+ 0.026 8000	4.885 899	— 63
+ 0.021 9000	4.889 003	— 64	+ 0.026 9000	4.885 836	— 63
+ 0.022 0000	4.888 939	— 63	+ 0.027 0000	4.885 773	— 63
+ 0.022 1000	4.888 876	— 64	+ 0.027 1000	4.885 710	— 63
+ 0.022 2000	4.888 812	— 63	+ 0.027 2000	4.885 647	— 64
+ 0.022 3000	4.888 749	— 64	+ 0.027 3000	4.885 583	— 63
+ 0.022 4000	4.888 685	— 63	+ 0.027 4000	4.885 520	— 63
+ 0.022 5000	4.888 622	— 64	+ 0.027 5000	4.885 457	— 63
+ 0.022 6000	4.888 558	— 63	+ 0.027 6000	4.885 394	— 63
+ 0.022 7000	4.888 495	— 64	+ 0.027 7000	4.885 331	— 63
+ 0.022 8000	4.888 431	— 63	+ 0.027 8000	4.885 268	— 63
+ 0.022 9000	4.888 368	— 63	+ 0.027 9000	4.885 205	— 63
+ 0.023 0000	4.888 305	— 64	+ 0.028 0000	4.885 142	— 63
+ 0.023 1000	4.888 241	— 63	+ 0.028 1000	4.885 079	— 63
+ 0.023 2000	4.888 178	— 64	+ 0.028 2000	4.885 016	— 63
+ 0.023 3000	4.888 114	— 63	+ 0.028 3000	4.884 953	— 64
+ 0.023 4000	4.888 051	— 63	+ 0.028 4000	4.884 889	— 63
+ 0.023 5000	4.887 988	— 64	+ 0.028 5000	4.884 826	— 63
+ 0.023 6000	4.887 924	— 63	+ 0.028 6000	4.884 763	— 63
+ 0.023 7000	4.887 861	— 64	+ 0.028 7000	4.884 700	— 63
+ 0.023 8000	4.887 797	— 63	+ 0.028 8000	4.884 637	— 63
+ 0.023 9000	4.887 734	— 63	+ 0.028 9000	4.884 574	— 63
+ 0.024 0000	4.887 671	— 64	+ 0.029 0000	4.884 511	— 63
+ 0.024 1000	4.887 607	— 63	+ 0.029 1000	4.884 448	— 63
+ 0.024 2000	4.887 544	— 63	+ 0.029 2000	4.884 385	— 63
+ 0.024 3000	4.887 481	— 64	+ 0.029 3000	4.884 322	— 63
+ 0.024 4000	4.887 417	— 63	+ 0.029 4000	4.884 259	— 63
+ 0.024 5000	4.887 354	— 63	+ 0.029 5000	4.884 196	— 63
+ 0.024 6000	4.887 291	— 64	+ 0.029 6000	4.884 133	— 63
+ 0.024 7000	4.887 227	— 63	+ 0.029 7000	4.884 070	— 63
+ 0.024 8000	4.887 164	— 63	+ 0.029 8000	4.884 007	— 62
+ 0.024 9000	4.887 101	— 64	+ 0.029 9000	4.883 945	— 63
+ 0.025 0000	4.887 037		+ 0.030 0000	4.883 882	

P. p.

	— 64	63	62
1	6.4	6.3	6.2
2	12.8	12.6	12.4
3	19.2	18.9	18.6
4	25.6	25.2	24.8
5	32.0	31.5	31.0
6	38.4	37.8	37.2
7	44.8	44.1	43.4
8	51.2	50.4	49.6
9	57.6	56.7	55.8

Tafel XIV.

vergl. pag. 297.

hJ	$J_{(hJ)}$	Diff.	hJ	$J_{(hJ)}$	Diff.	hJ	$J_{(hJ)}$	Diff.	hJ	$J_{(hJ)}$	Diff.
0.00	0.00000	1128	0.50	0.52050	874	1.00	0.84270	411	1.50	0.96611	117
0.01	0.01128	1128	0.51	0.52924	866	1.01	0.84681	403	1.51	0.96728	113
0.02	0.02256	1128	0.52	0.53790	856	1.02	0.85084	394	1.52	0.96841	111
0.03	0.03384	1127	0.53	0.54646	848	1.03	0.85478	387	1.53	0.96952	107
0.04	0.04511	1126	0.54	0.55494	838	1.04	0.85865	379	1.54	0.97059	103
0.05	0.05637	1125	0.55	0.56332	830	1.05	0.86244	370	1.55	0.97162	101
0.06	0.06762	1124	0.56	0.57162	820	1.06	0.86614	363	1.56	0.97263	97
0.07	0.07886	1122	0.57	0.57982	810	1.07	0.86977	356	1.57	0.97360	95
0.08	0.09008	1120	0.58	0.58792	802	1.08	0.87333	347	1.58	0.97455	91
0.09	0.10128	1118	0.59	0.59594	792	1.09	0.87680	341	1.59	0.97546	89
0.10	0.11246	1116	0.60	0.60386	782	1.10	0.88021	332	1.60	0.97635	86
0.11	0.12362	1114	0.61	0.61168	773	1.11	0.88353	326	1.61	0.97721	83
0.12	0.13476	1111	0.62	0.61941	764	1.12	0.88679	318	1.62	0.97804	80
0.13	0.14587	1108	0.63	0.62705	754	1.13	0.88997	311	1.63	0.97884	78
0.14	0.15695	1105	0.64	0.63459	744	1.14	0.89308	304	1.64	0.97962	76
0.15	0.16800	1101	0.65	0.64203	735	1.15	0.89612	298	1.65	0.98038	72
0.16	0.17901	1098	0.66	0.64938	725	1.16	0.89910	290	1.66	0.98110	71
0.17	0.18999	1095	0.67	0.65663	715	1.17	0.90200	284	1.67	0.98181	68
0.18	0.20094	1090	0.68	0.66378	706	1.18	0.90484	277	1.68	0.98249	66
0.19	0.21184	1086	0.69	0.67084	696	1.19	0.90761	270	1.69	0.98315	64
0.20	0.22270	1082	0.70	0.67780	687	1.20	0.91031	265	1.70	0.98379	62
0.21	0.23352	1078	0.71	0.68467	676	1.21	0.91296	257	1.71	0.98441	59
0.22	0.24430	1072	0.72	0.69143	667	1.22	0.91553	252	1.72	0.98500	58
0.23	0.25502	1068	0.73	0.69810	658	1.23	0.91805	246	1.73	0.98558	55
0.24	0.26570	1063	0.74	0.70468	648	1.24	0.92051	239	1.74	0.98613	54
0.25	0.27633	1057	0.75	0.71116	638	1.25	0.92290	234	1.75	0.98667	52
0.26	0.28690	1052	0.76	0.71754	628	1.26	0.92524	227	1.76	0.98719	50
0.27	0.29742	1046	0.77	0.72382	619	1.27	0.92751	222	1.77	0.98769	48
0.28	0.30788	1040	0.78	0.73001	609	1.28	0.92973	217	1.78	0.98817	47
0.29	0.31828	1035	0.79	0.73610	600	1.29	0.93190	211	1.79	0.98864	45
0.30	0.32863	1028	0.80	0.74210	590	1.30	0.93401	205	1.80	0.98909	43
0.31	0.33891	1022	0.81	0.74800	581	1.31	0.93606	201	1.81	0.98952	42
0.32	0.34913	1015	0.82	0.75381	571	1.32	0.93807	195	1.82	0.98994	41
0.33	0.35928	1008	0.83	0.75952	562	1.33	0.94002	189	1.83	0.99035	39
0.34	0.36936	1002	0.84	0.76514	553	1.34	0.94191	185	1.84	0.99074	37
0.35	0.37938	995	0.85	0.77067	543	1.35	0.94376	180	1.85	0.99111	36
0.36	0.38933	988	0.86	0.77610	534	1.36	0.94556	175	1.86	0.99147	35
0.37	0.39921	980	0.87	0.78144	525	1.37	0.94731	171	1.87	0.99182	34
0.38	0.40901	973	0.88	0.78669	515	1.38	0.94902	165	1.88	0.99216	32
0.39	0.41874	965	0.89	0.79184	507	1.39	0.95067	162	1.89	0.99248	31
0.40	0.42839	958	0.90	0.79691	497	1.40	0.95229	156	1.90	0.99279	30
0.41	0.43797	950	0.91	0.80188	489	1.41	0.95385	153	1.91	0.99309	29
0.42	0.44747	942	0.92	0.80677	479	1.42	0.95538	148	1.92	0.99338	28
0.43	0.45689	934	0.93	0.81156	471	1.43	0.95686	144	1.93	0.99366	26
0.44	0.46623	925	0.94	0.81627	462	1.44	0.95830	140	1.94	0.99392	26
0.45	0.47548	918	0.95	0.82089	453	1.45	0.95970	135	1.95	0.99418	25
0.46	0.48466	909	0.96	0.82542	445	1.46	0.96105	132	1.96	0.99443	23
0.47	0.49375	900	0.97	0.82987	436	1.47	0.96237	128	1.97	0.99466	23
0.48	0.50275	892	0.98	0.83423	428	1.48	0.96365	125	1.98	0.99489	22
0.49	0.51167	883	0.99	0.83851	419	1.49	0.96490	121	1.99	0.99511	21
0.50	0.52050		1.00	0.84270		1.50	0.96611		2.00	0.99532	

Tafel XV.

vergl. pag. 324.

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
0.01	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
0.02	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008
0.03	0.0009	0.0010	0.0010	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0014	0.0014	0.0015
0.04	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019	0.0020	0.0021	0.0022	0.0023	0.0024
0.05	0.0025	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0034	0.0035
0.06	0.0036	0.0037	0.0038	0.0040	0.0041	0.0042	0.0044	0.0045	0.0046	0.0048
0.07	0.0049	0.0050	0.0052	0.0053	0.0055	0.0056	0.0058	0.0059	0.0061	0.0062
0.08	0.0064	0.0066	0.0067	0.0069	0.0071	0.0072	0.0074	0.0076	0.0077	0.0079
0.09	0.0081	0.0083	0.0085	0.0086	0.0088	0.0090	0.0092	0.0094	0.0096	0.0098
0.10	0.0100	0.0102	0.0104	0.0106	0.0108	0.0110	0.0112	0.0114	0.0117	0.0119
0.11	0.0121	0.0123	0.0125	0.0128	0.0130	0.0132	0.0135	0.0137	0.0139	0.0142
0.12	0.0144	0.0146	0.0149	0.0151	0.0154	0.0156	0.0159	0.0161	0.0164	0.0166
0.13	0.0169	0.0172	0.0174	0.0177	0.0180	0.0182	0.0185	0.0188	0.0190	0.0193
0.14	0.0196	0.0199	0.0202	0.0204	0.0207	0.0210	0.0213	0.0216	0.0219	0.0222
0.15	0.0225	0.0228	0.0231	0.0234	0.0237	0.0240	0.0243	0.0246	0.0250	0.0253
0.16	0.0256	0.0259	0.0262	0.0266	0.0269	0.0272	0.0276	0.0279	0.0282	0.0286
0.17	0.0289	0.0292	0.0296	0.0299	0.0303	0.0306	0.0310	0.0313	0.0317	0.0320
0.18	0.0324	0.0328	0.0331	0.0335	0.0339	0.0342	0.0346	0.0350	0.0353	0.0357
0.19	0.0361	0.0365	0.0369	0.0372	0.0376	0.0380	0.0384	0.0388	0.0392	0.0396
0.20	0.0400	0.0404	0.0408	0.0412	0.0416	0.0420	0.0424	0.0428	0.0433	0.0437
0.21	0.0441	0.0445	0.0449	0.0454	0.0458	0.0462	0.0467	0.0471	0.0475	0.0480
0.22	0.0484	0.0488	0.0493	0.0497	0.0502	0.0506	0.0511	0.0515	0.0520	0.0524
0.23	0.0529	0.0534	0.0538	0.0543	0.0548	0.0552	0.0557	0.0562	0.0566	0.0571
0.24	0.0576	0.0581	0.0586	0.0590	0.0595	0.0600	0.0605	0.0610	0.0615	0.0620
0.25	0.0625	0.0630	0.0635	0.0640	0.0645	0.0650	0.0655	0.0660	0.0666	0.0671
0.26	0.0676	0.0681	0.0686	0.0692	0.0697	0.0702	0.0708	0.0713	0.0718	0.0724
0.27	0.0729	0.0734	0.0740	0.0745	0.0751	0.0756	0.0762	0.0767	0.0773	0.0778
0.28	0.0784	0.0790	0.0795	0.0801	0.0807	0.0812	0.0818	0.0824	0.0829	0.0835
0.29	0.0841	0.0847	0.0853	0.0858	0.0864	0.0870	0.0876	0.0882	0.0888	0.0894
0.30	0.0900	0.0906	0.0912	0.0918	0.0924	0.0930	0.0936	0.0942	0.0949	0.0955
0.31	0.0961	0.0967	0.0973	0.0980	0.0986	0.0992	0.0999	0.1005	0.1011	0.1018
0.32	0.1024	0.1030	0.1037	0.1043	0.1050	0.1056	0.1063	0.1069	0.1076	0.1082
0.33	0.1089	0.1096	0.1102	0.1109	0.1116	0.1122	0.1129	0.1136	0.1142	0.1149
0.34	0.1156	0.1163	0.1170	0.1176	0.1183	0.1190	0.1197	0.1204	0.1211	0.1218
0.35	0.1225	0.1232	0.1239	0.1246	0.1253	0.1260	0.1267	0.1274	0.1282	0.1289
0.36	0.1296	0.1303	0.1310	0.1318	0.1325	0.1332	0.1340	0.1347	0.1354	0.1362
0.37	0.1369	0.1376	0.1384	0.1391	0.1399	0.1406	0.1414	0.1421	0.1429	0.1436
0.38	0.1444	0.1452	0.1459	0.1467	0.1475	0.1482	0.1490	0.1498	0.1505	0.1513
0.39	0.1521	0.1529	0.1537	0.1544	0.1552	0.1560	0.1568	0.1576	0.1584	0.1592
0.40	0.1600	0.1608	0.1616	0.1624	0.1632	0.1640	0.1648	0.1656	0.1665	0.1673
0.41	0.1681	0.1689	0.1697	0.1706	0.1714	0.1722	0.1731	0.1739	0.1747	0.1756
0.42	0.1764	0.1772	0.1781	0.1789	0.1798	0.1806	0.1815	0.1823	0.1832	0.1840
0.43	0.1849	0.1858	0.1866	0.1875	0.1884	0.1892	0.1901	0.1910	0.1918	0.1927
0.44	0.1936	0.1945	0.1954	0.1962	0.1971	0.1980	0.1989	0.1998	0.2007	0.2016
0.45	0.2025	0.2034	0.2043	0.2052	0.2061	0.2070	0.2079	0.2088	0.2098	0.2107
0.46	0.2116	0.2125	0.2134	0.2144	0.2153	0.2162	0.2172	0.2181	0.2190	0.2200
0.47	0.2209	0.2218	0.2228	0.2237	0.2247	0.2256	0.2266	0.2275	0.2285	0.2294
0.48	0.2304	0.2314	0.2323	0.2333	0.2343	0.2352	0.2362	0.2372	0.2381	0.2391
0.49	0.2401	0.2411	0.2421	0.2430	0.2440	0.2450	0.2460	0.2470	0.2480	0.2490
0.50	0.2500	0.2510	0.2520	0.2530	0.2540	0.2550	0.2560	0.2570	0.2581	0.2591
W	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. p.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
3	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0	3.3
4	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0	4.4
5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
6	0.0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0	6.6
7	0.0	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	4.9	5.6	6.3	7.0	7.7
8	0.0	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	4.8	5.6	6.4	7.2	8.0	8.8
9	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.4	6.3	7.2	8.1	9.0	9.9

Tafel XV.

W^2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	0.2500	0.2510	0.2520	0.2530	0.2540	0.2550	0.2560	0.2570	0.2581	0.2591
0.51	0.2601	0.2611	0.2621	0.2632	0.2642	0.2652	0.2663	0.2673	0.2683	0.2694
0.52	0.2704	0.2714	0.2725	0.2735	0.2746	0.2756	0.2767	0.2777	0.2788	0.2798
0.53	0.2809	0.2820	0.2830	0.2841	0.2852	0.2862	0.2873	0.2884	0.2894	0.2905
0.54	0.2916	0.2927	0.2938	0.2948	0.2959	0.2970	0.2981	0.2992	0.3003	0.3014
0.55	0.3025	0.3036	0.3047	0.3058	0.3069	0.3080	0.3091	0.3102	0.3114	0.3125
0.56	0.3136	0.3147	0.3158	0.3170	0.3181	0.3192	0.3204	0.3215	0.3226	0.3238
0.57	0.3249	0.3260	0.3272	0.3283	0.3295	0.3306	0.3318	0.3329	0.3341	0.3352
0.58	0.3364	0.3376	0.3387	0.3399	0.3411	0.3422	0.3434	0.3446	0.3457	0.3469
0.59	0.3481	0.3493	0.3505	0.3516	0.3528	0.3540	0.3552	0.3564	0.3576	0.3588
0.60	0.3600	0.3612	0.3624	0.3636	0.3648	0.3660	0.3672	0.3684	0.3697	0.3709
0.61	0.3721	0.3733	0.3745	0.3758	0.3770	0.3782	0.3795	0.3807	0.3819	0.3832
0.62	0.3844	0.3856	0.3869	0.3881	0.3894	0.3906	0.3919	0.3931	0.3944	0.3956
0.63	0.3969	0.3982	0.3994	0.4007	0.4020	0.4032	0.4045	0.4058	0.4070	0.4083
0.64	0.4096	0.4109	0.4122	0.4134	0.4147	0.4160	0.4173	0.4186	0.4199	0.4212
0.65	0.4225	0.4238	0.4251	0.4264	0.4277	0.4290	0.4303	0.4316	0.4330	0.4343
0.66	0.4356	0.4369	0.4382	0.4396	0.4409	0.4422	0.4436	0.4449	0.4462	0.4476
0.67	0.4489	0.4502	0.4516	0.4529	0.4543	0.4556	0.4570	0.4583	0.4597	0.4610
0.68	0.4624	0.4638	0.4651	0.4665	0.4679	0.4692	0.4706	0.4720	0.4733	0.4747
0.69	0.4761	0.4775	0.4789	0.4802	0.4816	0.4830	0.4844	0.4858	0.4872	0.4886
0.70	0.4900	0.4914	0.4928	0.4942	0.4956	0.4970	0.4984	0.4998	0.5013	0.5027
0.71	0.5041	0.5055	0.5069	0.5084	0.5098	0.5112	0.5127	0.5141	0.5155	0.5170
0.72	0.5184	0.5198	0.5213	0.5227	0.5242	0.5256	0.5271	0.5285	0.5300	0.5314
0.73	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	0.5446	0.5461
0.74	0.5476	0.5491	0.5506	0.5520	0.5535	0.5550	0.5565	0.5580	0.5595	0.5610
0.75	0.5625	0.5640	0.5655	0.5670	0.5685	0.5700	0.5715	0.5730	0.5746	0.5761
0.76	0.5776	0.5791	0.5806	0.5822	0.5837	0.5852	0.5868	0.5883	0.5898	0.5914
0.77	0.5929	0.5944	0.5960	0.5975	0.5991	0.6006	0.6022	0.6037	0.6053	0.6068
0.78	0.6084	0.6100	0.6115	0.6131	0.6147	0.6162	0.6178	0.6194	0.6209	0.6225
0.79	0.6241	0.6257	0.6273	0.6288	0.6304	0.6320	0.6336	0.6352	0.6368	0.6384
0.80	0.6400	0.6416	0.6432	0.6448	0.6464	0.6480	0.6496	0.6512	0.6529	0.6545
0.81	0.6561	0.6577	0.6593	0.6610	0.6626	0.6642	0.6659	0.6675	0.6691	0.6708
0.82	0.6724	0.6740	0.6757	0.6773	0.6790	0.6806	0.6823	0.6839	0.6856	0.6872
0.83	0.6889	0.6906	0.6922	0.6939	0.6956	0.6972	0.6989	0.7006	0.7022	0.7039
0.84	0.7056	0.7073	0.7090	0.7106	0.7123	0.7140	0.7157	0.7174	0.7191	0.7208
0.85	0.7225	0.7242	0.7259	0.7276	0.7293	0.7310	0.7327	0.7344	0.7362	0.7379
0.86	0.7396	0.7413	0.7430	0.7448	0.7465	0.7482	0.7500	0.7517	0.7534	0.7552
0.87	0.7569	0.7586	0.7604	0.7621	0.7639	0.7656	0.7674	0.7691	0.7709	0.7726
0.88	0.7744	0.7762	0.7779	0.7797	0.7815	0.7832	0.7850	0.7868	0.7885	0.7903
0.89	0.7921	0.7939	0.7957	0.7974	0.7992	0.8010	0.8028	0.8046	0.8064	0.8082
0.90	0.8100	0.8118	0.8136	0.8154	0.8172	0.8190	0.8208	0.8226	0.8245	0.8263
0.91	0.8281	0.8299	0.8317	0.8336	0.8354	0.8372	0.8391	0.8409	0.8427	0.8446
0.92	0.8464	0.8482	0.8501	0.8519	0.8538	0.8556	0.8575	0.8593	0.8612	0.8630
0.93	0.8649	0.8668	0.8686	0.8705	0.8724	0.8742	0.8761	0.8780	0.8798	0.8817
0.94	0.8836	0.8855	0.8874	0.8892	0.8911	0.8930	0.8949	0.8968	0.8987	0.9006
0.95	0.9025	0.9044	0.9063	0.9082	0.9101	0.9120	0.9139	0.9158	0.9178	0.9197
0.96	0.9216	0.9235	0.9254	0.9274	0.9293	0.9312	0.9332	0.9351	0.9370	0.9390
0.97	0.9409	0.9428	0.9448	0.9467	0.9487	0.9506	0.9526	0.9545	0.9565	0.9584
0.98	0.9604	0.9624	0.9643	0.9663	0.9683	0.9702	0.9722	0.9742	0.9761	0.9781
0.99	0.9801	0.9821	0.9841	0.9860	0.9880	0.9900	0.9920	0.9940	0.9960	0.9980
1.00	1.0000	1.0020	1.0040	1.0060	1.0080	1.0100	1.0120	1.0140	1.0161	1.0181
W^2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. p.

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1
2	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2
3	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3
4	4.0	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.0	8.4
5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5
6	6.0	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.0	12.6
7	7.0	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.0	14.7
8	8.0	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.0	16.8
9	9.0	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.0	18.9

Tafel XV.

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	1.0000	1.0020	1.0040	1.0060	1.0080	1.0100	1.0120	1.0140	1.0161	1.0181
1.01	1.0201	1.0221	1.0241	1.0262	1.0282	1.0302	1.0323	1.0343	1.0363	1.0384
1.02	1.0404	1.0424	1.0445	1.0465	1.0486	1.0506	1.0527	1.0547	1.0568	1.0588
1.03	1.0609	1.0630	1.0650	1.0671	1.0692	1.0712	1.0733	1.0754	1.0774	1.0795
1.04	1.0816	1.0837	1.0858	1.0878	1.0899	1.0920	1.0941	1.0962	1.0983	1.1004
1.05	1.1025	1.1046	1.1067	1.1088	1.1109	1.1130	1.1151	1.1172	1.1194	1.1215
1.06	1.1236	1.1257	1.1278	1.1300	1.1321	1.1342	1.1364	1.1385	1.1406	1.1428
1.07	1.1449	1.1470	1.1492	1.1513	1.1535	1.1556	1.1578	1.1599	1.1621	1.1642
1.08	1.1664	1.1686	1.1707	1.1729	1.1751	1.1772	1.1794	1.1816	1.1837	1.1859
1.09	1.1881	1.1903	1.1925	1.1946	1.1968	1.1990	1.2012	1.2034	1.2056	1.2078
1.10	1.2100	1.2122	1.2144	1.2166	1.2188	1.2210	1.2232	1.2254	1.2277	1.2299
1.11	1.2321	1.2343	1.2365	1.2388	1.2410	1.2432	1.2455	1.2477	1.2499	1.2522
1.12	1.2544	1.2566	1.2589	1.2611	1.2634	1.2656	1.2679	1.2701	1.2724	1.2746
1.13	1.2769	1.2792	1.2814	1.2837	1.2860	1.2882	1.2905	1.2928	1.2950	1.2973
1.14	1.2996	1.3019	1.3042	1.3064	1.3087	1.3110	1.3133	1.3156	1.3179	1.3202
1.15	1.3225	1.3248	1.3271	1.3294	1.3317	1.3340	1.3363	1.3386	1.3410	1.3433
1.16	1.3456	1.3479	1.3502	1.3526	1.3549	1.3572	1.3596	1.3619	1.3642	1.3666
1.17	1.3689	1.3712	1.3736	1.3759	1.3783	1.3806	1.3830	1.3853	1.3877	1.3900
1.18	1.3924	1.3948	1.3971	1.3995	1.4019	1.4042	1.4066	1.4090	1.4113	1.4137
1.19	1.4161	1.4185	1.4209	1.4232	1.4256	1.4280	1.4304	1.4328	1.4352	1.4376
1.20	1.4400	1.4424	1.4448	1.4472	1.4496	1.4520	1.4544	1.4568	1.4593	1.4617
1.21	1.4641	1.4665	1.4689	1.4714	1.4738	1.4762	1.4787	1.4811	1.4835	1.4860
1.22	1.4884	1.4908	1.4933	1.4957	1.4982	1.5006	1.5031	1.5055	1.5080	1.5104
1.23	1.5129	1.5154	1.5178	1.5203	1.5228	1.5252	1.5277	1.5302	1.5326	1.5351
1.24	1.5376	1.5401	1.5426	1.5450	1.5475	1.5500	1.5525	1.5550	1.5575	1.5600
1.25	1.5625	1.5650	1.5675	1.5700	1.5725	1.5750	1.5775	1.5800	1.5826	1.5851
1.26	1.5876	1.5901	1.5926	1.5952	1.5977	1.6002	1.6028	1.6053	1.6078	1.6104
1.27	1.6129	1.6154	1.6180	1.6205	1.6231	1.6256	1.6282	1.6307	1.6333	1.6358
1.28	1.6384	1.6410	1.6435	1.6461	1.6487	1.6512	1.6538	1.6564	1.6589	1.6615
1.29	1.6641	1.6667	1.6693	1.6718	1.6744	1.6770	1.6796	1.6822	1.6848	1.6874
1.30	1.6900	1.6926	1.6952	1.6978	1.7004	1.7030	1.7056	1.7082	1.7109	1.7135
1.31	1.7161	1.7187	1.7213	1.7240	1.7266	1.7292	1.7319	1.7345	1.7371	1.7398
1.32	1.7424	1.7450	1.7477	1.7503	1.7530	1.7556	1.7583	1.7609	1.7636	1.7662
1.33	1.7689	1.7716	1.7742	1.7769	1.7796	1.7822	1.7849	1.7876	1.7902	1.7929
1.34	1.7956	1.7983	1.8010	1.8036	1.8063	1.8090	1.8117	1.8144	1.8171	1.8198
1.35	1.8225	1.8252	1.8279	1.8306	1.8333	1.8360	1.8387	1.8414	1.8442	1.8469
1.36	1.8496	1.8523	1.8550	1.8578	1.8605	1.8632	1.8660	1.8687	1.8714	1.8742
1.37	1.8769	1.8796	1.8824	1.8851	1.8879	1.8906	1.8934	1.8961	1.8989	1.9016
1.38	1.9044	1.9072	1.9099	1.9127	1.9155	1.9182	1.9210	1.9238	1.9265	1.9293
1.39	1.9321	1.9349	1.9377	1.9404	1.9432	1.9460	1.9488	1.9516	1.9544	1.9572
1.40	1.9600	1.9628	1.9656	1.9684	1.9712	1.9740	1.9768	1.9796	1.9825	1.9853
1.41	1.9881	1.9909	1.9937	1.9966	1.9994	2.0022	2.0051	2.0079	2.0107	2.0136
1.42	2.0164	2.0192	2.0221	2.0249	2.0278	2.0306	2.0335	2.0363	2.0392	2.0420
1.43	2.0449	2.0478	2.0506	2.0535	2.0564	2.0592	2.0621	2.0650	2.0678	2.0707
1.44	2.0736	2.0765	2.0794	2.0822	2.0851	2.0880	2.0909	2.0938	2.0967	2.0996
1.45	2.1025	2.1054	2.1083	2.1112	2.1141	2.1170	2.1199	2.1228	2.1258	2.1287
1.46	2.1316	2.1345	2.1374	2.1404	2.1433	2.1462	2.1492	2.1521	2.1550	2.1580
1.47	2.1609	2.1638	2.1668	2.1697	2.1727	2.1756	2.1786	2.1815	2.1845	2.1874
1.48	2.1904	2.1934	2.1963	2.1993	2.2023	2.2052	2.2082	2.2112	2.2141	2.2171
1.49	2.2201	2.2231	2.2261	2.2290	2.2320	2.2350	2.2380	2.2410	2.2440	2.2470
1.50	2.2500	2.2530	2.2560	2.2590	2.2620	2.2650	2.2680	2.2710	2.2741	2.2771
W	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. p.

	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1
2	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2
3	6.0	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.0	9.3
4	8.0	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.0	12.4
5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5
6	12.0	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.0	18.6
7	14.0	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.0	21.7
8	16.0	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.0	24.8
9	18.0	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.0	27.9

Tafel XV.

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.50	2.2500	2.2530	2.2560	2.2590	2.2620	2.2650	2.2680	2.2710	2.2741	2.2771
1.51	2.2801	2.2831	2.2861	2.2892	2.2922	2.2952	2.2983	2.3013	2.3043	2.3074
1.52	2.3104	2.3134	2.3165	2.3195	2.3226	2.3256	2.3287	2.3317	2.3348	2.3378
1.53	2.3409	2.3440	2.3470	2.3501	2.3532	2.3562	2.3593	2.3624	2.3654	2.3685
1.54	2.3716	2.3747	2.3778	2.3808	2.3839	2.3870	2.3901	2.3932	2.3963	2.3994
1.55	2.4025	2.4056	2.4087	2.4118	2.4149	2.4180	2.4211	2.4242	2.4274	2.4305
1.56	2.4336	2.4367	2.4398	2.4430	2.4461	2.4492	2.4524	2.4555	2.4586	2.4618
1.57	2.4649	2.4680	2.4712	2.4743	2.4775	2.4806	2.4838	2.4869	2.4901	2.4932
1.58	2.4964	2.4996	2.5027	2.5059	2.5091	2.5122	2.5154	2.5186	2.5217	2.5249
1.59	2.5281	2.5313	2.5345	2.5376	2.5408	2.5440	2.5472	2.5504	2.5536	2.5568
1.60	2.5600	2.5632	2.5664	2.5696	2.5728	2.5760	2.5792	2.5824	2.5857	2.5889
1.61	2.5921	2.5953	2.5985	2.6018	2.6050	2.6082	2.6115	2.6147	2.6179	2.6212
1.62	2.6244	2.6276	2.6309	2.6341	2.6374	2.6406	2.6439	2.6471	2.6504	2.6536
1.63	2.6569	2.6602	2.6634	2.6667	2.6700	2.6732	2.6765	2.6798	2.6830	2.6863
1.64	2.6896	2.6929	2.6962	2.6994	2.7027	2.7060	2.7093	2.7126	2.7159	2.7192
1.65	2.7225	2.7258	2.7291	2.7324	2.7357	2.7390	2.7423	2.7456	2.7490	2.7523
1.66	2.7556	2.7589	2.7622	2.7656	2.7689	2.7722	2.7756	2.7789	2.7822	2.7856
1.67	2.7889	2.7922	2.7956	2.7989	2.8023	2.8056	2.8090	2.8123	2.8157	2.8190
1.68	2.8224	2.8258	2.8291	2.8325	2.8359	2.8392	2.8426	2.8460	2.8493	2.8527
1.69	2.8561	2.8595	2.8629	2.8662	2.8696	2.8730	2.8764	2.8798	2.8832	2.8866
1.70	2.8900	2.8934	2.8968	2.9002	2.9036	2.9070	2.9104	2.9138	2.9173	2.9207
1.71	2.9241	2.9275	2.9309	2.9344	2.9378	2.9412	2.9447	2.9481	2.9515	2.9550
1.72	2.9584	2.9618	2.9653	2.9687	2.9722	2.9756	2.9791	2.9825	2.9860	2.9894
1.73	2.9929	2.9964	2.9998	3.0033	3.0068	3.0102	3.0137	3.0172	3.0206	3.0241
1.74	3.0276	3.0311	3.0346	3.0380	3.0415	3.0450	3.0485	3.0520	3.0555	3.0590
1.75	3.0625	3.0660	3.0695	3.0730	3.0765	3.0800	3.0835	3.0870	3.0906	3.0941
1.76	3.0976	3.1011	3.1046	3.1082	3.1117	3.1152	3.1188	3.1223	3.1258	3.1294
1.77	3.1329	3.1364	3.1400	3.1435	3.1471	3.1506	3.1542	3.1577	3.1613	3.1648
1.78	3.1684	3.1720	3.1755	3.1791	3.1827	3.1862	3.1898	3.1934	3.1969	3.2005
1.79	3.2041	3.2077	3.2113	3.2148	3.2184	3.2220	3.2256	3.2292	3.2328	3.2364
1.80	3.2400	3.2436	3.2472	3.2508	3.2544	3.2580	3.2616	3.2652	3.2689	3.2725
1.81	3.2761	3.2797	3.2833	3.2870	3.2906	3.2942	3.2979	3.3015	3.3051	3.3088
1.82	3.3124	3.3160	3.3197	3.3233	3.3270	3.3306	3.3343	3.3379	3.3416	3.3452
1.83	3.3489	3.3526	3.3562	3.3599	3.3636	3.3672	3.3709	3.3746	3.3782	3.3819
1.84	3.3856	3.3893	3.3930	3.3966	3.4003	3.4040	3.4077	3.4114	3.4151	3.4188
1.85	3.4225	3.4262	3.4299	3.4336	3.4373	3.4410	3.4447	3.4484	3.4522	3.4559
1.86	3.4596	3.4633	3.4670	3.4708	3.4745	3.4782	3.4820	3.4857	3.4894	3.4932
1.87	3.4969	3.5006	3.5044	3.5081	3.5119	3.5156	3.5194	3.5231	3.5269	3.5306
1.88	3.5344	3.5382	3.5419	3.5457	3.5495	3.5532	3.5570	3.5608	3.5645	3.5683
1.89	3.5721	3.5759	3.5797	3.5834	3.5872	3.5910	3.5948	3.5986	3.6024	3.6062
1.90	3.6100	3.6138	3.6176	3.6214	3.6252	3.6290	3.6328	3.6366	3.6405	3.6443
1.91	3.6481	3.6519	3.6557	3.6596	3.6634	3.6672	3.6711	3.6749	3.6787	3.6826
1.92	3.6864	3.6902	3.6941	3.6979	3.7018	3.7056	3.7095	3.7133	3.7172	3.7210
1.93	3.7249	3.7288	3.7326	3.7365	3.7404	3.7442	3.7481	3.7520	3.7558	3.7597
1.94	3.7636	3.7675	3.7714	3.7752	3.7791	3.7830	3.7869	3.7908	3.7947	3.7986
1.95	3.8025	3.8064	3.8103	3.8142	3.8181	3.8220	3.8259	3.8298	3.8338	3.8377
1.96	3.8416	3.8455	3.8494	3.8534	3.8573	3.8612	3.8652	3.8691	3.8730	3.8770
1.97	3.8809	3.8848	3.8888	3.8927	3.8967	3.9006	3.9046	3.9085	3.9125	3.9164
1.98	3.9204	3.9244	3.9283	3.9323	3.9363	3.9402	3.9442	3.9482	3.9521	3.9561
1.99	3.9601	3.9641	3.9681	3.9720	3.9760	3.9800	3.9840	3.9880	3.9920	3.9960
2.00	4.0000	4.0040	4.0080	4.0120	4.0160	4.0200	4.0240	4.0280	4.0321	4.0361
W	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. p.

	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
1	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1
2	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.2
3	9.0	9.3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0	12.3
4	12.0	12.4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.0	16.4
5	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0	20.5
6	18.0	18.6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.0	24.6
7	21.0	21.7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.0	28.7
8	24.0	24.8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.0	32.8
9	27.0	27.9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.0	36.9

Tafel XVI.

vergl. pag. 404.

θ	$\log E_2'$	Diff	$\log E_1'$	Diff.	E_0'	Diff.	$\log E_4'$	Diff.
0.400	9,,81 869	+ 61	9,,93 107	− 8	+ 1.56 086	+ 122	9.38 847	− 26
0.399	9,,81 930	+ 60	9,,93 099	− 8	+ 1.56 208	+ 122	9.38 821	− 26
0.398	9,,81 990	+ 60	9,,93 091	− 8	+ 1.56 330	+ 122	9.38 795	− 26
0.397	9,,82 050	+ 60	9,,93 083	− 8	+ 1.56 452	+ 121	9.38 769	− 26
0.396	9,,82 110	+ 60	9,,93 075	− 8	+ 1.56 573	+ 122	9.38 743	− 26
0.395	9,,82 170	+ 60	9,,93 067	− 8	+ 1.56 695	+ 121	9.38 717	− 26
0.394	9,,82 230	+ 59	9,,93 059	− 8	+ 1.56 816	+ 122	9.38 691	− 25
0.393	9,,82 289	+ 60	9,,93 051	− 8	+ 1.56 938	+ 121	9.38 666	− 26
0.392	9,,82 349	+ 59	9,,93 043	− 8	+ 1.57 059	+ 121	9.38 640	− 26
0.391	9,,82 408	+ 60	9,,93 035	− 8	+ 1.57 180	+ 122	9.38 614	− 26
0.390	9,,82 468	+ 59	9,,93 027	− 7	+ 1.57 302	+ 121	9.38 588	− 26
0.389	9,,82 527	+ 59	9,,93 020	− 8	+ 1.57 423	+ 121	9.38 562	− 26
0.388	9,,82 586	+ 59	9,,93 012	− 8	+ 1.57 544	+ 121	9.38 536	− 25
0.387	9,,82 645	+ 59	9,,93 004	− 8	+ 1.57 665	+ 121	9.38 511	− 26
0.386	9,,82 704	+ 59	9,,92 996	− 8	+ 1.57 786	+ 121	9.38 485	− 26
0.385	9,,82 763	+ 59	9,,92 988	− 8	+ 1.57 907	+ 120	9.38 459	− 25
0.384	9,,82 822	+ 58	9,,92 980	− 8	+ 1.58 027	+ 121	9.38 434	− 26
0.383	9,,82 880	+ 59	9,,92 972	− 8	+ 1.58 148	+ 121	9.38 408	− 26
0.382	9,,82 939	+ 58	9,,92 964	− 7	+ 1.58 269	+ 120	9.38 382	− 25
0.381	9,,82 997	+ 59	9,,92 957	− 8	+ 1.58 389	+ 121	9.38 357	− 26
0.380	9,,83 056	+ 58	9,,92 949	− 8	+ 1.58 510	+ 120	9.38 331	− 25
0.379	9,,83 114	+ 58	9,,92 941	− 8	+ 1.58 630	+ 120	9.38 306	− 26
0.378	9,,83 172	+ 58	9,,92 933	− 8	+ 1.58 750	+ 120	9.38 280	− 25
0.377	9,,83 230	+ 58	9,,92 925	− 8	+ 1.58 870	+ 121	9.38 255	− 26
0.376	9,,83 288	+ 58	9,,92 917	− 7	+ 1.58 991	+ 120	9.38 229	− 25
0.375	9,,83 346	+ 58	9,,92 910	− 8	+ 1.59 111	+ 120	9.38 204	− 25
0.374	9,,83 404	+ 57	9,,92 902	− 8	+ 1.59 231	+ 120	9.38 179	− 26
0.373	9,,83 461	+ 58	9,,92 894	− 8	+ 1.59 351	+ 120	9.38 153	− 25
0.372	9,,83 519	+ 57	9,,92 886	− 8	+ 1.59 471	+ 119	9.38 128	− 25
0.371	9,,83 576	+ 57	9,,92 878	− 7	+ 1.59 590	+ 120	9.38 103	− 26
0.370	9,,83 633	+ 58	9,,92 871	− 8	+ 1.59 710	+ 120	9.38 077	− 25
0.369	9,,83 691	+ 57	9,,92 863	− 8	+ 1.59 830	+ 119	9.38 052	− 25
0.368	9,,83 748	+ 57	9,,92 855	− 8	+ 1.59 949	+ 120	9.38 027	− 25
0.367	9,,83 805	+ 57	9,,92 847	− 8	+ 1.60 069	+ 119	9.38 002	− 26
0.366	9,,83 862	+ 57	9,,92 839	− 7	+ 1.60 188	+ 120	9.37 976	− 25
0.365	9,,83 919	+ 56	9,,92 832	− 8	+ 1.60 308	+ 119	9.37 951	− 25
0.364	9,,83 975	+ 57	9,,92 824	− 8	+ 1.60 427	+ 119	9.37 926	− 25
0.363	9,,84 032	+ 57	9,,92 816	− 8	+ 1.60 546	+ 119	9.37 901	− 25
0.362	9,,84 089	+ 56	9,,92 808	− 7	+ 1.60 665	+ 120	9.37 876	− 25
0.361	9,,84 145	+ 56	9,,92 801	− 8	+ 1.60 785	+ 119	9.37 851	− 25
0.360	9,,84 201	+ 57	9,,92 793	− 8	+ 1.60 904	+ 119	9.37 826	− 25
0.359	9,,84 258	+ 56	9,,92 785	− 8	+ 1.61 023	+ 118	9.37 801	− 25
0.358	9,,84 314	+ 56	9,,92 777	− 7	+ 1.61 141	+ 119	9.37 776	− 25
0.357	9,,84 370	+ 56	9,,92 770	− 8	+ 1.61 260	+ 119	9.37 751	− 25
0.356	9,,84 426	+ 56	9,,92 762	− 8	+ 1.61 379	+ 119	9.37 726	− 25
0.355	9,,84 482	+ 56	9,,92 754	− 7	+ 1.61 498	+ 118	9.37 701	− 25
0.354	9,,84 538	+ 55	9,,92 747	− 8	+ 1.61 616	+ 119	9.37 676	− 25
0.353	9,,84 593	+ 56	9,,92 739	− 8	+ 1.61 735	+ 118	9.37 651	− 24
0.352	9,,84 649	+ 56	9,,92 731	− 7	+ 1.61 853	+ 119	9.37 627	− 25
0.351	9,,84 705	+ 55	9,,92 724	− 8	+ 1.61 972	+ 118	9.37 602	− 25
0.350	9,,84 760		9,,92 716		+ 1.62 090		9.37 577	

Tafel XVI.

θ	log E_2''	Diff.	log E_4''	Diff.	E_0''	Diff.	log E_4''	Diff.
— 0.350	9_n84 760		9_n92 716		+ 1.62 090		9.37 577	
		+ 55		— 8		+ 118		— 25
— 0.349	9_n84 815		9_n92 708		+ 1.62 208		9.37 552	
		+ 56		— 7		+ 118		— 24
— 0.348	9_n84 871		9_n92 701		+ 1.62 326		9.37 528	
		+ 55		— 8		+ 118		— 25
— 0.347	9_n84 926		9_n92 693		+ 1.62 444		9.37 503	
		+ 55		— 8		+ 119		— 25
— 0.346	9_n84 981		9_n92 685		+ 1.62 563		9.37 478	
		+ 55		— 7		+ 118		— 25
— 0.345	9_n85 036		9_n92 678		+ 1.62 681		9.37 453	
		+ 55		— 8		+ 117		— 24
— 0.344	9_n85 091		9_n92 670		+ 1.62 798		9.37 429	
		+ 54		— 8		+ 118		— 25
— 0.343	9_n85 145		9_n92 662		+ 1.62 916		9.37 404	
		+ 55		— 7		+ 118		— 24
— 0.342	9_n85 200		9_n92 655		+ 1.63 034		9.37 380	
		+ 55		— 8		+ 118		— 25
— 0.341	9_n85 255		9_n92 647		+ 1.63 152		9.37 355	
		+ 54		— 8		+ 117		— 24
— 0.340	9_n85 309		9_n92 639		+ 1.63 269		9.37 331	
		+ 55		— 7		+ 118		— 25
— 0.339	9_n85 364		9_n92 632		+ 1.63 387		9.37 306	
		+ 54		— 8		+ 117		— 24
— 0.338	9_n85 418		9_n92 624		+ 1.63 504		9.37 282	
		+ 54		— 8		+ 118		— 25
— 0.337	9_n85 472		9_n92 616		+ 1.63 622		9.37 257	
		+ 55		— 7		+ 117		— 24
— 0.336	9_n85 527		9_n92 609		+ 1.63 739		9.37 233	
		+ 54		— 8		+ 118		— 25
— 0.335	9_n85 581		9_n92 601		+ 1.63 857		9.37 208	
		+ 54		— 7		+ 117		— 24
— 0.334	9_n85 635		9_n92 594		+ 1.63 974		9.37 184	
		+ 54		— 8		+ 117		— 25
— 0.333	9_n85 689		9_n92 586		+ 1.64 091		9.37 159	
		+ 53		— 7		+ 117		— 24
— 0.332	9_n85 742		9_n92 579		+ 1.64 208		9.37 135	
		+ 54		— 8		+ 117		— 24
— 0.331	9_n85 796		9_n92 571		+ 1.64 325		9.37 111	
		+ 54		— 8		+ 117		— 25
— 0.330	9_n85 850		9_n92 563		+ 1.64 442		9.37 086	
		+ 53		— 7		+ 117		— 24
— 0.329	9_n85 903		9_n92 556		+ 1.64 559		9.37 062	
		+ 54		— 8		+ 117		— 24
— 0.328	9_n85 957		9_n92 548		+ 1.64 676		9.37 038	
		+ 53		— 7		+ 117		— 24
— 0.327	9_n86 010		9_n92 541		+ 1.64 793		9.37 014	
		+ 53		— 8		+ 116		— 25
— 0.326	9_n86 063		9_n92 533		+ 1.64 909		9.36 989	
		+ 54		— 7		+ 117		— 24
— 0.325	9_n86 117		9_n92 526		+ 1.65 026		9.36 965	
		+ 53		— 8		+ 116		— 24
— 0.324	9_n86 170		9_n92 518		+ 1.65 142		9.36 941	
		+ 53		— 7		+ 117		— 24
— 0.323	9_n86 223		9_n92 511		+ 1.65 259		9.36 917	
		+ 53		— 8		+ 116		— 24
— 0.322	9_n86 276		9_n92 503		+ 1.65 375		9.36 893	
		+ 53		— 8		+ 117		— 24
— 0.321	9_n86 329		9_n92 495		+ 1.65 492		9.36 869	
		+ 53		— 7		+ 116		— 24
— 0.320	9_n86 382		9_n92 488		+ 1.65 608		9.36 845	
		+ 52		— 8		+ 116		— 24
— 0.319	9_n86 434		9_n92 480		+ 1.65 724		9.36 821	
		+ 53		— 7		+ 117		— 24
— 0.318	9_n86 487		9_n92 473		+ 1.65 841		9.36 797	
		+ 52		— 8		+ 116		— 24
— 0.317	9_n86 539		9_n92 465		+ 1.65 957		9.36 773	
		+ 53		— 7		+ 116		— 24
— 0.316	9_n86 592		9_n92 458		+ 1.66 073		9.36 749	
		+ 52		— 8		+ 116		— 24
— 0.315	9_n86 644		9_n92 450		+ 1.66 189		9.36 725	
		+ 53		— 7		+ 116		— 24
— 0.314	9_n86 697		9_n92 443		+ 1.66 305		9.36 701	
		+ 52		— 8		+ 115		— 24
— 0.313	9_n86 749		9_n92 435		+ 1.66 420		9.36 677	
		+ 52		— 7		+ 116		— 24
— 0.312	9_n86 801		9_n92 428		+ 1.66 536		9.36 653	
		+ 52		— 8		+ 116		— 24
— 0.311	9_n86 853		9_n92 420		+ 1.66 652		9.36 629	
		+ 52		— 7		+ 116		— 24
— 0.310	9_n86 905		9_n92 413		+ 1.66 768		9.36 605	
		+ 52		— 7		+ 115		— 24
— 0.309	9_n86 957		9_n92 406		+ 1.66 883		9.36 581	
		+ 52		— 8		+ 116		— 23
— 0.308	9_n87 009		9_n92 398		+ 1.66 999		9.36 558	
		+ 51		— 7		+ 115		— 24
— 0.307	9_n87 060		9_n92 391		+ 1.67 114		9.36 534	
		+ 52		— 8		+ 116		— 24
— 0.306	9_n87 112		9_n92 383		+ 1.67 230		9.36 510	
		+ 52		— 7		+ 115		— 24
— 0.305	9_n87 164		9_n92 376		+ 1.67 345		9.36 486	
		+ 51		— 8		+ 115		— 23
— 0.304	9_n87 215		9_n92 368		+ 1.67 460		9.36 463	
		+ 51		— 7		+ 115		— 24
— 0.303	9_n87 266		9_n92 361		+ 1.67 575		9.36 439	
		+ 52		— 8		+ 116		— 24
— 0.302	9_n87 318		9_n92 353		+ 1.67 691		9.36 415	
		+ 51		— 7		+ 115		— 23
— 0.301	9_n87 369		9_n92 346		+ 1.67 806		9.36 392	
		+ 51		— 7		+ 115		— 24
— 0.300	9_n87 420		9_n92 339		+ 1.67 921		9.36 368	

Tafel XVI.

θ	log E_2''	Diff.	log E_4''	Diff.	E_6''	Diff	log E_4'	Diff.
0.300	9,,87 420		9,,92 339		+ 1.67 921		9.36 368	
		+ 51		− 8		+ 115		− 23
0.299	9,,87 471		9,,92 331		+ 1.68 036		9.36 345	
		+ 51		− 7		+ 115		− 24
0.298	9,,87 522		9,,92 324		+ 1.68 151		9.36 321	
		+ 51		− 8		+ 114		− 24
0.297	9,,87 573		9,,92 316		+ 1.68 265		9.36 297	
		+ 51		− 7		+ 115		− 23
0.296	9,,87 624		9,,92 309		+ 1.68 380		9.36 274	
		+ 51		− 7		+ 115		− 24
− 0.295	9,,87 675		9,,92 302		+ 1.68 495		9.36 250	
		+ 51		− 8		+ 115		− 23
0.294	9,,87 726		9,,92 294		+ 1.68 610		9.36 227	
		+ 50		− 7		+ 114		− 24
− 0.293	9,,87 776		9,,92 287		+ 1.68 724		9.36 203	
		+ 51		− 8		+ 115		− 23
0.292	9,,87 827		9,,92 279		+ 1.68 839		9.36 180	
		+ 50		− 7		+ 114		− 23
− 0.291	9,,87 877		9,,92 272		+ 1.68 953		9.36 157	
		+ 51		− 7		+ 114		− 24
− 0.290	9,,87 928		9,,92 265		+ 1.69 067		9.36 133	
		+ 50		− 8		+ 115		− 23
− 0.289	9,,87 978		9,,92 257		+ 1.69 182		9.36 110	
		+ 50		− 7		+ 114		− 24
− 0.288	9,,88 028		9,,92 250		+ 1.69 296		9.36 086	
		+ 50		− 7		+ 114		− 23
− 0.287	9,,88 078		9,,92 243		+ 1.69 410		9.36 063	
		+ 50		− 8		+ 114		− 23
− 0.286	9,,88 128		9,,92 235		+ 1.69 524		9.36 040	
		+ 50		− 7		+ 115		− 24
− 0.285	9,,88 178		9,,92 228		+ 1.69 639		9.36 016	
		+ 50		− 7		+ 114		− 23
− 0.284	9,,88 228		9,,92 221		+ 1.69 753		9.35 993	
		+ 50		− 8		+ 114		− 23
− 0.283	9,,88 278		9,,92 213		+ 1.69 867		9.35 970	
		+ 50		− 7		+ 113		− 23
− 0.282	9,,88 328		9,,92 206		+ 1.69 980		9.35 947	
		+ 50		− 7		+ 114		− 24
− 0.281	9,,88 378		9,,92 199		+ 1.70 094		9.35 923	
		+ 49		− 8		+ 114		− 23
− 0.280	9,,88 427		9,,92 191		+ 1.70 208		9.35 900	
		+ 50		− 7		+ 114		− 23
− 0.279	9,,88 477		9,,92 184		+ 1.70 322		9.35 877	
		+ 49		− 7		+ 113		− 23
− 0.278	9,,88 526		9,,92 177		+ 1.70 435		9.35 854	
		+ 50		− 8		+ 114		− 23
− 0.277	9,,88 576		9,,92 169		+ 1.70 549		9.35 831	
		+ 49		− 7		+ 114		− 23
− 0.276	9,,88 625		9,,92 162		+ 1.70 663		9.35 808	
		+ 49		− 7		+ 113		− 23
− 0.275	9,,88 674		9,,92 155		+ 1.70 776		9.35 785	
		+ 50		− 7		+ 114		− 23
− 0.274	9,,88 724		9,,92 148		+ 1.70 890		9.35 762	
		+ 49		− 8		+ 113		− 23
− 0.273	9,,88 773		9,,92 140		+ 1.71 003		9.35 739	
		+ 49		− 7		+ 113		− 23
− 0.272	9,,88 822		9,,92 133		+ 1.71 116		9.35 716	
		+ 49		− 7		+ 113		− 23
− 0.271	9,,88 871		9,,92 126		+ 1.71 229		9.35 693	
		+ 49		− 8		+ 114		− 23
− 0.270	9,,88 920		9,,92 118		+ 1.71 343		9.35 670	
		+ 48		− 7		+ 113		− 23
− 0.269	9,,88 968		9,,92 111		+ 1.71 456		9.35 647	
		+ 49		− 7		+ 113		− 23
− 0.268	9,,89 017		9,,92 104		+ 1.71 569		9.35 624	
		+ 49		− 7		+ 113		− 23
− 0.267	9,,89 066		9,,92 097		+ 1.71 682		9.35 601	
		+ 48		− 8		+ 113		− 23
− 0.266	9,,89 114		9,,92 089		+ 1.71 795		9.35 578	
		+ 49		− 7		+ 113		− 23
− 0.265	9,,89 163		9,,92 082		+ 1.71 908		9.35 555	
		+ 48		− 7		+ 112		− 23
− 0.264	9,,89 211		9,,92 075		+ 1.72 020		9.35 532	
		+ 49		− 7		+ 113		− 23
− 0.263	9,,89 260		9,,92 068		+ 1.72 133		9.35 509	
		+ 48		− 8		+ 113		− 23
− 0.262	9,,89 308		9,,92 060		+ 1.72 246		9.35 486	
		+ 48		− 7		+ 113		− 22
− 0.261	9,,89 356		9,,92 053		+ 1.72 359		9.35 464	
		+ 49		− 7		+ 112		− 23
− 0.260	9,,89 405		9,,92 046		+ 1.72 471		9.35 441	
		+ 48		− 7		+ 113		− 23
− 0.259	9,,89 453		9,,92 039		+ 1.72 584		9.35 418	
		+ 48		− 7		+ 112		− 23
− 0.258	9,,89 501		9,,92 032		+ 1.72 696		9.35 395	
		+ 48		− 8		+ 113		− 22
− 0.257	9,,89 549		9,,92 024		+ 1.72 809		9.35 373	
		+ 48		− 7		+ 112		− 23
− 0.256	9,,89 597		9,,92 017		+ 1.72 921		9.35 350	
		+ 47		− 7		+ 112		− 23
− 0.255	9,,89 644		9,,92 010		+ 1.73 033		9.35 327	
		+ 48		− 7		+ 113		− 22
− 0.254	9,,89 692		9,,92 003		+ 1.73 146		9.35 305	
		+ 48		− 7		+ 112		− 23
− 0.253	9,,89 740		9,,91 996		+ 1.73 258		9.35 282	
		+ 48		− 8		+ 112		− 23
− 0.252	9,,89 788		9,,91 988		+ 1.73 370		9.35 259	
		+ 47		− 7		+ 112		− 22
− 0.251	9,,89 835		9,,91 981		+ 1.73 482		9.35 237	
		+ 48		− 7		+ 112		− 23
− 0.250	9,,89 883		9,,91 974		+ 1.73 594		9.35 214	

Tafel XVI.

θ	log E_2'	Diff.	log E_4'	Diff.	E_0'	Diff.	log E_4'	Diff.
— 0.250	9_n89 883		9_n91 974		+ 1.73 594		9.35 214	
		+ 47		— 7		+ 112		— 22
— 0.249	9_n89 930		9_n91 967		+ 1.73 706		9.35 192	
		+ 47		— 7		+ 112		— 23
— 0.248	9_n89 977		9_n91 960		+ 1.73 818		9.35 169	
		+ 48		— 8		+ 112		— 22
— 0.247	9_n90 025		9_n91 952		+ 1.73 930		9.35 147	
		+ 47		— 7		+ 111		— 23
— 0.246	9_n90 072		9_n91 945		+ 1.74 041		9.35 124	
		+ 47		— 7		+ 112		— 22
— 0.245	9_n90 119		9_n91 938		+ 1.74 153		9.35 102	
		+ 47		— 7		+ 112		— 23
— 0.244	9_n90 166		9_n91 931		+ 1.74 265		9.35 079	
		+ 47		— 7		+ 111		— 22
— 0.243	9_n90 213		9_n91 924		+ 1.74 376		9.35 057	
		+ 47		— 7		+ 112		— 23
— 0.242	9_n90 260		9_n91 917		+ 1.74 488		9.35 034	
		+ 47		— 7		+ 111		— 22
— 0.241	9_n90 307		9_n91 910		+ 1.74 599		9.35 012	
		+ 47		— 7		+ 112		— 23
— 0.240	9_n90 354		9_n91 903		+ 1.74 711		9.34 989	
		+ 46		— 8		+ 111		— 22
— 0.239	9_n90 400		9_n91 895		+ 1.74 822		9.34 967	
		+ 47		— 7		+ 112		— 22
— 0.238	9_n90 447		9_n91 888		+ 1.74 934		9.34 945	
		+ 47		— 7		+ 111		— 23
— 0.237	9_n90 494		9_n91 881		+ 1.75 045		9.34 922	
		+ 46		— 7		+ 111		— 22
— 0.236	9_n90 540		9_n91 874		+ 1.75 156		9.34 900	
		+ 47		— 7		+ 111		— 22
— 0.235	9_n90 587		9_n91 867		+ 1.75 267		9.34 878	
		+ 46		— 7		+ 111		— 22
— 0.234	9_n90 633		9_n91 860		+ 1.75 378		9.34 856	
		+ 47		— 7		+ 111		— 23
— 0.233	9_n90 680		9_n91 853		+ 1.75 489		9.34 833	
		+ 46		— 7		+ 111		— 22
— 0.232	9_n90 726		9_n91 846		+ 1.75 600		9.34 811	
		+ 46		— 7		+ 111		— 22
— 0.231	9_n90 772		9_n91 839		+ 1.75 711		9.34 789	
		+ 46		— 8		+ 111		— 22
— 0.230	9_n90 818		9_n91 831		+ 1.75 822		9.34 767	
		+ 46		— 7		+ 111		— 22
— 0.229	9_n90 864		9_n91 824		+ 1.75 933		9.34 745	
		+ 46		— 7		+ 111		— 23
— 0.228	9_n90 910		9_n91 817		+ 1.76 044		9.34 722	
		+ 46		— 7		+ 110		— 22
— 0.227	9_n90 956		9_n91 810		+ 1.76 154		9.34 700	
		+ 46		— 7		+ 111		— 22
— 0.226	9_n91 002		9_n91 803		+ 1.76 265		9.34 678	
		+ 46		— 7		+ 111		— 22
— 0.225	9_n91 048		9_n91 796		+ 1.76 376		9.34 656	
		+ 46		— 7		+ 110		— 22
— 0.224	9_n91 094		9_n91 789		+ 1.76 486		9.34 634	
		+ 45		— 7		+ 111		— 22
— 0.223	9_n91 139		9_n91 782		+ 1.76 597		9.34 612	
		+ 46		— 7		+ 110		— 22
— 0.222	9_n91 185		9_n91 775		+ 1.76 707		9.34 590	
		+ 46		— 7		+ 110		— 22
— 0.221	9_n91 231		9_n91 768		+ 1.76 817		9.34 568	
		+ 45		— 7		+ 111		— 22
— 0.220	9_n91 276		9_n91 761		+ 1.76 928		9.34 546	
		+ 46		— 7		+ 110		— 22
— 0.219	9_n91 322		9_n91 754		+ 1.77 038		9.34 524	
		+ 45		— 7		+ 110		— 22
— 0.218	9_n91 367		9_n91 747		+ 1.77 148		9.34 502	
		+ 45		— 7		+ 110		— 22
— 0.217	9_n91 412		9_n91 740		+ 1.77 258		9.34 480	
		+ 46		— 7		+ 110		— 22
— 0.216	9_n91 458		9_n91 733		+ 1.77 368		9.34 458	
		+ 45		— 7		+ 111		— 22
— 0.215	9_n91 503		9_n91 726		+ 1.77 479		9.34 436	
		+ 45		— 7		+ 109		— 22
— 0.214	9_n91 548		9_n91 719		+ 1.77 588		9.34 414	
		+ 45		— 7		+ 110		— 22
— 0.213	9_n91 593		9_n91 712		+ 1.77 698		9.34 392	
		+ 45		— 7		+ 110		— 21
— 0.212	9_n91 638		9_n91 705		+ 1.77 808		9.34 371	
		+ 45		— 7		+ 110		— 22
— 0.211	9_n91 683		9_n91 698		+ 1.77 918		9.34 349	
		+ 45		— 7		+ 110		— 22
— 0.210	9_n91 728		9_n91 691		+ 1.78 028		9.34 327	
		+ 45		— 7		+ 110		— 22
— 0.209	9_n91 773		9_n91 684		+ 1.78 138		9.34 305	
		+ 45		— 7		+ 109		— 22
— 0.208	9_n91 818		9_n91 677		+ 1.78 247		9.34 283	
		+ 44		— 7		+ 110		— 21
— 0.207	9_n91 862		9_n91 670		+ 1.78 357		9.34 262	
		+ 45		— 7		+ 109		— 22
— 0.206	9_n91 907		9_n91 663		+ 1.78 466		9.34 240	
		+ 44		— 7		+ 110		— 22
— 0.205	9_n91 951		9_n91 656		+ 1.78 576		9.34 218	
		+ 45		— 7		+ 109		— 22
— 0.204	9_n91 996		9_n91 649		+ 1.78 685		9.34 196	
		+ 44		— 7		+ 110		— 21
— 0.203	9_n92 040		9_n91 642		+ 1.78 795		9.34 175	
		+ 45		— 7		+ 109		— 22
— 0.202	9_n92 085		9_n91 635		+ 1.78 904		9.34 153	
		+ 44		— 7		+ 109		— 22
— 0.201	9_n92 129		9_n91 628		+ 1.79 013		9.34 131	
		+ 44		— 7		+ 110		— 21
— 0.200	9_n92 173		9_n91 621		+ 1.79 123		9.34 110	

Tafel XVI.

θ	log E_2'	Diff.	log E_4'	Diff.	E_6'	Diff.	log E_4'	Diff.
— 0.200	9,,92 173		9,,91 621		+ 1.79 123		9.34 110	
		+ 45		— 7		+ 109		— 22
— 0.199	9,,92 218		9,,91 614		+ 1.79 232		9.34 088	
		+ 44		— 7		+ 109		— 22
— 0.198	9,,92 262		9,,91 607		+ 1.79 341		9.34 066	
		+ 44		— 7		+ 109		— 21
0.197	9,,92 306		9,,91 600		+ 1.79 450		9.34 045	
		+ 44		— 7		+ 109		— 22
— 0.196	9,,92 350		9,,91 593		+ 1.79 559		9.34 023	
		+ 44		— 7		+ 109		— 21
— 0.195	9,,92 394		9,,91 586		+ 1.79 668		9.34 002	
		+ 44		— 7		+ 109		— 22
— 0.194	9,,92 438		9,,91 579		+ 1.79 777		9.33 980	
		+ 44		— 7		+ 109		— 21
— 0.193	9,,92 482		9,,91 572		+ 1.79 886		9.33 959	
		+ 44		— 6		+ 109		— 22
— 0.192	9,,92 526		9,,91 566		+ 1.79 995		9.33 937	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.191	9,,92 569		9,,91 559		+ 1.80 103		9.33 916	
		+ 44		— 7		+ 109		— 22
— 0.190	9,,92 613		9,,91 552		+ 1.80 212		9.33 894	
		+ 44		— 7		+ 109		— 21
— 0.189	9,,92 657		9,,91 545		+ 1.80 321		9.33 873	
		+ 43		— 7		+ 108		— 22
— 0.188	9,,92 700		9,,91 538		+ 1.80 429		9.33 851	
		+ 44		— 7		+ 109		— 21
— 0.187	9,,92 744		9,,91 531		+ 1.80 538		9.33 830	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.186	9,,92 787		9,,91 524		+ 1.80 646		9.33 809	
		+ 44		— 7		+ 109		— 22
— 0.185	9,,92 831		9,,91 517		+ 1.80 755		9.33 787	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.184	9,,92 874		9,,91 510		+ 1.80 863		9.33 766	
		+ 43		— 7		+ 109		— 21
— 0.183	9,,92 917		9,,91 503		+ 1.80 972		9.33 745	
		+ 43		— 6		+ 108		— 22
— 0.182	9,,92 960		9,,91 497		+ 1.81 080		9.33 723	
		+ 44		— 7		+ 108		— 21
— 0.181	9,,93 004		9,,91 490		+ 1.81 188		9.33 702	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.180	9,,93 047		9,,91 483		+ 1.81 296		9.33 681	
		+ 43		— 7		+ 109		— 22
— 0.179	9,,93 090		9,,91 476		+ 1.81 405		9.33 659	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.178	9,,93 133		9,,91 469		+ 1.81 513		9.33 638	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.177	9,,93 176		9,,91 462		+ 1.81 621		9.33 617	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.176	9,,93 219		9,,91 455		+ 1.81 729		9.33 596	
		+ 42		— 6		+ 108		— 21
0.175	9,,93 261		9,,91 449		+ 1.81 837		9.33 575	
		+ 43		— 7		+ 107		— 22
0.174	9,,93 304		9,,91 442		+ 1.81 944		9.33 553	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.173	9,,93 347		9,,91 435		+ 1.82 052		9.33 532	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
— 0.172	9,,93 390		9,,91 428		+ 1.82 160		9.33 511	
		+ 42		— 7		+ 108		— 21
— 0.171	9,,93 432		9,,91 421		+ 1.82 268		9.33 490	
		+ 43		— 7		+ 107		— 21
— 0.170	9,,93 475		9,,91 414		+ 1.82 375		9.33 469	
		+ 42		— 6		+ 108		— 21
0.169	9,,93 517		9,,91 408		+ 1.82 483		9.33 448	
		+ 43		— 7		+ 108		— 21
0.168	9,,93 560		9,,91 401		+ 1.82 591		9.33 427	
		+ 42		— 7		+ 107		— 21
— 0.167	9,,93 602		9,,91 394		+ 1.82 698		9.33 406	
		+ 42		— 7		+ 108		— 21
0.166	9,,93 644		9,,91 387		+ 1.82 806		9.33 385	
		+ 43		— 7		+ 107		— 22
0.165	9,,93 687		9,,91 380		+ 1.82 913		9.33 363	
		+ 42		— 6		+ 107		— 21
— 0.164	9,,93 729		9,,91 374		+ 1.83 020		9.33 342	
		+ 42		— 7		+ 108		— 21
— 0.163	9,,93 771		9,,91 367		+ 1.83 128		9.33 321	
		+ 42		— 7		+ 107		— 20
0.162	9,,93 813		9,,91 360		+ 1.83 235		9.33 301	
		+ 42		— 7		+ 107		— 21
0.161	9,,93 855		9,,91 353		+ 1.83 342		9.33 280	
		+ 42		— 7		+ 107		— 21
0.160	9,,93 897		9,,91 346		+ 1.83 449		9.33 259	
		+ 42		— 6		+ 108		— 21
0.159	9,,93 939		9,,91 340		+ 1.83 557		9.33 238	
		+ 42		— 7		+ 107		— 21
0.158	9,,93 981		9,,91 333		+ 1.83 664		9.33 217	
		+ 42		— 7		+ 107		— 21
— 0.157	9,,94 023		9,,91 326		+ 1.83 771		9.33 196	
		+ 42		— 7		+ 107		— 21
0.156	9,,94 065		9,,91 319		+ 1.83 878		9.33 175	
		+ 41		— 7		+ 107		— 21
0.155	9,,94 106		9,,91 312		+ 1.83 985		9.33 154	
		+ 42		— 6		+ 106		— 21
— 0.154	9,,94 148		9,,91 306		+ 1.84 091		9.33 133	
		+ 42		— 7		+ 107		— 21
0.153	9,,94 190		9,,91 299		+ 1.84 198		9.33 112	
		+ 41		— 7		+ 107		— 20
0.152	9,,94 231		9,,91 292		+ 1.84 305		9.33 092	
		+ 42		— 7		+ 107		— 21
— 0.151	9,,94 273		9,,91 285		+ 1.84 412		9.33 071	
		+ 41		— 6		+ 106		— 21
0.150	9,,94 314		9,,91 279		+ 1.84 518		9.33 050	

Tafel XVI.

θ	log E_2'	Diff.	log E_4'	Diff.	E_0'	Diff.	log E_4'	Diff.
— 0.150	9,,94 314	+ 42	9,,91 279	— 7	+ 1.84 518	+ 107	9.33 050	— 21
— 0.149	9,,94 356	+ 41	9,,91 272	— 7	+ 1.84 625	+ 107	9.33 029	— 20
— 0.148	9,,94 397	+ 41	9,,91 265	— 7	+ 1.84 732	+ 106	9.33 009	— 21
— 0.147	9,,94 438	+ 42	9,,91 258	— 6	+ 1.84 838	+ 107	9.32 988	— 21
— 0.146	9,,94 480	+ 41	9,,91 252	— 7	+ 1.84 945	+ 106	9.32 967	— 21
— 0.145	9,,94 521	+ 41	9,,91 245	— 7	+ 1.85 051	+ 106	9.32 946	— 20
— 0.144	9,,94 562	+ 41	9,,91 238	— 6	+ 1.85 157	+ 107	9.32 926	— 21
— 0.143	9,,94 603	+ 41	9,,91 232	— 7	+ 1.85 264	+ 106	9.32 905	— 21
— 0.142	9,,94 644	+ 41	9,,91 225	— 7	+ 1.85 370	+ 106	9.32 884	— 20
— 0.141	9,,94 685	+ 41	9,,91 218	— 7	+ 1.85 476	+ 106	9.32 864	— 21
— 0.140	9,,94 726	+ 41	9,,91 211	— 6	+ 1.85 582	+ 107	9.32 843	— 20
— 0.139	9,,94 767	+ 41	9,,91 205	— 7	+ 1.85 689	+ 106	9.32 823	— 21
— 0.138	9,,94 808	+ 41	9,,91 198	— 7	+ 1.85 795	+ 106	9.32 802	— 21
— 0.137	9,,94 849	+ 40	9,,91 191	— 6	+ 1.85 901	+ 106	9.32 781	— 20
— 0.136	9,,94 889	+ 41	9,,91 185	— 7	+ 1.86 007	+ 106	9.32 761	— 21
— 0.135	9,,94 930	+ 41	9,,91 178	— 7	+ 1.86 113	+ 106	9.32 740	— 20
— 0.134	9,,94 971	+ 40	9,,91 171	— 6	+ 1.86 219	+ 105	9.32 720	— 21
— 0.133	9,,95 011	+ 41	9,,91 165	— 7	+ 1.86 324	+ 106	9.32 699	— 20
— 0.132	9,,95 052	+ 40	9,,91 158	— 7	+ 1.86 430	+ 106	9.32 679	— 21
— 0.131	9,,95 092	+ 41	9,,91 151	— 6	+ 1.86 536	+ 106	9.32 658	— 20
— 0.130	9,,95 133	+ 40	9,,91 145	— 7	+ 1.86 642	+ 105	9.32 638	— 21
— 0.129	9,,95 173	+ 40	9,,91 138	— 7	+ 1.86 747	+ 106	9.32 617	— 20
— 0.128	9,,95 213	+ 41	9,,91 131	— 6	+ 1.86 853	+ 106	9.32 597	— 20
— 0.127	9,,95 254	+ 40	9,,91 125	— 7	+ 1.86 959	+ 105	9.32 577	— 21
— 0.126	9,,95 294	+ 40	9,,91 118	— 7	+ 1.87 064	+ 105	9.32 556	— 20
— 0.125	9,,95 334	+ 40	9,,91 111	— 6	+ 1.87 169	+ 106	9.32 536	— 21
— 0.124	9,,95 374	+ 40	9,,91 105	— 7	+ 1.87 275	+ 105	9.32 515	— 20
— 0.123	9,,95 414	+ 40	9,,91 098	— 7	+ 1.87 380	+ 106	9.32 495	— 20
— 0.122	9,,95 454	+ 40	9,,91 091	— 6	+ 1.87 486	+ 105	9.32 475	— 21
— 0.121	9,,95 494	+ 40	9,,91 085	— 7	+ 1.87 591	+ 105	9.32 454	— 20
— 0.120	9,,95 534	+ 40	9,,91 078	— 6	+ 1.87 696	+ 105	9.32 434	— 20
— 0.119	9,,95 574	+ 40	9,,91 072	— 7	+ 1.87 801	+ 105	9.32 414	— 20
— 0.118	9,,95 614	+ 40	9,,91 065	— 7	+ 1.87 906	+ 106	9.32 394	— 21
— 0.117	9,,95 654	+ 40	9,,91 058	— 6	+ 1.88 012	+ 105	9.32 373	— 20
— 0.116	9,,95 694	+ 39	9,,91 052	— 7	+ 1.88 117	+ 105	9.32 353	— 20
— 0.115	9,,95 733	+ 40	9,,91 045	— 7	+ 1.88 222	+ 105	9.32 333	— 20
— 0.114	9,,95 773	+ 40	9,,91 038	— 6	+ 1.88 327	+ 104	9.32 313	— 21
— 0.113	9,,95 813	+ 39	9,,91 032	— 7	+ 1.88 431	+ 105	9.32 292	— 20
— 0.112	9,,95 852	+ 40	9,,91 025	— 6	+ 1.88 536	+ 105	9.32 272	— 20
— 0.111	9,,95 892	+ 39	9,,91 019	— 7	+ 1.88 641	+ 105	9.32 252	— 20
— 0.110	9,,95 931	+ 39	9,,91 012	— 6	+ 1.88 746	+ 105	9.32 232	— 20
— 0.109	9,,95 970	+ 40	9,,91 006	— 7	+ 1.88 851	+ 104	9.32 212	— 20
— 0.108	9,,96 010	+ 39	9,,90 999	— 7	+ 1.88 955	+ 105	9.32 192	— 20
— 0.107	9,,96 049	+ 39	9,,90 992	— 6	+ 1.89 060	+ 104	9.32 172	— 20
— 0.106	9,,96 088	+ 40	9,,90 986	— 7	+ 1.89 164	+ 105	9.32 152	— 21
— 0.105	9,,96 128	+ 39	9,,90 979	— 6	+ 1.89 269	+ 104	9.32 131	— 20
— 0.104	9,,96 167	+ 39	9,,90 973	— 7	+ 1.89 373	+ 105	9.32 111	— 20
— 0.103	9,,96 206	+ 39	9,,90 966	— 6	+ 1.89 478	+ 104	9.32 091	— 20
— 0.102	9,,96 245	+ 39	9,,90 960	— 7	+ 1.89 582	+ 105	9.32 071	— 20
— 0.101	9,,96 284	+ 39	9,,90 953	— 7	+ 1.89 687	+ 104	9.32 051	— 20
— 0.100	9,,96 323		9,,90 946		+ 1.89 791		9.32 031	

Tafel XVI.

θ	log E_2'	Diff.	log E_1''	Diff.	E_0'	Diff.	log E_4'	Diff.
−0.100	$9_n96\ 323$	+ 39	$9_n90\ 946$	− 6	+ 1.89 791	+ 104	9.32 031	− 20
−0.099	$9_n96\ 362$	+ 39	$9_n90\ 940$	− 7	+ 1.89 895	+ 104	9.32 011	− 20
−0.098	$9_n96\ 401$	+ 39	$9_n90\ 933$	− 6	+ 1.89 999	+ 105	9.31 991	− 20
−0.097	$9_n96\ 440$	+ 38	$9_n90\ 927$	− 7	+ 1.90 104	+ 104	9.31 971	− 20
−0.096	$9_n96\ 478$	+ 39	$9_n90\ 920$	− 6	+ 1.90 208	+ 104	9.31 951	− 19
−0.095	$9_n96\ 517$	+ 39	$9_n90\ 914$	− 7	+ 1.90 312	+ 104	9.31 932	− 20
−0.094	$9_n96\ 556$	+ 38	$9_n90\ 907$	− 6	+ 1.90 416	+ 104	9.31 912	− 20
−0.093	$9_n96\ 594$	+ 39	$9_n90\ 901$	− 7	+ 1.90 520	+ 104	9.31 892	− 20
−0.092	$9_n96\ 633$	+ 39	$9_n90\ 894$	− 6	+ 1.90 624	+ 104	9.31 872	− 20
−0.091	$9_n96\ 672$	+ 38	$9_n90\ 888$	− 7	+ 1.90 728	+ 103	9.31 852	− 20
−0.090	$9_n96\ 710$	+ 39	$9_n90\ 881$	− 6	+ 1.90 831	+ 104	9.31 832	− 20
−0.089	$9_n96\ 749$	+ 38	$9_n90\ 875$	− 7	+ 1.90 935	+ 104	9.31 812	− 20
−0.088	$9_n96\ 787$	+ 38	$9_n90\ 868$	− 6	+ 1.91 039	+ 104	9.31 792	− 19
−0.087	$9_n96\ 825$	+ 39	$9_n90\ 862$	− 7	+ 1.91 143	+ 103	9.31 773	− 20
−0.086	$9_n96\ 864$	+ 38	$9_n90\ 855$	− 6	+ 1.91 246	+ 104	9.31 753	− 20
−0.085	$9_n96\ 902$	+ 38	$9_n90\ 849$	− 7	+ 1.91 350	+ 104	9.31 733	− 20
−0.084	$9_n96\ 940$	+ 38	$9_n90\ 842$	− 6	+ 1.91 454	+ 103	9.31 713	− 19
−0.083	$9_n96\ 978$	+ 39	$9_n90\ 836$	− 7	+ 1.91 557	+ 104	9.31 694	− 20
−0.082	$9_n97\ 017$	+ 38	$9_n90\ 829$	− 6	+ 1.91 661	+ 103	9.31 674	− 20
−0.081	$9_n97\ 055$	+ 38	$9_n90\ 823$	− 7	+ 1.91 764	+ 103	9.31 654	− 20
−0.080	$9_n97\ 093$	+ 38	$9_n90\ 816$	− 6	+ 1.91 867	+ 104	9.31 634	− 19
−0.079	$9_n97\ 131$	+ 38	$9_n90\ 810$	− 7	+ 1.91 971	+ 103	9.31 615	− 20
−0.078	$9_n97\ 169$	+ 38	$9_n90\ 803$	− 6	+ 1.92 074	+ 103	9.31 595	− 20
−0.077	$9_n97\ 207$	+ 37	$9_n90\ 797$	− 7	+ 1.92 177	+ 104	9.31 575	− 19
−0.076	$9_n97\ 244$	+ 38	$9_n90\ 790$	− 6	+ 1.92 281	+ 103	9.31 556	− 20
−0.075	$9_n97\ 282$	+ 38	$9_n90\ 784$	− 7	+ 1.92 384	+ 103	9.31 536	− 19
−0.074	$9_n97\ 320$	+ 38	$9_n90\ 777$	− 6	+ 1.92 487	+ 103	9.31 517	− 20
−0.073	$9_n97\ 358$	+ 38	$9_n90\ 771$	− 7	+ 1.92 590	+ 103	9.31 497	− 20
−0.072	$9_n97\ 396$	+ 37	$9_n90\ 764$	− 6	+ 1.92 693	+ 103	9.31 477	− 19
−0.071	$9_n97\ 433$	+ 38	$9_n90\ 758$	− 7	+ 1.92 796	+ 103	9.31 458	− 20
−0.070	$9_n97\ 471$	+ 37	$9_n90\ 751$	− 6	+ 1.92 899	+ 103	9.31 438	− 19
−0.069	$9_n97\ 508$	+ 38	$9_n90\ 745$	− 6	+ 1.93 002	+ 103	9.31 419	− 20
−0.068	$9_n97\ 546$	+ 37	$9_n90\ 739$	− 7	+ 1.93 105	+ 103	9.31 399	− 19
−0.067	$9_n97\ 583$	+ 38	$9_n90\ 732$	− 6	+ 1.93 208	+ 102	9.31 380	− 20
−0.066	$9_n97\ 621$	+ 37	$9_n90\ 726$	− 7	+ 1.93 310	+ 103	9.31 360	− 19
−0.065	$9_n97\ 658$	+ 38	$9_n90\ 719$	− 6	+ 1.93 413	+ 103	9.31 341	− 20
−0.064	$9_n97\ 696$	+ 37	$9_n90\ 713$	− 7	+ 1.93 516	+ 102	9.31 321	− 19
−0.063	$9_n97\ 733$	+ 37	$9_n90\ 706$	− 6	+ 1.93 618	+ 103	9.31 302	− 20
−0.062	$9_n97\ 770$	+ 37	$9_n90\ 700$	− 6	+ 1.93 721	+ 103	9.31 282	− 19
−0.061	$9_n97\ 807$	+ 38	$9_n90\ 694$	− 7	+ 1.93 824	+ 102	9.31 263	− 20
−0.060	$9_n97\ 845$	+ 37	$9_n90\ 687$	− 6	1.93 926	+ 103	9.31 243	− 19
−0.059	$9_n97\ 882$	+ 37	$9_n90\ 681$	− 7	+ 1.94 029	+ 102	9.31 224	− 19
−0.058	$9_n97\ 919$	+ 37	$9_n90\ 674$	− 6	+ 1.94 131	+ 102	9.31 205	− 20
−0.057	$9_n97\ 956$	+ 37	$9_n90\ 668$	− 6	+ 1.94 233	+ 103	9.31 185	− 19
−0.056	$9_n97\ 993$	+ 37	$9_n90\ 662$	− 7	+ 1.94 336	+ 102	9.31 166	− 20
−0.055	$9_n98\ 030$	+ 37	$9_n90\ 655$	− 6	+ 1.94 438	+ 102	9.31 146	− 19
−0.054	$9_n98\ 067$	+ 37	$9_n90\ 649$	− 7	+ 1.94 540	+ 103	9.31 127	− 19
−0.053	$9_n98\ 104$	+ 36	$9_n90\ 642$	− 6	+ 1.94 643	+ 102	9.31 108	− 19
−0.052	$9_n98\ 140$	+ 37	$9_n90\ 636$	− 6	+ 1.94 745	+ 102	9.31 089	− 20
−0.051	$9_n98\ 177$	+ 37	$9_n90\ 630$	− 7	+ 1.94 847	+ 102	9.31 069	− 19
−0.050	$9_n98\ 214$		$9_n90\ 623$		+ 1.94 949		9.31 050	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2'$	Diff	$\log E_4'$	Diff.	E_0'	Diff.	$\log E_4'$	Diff
— 0.050	9,,98 214		9,,90 623		+ 1.94 949		9.31 050	
		+ 37		— 6		+ 102		— 19
— 0.049	9,,98 251		9,,90 617		+ 1.95 051		9.31 031	
		+ 36		— 6		+ 102		— 20
— 0.048	9,,98 287		9,,90 611		+ 1.95 153		9.31 011	
		+ 37		— 7		+ 102		— 19
— 0.047	9,,98 324		9,,90 604		+ 1.95 255		9.30 992	
		+ 37		— 6		+ 102		— 19
— 0.046	9,,98 361		9,,90 598		+ 1.95 357		9.30 973	
		+ 36		— 6		+ 102		— 19
— 0.045	9,,98 397		9,,90 592		+ 1.95 459		9.30 954	
		+ 37		— 7		+ 102		— 19
— 0.044	9,,98 434		9,,90 585		+ 1.95 561		9.30 935	
		+ 36		— 6		+ 101		— 20
— 0.043	9,,98 470		9,,90 579		+ 1.95 662		9.30 915	
		+ 37		— 7		+ 102		— 19
— 0.042	9,,98 507		9,,90 572		+ 1.95 764		9.30 896	
		+ 36		— 6		+ 102		— 19
— 0.041	9,,98 543		9,,90 566		+ 1.95 866		9.30 877	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.040	9,,98 579		9,,90 560		+ 1.95 967		9.30 858	
		+ 37		— 7		+ 102		— 19
— 0.039	9,,98 616		9,,90 553		+ 1.96 069		9.30 839	
		+ 36		— 6		+ 102		— 19
— 0.038	9,,98 652		9,,90 547		+ 1.96 171		9.30 820	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.037	9,,98 688		9,,90 541		+ 1.96 272		9.30 801	
		+ 36		— 7		+ 102		— 20
— 0.036	9,,98 724		9,,90 534		+ 1.96 374		9.30 781	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.035	9,,98 760		9,,90 528		+ 1.96 475		9.30 762	
		+ 36		— 6		+ 102		— 19
— 0.034	9,,98 796		9,,90 522		+ 1.96 577		9.30 743	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.033	9,,98 832		9,,90 516		+ 1.96 678		9.30 724	
		+ 36		— 7		+ 101		— 19
— 0.032	9,,98 868		9,,90 509		+ 1.96 779		9.30 705	
		+ 36		— 6		+ 102		— 19
— 0.031	9,,98 904		9,,90 503		+ 1.96 881		9.30 686	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.030	9,,98 940		9,,90 497		+ 1.96 982		9.30 667	
		+ 36		— 7		+ 101		— 19
— 0.029	9,,98 976		9,,90 490		+ 1.97 083		9.30 648	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.028	9,,99 012		9,,90 484		+ 1.97 184		9.30 629	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.027	9,,99 048		9,,90 478		+ 1.97 285		9.30 610	
		+ 36		— 7		+ 101		— 19
— 0.026	9,,99 084		9,,90 471		+ 1.97 386		9.30 591	
		+ 35		— 6		+ 101		— 19
— 0.025	9,,99 119		9,,90 465		+ 1.97 487		9.30 572	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.024	9,,99 155		9,,90 459		+ 1.97 588		9.30 553	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.023	9,,99 191		9,,90 453		+ 1.97 689		9.30 534	
		+ 35		— 7		+ 101		— 18
— 0.022	9,,99 226		9,,90 446		+ 1.97 790		9.30 516	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.021	9,,99 262		9,,90 440		+ 1.97 891		9.30 497	
		+ 35		— 6		+ 101		— 19
— 0.020	9,,99 297		9,,90 434		+ 1.97 992		9.30 478	
		+ 36		— 7		+ 101		— 19
— 0.019	9,,99 333		9,,90 427		+ 1.98 093		9.30 459	
		+ 35		— 6		+ 100		— 19
— 0.018	9,,99 368		9,,90 421		+ 1.98 193		9.30 440	
		+ 36		— 6		+ 101		— 19
— 0.017	9,,99 404		9,,90 415		+ 1.98 294		9.30 421	
		+ 35		— 6		+ 101		— 19
— 0.016	9,,99 439		9,,90 409		+ 1.98 395		9.30 402	
		+ 36		— 7		+ 100		— 18
— 0.015	9,,99 475		9,,90 402		+ 1.98 495		9.30 384	
		+ 35		— 6		+ 101		— 19
— 0.014	9,,99 510		9,,90 396		+ 1.98 596		9.30 365	
		+ 35		— 6		+ 101		— 19
— 0.013	9,,99 545		9,,90 390		+ 1.98 697		9.30 346	
		+ 35		— 6		+ 100		— 19
— 0.012	9,,99 580		9,,90 384		+ 1.98 797		9.30 327	
		+ 36		— 7		+ 101		— 18
— 0.011	9,,99 616		9,,90 377		+ 1.98 898		9.30 309	
		+ 35		— 6		+ 100		— 19
— 0.010	9,,99 651		9,,90 371		+ 1.98 998		9.30 290	
		+ 35		— 6		+ 100		— 19
— 0.009	9,,99 686		9,,90 365		+ 1.99 098		9.30 271	
		+ 35		— 6		+ 101		— 19
— 0.008	9,,99 721		9,,90 359		+ 1.99 199		9.30 252	
		+ 35		— 6		+ 100		— 18
— 0.007	9,,99 756		9,,90 353		+ 1.99 299		9.30 234	
		+ 35		— 7		+ 100		— 19
— 0.006	9,,99 791		9,,90 346		+ 1.99 399		9.30 215	
		+ 35		— 6		+ 101		— 19
— 0.005	9,,99 826		9,,90 340		+ 1.99 500		9.30 196	
		+ 35		— 6		+ 100		— 18
— 0.004	9,,99 861		9,,90 334		+ 1.99 600		9.30 178	
		+ 35		— 6		+ 100		— 19
— 0.003	9,,99 896		9,,90 328		+ 1.99 700		9.30 159	
		+ 34		— 7		+ 100		— 19
— 0.002	9,,99 930		9,,90 321		+ 1.99 800		9.30 140	
		+ 35		— 6		+ 100		— 18
— 0.001	9,,99 965		9,,90 315		+ 1.99 900		9.30 122	
		+ 35		— 6		+ 100		— 19
0.000	0,,00 000		9,,90 309		+ 2.00 000		9.30 103	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
0.000	0,,00 000	+ 35	9,,90 309	— 6	+ 2.00 000	+ 100	9.30 103	— 19
+ 0.001	0,,00 035	+ 34	9,,90 303	— 6	+ 2.00 100	+ 100	9.30 084	— 18
+ 0.002	0,,00 069	+ 35	9,,90 297	— 7	+ 2.00 200	+ 100	9.30 066	— 19
+ 0.003	0,,00 104	+ 35	9,,90 290	— 6	+ 2.00 300	+ 100	9.30 047	— 18
+ 0.004	0,,00 139	+ 34	9,,90 284	— 6	+ 2.00 400	+ 100	9.30 029	— 19
+ 0.005	0,,00 173	+ 35	9,,90 278	— 6	+ 2.00 500	+ 99	9.30 010	— 18
+ 0.006	0,,00 208	+ 34	9,,90 272	— 6	+ 2.00 599	+ 100	9.29 992	— 19
+ 0.007	0,,00 242	+ 35	9,,90 266	— 7	+ 2.00 699	+ 100	9.29 973	— 18
+ 0.008	0,,00 277	+ 34	9,,90 259	— 6	+ 2.00 799	+ 99	9.29 955	— 19
+ 0.009	0,,00 311	+ 35	9,,90 253	— 6	+ 2.00 898	+ 100	9.29 936	— 18
+ 0.010	0,,00 346	+ 34	9,,90 247	— 6	+ 2.00 998	+ 100	9.29 918	— 19
+ 0.011	0,,00 380	+ 34	9,,90 241	— 6	+ 2.01 098	+ 99	9.29 899	— 18
+ 0.012	0,,00 414	+ 35	9,,90 235	— 6	+ 2.01 197	+ 100	9.29 881	— 19
+ 0.013	0,,00 449	+ 34	9,,90 229	— 7	+ 2.01 297	+ 99	9.29 862	— 18
+ 0.014	0,,00 483	+ 34	9,,90 222	— 6	+ 2.01 396	+ 100	9.29 844	— 19
+ 0.015	0,,00 517	+ 34	9,,90 216	— 6	+ 2.01 496	+ 99	9.29 825	— 18
+ 0.016	0,,00 551	+ 34	9,,90 210	— 6	+ 2.01 595	+ 99	9.29 807	— 19
+ 0.017	0,,00 585	+ 34	9,,90 204	— 6	+ 2.01 694	+ 100	9.29 788	— 18
+ 0.018	0,,00 619	+ 34	9,,90 198	— 6	+ 2.01 794	+ 99	9.29 770	— 18
+ 0.019	0,,00 653	+ 34	9,,90 192	— 6	+ 2.01 893	+ 99	9.29 752	— 19
+ 0.020	0,,00 687	+ 34	9,,90 186	— 7	+ 2.01 992	+ 99	9.29 733	— 18
+ 0.021	0,,00 721	+ 34	9,,90 179	— 6	+ 2.02 091	+ 99	9.29 715	— 18
+ 0.022	0,,00 755	+ 34	9,,90 173	— 6	+ 2.02 190	+ 100	9.29 697	— 19
+ 0.023	0,,00 789	+ 34	9,,90 167	— 6	+ 2.02 290	+ 99	9.29 678	— 18
+ 0.024	0,,00 823	+ 34	9,,90 161	— 6	+ 2.02 389	+ 99	9.29 660	— 18
+ 0.025	0,,00 857	+ 34	9,,90 155	— 6	+ 2.02 488	+ 99	9.29 642	— 19
+ 0.026	0,,00 891	+ 34	9,,90 149	— 6	+ 2.02 587	+ 99	9.29 623	— 18
+ 0.027	0,,00 925	+ 33	9,,90 143	— 6	+ 2.02 686	+ 99	9.29 605	— 18
+ 0.028	0,,00 958	+ 34	9,,90 137	— 7	+ 2.02 785	+ 98	9.29 587	— 18
+ 0.029	0,,00 992	+ 34	9,,90 130	— 6	+ 2.02 883	+ 99	9.29 569	— 19
+ 0.030	0,,01 026	+ 33	9,,90 124	— 6	+ 2.02 982	+ 99	9.29 550	— 18
+ 0.031	0,,01 059	+ 34	9,,90 118	— 6	+ 2.03 081	+ 99	9.29 532	— 18
+ 0.032	0,,01 093	+ 33	9,,90 112	— 6	+ 2.03 180	+ 99	9.29 514	— 18
+ 0.033	0,,01 126	+ 34	9,,90 106	— 6	+ 2.03 279	+ 98	9.29 496	— 19
+ 0.034	0,,01 160	+ 33	9,,90 100	— 6	+ 2.03 377	+ 99	9.29 477	— 18
+ 0.035	0,,01 193	+ 34	9,,90 094	— 6	+ 2.03 476	+ 98	9.29 459	— 18
+ 0.036	0,,01 227	+ 33	9,,90 088	— 6	+ 2.03 574	+ 99	9.29 441	— 18
+ 0.037	0,,01 260	+ 34	9,,90 082	— 6	+ 2.03 673	+ 99	9.29 423	— 18
+ 0.038	0,,01 294	+ 33	9,,90 076	— 7	+ 2.03 772	+ 98	9.29 405	— 18
+ 0.039	0,,01 327	+ 33	9,,90 069	— 6	+ 2.03 870	+ 99	9.29 387	— 19
+ 0.040	0,,01 360	+ 34	9,,90 063	— 6	+ 2.03 969	+ 98	9.29 368	— 18
+ 0.041	0,,01 394	+ 33	9,,90 057	— 6	+ 2.04 067	+ 98	9.29 350	— 18
+ 0.042	0,,01 427	+ 33	9,,90 051	— 6	+ 2.04 165	+ 99	9.29 332	— 18
+ 0.043	0,,01 460	+ 33	9,,90 045	— 6	+ 2.04 264	+ 98	9.29 314	— 18
+ 0.044	0,,01 493	+ 33	9,,90 039	— 6	+ 2.04 362	+ 98	9.29 296	— 18
+ 0.045	0,,01 526	+ 34	9,,90 033	— 6	+ 2.04 460	+ 99	9.29 278	— 18
+ 0.046	0,,01 560	+ 33	9,,90 027	— 6	+ 2.04 559	+ 98	9.29 260	— 18
+ 0.047	0,,01 593	+ 33	9,,90 021	— 6	+ 2.04 657	+ 98	9.29 242	— 18
+ 0.048	0,,01 626	+ 33	9,,90 015	— 6	+ 2.04 755	+ 98	9.29 224	— 18
+ 0.049	0,,01 659	+ 33	9,,90 009	— 6	+ 2.04 853	+ 98	9.29 206	— 18
+ 0.050	0,,01 692		9,,90 003		+ 2.04 951		9.29 188	

Tafel XVI.

θ	log E_2''	Diff.	log E_4'	Diff.	E_0'	Diff.	log E_4''	Diff.
+ 0.050	0$_n$01 692	+ 33	9$_n$90 003	− 6	+ 2.04 951	+ 98	9.29 188	− 18
+ 0.051	0$_n$01 725	+ 32	9$_n$89 997	− 6	+ 2.05 049	+ 98	9.29 170	− 18
+ 0.052	0$_n$01 757	+ 33	9$_n$89 991	− 6	+ 2.05 147	+ 98	9.29 152	− 18
+ 0.053	0$_n$01 790	+ 33	9$_n$89 985	− 6	+ 2.05 245	+ 98	9.29 134	− 18
+ 0.054	0$_n$01 823	+ 33	9$_n$89 979	− 6	+ 2.05 343	+ 98	9.29 116	− 18
+ 0.055	0$_n$01 856	+ 33	9$_n$89 973	− 6	+ 2.05 441	+ 98	9.29 098	− 18
+ 0.056	0$_n$01 889	+ 32	9$_n$89 967	− 6	+ 2.05 539	+ 98	9.29 080	− 18
+ 0.057	0$_n$01 921	+ 33	9$_n$89 961	− 6	+ 2.05 637	+ 97	9.29 062	− 18
+ 0.058	0$_n$01 954	+ 33	9$_n$89 955	− 7	+ 2.05 734	+ 98	9.29 044	− 18
+ 0.059	0$_n$01 987	+ 32	9$_n$89 948	− 6	+ 2.05 832	+ 98	9.29 026	− 18
+ 0.060	0$_n$02 019	+ 33	9$_n$89 942	− 6	+ 2.05 930	+ 97	9.29 008	− 17
+ 0.061	0$_n$02 052	+ 33	9$_n$89 936	− 6	+ 2.06 027	+ 98	9.28 991	− 18
+ 0.062	0$_n$02 085	+ 32	9$_n$89 930	− 6	+ 2.06 125	+ 98	9.28 973	− 18
+ 0.063	0$_n$02 117	+ 33	9$_n$89 924	− 6	+ 2.06 223	+ 97	9.28 955	− 18
+ 0.064	0$_n$02 150	+ 32	9$_n$89 918	− 6	+ 2.06 320	+ 98	9.28 937	− 18
+ 0.065	0$_n$02 182	+ 32	9$_n$89 912	− 6	+ 2.06 418	+ 97	9.28 919	− 18
+ 0.066	0$_n$02 214	+ 33	9$_n$89 906	− 6	+ 2.06 515	+ 98	9.28 901	− 17
+ 0.067	0$_n$02 247	+ 32	9$_n$89 900	− 6	+ 2.06 613	+ 97	9.28 884	− 18
+ 0.068	0$_n$02 279	+ 33	9$_n$89 894	− 6	+ 2.06 710	+ 98	9.28 866	− 18
+ 0.069	0$_n$02 312	+ 32	9$_n$89 888	− 6	+ 2.06 808	+ 97	9.28 848	− 18
+ 0.070	0$_n$02 344	+ 32	9$_n$89 882	− 6	+ 2.06 905	+ 97	9.28 830	− 18
+ 0.071	0$_n$02 376	+ 32	9$_n$89 876	− 6	+ 2.07 002	+ 97	9.28 812	− 17
+ 0.072	0$_n$02 408	+ 33	9$_n$89 870	− 5	+ 2.07 099	+ 98	9.28 795	− 18
+ 0.073	0$_n$02 441	+ 32	9$_n$89 865	− 6	+ 2.07 197	+ 97	9.28 777	− 18
+ 0.074	0$_n$02 473	+ 32	9$_n$89 859	− 6	+ 2.07 294	+ 97	9.28 759	− 18
+ 0.075	0$_n$02 505	+ 32	9$_n$89 853	− 6	+ 2.07 391	+ 97	9.28 741	− 17
+ 0.076	0$_n$02 537	+ 32	9$_n$89 847	− 6	+ 2.07 488	+ 97	9.28 724	− 18
+ 0.077	0$_n$02 569	+ 32	9$_n$89 841	− 6	+ 2.07 585	+ 97	9.28 706	− 18
+ 0.078	0$_n$02 601	+ 32	9$_n$89 835	− 6	+ 2.07 682	+ 97	9.28 688	− 17
+ 0.079	0$_n$02 633	+ 32	9$_n$89 829	− 6	+ 2.07 779	+ 97	9.28 671	− 18
+ 0.080	0$_n$02 665	+ 32	9$_n$89 823	− 6	+ 2.07 876	+ 97	9.28 653	− 18
+ 0.081	0$_n$02 697	+ 32	9$_n$89 817	− 6	+ 2.07 973	+ 97	9.28 635	− 17
+ 0.082	0$_n$02 729	+ 32	9$_n$89 811	− 6	+ 2.08 070	+ 97	9.28 618	− 18
+ 0.083	0$_n$02 761	+ 32	9$_n$89 805	− 6	+ 2.08 167	+ 97	9.28 600	− 17
+ 0.084	0$_n$02 793	+ 31	9$_n$89 799	− 6	+ 2.08 264	+ 97	9.28 583	− 18
+ 0.085	0$_n$02 824	+ 32	9$_n$89 793	− 6	+ 2.08 361	+ 96	9.28 565	− 18
+ 0.086	0$_n$02 856	+ 32	9$_n$89 787	− 6	+ 2.08 457	+ 97	9.28 547	− 17
+ 0.087	0$_n$02 888	+ 32	9$_n$89 781	− 6	+ 2.08 554	+ 97	9.28 530	− 18
+ 0.088	0$_n$02 920	+ 31	9$_n$89 775	− 6	+ 2.08 651	+ 96	9.28 512	− 17
+ 0.089	0$_n$02 951	+ 32	9$_n$89 769	− 6	+ 2.08 747	+ 97	9.28 495	− 18
+ 0.090	0$_n$02 983	+ 32	9$_n$89 763	− 6	+ 2.08 844	+ 97	9.28 477	− 17
+ 0.091	0$_n$03 015	+ 31	9$_n$89 757	− 6	+ 2.08 941	+ 96	9.28 460	− 18
+ 0.092	0$_n$03 046	+ 32	9$_n$89 751	− 5	+ 2.09 037	+ 97	9.28 442	− 18
+ 0.093	0$_n$03 078	+ 31	9$_n$89 746	− 6	+ 2.09 134	+ 96	9.28 424	− 17
+ 0.094	0$_n$03 109	+ 32	9$_n$89 740	− 6	+ 2.09 230	+ 96	9.28 407	− 18
+ 0.095	0$_n$03 141	+ 31	9$_n$89 734	− 6	+ 2.09 326	+ 97	9.28 389	− 17
+ 0.096	0$_n$03 172	+ 32	9$_n$89 728	− 6	+ 2.09 423	+ 96	9.28 372	− 17
+ 0.097	0$_n$03 204	+ 31	9$_n$89 722	− 6	+ 2.09 519	+ 97	9.28 355	− 18
+ 0.098	0$_n$03 235	+ 32	9$_n$89 716	− 6	+ 2.09 616	+ 96	9.28 337	− 17
+ 0.099	0$_n$03 267	+ 31	9$_n$89 710	− 6	+ 2.09 712	+ 96	9.28 320	− 18
+ 0.100	0$_n$03 298		9$_n$89 704		+ 2.09 808		9.28 302	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2'$	Diff.	$\log E_1'$	Diff.	E_0'	Diff.	$\log E_4'$	Diff.
+ 0.100	0,03 298		9,89 704		+ 2.09 808		9.28 302	
		+ 31		− 6		+ 96		− 17
+ 0.101	0,03 329		9,89 698		+ 2.09 904		9.28 285	
		+ 31		− 6		+ 97		− 18
+ 0.102	0,03 360		9,89 692		+ 2.10 001		9.28 267	
		+ 32		− 6		+ 96		− 17
+ 0.103	0,03 392		9,89 686		+ 2.10 097		9.28 250	
		+ 31		− 5		+ 96		− 17
+ 0.104	0,03 423		9,89 681		+ 2.10 193		9.28 233	
		+ 31		− 6		+ 96		− 18
+ 0.105	0,03 454		9,89 675		+ 2.10 289		9.28 215	
		+ 31		− 6		+ 96		− 17
+ 0.106	0,03 485		9,89 669		+ 2.10 385		9.28 198	
		+ 31		− 6		+ 96		− 18
+ 0.107	0,03 516		9,89 663		+ 2.10 481		9.28 180	
		+ 31		− 6		+ 96		− 17
+ 0.108	0,03 547		9,89 657		+ 2.10 577		9.28 163	
		+ 32		− 6		+ 96		− 17
+ 0.109	0,03 579		9,89 651		+ 2.10 673		9.28 146	
		+ 31		− 6		+ 96		− 18
+ 0.110	0,03 610		9,89 645		+ 2.10 769		9.28 128	
		+ 31		− 6		+ 96		− 17
+ 0.111	0,03 641		9,89 639		+ 2.10 865		9.28 111	
		+ 31		− 5		+ 95		− 17
+ 0.112	0,03 672		9,89 634		+ 2.10 960		9.28 094	
		+ 31		− 6		+ 96		− 18
+ 0.113	0,03 703		9,89 628		+ 2.11 056		9.28 076	
		+ 30		− 6		+ 96		− 17
+ 0.114	0,03 733		9,89 622		+ 2.11 152		9.28 059	
		+ 31		− 6		+ 96		− 17
+ 0.115	0,03 764		9,89 616		+ 2.11 248		9.28 042	
		+ 31		− 6		+ 95		− 17
+ 0.116	0,03 795		9,89 610		+ 2.11 343		9.28 025	
		+ 31		− 6		+ 96		− 18
+ 0.117	0,03 826		9,89 604		+ 2.11 439		9.28 007	
		+ 31		− 6		+ 96		− 17
+ 0.118	0,03 857		9,89 598		+ 2.11 535		9.27 990	
		+ 31		− 5		+ 95		− 17
+ 0.119	0,03 888		9,89 593		2.11 630		9.27 973	
		+ 30		− 6		+ 96		− 17
+ 0.120	0,03 918		9,89 587		+ 2.11 726		9.27 956	
		+ 31		− 6		+ 95		− 18
+ 0.121	0,03 949		9,89 581		+ 2.11 821		9.27 938	
		+ 31		− 6		+ 96		− 17
+ 0.122	0,03 980		9,89 575		+ 2.11 917		9.27 921	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.123	0,04 010		9,89 569		+ 2.12 012		9.27 904	
		+ 31		− 6		+ 96		− 17
+ 0.124	0,04 041		9,89 563		+ 2.12 108		9.27 887	
		+ 31		− 5		+ 95		− 17
+ 0.125	0,04 072		9,89 558		+ 2.12 203		9.27 870	
		+ 30		− 6		+ 96		− 17
+ 0.126	0,04 102		9,89 552		+ 2.12 299		9.27 853	
		+ 31		− 6		+ 95		− 18
+ 0.127	0,04 133		9,89 546		+ 2.12 394		9.27 835	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.128	0,04 163		9,89 540		+ 2.12 489		9.27 818	
		+ 31		− 6		+ 95		− 17
+ 0.129	0,04 194		9,89 534		+ 2.12 584		9.27 801	
		+ 30		− 6		+ 96		− 17
+ 0.130	0,04 224		9,89 528		+ 2.12 680		9.27 784	
		+ 30		− 5		+ 95		− 17
+ 0.131	0,04 254		9,89 523		+ 2.12 775		9.27 767	
		+ 31		− 6		+ 95		− 17
+ 0.132	0,04 285		9,89 517		+ 2.12 870		9.27 750	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.133	0,04 315		9,89 511		+ 2.12 965		9.27 733	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.134	0,04 345		9,89 505		+ 2.13 060		9.27 716	
		+ 31		− 6		+ 95		− 17
+ 0.135	0,04 376		9,89 499		+ 2.13 155		9.27 699	
		+ 30		− 5		+ 95		− 17
+ 0.136	0,04 406		9,89 494		+ 2.13 250		9.27 682	
		+ 30		− 6		+ 95		− 18
+ 0.137	0,04 436		9,89 488		+ 2.13 345		9.27 664	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.138	0,04 466		9,89 482		+ 2.13 440		9.27 647	
		+ 31		− 6		+ 95		− 17
+ 0.139	0,04 497		9,89 476		+ 2.13 535		9.27 630	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.140	0,04 527		9,89 470		+ 2.13 630		9.27 613	
		+ 30		− 5		+ 95		− 17
+ 0.141	0,04 557		9,89 465		+ 2.13 725		9.27 596	
		+ 30		− 6		+ 94		− 17
+ 0.142	0,04 587		9,89 459		+ 2.13 819		9.27 579	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.143	0,04 617		9,89 453		+ 2.13 914		9.27 562	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.144	0,04 647		9,89 447		+ 2.14 009		9.27 545	
		+ 30		− 5		+ 95		− 16
+ 0.145	0,04 677		9,89 442		+ 2.14 104		9.27 529	
		+ 30		− 6		+ 94		− 17
+ 0.146	0,04 707		9,89 436		+ 2.14 198		9.27 512	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.147	0,04 737		9,89 430		+ 2.14 293		9.27 495	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.148	0,04 767		9,89 424		+ 2.14 388		9.27 478	
		+ 30		− 5		+ 94		− 17
+ 0.149	0,04 797		9,89 419		+ 2.14 482		9.27 461	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
0.150	0,04 827		9,89 413		+ 2.14 577		9.27 444	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2'$	Diff.	$\log E_4'$	Diff.	E_6	Diff.	$\log E_4'$	Diff.
+ 0.150	0,,04 827		9,,89 413		+ 2.14 577		9.27 444	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.151	0,,04 856		9,,89 407		+ 2.14 671		9.27 427	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.152	0,,04 886		9,,89 401		+ 2.14 766		9.27 410	
		+ 30		− 5		+ 94		− 17
+ 0.153	0,,04 916		9,,89 396		+ 2.14 860		9.27 393	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.154	0,,04 946		9,,89 390		+ 2.14 955		9.27 376	
		+ 30		− 6		+ 94		− 17
+ 0.155	0,,04 976		9,,89 384		+ 2.15 049		9.27 359	
		+ 29		− 6		+ 94		− 16
+ 0.156	0,,05 005		9,,89 378		+ 2.15 143		9.27 343	
		+ 30		− 5		+ 95		− 17
+ 0.157	0,,05 035		9,,89 373		+ 2.15 238		9.27 326	
		+ 30		− 6		+ 94		− 17
+ 0.158	0,,05 065		9,,89 367		+ 2.15 332		9.27 309	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.159	0,,05 094		9,,89 361		+ 2.15 426		9.27 292	
		+ 30		− 6		+ 94		− 17
+ 0.160	0,,05 124		9,,89 355		+ 2.15 520		9.27 275	
		+ 29		− 5		+ 94		− 16
+ 0.161	0,,05 153		9,,89 350		+ 2.15 614		9.27 259	
		+ 30		− 6		+ 95		− 17
+ 0.162	0,,05 183		9,,89 344		+ 2.15 709		9.27 242	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.163	0,,05 212		9,,89 338		+ 2.15 803		9.27 225	
		+ 30		− 6		+ 94		− 17
+ 0.164	0,,05 242		9,,89 332		+ 2.15 897		9.27 208	
		+ 29		− 5		+ 94		− 17
+ 0.165	0,,05 271		9,,89 327		+ 2.15 991		9.27 191	
		+ 30		− 6		+ 94		− 16
+ 0.166	0,,05 301		9,,89 321		+ 2.16 085		9.27 175	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.167	0,,05 330		9,,89 315		+ 2.16 179		9.27 158	
		+ 29		− 5		+ 94		− 17
+ 0.168	0,,05 359		9,,89 310		+ 2.16 273		9.27 141	
		+ 30		− 6		+ 94		− 16
+ 0.169	0,,05 389		9,,89 304		+ 2.16 367		9.27 125	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.170	0,,05 418		9,,89 298		+ 2.16 461		9.27 108	
		+ 29		− 6		+ 93		− 17
+ 0.171	0,,05 447		9,,89 292		+ 2.16 554		9.27 091	
		+ 30		− 5		+ 94		− 17
+ 0.172	0,,05 477		9,,89 287		+ 2.16 648		9.27 074	
		+ 29		− 6		+ 94		− 16
+ 0.173	0,,05 506		9,,89 281		+ 2.16 742		9.27 058	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.174	0,,05 535		9,,89 275		+ 2.16 836		9.27 041	
		+ 29		− 5		+ 93		− 17
+ 0.175	0,,05 564		9,,89 270		+ 2.16 929		9.27 024	
		+ 29		− 6		+ 94		− 16
+ 0.176	0,,05 593		9,,89 264		+ 2.17 023		9.27 008	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.177	0,,05 622		9,,89 258		+ 2.17 117		9.26 991	
		+ 30		− 5		+ 93		− 17
+ 0.178	0,,05 652		9,,89 253		+ 2.17 210		9.26 974	
		+ 29		− 6		+ 94		− 16
+ 0.179	0,,05 681		9,,89 247		+ 2.17 304		9.26 958	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.180	0,,05 710		9,,89 241		+ 2.17 398		9.26 941	
		+ 29		− 5		+ 93		− 16
+ 0.181	0,,05 739		9,,89 236		+ 2.17 491		9.26 925	
		+ 29		− 6		+ 94		− 17
+ 0.182	0,,05 768		9,,89 230		+ 2.17 585		9.26 908	
		+ 29		− 6		+ 93		− 17
+ 0.183	0,,05 797		9,,89 224		+ 2.17 678		9.26 891	
		+ 29		− 5		+ 93		− 16
+ 0.184	0,,05 826		9,,89 219		+ 2.17 771		9.26 875	
		+ 28		− 6		+ 94		− 17
+ 0.185	0,,05 854		9,,89 213		+ 2.17 865		9.26 858	
		+ 29		− 6		+ 93		− 16
+ 0.186	0,,05 883		9,,89 207		+ 2.17 958		9.26 842	
		+ 29		− 5		+ 93		− 17
+ 0.187	0,,05 912		9,,89 202		+ 2.18 051		9.26 825	
		+ 29		− 6		+ 94		− 16
+ 0.188	0,,05 941		9,,89 196		+ 2.18 145		9.26 809	
		+ 29		− 6		+ 93		− 17
+ 0.189	0,,05 970		9,,89 190		+ 2.18 238		9.26 792	
		+ 29		− 5		+ 93		− 16
+ 0.190	0,,05 999		9,,89 185		+ 2.18 331		9.26 776	
		+ 28		− 6		+ 93		− 17
+ 0.191	0,,06 027		9,,89 179		+ 2.18 424		9.26 759	
		+ 29		− 6		+ 94		− 16
+ 0.192	0,,06 056		9,,89 173		+ 2.18 518		9.26 743	
		+ 29		− 5		+ 93		− 17
+ 0.193	0,,06 085		9,,89 168		+ 2.18 611		9.26 726	
		+ 28		− 6		+ 93		− 16
+ 0.194	0,,06 113		9,,89 162		+ 2.18 704		9.26 710	
		+ 29		− 6		+ 93		− 17
+ 0.195	0,,06 142		9,,89 156		+ 2.18 797		9.26 693	
		+ 29		− 5		+ 93		− 16
+ 0.196	0,,06 171		9,,89 151		+ 2.18 890		9.26 677	
		+ 28		− 6		+ 93		− 17
+ 0.197	0,,06 199		9,,89 145		+ 2.18 983		9.26 660	
		+ 29		− 6		+ 93		− 16
+ 0.198	0,,06 228		9,,89 139		+ 2.19 076		9.26 644	
		+ 28		− 5		+ 93		− 16
+ 0.199	0,,06 256		9,,89 134		+ 2.19 169		9.26 628	
		+ 29		− 6		+ 93		− 17
+ 0.200	0,,06 285		9,,89 128		+ 2.19 262		9.26 611	

Tafel XVI.

θ	log E_2''	Diff	log E_1'	Diff.	E_0''	Diff	log E_4'	Diff.
+ 0.200	0,,06 285	+ 28	9,,89 128	− 5	+ 2.19 262	+ 93	9.26 611	− 16
+ 0.201	0,,06 313	+ 29	9,,89 123	− 6	+ 2.19 355	+ 93	9.26 595	− 17
+ 0.202	0,,06 342	+ 28	9,,89 117	− 6	+ 2.19 448	+ 92	9.26 578	− 16
+ 0.203	0,,06 370	+ 29	9,,89 111	− 5	+ 2.19 540	+ 93	9.26 562	− 16
+ 0.204	0,,06 399	+ 28	9,,89 106	− 6	+ 2.19 633	+ 93	9.26 546	− 17
+ 0.205	0,,06 427	+ 28	9,,89 100	− 6	+ 2.19 726	+ 93	9.26 529	− 16
+ 0.206	0,,06 455	+ 29	9,,89 094	− 5	+ 2.19 819	+ 92	9.26 513	− 17
+ 0.207	0,,06 484	+ 28	9,,89 089	− 6	+ 2.19 911	+ 93	9.26 496	− 16
+ 0.208	0,,06 512	+ 28	9,,89 083	− 5	+ 2.20 004	+ 93	9.26 480	− 16
+ 0.209	0,,06 540	+ 29	9,,89 078	− 6	+ 2.20 097	+ 92	9.26 464	− 17
+ 0.210	0,,06 569	+ 28	9,,89 072	− 6	+ 2.20 189	+ 93	9.26 447	− 16
+ 0.211	0,,06 597	+ 28	9,,89 066	− 5	+ 2.20 282	+ 92	9.26 431	− 16
+ 0.212	0,,06 625	+ 28	9,,89 061	− 6	+ 2.20 374	+ 93	9.26 415	− 16
+ 0.213	0,,06 653	+ 28	9,,89 055	− 5	+ 2.20 467	+ 92	9.26 399	− 17
+ 0.214	0,,06 681	+ 28	9,,89 050	− 6	+ 2.20 559	+ 93	9.26 382	− 16
+ 0.215	0,,06 709	+ 29	9,,89 044	− 6	+ 2.20 652	+ 92	9.26 366	− 16
+ 0.216	0,,06 738	+ 28	9,,89 038	− 5	+ 2.20 744	+ 93	9.26 350	− 16
+ 0.217	0,,06 766	+ 28	9,,89 033	− 6	+ 2.20 837	+ 92	9.26 334	− 17
+ 0.218	0,,06 794	+ 28	9,,89 027	− 5	+ 2.20 929	+ 92	9.26 317	− 16
+ 0.219	0,,06 822	+ 28	9,,89 022	− 6	+ 2.21 021	+ 92	9.26 301	− 16
+ 0.220	0,,06 850	+ 28	9,,89 016	− 5	+ 2.21 113	+ 93	9.26 285	− 16
+ 0.221	0,,06 878	+ 28	9,,89 011	− 6	+ 2.21 206	+ 92	9.26 269	− 17
+ 0.222	0,,06 906	+ 28	9,,89 005	− 6	+ 2.21 298	+ 92	9.26 252	− 16
+ 0.223	0,,06 934	+ 27	9,,88 999	− 5	+ 2.21 390	+ 92	9.26 236	− 16
+ 0.224	0,,06 961	+ 28	9,,88 994	− 6	+ 2.21 482	+ 92	9.26 220	− 16
+ 0.225	0,,06 989	+ 28	9,,88 988	− 5	+ 2.21 574	+ 93	9.26 204	− 16
+ 0.226	0,,07 017	+ 28	9,,88 983	− 6	+ 2.21 667	+ 92	9.26 188	− 17
+ 0.227	0,,07 045	+ 28	9,,88 977	− 5	+ 2.21 759	+ 92	9.26 171	− 16
+ 0.228	0,,07 073	+ 28	9,,88 972	− 6	+ 2.21 851	+ 92	9.26 155	− 16
+ 0.229	0,,07 101	+ 27	9,,88 966	− 5	+ 2.21 943	+ 92	9.26 139	− 16
+ 0.230	0,,07 128	+ 28	9,,88 961	− 6	+ 2.22 035	+ 92	9.26 123	− 16
+ 0.231	0,,07 156	+ 28	9,,88 955	− 6	+ 2.22 127	+ 92	9.26 107	− 16
+ 0.232	0,,07 184	+ 27	9,,88 949	− 5	+ 2.22 219	+ 91	9.26 091	− 16
+ 0.233	0,,07 211	+ 28	9,,88 944	− 6	+ 2.22 310	+ 92	9.26 075	− 16
+ 0.234	0,,07 239	+ 28	9,,88 938	− 5	+ 2.22 402	+ 92	9.26 059	− 16
+ 0.235	0,,07 267	+ 27	9,,88 933	− 6	+ 2.22 494	+ 92	9.26 043	− 17
+ 0.236	0,,07 294	+ 28	9,,88 927	− 5	+ 2.22 586	+ 92	9.26 026	− 16
+ 0.237	0,,07 322	+ 28	9,,88 922	− 6	+ 2.22 678	+ 91	9.26 010	− 16
+ 0.238	0,,07 350	+ 27	9,,88 916	− 5	+ 2.22 769	+ 92	9.25 994	− 16
+ 0.239	0,,07 377	+ 28	9,,88 911	− 6	+ 2.22 861	+ 92	9.25 978	− 16
+ 0.240	0,,07 405	+ 27	9,,88 905	− 5	+ 2.22 953	+ 91	9.25 962	− 16
+ 0.241	0,,07 432	+ 28	9,,88 900	− 6	+ 2.23 044	+ 92	9.25 946	− 16
+ 0.242	0,,07 460	+ 27	9,,88 894	− 5	+ 2.23 136	+ 92	9.25 930	− 16
+ 0.243	0,,07 487	+ 27	9,,88 889	− 6	+ 2.23 228	+ 91	9.25 914	− 16
+ 0.244	0,,07 514	+ 28	9,,88 883	− 5	+ 2.23 319	+ 92	9.25 898	− 16
+ 0.245	0,,07 542	+ 27	9,,88 878	− 6	+ 2.23 411	+ 91	9.25 882	− 16
+ 0.246	0,,07 569	+ 27	9,,88 872	− 5	+ 2.23 502	+ 92	9.25 866	− 16
+ 0.247	0,,07 596	+ 28	9,,88 867	− 6	+ 2.23 594	+ 91	9.25 850	− 16
+ 0.248	0,,07 624	+ 27	9,,88 861	− 5	+ 2.23 685	+ 91	9.25 834	− 16
+ 0.249	0,,07 651	+ 27	9,,88 856	− 6	+ 2.23 776	+ 92	9.25 818	− 16
+ 0.250	0,,07 678		9,,88 850		+ 2.23 868		9.25 802	

Tafel XVI.

θ	log E_2'	Diff.	log E_4''	Diff.	E_6'	Diff.	log E_4'	Diff.
+ 0.250	0,,07 678		9,,88 850		+ 2.23 868		9.25 802	
		+ 28		− 5		+ 91		− 16
+ 0.251	0,,07 706		9,,88 845		+ 2.23 959		9.25 786	
		+ 27		− 6		+ 92		− 16
+ 0.252	0,,07 733		9,,88 839		+ 2.24 051		9.25 770	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.253	0,,07 760		9,,88 834		+ 2.24 142		9.25 754	
		+ 27		− 6		+ 91		− 15
+ 0.254	0,,07 787		9,,88 828		+ 2.24 233		9.25 739	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.255	0,,07 814		9,,88 823		+ 2.24 324		9.25 723	
		+ 27		− 6		+ 91		− 16
+ 0.256	0,,07 841		9,,88 817		+ 2.24 415		9.25 707	
		+ 28		− 5		+ 92		− 16
+ 0.257	0,,07 869		9,,88 812		+ 2.24 507		9.25 691	
		+ 27		− 6		+ 91		− 16
+ 0.258	0,,07 896		9,,88 806		+ 2.24 598		9.25 675	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.259	0,,07 923		9,,88 801		+ 2.24 689		9.25 659	
		+ 27		− 6		+ 91		− 16
+ 0.260	0,,07 950		9,,88 795		+ 2.24 780		9.25 643	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.261	0,,07 977		9,,88 790		+ 2.24 871		9.25 627	
		+ 27		− 6		+ 91		− 15
+ 0.262	0,,08 004		9,,88 784		+ 2.24 962		9.25 612	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.263	0,,08 031		9,,88 779		+ 2.25 053		9.25 596	
		+ 27		− 6		+ 91		− 16
+ 0.264	0,,08 058		9,,88 773		+ 2.25 144		9.25 580	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.265	0,,08 085		9,,88 768		+ 2.25 235		9.25 564	
		+ 26		− 6		+ 91		− 16
+ 0.266	0,,08 111		9,,88 762		+ 2.25 326		9.25 548	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.267	0,,08 138		9,,88 757		+ 2.25 417		9.25 532	
		+ 27		− 6		+ 90		− 15
+ 0.268	0,,08 165		9,,88 751		+ 2.25 507		9.25 517	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.269	0,,08 192		9,,88 746		+ 2.25 598		9.25 501	
		+ 27		− 6		+ 91		− 16
+ 0.270	0,,08 219		9,,88 740		+ 2.25 689		9.25 485	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.271	0,,08 246		9,,88 735		+ 2.25 780		9.25 469	
		+ 26		− 5		+ 91		− 15
+ 0.272	0,,08 272		9,,88 730		+ 2.25 871		9.25 454	
		+ 27		− 6		+ 90		− 16
+ 0.273	0,,08 299		9,,88 724		+ 2.25 961		9.25 438	
		+ 27		− 5		+ 91		− 16
+ 0.274	0,,08 326		9,,88 719		+ 2.26 052		9.25 422	
		+ 27		− 6		+ 91		− 16
+ 0.275	0,,08 353		9,,88 713		+ 2.26 143		9.25 406	
		+ 26		− 5		+ 90		− 15
+ 0.276	0,,08 379		9,,88 708		+ 2.26 233		9.25 391	
		+ 27		− 6		+ 91		− 16
+ 0.277	0,,08 406		9,,88 702		+ 2.26 324		9.25 375	
		+ 26		− 5		+ 90		− 16
+ 0.278	0,,08 432		9,,88 697		+ 2.26 414		9.25 359	
		+ 27		− 6		+ 91		− 16
+ 0.279	0,,08 459		9,,88 691		+ 2.26 505		9.25 343	
		+ 27		− 5		+ 90		− 15
+ 0.280	0,,08 486		9,,88 686		+ 2.26 595		9.25 328	
		+ 26		− 5		+ 91		− 16
+ 0.281	0,,08 512		9,,88 681		+ 2.26 686		9.25 312	
		+ 27		− 6		+ 90		− 16
+ 0.282	0,,08 539		9,,88 675		+ 2.26 776		9.25 296	
		+ 26		− 5		+ 91		− 15
+ 0.283	0,,08 565		9,,88 670		+ 2.26 867		9.25 281	
		+ 27		− 6		+ 90		− 16
+ 0.284	0,,08 592		9,,88 664		+ 2.26 957		9.25 265	
		+ 26		− 5		+ 90		− 16
+ 0.285	0,,08 618		9,,88 659		+ 2.27 047		9.25 249	
		+ 27		− 5		+ 91		− 15
+ 0.286	0,,08 645		9,,88 654		+ 2.27 138		9.25 234	
		+ 26		− 6		+ 90		− 16
+ 0.287	0,,08 671		9,,88 648		+ 2.27 228		9.25 218	
		+ 26		− 5		+ 90		− 15
+ 0.288	0,,08 697		9,,88 643		+ 2.27 318		9.25 203	
		+ 27		− 6		+ 90		− 16
+ 0.289	0,,08 724		9,,88 637		+ 2.27 408		9.25 187	
		+ 26		− 5		+ 91		− 16
+ 0.290	0,,08 750		9,,88 632		+ 2.27 499		9.25 171	
		+ 26		− 6		+ 90		− 15
+ 0.291	0,,08 776		9,,88 626		+ 2.27 589		9.25 156	
		+ 27		− 5		+ 90		− 16
+ 0.292	0,,08 803		9,,88 621		+ 2.27 679		9.25 140	
		+ 26		− 5		+ 90		− 15
+ 0.293	0,,08 829		9,,88 616		+ 2.27 769		9.25 125	
		+ 26		− 6		+ 90		− 16
+ 0.294	0,,08 855		9,,88 610		+ 2.27 859		9.25 109	
		+ 27		− 5		+ 90		− 16
+ 0.295	0,,08 882		9,,88 605		+ 2.27 949		9.25 093	
		+ 26		− 6		+ 90		− 15
+ 0.296	0,,08 908		9,,88 599		+ 2.28 039		9.25 078	
		+ 26		− 5		+ 90		− 16
+ 0.297	0,,08 934		9,,88 594		+ 2.28 129		9.25 062	
		+ 26		− 5		+ 90		− 15
+ 0.298	0,,08 960		9,,88 589		+ 2.28 219		9.25 047	
		+ 26		− 6		+ 90		− 16
+ 0.299	0,,08 986		9,,88 583		+ 2.28 309		9.25 031	
		+ 26		− 5		+ 90		− 15
+ 0.300	0,,09 012		9,,88 578		+ 2.28 399		9.25 016	

Tafel XVI.

θ	log E_2'	Diff.	log E_1'	Diff.	E_0'	Diff.	log E_4'	Diff.
+ 0.300	0,,09 012		9,,88 578		+ 2.28 399		9.25 016	
		+ 27		5		+ 90		16
+ 0.301	0,,09 039		9,,88 573		+ 2.28 489		9.25 000	
		+ 26		6		+ 90		15
+ 0.302	0,,09 065		9,,88 567		+ 2.28 579		9.24 985	
		+ 26		5		+ 90		16
+ 0.303	0,,09 091		9,,88 562		+ 2.28 669		9.24 969	
		+ 26		6		+ 89		15
+ 0.304	0,,09 117		9,,88 556		+ 2.28 758		9.24 954	
		+ 26		5		+ 90		16
+ 0.305	0,,09 143		9,,88 551		+ 2.28 848		9.24 938	
		+ 26		5		+ 90		15
+ 0.306	0,,09 169		9,,88 546		+ 2.28 938		9.24 923	
		+ 26		6		+ 90		16
+ 0.307	0,,09 195		9,,88 540		+ 2.29 028		9.24 907	
		+ 26		5		+ 89		15
+ 0.308	0,,09 221		9,,88 535		+ 2.29 117		9.24 892	
		+ 26		5		+ 90		15
+ 0.309	0,,09 247		9,,88 530		+ 2.29 207		9.24 877	
		+ 26		6		+ 90		16
+ 0.310	0,,09 273		9,,88 524		+ 2.29 297		9.24 861	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.311	0,,09 298		9,,88 519		+ 2.29 386		9.24 846	
		+ 26		6		+ 90		16
+ 0.312	0,,09 324		9,,88 513		+ 2.29 476		9.24 830	
		+ 26		5		+ 89		15
+ 0.313	0,,09 350		9,,88 508		+ 2.29 565		9.24 815	
		+ 26		5		+ 90		16
+ 0.314	0,,09 376		9,,88 503		+ 2.29 655		9.24 799	
		+ 26		6		+ 89		15
+ 0.315	0,,09 402		9,,88 497		+ 2.29 744		9.24 784	
		+ 26		5		+ 90		15
+ 0.316	0,,09 428		9,,88 492		+ 2.29 834		9.24 769	
		+ 25		5		+ 89		16
+ 0.317	0,,09 453		9,,88 487		+ 2.29 923		9.24 753	
		+ 26		6		+ 90		15
+ 0.318	0,,09 479		9,,88 481		+ 2.30 013		9.24 738	
		+ 26		5		+ 89		15
+ 0.319	0,,09 505		9,,88 476		+ 2.30 102		9.24 723	
		+ 26		5		+ 89		16
+ 0.320	0,,09 531		9,,88 471		+ 2.30 191		9.24 707	
		+ 25		6		+ 90		15
+ 0.321	0,,09 556		9,,88 465		+ 2.30 281		9.24 692	
		+ 26		5		+ 89		15
+ 0.322	0,,09 582		9,,88 460		+ 2.30 370		9.24 677	
		+ 26		5		+ 89		16
+ 0.323	0,,09 608		9,,88 455		+ 2.30 459		9.24 661	
		+ 25		6		+ 89		15
+ 0.324	0,,09 633		9,,88 449		+ 2.30 548		9.24 646	
		+ 26		5		+ 90		15
+ 0.325	0,,09 659		9,,88 444		+ 2.30 638		9.24 631	
		+ 25		5		+ 89		16
+ 0.326	0,,09 684		9,,88 439		+ 2.30 727		9.24 615	
		+ 26		6		+ 89		15
+ 0.327	0,,09 710		9,,88 433		+ 2.30 816		9.24 600	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.328	0,,09 735		9,,88 428		+ 2.30 905		9.24 585	
		+ 26		5		+ 89		16
+ 0.329	0,,09 761		9,,88 423		+ 2.30 994		9.24 569	
		+ 25		6		+ 89		15
+ 0.330	0,,09 786		9,,88 417		+ 2.31 083		9.24 554	
		+ 26		5		+ 89		15
+ 0.331	0,,09 812		9,,88 412		+ 2.31 172		9.24 539	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.332	0,,09 837		9,,88 407		+ 2.31 261		9.24 524	
		+ 26		5		+ 89		16
+ 0.333	0,,09 863		9,,88 402		+ 2.31 350		9.24 508	
		+ 25		6		+ 89		15
+ 0.334	0,,09 888		9,,88 396		+ 2.31 439		9.24 493	
		+ 26		5		+ 89		15
+ 0.335	0,,09 914		9,,88 391		+ 2.31 528		9.24 478	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.336	0,,09 939		9,,88 386		+ 2.31 617		9.24 463	
		+ 25		6		+ 89		16
+ 0.337	0,,09 964		9,,88 380		+ 2.31 706		9.24 447	
		+ 26		5		+ 89		15
+ 0.338	0,,09 990		9,,88 375		+ 2.31 795		9.24 432	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.339	0,,10 015		9,,88 370		+ 2.31 884		9.24 417	
		+ 25		6		+ 88		15
+ 0.340	0,,10 040		9,,88 364		+ 2.31 972		9.24 402	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.341	0,,10 065		9,,88 359		+ 2.32 061		9.24 387	
		+ 26		5		+ 89		15
+ 0.342	0,,10 091		9,,88 354		+ 2.32 150		9.24 372	
		+ 25		5		+ 89		16
+ 0.343	0,,10 116		9,,88 349		+ 2.32 239		9.24 356	
		+ 25		6		+ 88		15
+ 0.344	0,,10 141		9,,88 343		+ 2.32 327		9.24 341	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.345	0,,10 166		9,,88 338		+ 2.32 416		9.24 326	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.346	0,,10 191		9,,88 333		+ 2.32 505		9.24 311	
		+ 26		6		+ 88		15
+ 0.347	0,,10 217		9,,88 327		+ 2.32 593		9.24 296	
		+ 25		5		+ 89		15
+ 0.348	0,,10 242		9,,88 322		+ 2.32 682		9.24 281	
		+ 25		5		+ 88		15
+ 0.349	0,,10 267		9,,88 317		+ 2.32 770		9.24 266	
		+ 25		5		+ 89		16
+ 0.350	0,,10 292		9,,88 312		+ 2.32 859		9.24 250	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2'$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_6'	Diff.	$\log E_4'$	Diff.
+ 0.350	0,,10 292		9,,88 312		+ 2.32 859		9.24 250	
		+ 25		− 6		+ 88		− 15
+ 0.351	0,,10 317		9,,88 306		+ 2.32 947		9.24 235	
		+ 25		− 5		+ 89		− 15
+ 0.352	0,,10 342		9,,88 301		+ 2.33 036		9.24 220	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.353	0,,10 367		9,,88 296		+ 2.33 124		9.24 205	
		+ 25		− 5		+ 89		− 15
+ 0.354	0,,10 392		9,,88 291		+ 2.33 213		9.24 190	
		+ 25		− 6		+ 88		− 15
+ 0.355	0,,10 417		9,,88 285		+ 2.33 301		9.24 175	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.356	0,,10 442		9,,88 280		+ 2.33 389		9.24 160	
		+ 25		− 5		+ 89		− 15
+ 0.357	0,,10 467		9,,88 275		+ 2.33 478		9.24 145	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.358	0,,10 492		9,,88 270		+ 2.33 566		9.24 130	
		+ 25		− 6		+ 88		− 15
+ 0.359	0,,10 517		9,,88 264		+ 2.33 654		9.24 115	
		+ 25		− 5		+ 89		− 15
+ 0.360	0,,10 542		9,,88 259		+ 2.33 743		9.24 100	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.361	0,,10 566		9,,88 254		+ 2.33 831		9.24 085	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.362	0,,10 591		9,,88 249		+ 2.33 919		9.24 070	
		+ 25		− 6		+ 88		− 15
+ 0.363	0,,10 616		9,,88 243		+ 2.34 007		9.24 055	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.364	0,,10 641		9,,88 238		+ 2.34 095		9.24 040	
		+ 25		− 5		+ 89		− 15
+ 0.365	0,,10 666		9,,88 233		+ 2.34 184		9.24 025	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.366	0,,10 690		9,,88 228		+ 2.34 272		9.24 010	
		+ 25		− 6		+ 88		− 15
+ 0.367	0,,10 715		9,,88 222		+ 2.34 360		9.23 995	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.368	0,,10 740		9,,88 217		+ 2.34 448		9.23 980	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.369	0,,10 765		9,,88 212		+ 2.34 536		9.23 965	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.370	0,,10 789		9,,88 207		+ 2.34 624		9.23 950	
		+ 25		− 6		+ 88		− 15
+ 0.371	0,,10 814		9,,88 201		+ 2.34 712		9.23 935	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.372	0,,10 839		9,,88 196		+ 2.34 800		9.23 920	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.373	0,,10 863		9,,88 191		+ 2.34 888		9.23 905	
		+ 25		− 5		+ [illegible]		− 15
+ 0.374	0,,10 888		9,,88 186		+ 2.34 975		9.23 890	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.375	0,,10 912		9,,88 181		+ 2.35 063		9.23 875	
		+ 25		− 6		+ 88		− 15
+ 0.376	0,,10 937		9,,88 175		+ 2.35 151		9.23 860	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.377	0,,10 961		9,,88 170		+ 2.35 239		9.23 845	
		+ 25		− 5		+ 88		− 14
+ 0.378	0,,10 986		9,,88 165		+ 2.35 327		9.23 831	
		+ 24		− 5		+ 87		− 15
+ 0.379	0,,11 010		9,,88 160		+ 2.35 414		9.23 816	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.380	0,,11 035		9,,88 155		+ 2.35 502		9.23 801	
		+ 24		− 6		+ 88		− 15
+ 0.381	0,,11 059		9,,88 149		+ 2.35 590		9.23 786	
		+ 25		− 5		+ 87		− 15
+ 0.382	0,,11 084		9,,88 144		+ 2.35 677		9.23 771	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.383	0,,11 108		9,,88 139		+ 2.35 765		9.23 756	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.384	0,,11 133		9,,88 134		+ 2.35 853		9.23 741	
		+ 24		− 5		+ 87		− 14
+ 0.385	0,,11 157		9,,88 129		+ 2.35 940		9.23 727	
		+ 24		− 6		+ 88		− 15
+ 0.386	0,,11 181		9,,88 123		+ 2.36 028		9.23 712	
		+ 25		− 5		+ 87		− 15
+ 0.387	0,,11 206		9,,88 118		+ 2.36 115		9.23 697	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.388	0,,11 230		9,,88 113		+ 2.36 203		9.23 682	
		+ 24		− 5		+ 87		− 15
+ 0.389	0,,11 254		9,,88 108		+ 2.36 290		9.23 667	
		+ 25		− 5		+ 88		− 15
+ 0.390	0,,11 279		9,,88 103		+ 2.36 378		9.23 652	
		+ 24		− 6		+ 87		− 14
+ 0.391	0,,11 303		9,,88 097		+ 2.36 465		9.23 638	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.392	0,,11 327		9,,88 092		+ 2.36 553		9.23 623	
		+ 25		− 5		+ 87		− 15
+ 0.393	0,,11 352		9,,88 087		+ 2.36 640		9.23 608	
		+ 24		− 5		+ 87		− 15
+ 0.394	0,,11 376		9,,88 082		+ 2.36 727		9.23 593	
		+ 24		− 5		+ 88		− 14
+ 0.395	0,,11 400		9,,88 077		+ 2.36 815		9.23 579	
		+ 24		− 5		+ 87		− 15
+ 0.396	0,,11 424		9,,88 072		+ 2.36 902		9.23 564	
		+ 24		− 6		+ 87		− 15
+ 0.397	0,,11 448		9,,88 066		+ 2.36 989		9.23 549	
		+ 24		− 5		+ 88		− 15
+ 0.398	0,,11 472		9,,88 061		+ 2.37 077		9.23 534	
		+ 25		− 5		+ 87		− 14
+ 0.399	0,,11 497		9,,88 056		+ 2.37 164		9.23 520	
		+ 24		− 5		+ 87		− 15
+ 0.400	0,,11 521		9,,88 051		+ 2.37 251		9.23 505	

Tafel XVII.

vergl. pag. 468.

A	log Q	Diff.
0.240	9.193 1369	+ 1102
0.239	9.193 2471	+ 1103
0.238	9.193 3574	+ 1104
0.237	9.193 4678	+ 1105
0.236	9.193 5783	+ 1105
0.235	9.193 6888	+ 1105
0.234	9.193 7993	+ 1107
— 0.233	9.193 9100	+ 1107
0.232	9.194 0207	+ 1108
— 0.231	9.194 1315	+ 1109
— 0.230	9.194 2424	+ 1109
— 0.229	9.194 3533	+ 1110
0.228	9.194 4643	+ 1111
0.227	9.194 5754	+ 1111
— 0.226	9.194 6865	+ 1112
— 0.225	9.194 7977	+ 1113
— 0.224	9.194 9090	+ 1114
— 0.223	9.195 0204	+ 1114
0.222	9.195 1318	+ 1115
0.221	9.195 2433	+ 1116
0.220	9.195 3549	+ 1117
— 0.219	9.195 4666	+ 1117
— 0.218	9.195 5783	+ 1118
— 0.217	9.195 6901	+ 1118
— 0.216	9.195 8019	+ 1120
— 0.215	9.195 9139	+ 1120
0.214	9.196 0259	+ 1120
— 0.213	9.196 1379	+ 1122
— 0.212	9.196 2501	+ 1122
— 0.211	9.196 3623	+ 1123
— 0.210	9.196 4746	+ 1124
— 0.209	9.196 5870	+ 1124
— 0.208	9.196 6994	+ 1126
— 0.207	9.196 8120	+ 1125
— 0.206	9.196 9245	+ 1127
— 0.205	9.197 0372	+ 1127
— 0.204	9.197 1499	+ 1128
— 0.203	9.197 2627	+ 1129
— 0.202	9.197 3756	+ 1130
— 0.201	9.197 4886	+ 1130
— 0.200	9.197 6016	+ 1131
— 0.199	9.197 7147	+ 1132
— 0.198	9.197 8279	+ 1133
— 0.197	9.197 9412	+ 1133
— 0.196	9.198 0545	+ 1134
— 0.195	9.198 1679	+ 1135
— 0.194	9.198 2814	+ 1135
— 0.193	9.198 3949	+ 1136
— 0.192	9.198 5085	+ 1137
— 0.191	9.198 6222	+ 1138
— 0.190	9.198 7360	+ 1138
— 0.189	9.198 8498	+ 1140
— 0.188	9.198 9638	+ 1140
— 0.187	9.199 0778	+ 1140
— 0.186	9.199 1918	+ 1142
— 0.185	9.199 3060	+ 1142
— 0.184	9.199 4202	+ 1143
— 0.183	9.199 5345	+ 1144
— 0.182	9.199 6489	+ 1144
— 0.181	9.199 7633	+ 1146
— 0.180	9.199 8779	

A	log Q	Diff.
— 0.180	9.199 8779	+ 1146
— 0.179	9.199 9925	+ 1147
— 0.178	9.200 1072	+ 1147
— 0.177	9.200 2219	+ 1148
— 0.176	9.200 3367	+ 1149
— 0.175	9.200 4516	+ 1150
— 0.174	9.200 5666	+ 1151
— 0.173	9.200 6817	+ 1151
— 0.172	9.200 7968	+ 1152
— 0.171	9.200 9120	+ 1153
— 0.170	9.201 0273	+ 1154
0.169	9.201 1427	+ 1155
— 0.168	9.201 2582	+ 1155
— 0.167	9.201 3737	+ 1156
— 0.166	9.201 4893	+ 1157
— 0.165	9.201 6050	+ 1157
— 0.164	9.201 7207	+ 1158
— 0.163	9.201 8365	+ 1160
— 0.162	9.201 9525	+ 1159
— 0.161	9.202 0684	+ 1161
— 0.160	9.202 1845	+ 1162
— 0.159	9.202 3007	+ 1162
— 0.158	9.202 4169	+ 1163
— 0.157	9.202 5332	+ 1164
— 0.156	9.202 6496	+ 1164
— 0.155	9.202 7660	+ 1166
— 0.154	9.202 8826	+ 1166
— 0.153	9.202 9992	+ 1167
— 0.152	9.203 1159	+ 1168
— 0.151	9.203 2327	+ 1168
— 0.150	9.203 3495	+ 1170
— 0.149	9.203 4665	+ 1170
— 0.148	9.203 5835	+ 1171
— 0.147	9.203 7006	+ 1171
— 0.146	9.203 8177	+ 1173
— 0.145	9.203 9350	+ 1173
— 0.144	9.204 0523	+ 1174
— 0.143	9.204 1697	+ 1175
— 0.142	9.204 2872	+ 1176
— 0.141	9.204 4048	+ 1177
— 0.140	9.204 5225	+ 1177
— 0.139	9.204 6402	+ 1178
— 0.138	9.204 7580	+ 1179
— 0.137	9.204 8759	+ 1180
— 0.136	9.204 9939	+ 1180
— 0.135	9.205 1119	+ 1182
— 0.134	9.205 2301	+ 1182
— 0.133	9.205 3483	+ 1183
— 0.132	9.205 4666	+ 1184
— 0.131	9.205 5850	+ 1184
— 0.130	9.205 7034	+ 1186
— 0.129	9.205 8220	+ 1186
— 0.128	9.205 9406	+ 1187
— 0.127	9.206 0593	+ 1188
— 0.126	9.206 1781	+ 1189
— 0.125	9.206 2970	+ 1190
— 0.124	9.206 4160	+ 1190
— 0.123	9.206 5350	+ 1191
— 0.122	9.206 6541	+ 1192
— 0.121	9.206 7733	+ 1193
— 0.120	9.206 8926	

A	log Q	Diff.
0.120	9.206 8926	+ 1194
— 0.119	9.207 0120	+ 1194
— 0.118	9.207 1314	+ 1196
— 0.117	9.207 2510	+ 1196
— 0.116	9.207 3706	+ 1197
— 0.115	9.207 4903	+ 1198
— 0.114	9.207 6101	+ 1199
— 0.113	9.207 7300	+ 1199
— 0.112	9.207 8499	+ 1201
— 0.111	9.207 9700	+ 1201
0.110	9.208 0901	+ 1202
0.109	9.208 2103	+ 1203
0.108	9.208 3306	+ 1204
0.107	9.208 4510	+ 1204
— 0.106	9.208 5714	+ 1206
— 0.105	9.208 6920	+ 1206
— 0.104	9.208 8126	+ 1207
0.103	9.208 9333	+ 1208
0.102	9.209 0541	+ 1209
0.101	9.209 1750	+ 1210
— 0.100	9.209 2960	+ 1210
— 0.099	9.209 4170	+ 1212
— 0.098	9.209 5382	+ 1212
— 0.097	9.209 6594	+ 1213
— 0.096	9.209 7807	+ 1214
— 0.095	9.209 9021	+ 1215
0.094	9.210 0236	+ 1216
— 0.093	9.210 1452	+ 1217
— 0.092	9.210 2669	+ 1217
— 0.091	9.210 3886	+ 1218
— 0.090	9.210 5104	+ 1220
— 0.089	9.210 6324	+ 1220
— 0.088	9.210 7544	+ 1221
— 0.087	9.210 8765	+ 1221
— 0.086	9.210 9986	+ 1223
— 0.085	9.211 1209	+ 1224
— 0.084	9.211 2433	+ 1224
— 0.083	9.211 3657	+ 1226
— 0.082	9.211 4883	+ 1226
— 0.081	9.211 6109	+ 1227
— 0.080	9.211 7336	+ 1228
— 0.079	9.211 8564	+ 1229
— 0.078	9.211 9793	+ 1229
— 0.077	9.212 1022	+ 1231
— 0.076	9.212 2253	+ 1232
— 0.075	9.212 3485	+ 1232
— 0.074	9.212 4717	+ 1233
— 0.073	9.212 5950	+ 1235
— 0.072	9.212 7185	+ 1235
— 0.071	9.212 8420	+ 1236
— 0.070	9.212 9656	+ 1237
— 0.069	9.213 0893	+ 1237
— 0.068	9.213 2130	+ 1239
— 0.067	9.213 3369	+ 1240
— 0.066	9.213 4609	+ 1240
— 0.065	9.213 5849	+ 1241
— 0.064	9.213 7090	+ 1243
— 0.063	9.213 8333	+ 1243
— 0.062	9.213 9576	+ 1244
— 0.061	9.214 0820	+ 1245
— 0.060	9.214 2065	

A	log Q	Diff.
— 0.060	9.214 2065	+ 1246
— 0.059	9.214 3311	+ 1247
— 0.058	9.214 4558	+ 1248
— 0.057	9.214 5806	+ 1248
— 0.056	9.214 7054	+ 1250
— 0.055	9.214 8304	+ 1250
— 0.054	9.214 9554	+ 1252
— 0.053	9.215 0806	+ 1252
— 0.052	9.215 2058	+ 1253
— 0.051	9.215 3311	+ 1255
— 0.050	9.215 4566	+ 1255
— 0.049	9.215 5821	+ 1256
— 0.048	9.215 7077	+ 1257
— 0.047	9.215 8334	+ 1258
— 0.046	9.215 9592	+ 1258
— 0.045	9.216 0850	+ 1260
— 0.044	9.216 2110	+ 1261
— 0.043	9.216 3371	+ 1262
— 0.042	9.216 4633	+ 1262
— 0.041	9.216 5895	+ 1264
— 0.040	9.216 7159	+ 1264
— 0.039	9.216 8423	+ 1266
— 0.038	9.216 9689	+ 1266
— 0.037	9.217 0955	+ 1267
— 0.036	9.217 2222	+ 1268
— 0.035	9.217 3490	+ 1270
— 0.034	9.217 4760	+ 1270
— 0.033	9.217 6030	+ 1271
— 0.032	9.217 7301	+ 1272
— 0.031	9.217 8573	+ 1273
— 0.030	9.217 9846	+ 1274
— 0.029	9.218 1120	+ 1275
— 0.028	9.218 2395	+ 1276
— 0.027	9.218 3671	+ 1276
— 0.026	9.218 4947	+ 1278
— 0.025	9.218 6225	+ 1279
— 0.024	9.218 7504	+ 1280
— 0.023	9.218 8784	+ 1280
— 0.022	9.219 0064	+ 1282
— 0.021	9.219 1346	+ 1283
— 0.020	9.219 2629	+ 1283
— 0.019	9.219 3912	+ 1285
— 0.018	9.219 5197	+ 1285
— 0.017	9.219 6482	+ 1287
— 0.016	9.219 7769	+ 1287
— 0.015	9.219 9056	+ 1289
— 0.014	9.220 0345	+ 1289
— 0.013	9.220 1634	+ 1291
— 0.012	9.220 2925	+ 1291
— 0.011	9.220 4216	+ 1293
— 0.010	9.220 5509	+ 1293
— 0.009	9.220 6802	+ 1294
— 0.008	9.220 8096	+ 1296
— 0.007	9.220 9392	+ 1296
— 0.006	9.221 0688	+ 1298
— 0.005	9.221 1986	+ 1298
— 0.004	9.221 3284	+ 1299
— 0.003	9.221 4583	+ 1301
— 0.002	9.221 5884	+ 1301
— 0.001	9.221 7185	+ 1302
0.000	9.221 8487	

Tafel XVII.

A	log Q	Diff.	A	log Q	Diff.	A	log Q	Diff.	A	log Q	Diff.
0.000	9.221 8487	+ 1304	+0.060	9.229 8533	+ 1367	+0.120	9.238 2600	+ 1438	+0.180	9.247 1159	+ 1517
+0.001	9.221 9791	+ 1304	+0.061	9.229 9900	+ 1368	+0.121	9.238 4038	+ 1439	+0.181	9.247 2676	+ 1518
+0.002	9.222 1095	+ 1306	+0.062	9.230 1268	+ 1369	+0.122	9.238 5477	+ 1440	+0.182	9.247 4194	+ 1520
+0.003	9.222 2401	+ 1306	+0.063	9.230 2637	+ 1371	+0.123	9.238 6917	+ 1441	+0.183	9.247 5714	+ 1522
+0.004	9.222 3707	+ 1308	+0.064	9.230 4008	+ 1371	+0.124	9.238 8358	+ 1443	+0.184	9.247 7236	+ 1522
+0.005	9.222 5015	+ 1308	+0.065	9.230 5379	+ 1373	+0.125	9.238 9801	+ 1444	+0.185	9.247 8758	+ 1525
+0.006	9.222 6323	+ 1309	+0.066	9.230 6752	+ 1373	+0.126	9.239 1245	+ 1445	+0.186	9.248 0283	+ 1525
+0.007	9.222 7632	+ 1311	+0.067	9.230 8125	+ 1375	+0.127	9.239 2690	+ 1447	+0.187	9.248 1808	+ 1527
+0.008	9.222 8943	+ 1311	+0.068	9.230 9500	+ 1376	+0.128	9.239 4137	+ 1448	+0.188	9.248 3335	+ 1529
+0.009	9.223 0254	+ 1313	+0.069	9.231 0876	+ 1377	+0.129	9.239 5585	+ 1449	+0.189	9.248 4864	+ 1529
+0.010	9.223 1567	+ 1313	+0.070	9.231 2253	+ 1378	+0.130	9.239 7034	+ 1450	+0.190	9.248 6393	+ 1532
+0.011	9.223 2880	+ 1315	+0.071	9.231 3631	+ 1380	+0.131	9.239 8484	+ 1452	+0.191	9.248 7925	+ 1532
+0.012	9.223 4195	+ 1316	+0.072	9.231 5011	+ 1380	+0.132	9.239 9936	+ 1453	+0.192	9.248 9457	+ 1535
+0.013	9.223 5511	+ 1316	+0.073	9.231 6391	+ 1382	+0.133	9.240 1389	+ 1454	+0.193	9.249 0992	+ 1535
+0.014	9.223 6827	+ 1318	+0.074	9.231 7773	+ 1383	+0.134	9.240 2843	+ 1455	+0.194	9.249 2527	+ 1537
+0.015	9.223 8145	+ 1318	+0.075	9.231 9156	+ 1384	+0.135	9.240 4298	+ 1457	+0.195	9.249 4064	+ 1539
+0.016	9.223 9463	+ 1320	+0.076	9.232 0540	+ 1385	+0.136	9.240 5755	+ 1458	+0.196	9.249 5603	+ 1540
+0.017	9.224 0783	+ 1321	+0.077	9.232 1925	+ 1386	+0.137	9.240 7213	+ 1459	+0.197	9.249 7143	+ 1541
+0.018	9.224 2104	+ 1322	+0.078	9.232 3311	+ 1387	+0.138	9.240 8672	+ 1461	+0.198	9.249 8684	+ 1543
+0.019	9.224 3426	+ 1322	+0.079	9.232 4698	+ 1389	+0.139	9.241 0133	+ 1462	+0.199	9.250 0227	+ 1544
+0.020	9.224 4748	+ 1324	+0.080	9.232 6087	+ 1390	+0.140	9.241 1595	+ 1463	+0.200	9.250 1771	+ 1546
+0.021	9.224 6072	+ 1325	+0.081	9.232 7477	+ 1391	+0.141	9.241 3058	+ 1464	+0.201	9.250 3317	+ 1547
+0.022	9.224 7397	+ 1326	+0.082	9.232 8868	+ 1392	+0.142	9.241 4522	+ 1466	+0.202	9.250 4864	+ 1549
+0.023	9.224 8723	+ 1327	+0.083	9.233 0260	+ 1393	+0.143	9.241 5988	+ 1467	+0.203	9.250 6413	+ 1550
+0.024	9.225 0050	+ 1328	+0.084	9.233 1653	+ 1394	+0.144	9.241 7455	+ 1468	+0.204	9.250 7963	+ 1552
+0.025	9.225 1378	+ 1329	+0.085	9.233 3047	+ 1396	+0.145	9.241 8923	+ 1470	+0.205	9.250 9515	+ 1553
+0.026	9.225 2707	+ 1330	+0.086	9.233 4443	+ 1396	+0.146	9.242 0393	+ 1471	+0.206	9.251 1068	+ 1554
+0.027	9.225 4037	+ 1332	+0.087	9.233 5839	+ 1398	+0.147	9.242 1864	+ 1472	+0.207	9.251 2622	+ 1556
+0.028	9.225 5369	+ 1332	+0.088	9.233 7237	+ 1399	+0.148	9.242 3336	+ 1474	+0.208	9.251 4178	+ 1558
+0.029	9.225 6701	+ 1333	+0.089	9.233 8636	+ 1400	+0.149	9.242 4810	+ 1475	+0.209	9.251 5736	+ 1559
+0.030	9.225 8034	+ 1334	+0.090	9.234 0036	+ 1402	+0.150	9.242 6285	+ 1476	+0.210	9.251 7295	+ 1560
+0.031	9.225 9368	+ 1336	+0.091	9.234 1438	+ 1402	+0.151	9.242 7761	+ 1478	+0.211	9.251 8855	+ 1562
+0.032	9.226 0704	+ 1336	+0.092	9.234 2840	+ 1404	+0.152	9.242 9239	+ 1479	+0.212	9.252 0417	+ 1564
+0.033	9.226 2040	+ 1338	+0.093	9.234 4244	+ 1405	+0.153	9.243 0718	+ 1480	+0.213	9.252 1981	+ 1565
+0.034	9.226 3378	+ 1338	+0.094	9.234 5649	+ 1406	+0.154	9.243 2198	+ 1481	+0.214	9.252 3546	+ 1567
+0.035	9.226 4716	+ 1340	+0.095	9.234 7055	+ 1407	+0.155	9.243 3679	+ 1483	+0.215	9.252 5113	+ 1568
+0.036	9.226 6056	+ 1341	+0.096	9.234 8462	+ 1409	+0.156	9.243 5162	+ 1485	+0.216	9.252 6681	+ 1569
+0.037	9.226 7397	+ 1342	+0.097	9.234 9871	+ 1409	+0.157	9.243 6647	+ 1485	+0.217	9.252 8250	+ 1571
+0.038	9.226 8739	+ 1342	+0.098	9.235 1280	+ 1411	+0.158	9.243 8132	+ 1487	+0.218	9.252 9821	+ 1573
+0.039	9.227 0081	+ 1344	+0.099	9.235 2691	+ 1412	+0.159	9.243 9619	+ 1488	+0.219	9.253 1394	+ 1574
+0.040	9.227 1425	+ 1345	+0.100	9.235 4103	+ 1414	+0.160	9.244 1107	+ 1490	+0.220	9.253 2968	+ 1575
+0.041	9.227 2770	+ 1347	+0.101	9.235 5517	+ 1414	+0.161	9.244 2597	+ 1491	+0.221	9.253 4543	+ 1578
+0.042	9.227 4117	+ 1347	+0.102	9.235 6931	+ 1416	+0.162	9.244 4088	+ 1492	+0.222	9.253 6121	+ 1578
+0.043	9.227 5464	+ 1348	+0.103	9.235 8347	+ 1417	+0.163	9.244 5580	+ 1494	+0.223	9.253 7699	+ 1580
+0.044	9.227 6812	+ 1349	+0.104	9.235 9764	+ 1418	+0.164	9.244 7074	+ 1495	+0.224	9.253 9279	+ 1582
+0.045	9.227 8161	+ 1351	+0.105	9.236 1182	+ 1419	+0.165	9.244 8569	+ 1496	+0.225	9.254 0861	+ 1584
+0.046	9.227 9512	+ 1351	+0.106	9.236 2601	+ 1421	+0.166	9.245 0065	+ 1498	+0.226	9.254 2445	+ 1584
+0.047	9.228 0863	+ 1353	+0.107	9.236 4022	+ 1421	+0.167	9.245 1563	+ 1499	+0.227	9.254 4029	+ 1587
+0.048	9.228 2216	+ 1354	+0.108	9.236 5443	+ 1423	+0.168	9.245 3062	+ 1501	+0.228	9.254 5616	+ 1588
+0.049	9.228 3570	+ 1354	+0.109	9.236 6866	+ 1424	+0.169	9.245 4563	+ 1501	+0.229	9.254 7204	+ 1589
+0.050	9.228 4924	+ 1356	+0.110	9.236 8290	+ 1426	+0.170	9.245 6064	+ 1504	+0.230	9.254 8793	+ 1591
+0.051	9.228 6280	+ 1357	+0.111	9.236 9716	+ 1427	+0.171	9.245 7568	+ 1504	+0.231	9.255 0384	+ 1593
+0.052	9.228 7637	+ 1358	+0.112	9.237 1143	+ 1427	+0.172	9.245 9072	+ 1506	+0.232	9.255 1977	+ 1594
+0.053	9.228 8995	+ 1360	+0.113	9.237 2570	+ 1429	+0.173	9.246 0578	+ 1508	+0.233	9.255 3571	+ 1596
+0.054	9.229 0355	+ 1360	+0.114	9.237 3999	+ 1431	+0.174	9.246 2086	+ 1508	+0.234	9.255 5167	+ 1597
+0.055	9.229 1715	+ 1361	+0.115	9.237 5430	+ 1431	+0.175	9.246 3594	+ 1510	+0.235	9.255 6764	+ 1599
+0.056	9.229 3076	+ 1363	+0.116	9.237 6861	+ 1433	+0.176	9.246 5104	+ 1512	+0.236	9.255 8363	+ 1600
+0.057	9.229 4439	+ 1364	+0.117	9.237 8294	+ 1434	+0.177	9.246 6616	+ 1513	+0.237	9.255 9963	+ 1602
+0.058	9.229 5803	+ 1364	+0.118	9.237 9728	+ 1435	+0.178	9.246 8129	+ 1514	+0.238	9.256 1565	+ 1604
+0.059	9.229 7167	+ 1366	+0.119	9.238 1163	+ 1437	+0.179	9.246 9643	+ 1516	+0.239	9.256 3169	+ 1605
+0.060	9.229 8533		+0.120	9.238 2600		+0.180	9.247 1159		+0.240	9.256 4774	

Tafel XVIII.

vergl. pag. 479.

θ	log P_1	Diff.	log P_3	Diff.	θ	log P_1	Diff.	log P_3	Diff.
−0.300	2.171 2355	−4337	1.772 3333	−7291	−0.250	2.150 3724	−4010	1.737 0306	−6832
−0.299	2.170 8018	−4330	1.771 6042	−7280	−0.249	2.149 9714	−4004	1.736 3474	−6823
−0.298	2.170 3688	−4322	1.770 8762	−7272	−0.248	2.149 5710	−3998	1.735 6651	−6814
−0.297	2.169 9366	−4316	1.770 1490	−7261	−0.247	2.149 1712	−3992	1.734 9837	−6806
−0.296	2.169 5050	−4309	1.769 4229	−7251	−0.246	2.148 7720	−3986	1.734 3031	−6797
−0.295	2.169 0741	−4301	1.768 6978	−7242	−0.245	2.148 3734	−3979	1.733 6234	−6789
−0.294	2.168 6440	−4295	1.767 9736	−7233	−0.244	2.147 9755	−3974	1.732 9445	−6780
−0.293	2.168 2145	−4288	1.767 2503	−7222	−0.243	2.147 5781	−3968	1.732 2665	−6772
−0.292	2.167 7857	−4281	1.766 5281	−7213	−0.242	2.147 1813	−3962	1.731 5893	−6764
−0.291	2.167 3576	−4275	1.765 8068	−7203	−0.241	2.146 7851	−3956	1.730 9129	−6755
−0.290	2.166 9301	−4267	1.765 0865	−7194	−0.240	2.146 3895	−3951	1.730 2374	−6747
−0.289	2.166 5034	−4261	1.764 3671	−7185	−0.239	2.145 9944	−3944	1.729 5627	−6738
−0.288	2.166 0773	−4253	1.763 6486	−7174	−0.238	2.145 6000	−3938	1.728 8889	−6730
−0.287	2.165 6520	−4247	1.762 9312	−7166	−0.237	2.145 2062	−3933	1.728 2159	−6722
−0.286	2.165 2273	−4241	1.762 2146	−7155	−0.236	2.144 8129	−3927	1.727 5437	−6713
−0.285	2.164 8032	−4233	1.761 4991	−7147	−0.235	2.144 4202	−3921	1.726 8724	−6706
−0.284	2.164 3799	−4227	1.760 7844	−7137	−0.234	2.144 0281	−3915	1.726 2018	−6696
−0.283	2.163 9572	−4220	1.760 0707	−7127	−0.233	2.143 6366	−3909	1.725 5322	−6689
−0.282	2.163 5352	−4214	1.759 3580	−7118	−0.232	2.143 2457	−3903	1.724 8633	−6681
−0.281	2.163 1138	−4207	1.758 6462	−7109	−0.231	2.142 8554	−3898	1.724 1952	−6672
−0.280	2.162 6931	−4200	1.757 9353	−7100	−0.230	2.142 4656	−3892	1.723 5280	−6664
−0.279	2.162 2731	−4193	1.757 2253	−7090	−0.229	2.142 0764	−3887	1.722 8616	−6656
−0.278	2.161 8538	−4187	1.756 5163	−7081	−0.228	2.141 6877	−3880	1.722 1960	−6648
−0.277	2.161 4351	−4181	1.755 8082	−7072	−0.227	2.141 2997	−3875	1.721 5312	−6639
−0.276	2.161 0170	−4174	1.755 1010	−7062	−0.226	2.140 9122	−3869	1.720 8673	−6632
−0.275	2.160 5996	−4167	1.754 3948	−7054	−0.225	2.140 5253	−3864	1.720 2041	−6624
−0.274	2.160 1829	−4161	1.753 6894	−7044	−0.224	2.140 1389	−3858	1.719 5417	−6615
−0.273	2.159 7668	−4154	1.752 9850	−7035	−0.223	2.139 7531	−3852	1.718 8802	−6608
−0.272	2.159 3514	−4148	1.752 2815	−7026	−0.222	2.139 3679	−3847	1.718 2194	−6599
−0.271	2.158 9366	−4141	1.751 5789	−7017	−0.221	2.138 9832	−3841	1.717 5595	−6592
−0.270	2.158 5225	−4135	1.750 8772	−7008	−0.220	2.138 5991	−3835	1.716 9003	−6583
−0.269	2.158 1090	−4129	1.750 1764	−6999	−0.219	2.138 2156	−3830	1.716 2420	−6576
−0.268	2.157 6961	−4122	1.749 4765	−6989	−0.218	2.137 8326	−3824	1.715 5844	−6567
−0.267	2.157 2839	−4116	1.748 7776	−6981	−0.217	2.137 4502	−3819	1.714 9277	−6560
−0.266	2.156 8723	−4109	1.748 0795	−6972	−0.216	2.137 0683	−3813	1.714 2717	−6552
−0.265	2.156 4614	−4103	1.747 3823	−6963	−0.215	2.136 6870	−3808	1.713 6165	−6544
−0.264	2.156 0511	−4097	1.746 6860	−6954	−0.214	2.136 3062	−3802	1.712 9621	−6536
−0.263	2.155 6414	−4090	1.745 9906	−6945	−0.213	2.135 9260	−3797	1.712 3085	−6529
−0.262	2.155 2324	−4085	1.745 2961	−6936	−0.212	2.135 5463	−3791	1.711 6556	−6520
−0.261	2.154 8239	−4077	1.744 6025	−6927	−0.211	2.135 1672	−3786	1.711 0036	−6513
−0.260	2.154 4162	−4072	1.743 9098	−6919	−0.210	2.134 7886	−3780	1.710 3523	−6505
−0.259	2.154 0090	−4065	1.743 2179	−6910	−0.209	2.134 4106	−3775	1.709 7018	−6497
−0.258	2.153 6025	−4059	1.742 5269	−6901	−0.208	2.134 0331	−3770	1.709 0521	−6489
−0.257	2.153 1966	−4053	1.741 8368	−6892	−0.207	2.133 6561	−3764	1.708 4032	−6482
−0.256	2.152 7913	−4047	1.741 1476	−6883	−0.206	2.133 2797	−3759	1.707 7550	−6474
−0.255	2.152 3866	−4041	1.740 4593	−6875	−0.205	2.132 9038	−3753	1.707 1076	−6467
−0.254	2.151 9825	−4034	1.739 7718	−6866	−0.204	2.132 5285	−3748	1.706 4609	−6458
−0.253	2.151 5791	−4028	1.739 0852	−6857	−0.203	2.132 1537	−3743	1.705 8151	−6451
−0.252	2.151 1763	−4023	1.738 3995	−6849	−0.202	2.131 7794	−3737	1.705 1700	−6444
−0.251	2.150 7740	−4016	1.737 7146	−6840	−0.201	2.131 4057	−3733	1.704 5256	−6436
−0.250	2.150 3724		1.737 0306		−0.200	2.131 0324		1.703 8820	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
−0.200	2.131 0324		1.703 8820		−0.150	2.113 0187		1.672 6329	
		−3726		−6428			−3479		−6072
−0.199	2.130 6598		1.703 2392		−0.149	2.112 6708		1.672 0257	
		−3722		−6421			−3474		−6064
−0.198	2.130 2876		1.702 5971		−0.148	2.112 3234		1.671 4193	
		−3716		−6413			−3470		−6058
−0.197	2.129 9160		1.701 9558		−0.147	2.111 9764		1.670 8135	
		−3711		−6406			−3465		−6051
−0.196	2.129 5449		1.701 3152		−0.146	2.111 6299		1.670 2084	
		−3706		−6398			−3461		−6045
−0.195	2.129 1743		1.700 6754		−0.145	2.111 2838		1.669 6039	
		−3700		−6390			−3456		−6037
−0.194	2.128 8043		1.700 0364		−0.144	2.110 9382		1.669 0002	
		−3696		−6384			−3451		−6032
−0.193	2.128 4347		1.699 3980		−0.143	2.110 5931		1.668 3970	
		−3690		−6375			−3447		−6024
−0.192	2.128 0657		1.698 7605		−0.142	2.110 2484		1.667 7946	
		−3685		−6369			−3442		−6018
−0.191	2.127 6972		1.698 1236		−0.141	2.109 9042		1.667 1928	
		−3680		−6360			−3438		−6011
−0.190	2.127 3292		1.697 4876		−0.140	2.109 5604		1.666 5917	
		−3674		−6354			−3433		−6005
−0.189	2.126 9618		1.696 8522		−0.139	2.109 2171		1.665 9912	
		−3670		−6346			−3429		−5998
−0.188	2.126 5948		1.696 2176		−0.138	2.108 8742		1.665 3914	
		−3664		−6339			−3424		−5992
−0.187	2.126 2284		1.695 5837		−0.137	2.108 5318		1.664 7922	
		−3660		−6331			−3420		−5985
−0.186	2.125 8624		1.694 9506		−0.136	2.108 1898		1.664 1937	
		−3654		−6324			−3415		−5978
−0.185	2.125 4970		1.694 3182		−0.135	2.107 8483		1.663 5959	
		−3649		−6317			−3411		−5972
−0.184	2.125 1321		1.693 6865		−0.134	2.107 5072		1.662 9987	
		−3644		−6309			−3406		−5966
−0.183	2.124 7677		1.693 0556		−0.133	2.107 1666		1.662 4021	
		−3639		−6302			−3402		−5959
−0.182	2.124 4038		1.692 4254		−0.132	2.106 8264		1.661 8062	
		−3634		−6295			−3397		−5952
−0.181	2.124 0404		1.691 7959		−0.131	2.106 4867		1.661 2110	
		−3628		−6288			−3393		−5946
−0.180	2.123 6776		1.691 1671		−0.130	2.106 1474		1.660 6164	
		−3624		−6280			−3389		−5940
−0.179	2.123 3152		1.690 5391		−0.129	2.105 8085		1.660 0224	
		−3619		−6273			−3384		−5933
−0.178	2.122 9533		1.689 9118		−0.128	2.105 4701		1.659 4291	
		−3614		−6266			−3379		−5927
−0.177	2.122 5919		1.689 2852		−0.127	2.105 1322		1.658 8364	
		−3609		−6259			−3376		−5920
−0.176	2.122 2310		1.688 6593		−0.126	2.104 7946		1.658 2444	
		−3604		−6252			−3370		−5914
−0.175	2.121 8706		1.688 0341		−0.125	2.104 4576		1.657 6530	
		−3599		−6244			−3367		−5908
−0.174	2.121 5107		1.687 4097		−0.124	2.104 1209		1.657 0622	
		−3594		−6238			−3362		−5901
−0.173	2.121 1513		1.686 7859		−0.123	2.103 7847		1.656 4721	
		−3589		−6230			−3358		−5895
−0.172	2.120 7924		1.686 1629		−0.122	2.103 4489		1.655 8826	
		−3584		−6223			−3354		−5889
−0.171	2.120 4340		1.685 5406		−0.121	2.103 1135		1.655 2937	
		−3579		−6216			−3349		−5882
−0.170	2.120 0761		1.684 9190		−0.120	2.102 7786		1.654 7055	
		−3574		−6209			−3345		−5876
−0.169	2.119 7187		1.684 2981		−0.119	2.102 4441		1.654 1179	
		−3570		−6202			−3340		−5870
−0.168	2.119 3617		1.683 6779		−0.118	2.102 1101		1.653 5309	
		−3564		−6195			−3336		−5863
−0.167	2.119 0053		1.683 0584		−0.117	2.101 7765		1.652 9446	
		−3560		−6188			−3332		−5857
−0.166	2.118 6493		1.682 4396		−0.116	2.101 4433		1.652 3589	
		−3555		−6181			−3328		−5851
−0.165	2.118 2938		1.681 8215		−0.115	2.101 1105		1.651 7738	
		−3550		−6174			−3323		−5845
−0.164	2.117 9388		1.681 2041		−0.114	2.100 7782		1.651 1893	
		−3545		−6167			−3320		−5838
−0.163	2.117 5843		1.680 5874		−0.113	2.100 4462		1.650 6055	
		−3541		−6160			−3315		−5833
−0.162	2.117 2302		1.679 9714		−0.112	2.100 1147		1.650 0222	
		−3535		−6153			−3310		−5826
−0.161	2.116 8767		1.679 3561		−0.111	2.099 7837		1.649 4396	
		−3531		−6147			−3307		−5820
−0.160	2.116 5236		1.678 7414		−0.110	2.099 4530		1.648 8576	
		−3526		−6139			−3302		−5813
−0.159	2.116 1710		1.678 1275		−0.109	2.099 1228		1.648 2763	
		−3522		−6133			−3298		−5808
−0.158	2.115 8188		1.677 5142		−0.108	2.098 7930		1.647 6955	
		−3516		−6125			−3294		−5801
−0.157	2.115 4672		1.676 9017		−0.107	2.098 4636		1.647 1154	
		−3512		−6119			−3290		−5796
−0.156	2.115 1160		1.676 2898		−0.106	2.098 1346		1.646 5358	
		−3507		−6112			−3285		−5789
−0.155	2.114 7653		1.675 6786		−0.105	2.097 8061		1.645 9569	
		−3503		−6105			−3281		−5783
−0.154	2.114 4150		1.675 0681		−0.104	2.097 4780		1.645 3786	
		−3497		−6098			−3278		−5777
−0.153	2.114 0653		1.674 4583		−0.103	2.097 1502		1.644 8009	
		−3494		−6092			−3273		−5771
−0.152	2.113 7159		1.673 8491		−0.102	2.096 8229		1.644 2238	
		−3488		−6084			−3269		−5765
−0.151	2.113 3671		1.673 2407		−0.101	2.096 4960		1.643 6473	
		−3484		−6078			−3264		−5759
−0.150	2.113 0187		1.672 6329		−0.100	2.096 1696		1.643 0714	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
0.100	2.096 1696		1.643 0714		0.050	2.080 3505		1.615 0198	
		3261		5753			3067		— 5467
0.099	2.095 8435		1.642 4961		0.049	2.080 0438		1.614 4731	
		3257		5747			3063		— 5461
0.098	2.095 5178		1.641 9214		0.048	2.079 7375		1.613 9270	
		3252		5740			3060		— 5457
0.097	2.095 1926		1.641 3474		0.047	2.079 4315		1.613 3813	
		3248		5735			3056		— 5450
0.096	2.094 8678		1.640 7739		0.046	2.079 1259		1.612 8363	
		3245		5729			3052		— 5446
0.095	2.094 5433		1.640 2010		0.045	2.078 8207		1.612 2917	
		3240		5723			3049		— 5440
0.094	2.094 2193		1.639 6287		0.044	2.078 5158		1.611 7477	
		3236		5717			3045		— 5435
0.093	2.093 8957		1.639 0570		0.043	2.078 2113		1.611 2042	
		3232		5711			3041		— 5429
0.092	2.093 5725		1.638 4859		0.042	2.077 9072		1.610 6613	
		3229		5705			3038		— 5424
0.091	2.093 2496		1.637 9154		0.041	2.077 6034		1.610 1189	
		3224		5699			3034		— 5419
0.090	2.092 9272		1.637 3455		0.040	2.077 3000		1.609 5770	
		3220		5693			3031		— 5413
0.089	2.092 6052		1.636 7762		0.039	2.076 9969		1.609 0357	
		3216		5688			3027		— 5408
0.088	2.092 2836		1.636 2074		0.038	2.076 6942		1.608 4949	
		3212		5681			3023		— 5403
0.087	2.091 9624		1.635 6393		0.037	2.076 3919		1.607 9546	
		3208		5676			3020		— 5397
0.086	2.091 6416		1.635 0717		0.036	2.076 0899		1.607 4149	
		3204		5670			3017		— 5393
0.085	2.091 3212		1.634 5047		0.035	2.075 7882		1.606 8756	
		3200		5664			3012		— 5387
0.084	2.091 0012		1.633 9383		0.034	2.075 4870		1.606 3369	
		3196		5658			3010		— 5381
0.083	2.090 6816		1.633 3725		0.033	2.075 1860		1.605 7988	
		3193		5652			3005		— 5377
0.082	2.090 3623		1.632 8073		0.032	2.074 8855		1.605 2611	
		3188		5646			3003		— 5371
0.081	2.090 0435		1.632 2427		0.031	2.074 5852		1.604 7240	
		3184		5641			2998		— 5366
0.080	2.089 7251		1.631 6786		0.030	2.074 2854		1.604 1874	
		3181		5635			2996		— 5361
0.079	2.089 4070		1.631 1151		0.029	2.073 9858		1.603 6513	
		3176		5629			2992		— 5355
0.078	2.089 0894		1.630 5522		0.028	2.073 6866		1.603 1158	
		3173		5624			2988		— 5351
0.077	2.088 7721		1.629 9898		0.027	2.073 3878		1.602 5807	
		3169		5617			2985		— 5345
0.076	2.088 4552		1.629 4281		0.026	2.073 0893		1.602 0462	
		3164		5612			2981		— 5340
0.075	2.088 1388		1.628 8669		0.025	2.072 7912		1.601 5122	
		3161		5606			2978		— 5335
0.074	2.087 8227		1.628 3063		0.024	2.072 4934		1.600 9787	
		3157		5601			2974		— 5329
0.073	2.087 5070		1.627 7462		0.023	2.072 1960		1.600 4458	
		3154		5595			2971		— 5325
0.072	2.087 1916		1.627 1867		0.022	2.071 8989		1.599 9133	
		3149		5589			2968		— 5319
0.071	2.086 8767		1.626 6278		0.021	2.071 6021		1.599 3814	
		3145		5583			2964		— 5315
0.070	2.086 5622		1.626 0695		0.020	2.071 3057		1.598 8499	
		3142		5578			2960		— 5309
0.069	2.086 2480		1.625 5117		0.019	2.071 0097		1.598 3190	
		3138		5572			2958		— 5304
0.068	2.085 9342		1.624 9545		0.018	2.070 7139		1.597 7886	
		3134		5567			2953		— 5299
0.067	2.085 6208		1.624 3978		0.017	2.070 4186		1.597 2587	
		3130		5561			2951		— 5294
0.066	2.085 3078		1.623 8417		0.016	2.070 1235		1.596 7293	
		3127		5555			2947		— 5289
0.065	2.084 9951		1.623 2862		0.015	2.069 8288		1.596 2004	
		3122		5550			2943		— 5284
0.064	2.084 6829		1.622 7312		0.014	2.069 5345		1.595 6720	
		3119		5544			2941		— 5278
0.063	2.084 3710		1.622 1768		0.013	2.069 2404		1.595 1442	
		3115		5538			2937		— 5274
0.062	2.084 0595		1.621 6230		0.012	2.068 9467		1.594 6168	
		3112		5533			2933		— 5269
0.061	2.083 7483		1.621 0697		0.011	2.068 6534		1.594 0899	
		3107		5528			2930		— 5263
0.060	2.083 4376		1.620 5169		0.010	2.068 3604		1.593 5636	
		3104		5521			2927		— 5259
0.059	2.083 1272		1.619 9648		0.009	2.068 0677		1.593 0377	
		3100		5517			2923		— 5254
0.058	2.082 8172		1.619 4131		0.008	2.067 7754		1.592 5123	
		3097		5510			2921		— 5248
0.057	2.082 5075		1.618 8621		0.007	2.067 4833		1.591 9875	
		3092		5506			2916		— 5244
0.056	2.082 1983		1.618 3115		0.006	2.067 1917		1.591 4631	
		3089		5500			2914		— 5239
0.055	2.081 8894		1.617 7615		0.005	2.066 9003		1.590 9392	
		3085		5494			2910		— 5233
0.054	2.081 5809		1.617 2121		0.004	2.066 6093		1.590 4159	
		3082		5489			2907		— 5229
0.053	2.081 2727		1.616 6632		0.003	2.066 3186		1.589 8930	
		3078		5483			2903		— 5224
0.052	2.080 9649		1.616 1149		0.002	2.066 0283		1.589 3706	
		3074		5478			2901		— 5219
0.051	2.080 6575		1.615 5671		0.001	2.065 7382		1.588 8487	
		3070		5473			2896		— 5214
0.050	2.080 3505		1.615 0198		0.000	2.065 4486		1.588 3273	

Tafel XVIII.

θ	log P_1	Diff.	log P_3	Diff.	θ	log P_1	Diff.	log P_3	Diff.
0.000	2.065 4486		1.588 3273		+0.050	2.051 3681		1.562 8647	
		−2894		−5209			−2738		−4975
+0.001	2.065 1592		1.587 8064		+0.051	2.051 0943		1.562 3672	
		−2890		−5204			−2735		−4971
+0.002	2.064 8702		1.587 2860		+0.052	2.050 8208		1.561 8701	
		−2888		−5200			−2732		−4966
+0.003	2.064 5814		1.586 7660		+0.053	2.050 5476		1.561 3735	
		−2883		−5194			−2730		−4962
+0.004	2.064 2931		1.586 2466		+0.054	2.050 2746		1.560 8773	
		−2881		−5189			−2726		−4957
+0.005	2.064 0050		1.585 7277		+0.055	2.050 0020		1.560 3816	
		−2877		−5185			−2723		−4953
+0.006	2.063 7173		1.585 2092		+0.056	2.049 7297		1.559 8863	
		−2875		−5180			−2721		−4948
+0.007	2.063 4298		1.584 6912		+0.057	2.049 4576		1.559 3915	
		−2870		−5175			−2717		−4944
+0.008	2.063 1428		1.584 1737		+0.058	2.049 1859		1.558 8971	
		−2868		−5170			−2715		−4939
+0.009	2.062 8560		1.583 6567		+0.059	2.048 9144		1.558 4032	
		−2865		−5165			−2712		−4936
+0.010	2.062 5695		1.583 1402		+0.060	2.048 6432		1.557 9096	
		−2861		−5161			−2709		−4930
+0.011	2.062 2834		1.582 6241		+0.061	2.048 3723		1.557 4166	
		−2858		−5155			−2706		−4927
+0.012	2.061 9976		1.582 1086		+0.062	2.048 1017		1.556 9239	
		−2855		−5151			−2703		−4922
+0.013	2.061 7121		1.581 5935		+0.063	2.047 8314		1.556 4317	
		−2851		−5146			−2700		−4917
+0.014	2.061 4270		1.581 0789		+0.064	2.047 5614		1.555 9400	
		−2849		−5142			−2698		−4914
+0.015	2.061 1421		1.580 5647		+0.065	2.047 2916		1.555 4486	
		−2845		−5136			−2694		−4909
+0.016	2.060 8576		1.580 0511		+0.066	2.047 0222		1.554 9577	
		−2842		−5132			−2692		−4904
+0.017	2.060 5734		1.579 5379		+0.067	2.046 7530		1.554 4673	
		−2839		−5127			−2688		−4900
+0.018	2.060 2895		1.579 0252		+0.068	2.046 4842		1.553 9773	
		−2836		−5122			−2686		−4896
+0.019	2.060 0059		1.578 5130		+0.069	2.046 2156		1.553 4877	
		−2832		−5117			−2684		−4892
+0.020	2.059 7227		1.578 0013		+0.070	2.045 9472		1.552 9985	
		−2830		−5113			−2680		−4887
+0.021	2.059 4397		1.577 4900		+0.071	2.045 6792		1.552 5098	
		−2826		−5108			−2677		−4883
+0.022	2.059 1571		1.576 9792		+0.072	2.045 4115		1.552 0215	
		−2823		−5104			−2675		−4879
+0.023	2.058 8748		1.576 4688		+0.073	2.045 1440		1.551 5336	
		−2820		−5098			−2672		−4874
+0.024	2.058 5928		1.575 9590		+0.074	2.044 8768		1.551 0462	
		−2817		−5094			−2669		−4871
+0.025	2.058 3111		1.575 4496		+0.075	2.044 6099		1.550 5591	
		−2814		−5089			−2666		−4865
+0.026	2.058 0297		1.574 9407		+0.076	2.044 3433		1.550 0726	
		−2811		−5085			−2663		−4862
+0.027	2.057 7486		1.574 4322		+0.077	2.044 0770		1.549 5864	
		−2808		−5080			−2661		−4857
+0.028	2.057 4678		1.573 9242		+0.078	2.043 8109		1.549 1007	
		−2804		−5075			−2657		−4854
+0.029	2.057 1874		1.573 4167		+0.079	2.043 5452		1.548 6153	
		−2802		−5071			−2655		−4848
+0.030	2.056 9072		1.572 9096		+0.080	2.043 2797		1.548 1305	
		−2798		−5066			−2653		−4845
+0.031	2.056 6274		1.572 4030		+0.081	2.043 0144		1.547 6460	
		−2795		−5061			−2649		−4841
+0.032	2.056 3479		1.571 8969		+0.082	2.042 7495		1.547 1619	
		−2793		−5057			−2647		−4836
+0.033	2.056 0686		1.571 3912		+0.083	2.042 4848		1.546 6783	
		−2789		−5052			−2643		−4832
+0.034	2.055 7897		1.570 8860		+0.084	2.042 2205		1.546 1951	
		−2786		−5048			−2642		−4828
+0.035	2.055 5111		1.570 3812		+0.085	2.041 9563		1.545 7123	
		−2783		−5042			−2638		−4823
+0.036	2.055 2328		1.569 8770		+0.086	2.041 6925		1.545 2300	
		−2780		−5039			−2636		−4820
+0.037	2.054 9548		1.569 3731		+0.087	2.041 4289		1.544 7480	
		−2777		−5034			−2632		−4815
+0.038	2.054 6771		1.568 8697		+0.088	2.041 1657		1.544 2665	
		−2774		−5029			−2631		−4811
+0.039	2.054 3997		1.568 3668		+0.089	2.040 9026		1.543 7854	
		−2771		−5024			−2627		−4807
+0.040	2.054 1226		1.567 8644		+0.090	2.040 6399		1.543 3047	
		−2768		−5020			−2625		−4803
+0.041	2.053 8458		1.567 3624		+0.091	2.040 3774		1.542 8244	
		−2765		−5016			−2622		−4798
+0.042	2.053 5693		1.566 8608		+0.092	2.040 1152		1.542 3446	
		−2762		−5011			−2619		−4795
+0.043	2.053 2931		1.566 3597		+0.093	2.039 8533		1.541 8651	
		−2759		−5006			−2616		−4790
+0.044	2.053 0172		1.565 8591		+0.094	2.039 5917		1.541 3861	
		−2756		−5002			−2614		−4786
+0.045	2.052 7416		1.565 3589		+0.095	2.039 3303		1.540 9075	
		−2753		−4998			−2611		−4782
+0.046	2.052 4663		1.564 8591		+0.096	2.039 0692		1.540 4293	
		−2750		−4993			−2609		−4778
+0.047	2.052 1913		1.564 3598		+0.097	2.038 8083		1.539 9515	
		−2747		−4988			−2605		−4774
+0.048	2.051 9166		1.563 8610		+0.098	2.038 5478		1.539 4741	
		−2744		−4984			−2603		−4770
+0.049	2.051 6422		1.563 3626		+0.099	2.038 2875		1.538 9971	
		−2741		−4979			−2601		−4766
+0.050	2.051 3681		1.562 8647		+0.100	2.038 0274		1.538 5205	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
+ 0.100	2.038 0274		1.538 5205	
		— 2598		— 4761
+ 0.101	2.037 7676		1.538 0444	
		— 2595		— 4758
+ 0.102	2.037 5081		1.537 5686	
		— 2592		— 4753
+ 0.103	2.037 2489		1.537 0933	
		— 2590		— 4750
+ 0.104	2.036 9899		1.536 6183	
		— 2587		— 4745
+ 0.105	2.036 7312		1.536 1438	
		— 2584		— 4741
+ 0.106	2.036 4728		1.535 6697	
		— 2582		— 4737
+ 0.107	2.036 2146		1.535 1960	
		— 2579		— 4734
+ 0.108	2.035 9567		1.534 7226	
		— 2576		— 4729
+ 0.109	2.035 6991		1.534 2497	
		— 2574		— 4725
+ 0.110	2.035 4417		1.533 7772	
		— 2572		— 4721
+ 0.111	2.035 1845		1.533 3051	
		— 2568		— 4717
+ 0.112	2.034 9277		1.532 8334	
		— 2566		— 4713
+ 0.113	2.034 6711		1.532 3621	
		— 2564		— 4710
+ 0.114	2.034 4147		1.531 8911	
		— 2560		— 4705
+ 0.115	2.034 1587		1.531 4206	
		— 2559		— 4701
+ 0.116	2.033 9028		1.530 9505	
		— 2555		— 4697
+ 0.117	2.033 6473		1.530 4808	
		— 2553		— 4693
+ 0.118	2.033 3920		1.530 0115	
		— 2551		— 4690
+ 0.119	2.033 1369		1.529 5425	
		— 2547		— 4685
+ 0.120	2.032 8822		1.529 0740	
		— 2546		— 4682
+ 0.121	2.032 6276		1.528 6058	
		— 2542		— 4677
+ 0.122	2.032 3734		1.528 1381	
		— 2541		— 4674
+ 0.123	2.032 1193		1.527 6707	
		— 2537		— 4669
+ 0.124	2.031 8656		1.527 2038	
		— 2535		— 4666
+ 0.125	2.031 6121		1.526 7372	
		— 2533		— 4662
+ 0.126	2.031 3588		1.526 2710	
		— 2530		— 4658
+ 0.127	2.031 1058		1.525 8052	
		— 2527		— 4654
+ 0.128	2.030 8531		1.525 3398	
		— 2525		— 4650
+ 0.129	2.030 6006		1.524 8748	
		— 2522		— 4646
+ 0.130	2.030 3484		1.524 4102	
		— 2520		— 4642
+ 0.131	2.030 0964		1.523 9460	
		— 2517		— 4639
+ 0.132	2.029 8447		1.523 4821	
		— 2515		— 4635
+ 0.133	2.029 5932		1.523 0186	
		— 2513		— 4630
+ 0.134	2.029 3419		1.522 5556	
		— 2509		— 4627
+ 0.135	2.029 0910		1.522 0929	
		— 2508		— 4623
+ 0.136	2.028 8402		1.521 6306	
		— 2504		— 4620
+ 0.137	2.028 5898		1.521 1686	
		— 2503		— 4615
+ 0.138	2.028 3395		1.520 7071	
		— 2499		— 4612
+ 0.139	2.028 0896		1.520 2459	
		— 2498		— 4608
+ 0.140	2.027 8398		1.519 7851	
		— 2495		— 4603
+ 0.141	2.027 5903		1.519 3248	
		— 2492		— 4601
+ 0.142	2.027 3411		1.518 8647	
		— 2490		— 4596
+ 0.143	2.027 0921		1.518 4051	
		— 2487		— 4593
+ 0.144	2.026 8434		1.517 9458	
		— 2485		— 4588
+ 0.145	2.026 5949		1.517 4870	
		— 2483		— 4585
+ 0.146	2.026 3466		1.517 0285	
		— 2480		— 4582
+ 0.147	2.026 0986		1.516 5703	
		— 2478		— 4577
+ 0.148	2.025 8508		1.516 1126	
		— 2475		— 4574
+ 0.149	2.025 6033		1.515 6552	
		— 2472		— 4570
+ 0.150	2.025 3561		1.515 1982	

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
+ 0.150	2.025 3561		1.515 1982	
		— 2471		— 4566
+ 0.151	2.025 1090		1.514 7416	
		— 2468		— 4563
+ 0.152	2.024 8622		1.514 2853	
		— 2465		— 4558
+ 0.153	2.024 6157		1.513 8295	
		— 2463		— 4556
+ 0.154	2.024 3694		1.513 3739	
		— 2461		— 4551
+ 0.155	2.024 1233		1.512 9188	
		— 2458		— 4547
+ 0.156	2.023 8775		1.512 4641	
		— 2456		— 4544
+ 0.157	2.023 6319		1.512 0097	
		— 2453		— 4541
+ 0.158	2.023 3866		1.511 5556	
		— 2452		— 4536
+ 0.159	2.023 1414		1.511 1020	
		— 2448		— 4533
+ 0.160	2.022 8966		1.510 6487	
		— 2446		— 4529
+ 0.161	2.022 6520		1.510 1958	
		— 2444		— 4525
+ 0.162	2.022 4076		1.509 7433	
		— 2442		— 4522
+ 0.163	2.022 1634		1.509 2911	
		— 2439		— 4518
+ 0.164	2.021 9195		1.508 8393	
		— 2437		— 4515
+ 0.165	2.021 6758		1.508 3878	
		— 2434		— 4511
+ 0.166	2.021 4324		1.507 9367	
		— 2432		— 4507
+ 0.167	2.021 1892		1.507 4860	
		— 2430		— 4503
+ 0.168	2.020 9462		1.507 0357	
		— 2427		— 4500
+ 0.169	2.020 7035		1.506 5857	
		— 2425		— 4496
+ 0.170	2.020 4610		1.506 1361	
		— 2423		— 4493
+ 0.171	2.020 2187		1.505 6868	
		— 2420		— 4489
+ 0.172	2.019 9767		1.505 2379	
		— 2418		— 4486
+ 0.173	2.019 7349		1.504 7893	
		— 2416		— 4481
+ 0.174	2.019 4933		1.504 3412	
		— 2413		— 4479
+ 0.175	2.019 2520		1.503 8933	
		— 2411		— 4474
+ 0.176	2.019 0109		1.503 4459	
		— 2409		— 4471
+ 0.177	2.018 7700		1.502 9988	
		— 2406		— 4468
+ 0.178	2.018 5294		1.502 5520	
		— 2404		— 4464
+ 0.179	2.018 2890		1.502 1056	
		— 2402		— 4460
+ 0.180	2.018 0488		1.501 6596	
		— 2400		— 4457
+ 0.181	2.017 8088		1.501 2139	
		— 2397		— 4453
+ 0.182	2.017 5691		1.500 7686	
		— 2395		— 4449
+ 0.183	2.017 3296		1.500 3237	
		— 2392		— 4447
+ 0.184	2.017 0904		1.499 8790	
		— 2390		— 4442
+ 0.185	2.016 8514		1.499 4348	
		— 2388		— 4439
+ 0.186	2.016 6126		1.498 9909	
		— 2386		— 4436
+ 0.187	2.016 3740		1.498 5473	
		— 2384		— 4432
+ 0.188	2.016 1356		1.498 1041	
		— 2381		— 4428
+ 0.189	2.015 8975		1.497 6613	
		— 2379		— 4425
+ 0.190	2.015 6596		1.497 2188	
		— 2377		— 4421
+ 0.191	2.015 4219		1.496 7767	
		— 2374		— 4418
+ 0.192	2.015 1845		1.496 3349	
		— 2372		— 4415
+ 0.193	2.014 9473		1.495 8934	
		— 2370		— 4411
+ 0.194	2.014 7103		1.495 4523	
		— 2368		— 4407
+ 0.195	2.014 4735		1.495 0116	
		— 2365		— 4404
+ 0.196	2.014 2370		1.494 5712	
		— 2364		— 4401
+ 0.197	2.014 0006		1.494 1311	
		— 2361		— 4397
+ 0.198	2.013 7645		1.493 6914	
		— 2358		— 4393
+ 0.199	2.013 5287		1.493 2521	
		— 2357		— 4391
+ 0.200	2.013 2930		1.492 8130	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
+0.200	2.013 2930	−2354	1.492 8130	−4386	+0.250	2.001 7851	−2248	1.471 2906	−4221
+0.201	2.013 0576	−2352	1.492 3744	−4384	+0.251	2.001 5603	−2246	1.470 8685	−4218
+0.202	2.012 8224	−2350	1.491 9360	−4379	+0.252	2.001 3357	−2244	1.470 4467	−4214
+0.203	2.012 5874	−2348	1.491 4981	−4377	+0.253	2.001 1113	−2243	1.470 0253	−4212
+0.204	2.012 3526	−2345	1.491 0604	−4373	+0.254	2.000 8870	−2240	1.469 6041	−4208
+0.205	2.012 1181	−2344	1.490 6231	−4369	+0.255	2.000 6630	−2238	1.469 1833	−4206
+0.206	2.011 8837	−2341	1.490 1862	−4366	+0.256	2.000 4392	−2236	1.468 7627	−4202
+0.207	2.011 6496	−2339	1.489 7496	−4363	+0.257	2.000 2156	−2234	1.468 3425	−4199
+0.208	2.011 4157	−2336	1.489 3133	−4359	+0.258	1.999 9922	−2232	1.467 9226	−4196
+0.209	2.011 1821	−2335	1.488 8774	−4356	+0.259	1.999 7690	−2230	1.467 5030	−4192
+0.210	2.010 9486	−2332	1.488 4418	−4353	+0.260	1.999 5460	−2229	1.467 0838	−4190
+0.211	2.010 7154	−2330	1.488 0065	−4349	+0.261	1.999 3231	−2226	1.466 6648	−4186
+0.212	2.010 4824	−2328	1.487 5716	−4346	+0.262	1.999 1005	−2224	1.466 2462	−4184
+0.213	2.010 2496	−2326	1.487 1370	−4342	+0.263	1.998 8781	−2222	1.465 8278	−4180
+0.214	2.010 0170	−2324	1.486 7028	−4339	+0.264	1.998 6559	−2220	1.465 4098	−4177
+0.215	2.009 7846	−2321	1.486 2689	−4336	+0.265	1.998 4339	−2218	1.464 9921	−4174
+0.216	2.009 5525	−2320	1.485 8353	−4332	+0.266	1.998 2121	−2217	1.464 5747	−4171
+0.217	2.009 3205	−2317	1.485 4021	−4329	+0.267	1.997 9904	−2214	1.464 1576	−4167
+0.218	2.009 0888	−2315	1.484 9692	−4326	+0.268	1.997 7690	−2212	1.463 7409	−4165
+0.219	2.008 8573	−2313	1.484 5366	−4322	+0.269	1.997 5478	−2210	1.463 3244	−4161
+0.220	2.008 6260	−2311	1.484 1044	−4319	+0.270	1.997 3268	−2209	1.462 9083	−4159
+0.221	2.008 3949	−2308	1.483 6725	−4315	+0.271	1.997 1059	−2206	1.462 4924	−4155
+0.222	2.008 1641	−2307	1.483 2410	−4313	+0.272	1.996 8853	−2204	1.462 0769	−4152
+0.223	2.007 9334	−2304	1.482 8097	−4309	+0.273	1.996 6649	−2203	1.461 6617	−4150
+0.224	2.007 7030	−2303	1.482 3788	−4305	+0.274	1.996 4446	−2200	1.461 2467	−4146
+0.225	2.007 4727	−2300	1.481 9483	−4302	+0.275	1.996 2246	−2199	1.460 8321	−4143
+0.226	2.007 2427	−2298	1.481 5181	−4299	+0.276	1.996 0047	−2197	1.460 4178	−4140
+0.227	2.007 0129	−2296	1.481 0882	−4296	+0.277	1.995 7850	−2194	1.460 0038	−4137
+0.228	2.006 7833	−2293	1.480 6586	−4292	+0.278	1.995 5656	−2193	1.459 5901	−4134
+0.229	2.006 5540	−2292	1.480 2294	−4289	+0.279	1.995 3463	−2191	1.459 1767	−4131
+0.230	2.006 3248	−2290	1.479 8005	−4286	+0.280	1.995 1272	−2189	1.458 7636	−4127
+0.231	2.006 0958	−2287	1.479 3719	−4283	+0.281	1.994 9083	−2187	1.458 3509	−4125
+0.232	2.005 8671	−2286	1.478 9436	−4279	+0.282	1.994 6896	−2185	1.457 9384	−4122
+0.233	2.005 6385	−2283	1.478 5157	−4276	+0.283	1.994 4711	−2183	1.457 5262	−4119
+0.234	2.005 4102	−2281	1.478 0881	−4273	+0.284	1.994 2528	−2181	1.457 1143	−4115
+0.235	2.005 1821	−2279	1.477 6608	−4269	+0.285	1.994 0347	−2179	1.456 7028	−4113
+0.236	2.004 9542	−2277	1.477 2339	−4266	+0.286	1.993 8168	−2178	1.456 2915	−4110
+0.237	2.004 7265	−2275	1.476 8073	−4263	+0.287	1.993 5990	−2175	1.455 8805	−4106
+0.238	2.004 4990	−2273	1.476 3810	−4260	+0.288	1.993 3815	−2174	1.455 4699	−4104
+0.239	2.004 2717	−2271	1.475 9550	−4256	+0.289	1.993 1641	−2171	1.455 0595	−4101
+0.240	2.004 0446	−2269	1.475 5294	−4254	+0.290	1.992 9470	−2170	1.454 6494	−4097
+0.241	2.003 8177	−2266	1.475 1040	−4249	+0.291	1.992 7300	−2168	1.454 2397	−4095
+0.242	2.003 5911	−2265	1.474 6791	−4247	+0.292	1.992 5132	−2166	1.453 8302	−4092
+0.243	2.003 3646	−2262	1.474 2544	−4244	+0.293	1.992 2966	−2164	1.453 4210	−4088
+0.244	2.003 1384	−2261	1.473 8300	−4240	+0.294	1.992 0802	−2162	1.453 0122	−4086
+0.245	2.002 9123	−2258	1.473 4060	−4237	+0.295	1.991 8640	−2160	1.452 6036	−4083
+0.246	2.002 6865	−2257	1.472 9823	−4234	+0.296	1.991 6480	−2159	1.452 1953	−4079
+0.247	2.002 4608	−2254	1.472 5589	−4231	+0.297	1.991 4321	−2156	1.451 7874	−4077
+0.248	2.002 2354	−2252	1.472 1358	−4227	+0.298	1.991 2165	−2155	1.451 3797	−4074
+0.249	2.002 0102	−2251	1.471 7131	−4225	+0.299	1.991 0010	−2153	1.450 9723	−4071
+0.250	2.001 7851		1.471 2906		+0.300	1.990 7857		1.450 5652	

Tafel XIX.

vergl. pag. 512.

Jahr.	jg. K.	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
00	jg. K.	001	032	060	091	121	152	182	213	244	274	305	335
00		000	031	060	091	121	152	182	213	244	274	305	335
01		366	397	425	456	486	517	547	578	609	639	670	700
02		731	762	790	821	851	882	912	943	974	$\bar{0}04$	$\bar{0}35$	$\bar{0}65$
03	1	096	127	155	186	216	247	277	308	339	369	400	430
04		461	492	521	552	582	613	643	674	705	735	766	796
05		827	858	886	917	947	978	$\bar{0}08$	$\bar{0}39$	$\bar{0}70$	$\bar{1}00$	$\bar{1}31$	$\bar{1}61$
06	2	192	223	251	282	312	343	373	404	435	465	496	526
07		557	588	616	647	677	708	738	769	800	830	861	891
08		922	953	982	$\bar{0}13$	$\bar{0}43$	$\bar{0}74$	$\bar{1}04$	$\bar{1}35$	$\bar{1}66$	$\bar{1}96$	$\bar{2}27$	$\bar{2}57$
09	3	288	319	347	378	408	439	469	500	531	561	592	622
10		653	684	712	743	773	804	834	865	896	926	957	987
11	4	018	049	077	108	138	169	199	230	261	291	322	352
12		383	414	443	474	504	535	565	596	627	657	688	718
13		749	780	808	839	869	900	930	961	992	$\bar{0}22$	$\bar{0}53$	$\bar{0}83$
14	5	114	145	173	204	234	265	295	326	357	387	418	448
15		479	510	538	569	599	630	660	691	722	752	783	813
16		844	875	904	935	965	996	$\bar{0}26$	$\bar{0}57$	$\bar{0}88$	$\bar{1}18$	$\bar{1}49$	$\bar{1}79$
17	6	210	241	269	300	330	361	391	422	453	483	514	544
18		575	606	634	665	695	726	756	787	818	848	879	909
19		940	971	999	$\bar{0}30$	$\bar{0}60$	$\bar{0}91$	$\bar{1}21$	$\bar{1}52$	$\bar{1}83$	$\bar{2}13$	$\bar{2}44$	$\bar{2}74$
20	7	305	336	365	396	426	457	487	518	549	579	610	640
21		671	702	730	761	791	822	852	883	914	944	975	$\bar{0}05$
22	8	036	067	095	126	156	187	217	248	279	309	340	370
23		401	432	460	491	521	552	582	613	644	674	705	735
24		766	797	826	857	887	918	948	979	$\bar{0}10$	$\bar{0}40$	$\bar{0}71$	$\bar{1}01$
25	9	132	163	191	222	252	283	313	344	375	405	436	466
26		497	528	556	587	617	648	678	709	740	770	801	831
27		862	893	921	952	982	$\bar{0}13$	$\bar{0}43$	$\bar{0}74$	$\bar{1}05$	$\bar{1}35$	$\bar{1}66$	$\bar{1}96$
28	10	227	258	287	318	348	379	409	440	471	501	532	562
29		593	624	652	683	713	744	774	805	836	866	897	927
30		958	989	$\bar{0}17$	$\bar{0}48$	$\bar{0}78$	$\bar{1}09$	$\bar{1}39$	$\bar{1}70$	$\bar{2}01$	$\bar{2}31$	$\bar{2}62$	$\bar{2}92$
31	11	323	354	382	413	443	474	504	535	566	596	627	657
32		688	719	748	779	809	840	870	901	932	962	993	$\bar{0}23$
33	12	054	085	113	144	174	205	235	266	297	327	358	388
34		419	450	478	509	539	570	600	631	662	692	723	753
35		784	815	843	874	904	935	965	996	$\bar{0}27$	$\bar{0}57$	$\bar{0}88$	$\bar{1}18$
36	13	149	180	209	240	270	301	331	362	393	423	454	484
37		515	546	574	605	635	666	696	727	758	788	819	849
38		880	911	939	970	$\bar{0}00$	$\bar{0}31$	$\bar{0}61$	$\bar{0}92$	$\bar{1}23$	$\bar{1}53$	$\bar{1}84$	$\bar{2}14$
39	14	245	276	304	335	365	396	426	457	488	518	549	579
40		610	641	670	701	731	762	792	823	854	884	915	945
41		976	$\bar{0}07$	$\bar{0}35$	$\bar{0}66$	$\bar{0}96$	$\bar{1}27$	$\bar{1}57$	$\bar{1}88$	$\bar{2}19$	$\bar{2}49$	$\bar{2}80$	$\bar{3}10$
42	15	341	372	400	431	461	492	522	553	584	614	645	675
43		706	737	765	796	826	857	887	918	949	979	$\bar{0}10$	$\bar{0}40$
44	16	071	102	131	162	192	223	253	284	315	345	376	406
45		437	468	496	527	557	588	618	649	680	710	741	771
46		802	833	861	892	922	953	983	$\bar{0}14$	$\bar{0}45$	$\bar{0}75$	$\bar{1}06$	$\bar{1}36$
47	17	167	198	226	257	287	318	348	379	410	440	471	501
48		532	563	592	623	653	684	714	745	776	806	837	867
49		898	929	957	988	$\bar{0}18$	$\bar{0}49$	$\bar{0}79$	$\bar{1}10$	$\bar{1}41$	$\bar{1}71$	$\bar{2}02$	$\bar{2}32$

Jahr.		Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
50	18	263	294	322	353	383	414	444	475	506	536	567	597
51		628	659	687	718	748	779	809	840	871	901	932	962
52		993	$\bar{0}24$	$\bar{0}53$	$\bar{0}84$	$\bar{1}14$	$\bar{1}45$	$\bar{1}75$	$\bar{2}06$	$\bar{2}37$	$\bar{2}67$	$\bar{2}98$	$\bar{3}28$
53	19	359	390	418	449	479	510	540	571	602	632	663	693
54		724	755	783	814	844	875	905	936	967	997	$\bar{0}28$	$\bar{0}58$
55	20	089	120	148	179	209	240	270	301	332	362	393	423
56		454	485	514	545	575	606	636	667	698	728	759	789
57		820	851	879	910	940	971	$\bar{0}01$	$\bar{0}32$	$\bar{0}63$	$\bar{0}93$	$\bar{1}24$	$\bar{1}54$
58	21	185	216	244	275	305	336	366	397	428	458	489	519
59		550	581	609	640	670	701	731	762	793	823	854	884
60		915	946	975	$\bar{0}06$	$\bar{0}36$	$\bar{0}67$	$\bar{0}97$	$\bar{1}28$	$\bar{1}59$	$\bar{1}89$	$\bar{2}20$	$\bar{2}50$
61	22	281	312	340	371	401	432	462	493	524	554	585	615
62		646	677	705	736	766	797	827	858	889	919	950	980
63	23	011	042	070	101	131	162	192	223	254	284	315	345
64		376	407	436	467	497	528	558	589	620	650	681	711
65		742	773	801	832	862	893	923	954	985	$\bar{0}15$	$\bar{0}46$	$\bar{0}76$
66	24	107	138	166	197	227	258	288	319	350	380	411	441
67		472	503	531	562	592	623	653	684	715	745	776	806
68		837	868	897	928	958	989	$\bar{0}19$	$\bar{0}50$	$\bar{0}81$	$\bar{1}11$	$\bar{1}42$	$\bar{1}72$
69	25	203	234	262	293	323	354	384	415	446	476	507	537
70		568	599	627	658	688	719	749	780	811	841	872	902
71		933	964	992	$\bar{0}23$	$\bar{0}53$	$\bar{0}84$	$\bar{1}14$	$\bar{1}45$	$\bar{1}76$	$\bar{2}06$	$\bar{2}37$	$\bar{2}67$
72	26	298	329	358	389	419	450	480	511	542	572	603	633
73		664	695	723	754	784	815	845	876	907	937	968	998
74	27	029	060	088	119	149	180	210	241	272	302	333	363
75		394	425	453	484	514	545	575	606	637	667	698	728
76		759	790	819	850	880	911	941	972	$\bar{0}03$	$\bar{0}33$	$\bar{0}64$	$\bar{0}94$
77	28	125	156	184	215	245	276	306	337	368	398	429	459
78		490	521	549	580	610	641	671	702	733	763	794	824
79		855	886	914	945	975	$\bar{0}06$	$\bar{0}36$	$\bar{0}67$	$\bar{0}98$	$\bar{1}28$	$\bar{1}59$	$\bar{1}89$
80	29	220	251	280	311	341	372	402	433	464	494	525	555
81		586	617	645	676	706	737	767	798	829	859	890	920
82		951	982	$\bar{0}10$	$\bar{0}41$	$\bar{0}71$	$\bar{1}02$	$\bar{1}32$	$\bar{1}63$	$\bar{1}94$	$\bar{2}24$	$\bar{2}55$	$\bar{2}85$
83	30	316	347	375	406	436	467	497	528	559	589	620	650
84		681	712	741	772	802	833	863	894	925	955	986	$\bar{0}16$
85	31	047	078	106	137	167	198	228	259	290	320	351	381
86		412	443	471	502	532	563	593	624	655	685	716	746
87		777	808	836	867	897	928	958	989	$\bar{0}20$	$\bar{0}50$	$\bar{0}81$	$\bar{1}11$
88	32	142	173	202	233	263	294	324	355	386	416	447	477
89		508	539	567	598	628	659	689	720	751	781	812	842
90		873	904	932	963	993	$\bar{0}24$	$\bar{0}54$	$\bar{0}85$	$\bar{1}16$	$\bar{1}46$	$\bar{1}77$	$\bar{2}07$
91	33	238	269	297	328	358	389	419	450	481	511	542	572
92		603	634	663	694	724	755	785	816	847	877	908	938
93		969	$\bar{0}00$	$\bar{0}28$	$\bar{0}59$	$\bar{0}89$	$\bar{1}20$	$\bar{1}50$	$\bar{1}81$	$\bar{2}12$	$\bar{2}42$	$\bar{2}73$	$\bar{3}03$
94	34	334	365	393	424	454	485	515	546	577	607	638	668
95		699	730	758	789	819	850	880	911	942	972	$\bar{0}03$	$\bar{0}33$
96	35	064	095	124	155	185	216	246	277	308	338	369	399
97		430	461	489	520	550	581	611	642	673	703	734	764
98		795	826	854	885	915	946	976	$\bar{0}07$	$\bar{0}38$	$\bar{0}68$	$\bar{0}99$	$\bar{1}29$
99	36	160	191	219	250	280	311	341	372	403	433	464	494

Tageszahl der Jahrhunderte + Tageszahl für Jahr und Monat + Monatsdatum = Tageszahl der julianischen Periode für den Tagesanfang.
Für negative Jahrzahlen hat man vom nach 1 höheren negativen Jahrhunderte auszugehen, also z. B. — 86 = — 100 + 14

Tafel XIX.

Julianischer Kalender v. Chr.		Julianischer Kalender n. Chr.		Tage	h m s	Tage	h m s	Tage	m s	Tage	m s	Tage	s	Tage	s
Jahrh.		Jahrh.		0.		0.		0.00		0.00		0.0000		0.0000	
		0	1721 057	00	0h 0m 0s	50	12h 0m 0s	00	0m 0.00	50	7m 12.00	00	0.0000	50	4.3200
		100	1757 582	01	0h 14m 24s	51	12h 14m 24s	01	0m 8.64	51	7m 20.64	01	0.0864	51	4.4064
		200	1794 107	02	0h 28m 48s	52	12h 28m 48s	02	0m 17.28	52	7m 29.28	02	0.1728	52	4.4928
— 4700	4 382	300	1830 632	03	0h 43m 12s	53	12h 43m 12s	03	0m 25.92	53	7m 37.92	03	0.2592	53	4.5792
— 4600	40 907	400	1867 157	04	0h 57m 36s	54	12h 57m 36s	04	0m 34.56	54	7m 46.56	04	0.3456	54	4.6656
— 4500	77 432	500	1903 682	05	1h 12m 0s	55	13h 12m 0s	05	0m 43.20	55	7m 55.20	05	0.4320	55	4.7520
— 4400	113 957	600	1940 207	06	1h 26m 24s	56	13h 26m 24s	06	0m 51.84	56	8m 3.84	06	0.5184	56	4.8384
— 4300	150 482	700	1976 732	07	1h 40m 48s	57	13h 40m 48s	07	1m 0.48	57	8m 12.48	07	0.6048	57	4.9248
— 4200	187 007	800	2013 257	08	1h 55m 12s	58	13h 55m 12s	08	1m 9.12	58	8m 21.12	08	0.6912	58	5.0112
— 4100	223 532	900	2049 782	09	2h 9m 36s	59	14h 9m 36s	09	1m 17.76	59	8m 29.76	09	0.7776	59	5.0976
— 4000	260 057	1000	2086 307	10	2h 24m 0s	60	14h 24m 0s	10	1m 26.40	60	8m 38.40	10	0.8640	60	5.1840
— 3900	296 582	1100	2122 832	11	2h 38m 24s	61	14h 38m 24s	11	1m 35.04	61	8m 47.04	11	0.9504	61	5.2704
— 3800	333 107	1200	2159 357	12	2h 52m 48s	62	14h 52m 48s	12	1m 43.68	62	8m 55.68	12	1.0368	62	5.3568
— 3700	369 632	1300	2195 882	13	3h 7m 12s	63	15h 7m 12s	13	1m 52.32	63	9m 4.32	13	1.1232	63	5.4432
— 3600	406 157	1400	2232 407	14	3h 21m 36s	64	15h 21m 36s	14	2m 0.96	64	9m 12.96	14	1.2096	64	5.5296
— 3500	442 682	1500	2268 932	15	3h 36m 0s	65	15h 36m 0s	15	2m 9.60	65	9m 21.60	15	1.2960	65	5.6160
— 3400	479 207	1600	2305 457	16	3h 50m 24s	66	15h 50m 24s	16	2m 18.24	66	9m 30.24	16	1.3824	66	5.7024
— 3300	515 732	1700	2341 982	17	4h 4m 48s	67	16h 4m 48s	17	2m 26.88	67	9m 38.88	17	1.4688	67	5.7888
— 3200	552 257	1800	2378 507	18	4h 19m 12s	68	16h 19m 12s	18	2m 35.52	68	9m 47.52	18	1.5552	68	5.8752
— 3100	588 782	1900	2415 032	19	4h 33m 36s	69	16h 33m 36s	19	2m 44.16	69	9m 56.16	19	1.6416	69	5.9616
— 3000	625 307	2000	2451 557	20	4h 48m 0s	70	16h 48m 0s	20	2m 52.80	70	10m 4.80	20	1.7280	70	6.0480
— 2900	661 832	2100	2488 082	21	5h 2m 24s	71	17h 2m 24s	21	3m 1.44	71	10m 13.44	21	1.8144	71	6.1344
— 2800	698 357	2200	2524 607	22	5h 16m 48s	72	17h 16m 48s	22	3m 10.08	72	10m 22.08	22	1.9008	72	6.2208
— 2700	734 882	2300	2561 132	23	5h 31m 12s	73	17h 31m 12s	23	3m 18.72	73	10m 30.72	23	1.9872	73	6.3072
— 2600	771 407	2400	2597 657	24	5h 45m 36s	74	17h 45m 36s	24	3m 27.36	74	10m 39.36	24	2.0736	74	6.3936
— 2500	807 932	2500	2634 182	25	6h 0m 0s	75	18h 0m 0s	25	3m 36.00	75	10m 48.00	25	2.1600	75	6.4800
— 2400	844 457	2600	2670 707	26	6h 14m 24s	76	18h 14m 24s	26	3m 44.64	76	10m 56.64	26	2.2464	76	6.5664
— 2300	880 982	2700	2707 232	27	6h 28m 48s	77	18h 28m 48s	27	3m 53.28	77	11m 5.28	27	2.3328	77	6.6528
— 2200	917 507	2800	2743 757	28	6h 43m 12s	78	18h 43m 12s	28	4m 1.92	78	11m 13.92	28	2.4192	78	6.7392
— 2100	954 032	2900	2780 282	29	6h 57m 36s	79	18h 57m 36s	29	4m 10.56	79	11m 22.56	29	2.5056	79	6.8256
— 2000	990 557	Gregorianischer		30	7h 12m 0s	80	19h 12m 0s	30	4m 19.20	80	11m 31.20	30	2.5920	80	6.9120
— 1900	1027 082	Kalender		31	7h 26m 24s	81	19h 26m 24s	31	4m 27.84	81	11m 39.84	31	2.6784	81	6.9984
— 1800	1063 607	n. Chr.		32	7h 40m 48s	82	19h 40m 48s	32	4m 36.48	82	11m 48.48	32	2.7648	82	7.0848
— 1700	1100 132			33	7h 55m 12s	83	19h 55m 12s	33	4m 45.12	83	11m 57.12	33	2.8512	83	7.1712
— 1600	1136 657	Jahrh.		34	8h 9m 36s	84	20h 9m 36s	34	4m 53.76	84	12m 5.76	34	2.9376	84	7.2576
— 1500	1173 182	¦1500¦	2268 922	35	8h 24m 0s	85	20h 24m 0s	35	5m 2.40	85	12m 14.40	35	3.0240	85	7.3440
— 1400	1209 707	1600	2305 447	36	8h 38m 24s	86	20h 38m 24s	36	5m 11.04	86	12m 23.04	36	3.1104	86	7.4304
— 1300	1246 232	¦1700¦	2341 971	37	8h 52m 48s	87	20h 52m 48s	37	5m 19.68	87	12m 31.68	37	3.1968	87	7.5168
— 1200	1282 757	¦1800¦	2378 495	38	9h 7m 12s	88	21h 7m 12s	38	5m 28.32	88	12m 40.32	38	3.2832	88	7.6032
— 1100	1319 282	¦1900¦	2415 019	39	9h 21m 36s	89	21h 21m 36s	39	5m 36.96	89	12m 48.96	39	3.3696	89	7.6896
— 1000	1355 807	2000	2451 544	40	9h 36m 0s	90	21h 36m 0s	40	5m 45.60	90	12m 57.60	40	3.4560	90	7.7760
— 900	1392 332	¦2100¦	2488 068	41	9h 50m 24s	91	21h 50m 24s	41	5m 54.24	91	13m 6.24	41	3.5424	91	7.8624
— 800	1428 857	¦2200¦	2524 592	42	10h 4m 48s	92	22h 4m 48s	42	6m 2.88	92	13m 14.88	42	3.6288	92	7.9488
— 700	1465 382	¦2300¦	2561 116	43	10h 19m 12s	93	22h 19m 12s	43	6m 11.52	93	13m 23.52	43	3.7152	93	8.0352
— 600	1501 907	2400	2597 641	44	10h 33m 36s	94	22h 33m 36s	44	6m 20.16	94	13m 32.16	44	3.8016	94	8.1216
— 500	1538 432	¦2500¦	2634 165	45	10h 48m 0s	95	22h 48m 0s	45	6m 28.80	95	13m 40.80	45	3.8880	95	8.2080
— 400	1574 957	¦2600¦	2670 689	46	11h 2m 24s	96	23h 2m 24s	46	6m 37.44	96	13m 49.44	46	3.9744	96	8.2944
— 300	1611 482	¦2700¦	2707 213	47	11h 16m 48s	97	23h 16m 48s	47	6m 46.08	97	13m 58.08	47	4.0608	97	8.3808
— 200	1648 007	2800	2743 738	48	11h 31m 12s	98	23h 31m 12s	48	6m 54.72	98	14m 6.72	48	4.1472	98	8.4672
— 100	1684 532	¦2900¦	2780 262	49	11h 45m 36s	99	23h 45m 36s	49	7m 3.36	99	14m 15.36	49	4.2336	99	8.5536

Die in ¦....¦ eingeschlossenen Jahrhunderte des gregorianischen Kalenders dürfen nicht mit der Zeile 00 der Jahrestafel, sondern nur mit der über dem Horizontalstriche stehenden Zeile 00 ¦g K¦ verbunden werden.

Form der Tageszahl $7n$ = ☾, $7n+1$ = ♂, $7n+2$ = ☿, $7n+3$ = ♃, $7n+4$ = ♀, $7n+5$ = ♄, $7n+6$ = ☉.

Das Berliner Jahrbuch gibt die heliocentrischen Coordinaten für die grossen Planeten für die Tage von der Form $40n + 24$.

Das Berliner Jahrbuch gibt die Jahresephemeriden der kleinen Planeten für die Tage von der Form $20n + 4$.

Berichtigungen.

Seite 4 Zeile 4 von oben sind die Aufschriften der 2. und 3. Columne zu vertauschen

» 5 Formel 3 statt $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a+i+1)w$ lies: $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{2d+1}(a+i+1)w$

» 5 » 4 » $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a+i+\frac{1}{2})w$ » $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{2d}(a+i+\frac{1}{2})w$

» 11 Zeile 4 von oben statt $1^2\ 3^2, \dots$ lies $1^2, 3^2, \dots$

» 18 » 2 » unten » $C^3\{1^1 \dots 7^2\}$ » $C^3\{1^2 \dots 7^2\}$

» 19 in $N_2^{(10)}(n)$ statt $9.10n^2$ lies: $9.10n^8$

» 20 » $M_2^{(9)}(m)$ » $6.7m^2$ » $6.7m^4$

» 38 Zeile 11 von oben statt »von der oberen« lies: »von jenem der oberen«

» 53 » 7 » unten » $f^{II}a$ lies: $f^{II}(a)$

» 63 » 8 » » » »gebildete Summationsreihe« lies »gebildeten Summationsreihen«

» 89 » 15 » oben am Schlusse statt Δp lies $\Delta\sqrt{p})$

» 89 » 7 » unten statt $\left(\sqrt{p_0}+\frac{\Delta\sqrt{p}}{k}\right)$ lies $\left(\sqrt{p_0}+\frac{\Delta}{k}\sqrt{p}\right)$

» 99 » 18 » oben statt sln 1″ lies sin 1″

» 100 » 12 » » » vortesllt lies: vorstellt

» 100 2. Zeile in Formel I statt $-\sin\ \cos i_0$ lies $-\sin\Omega_0\cos i_0$

» 105 Zeile 4 von oben statt 6.8 lies: 6″8

» 108 » 13 » » » $\sin\vartheta$ lies $\varrho\sin\vartheta$

» 108 Formel IV ist durchaus statt ω der Buchstabe w zu setzen

» 112 Zeile 2 von oben Columne ^{I}f statt -257.64 lies -257.61

» 112 » 4 » » » ^{II}f » $+10.78$ » $+10.87$

» 133 » 15 » » statt $s-\frac{1}{2}(\Omega+\Omega_0)$ lies $S-\frac{1}{2}(\Omega+\Omega_0)$

» 146 » 3 » unten im 3. Gliede links vom = statt $\frac{k^2}{r^2}$ lies $\frac{k^2}{(r)^2}$

» 148 in der 3. Gleichung in IX statt $\frac{d^2z}{dt}$ lies $\frac{d^2z}{dt^2}$

» 156 Zeile 14 von oben statt W lies: W_1

» 170 4. Zeile der Formel II) statt r lies: r

» 181 Zeile 5 von oben fehlt = nach $1+r$

» 209 » 4 » » statt Formel lies Formeln

» 235 » 8 » unten » $3kw$ lies $\log 3kw$

» 256 » 2 » oben » »die Folge« lies: »in Folge«

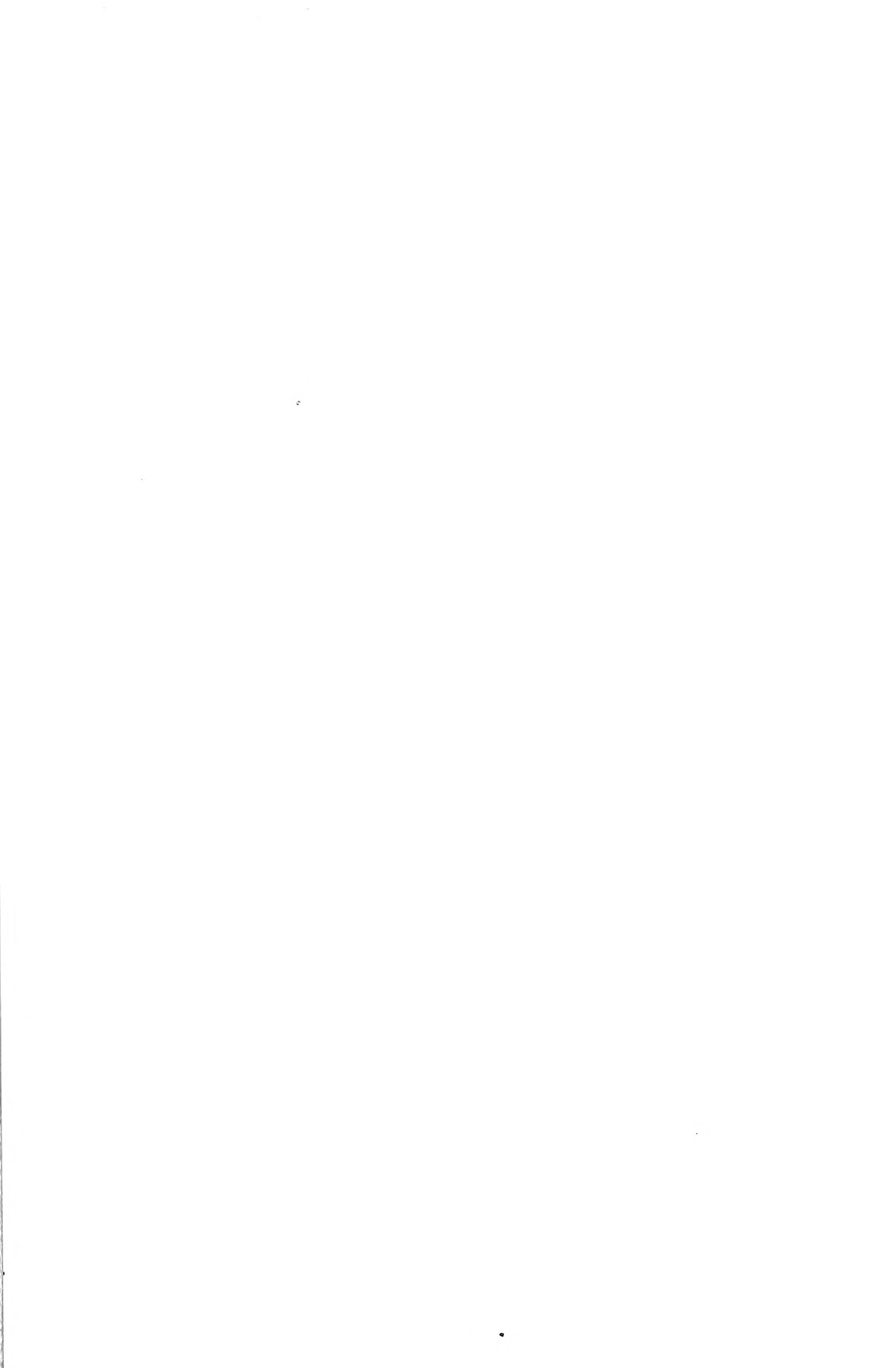
» 278 » 10 » » fehlen die Schlussworte: »ersetzt und $F'-\Delta$ mit $-F'(\Delta$ vertauscht, was für die folgende Schlussfolgerung erlaubt ist.«

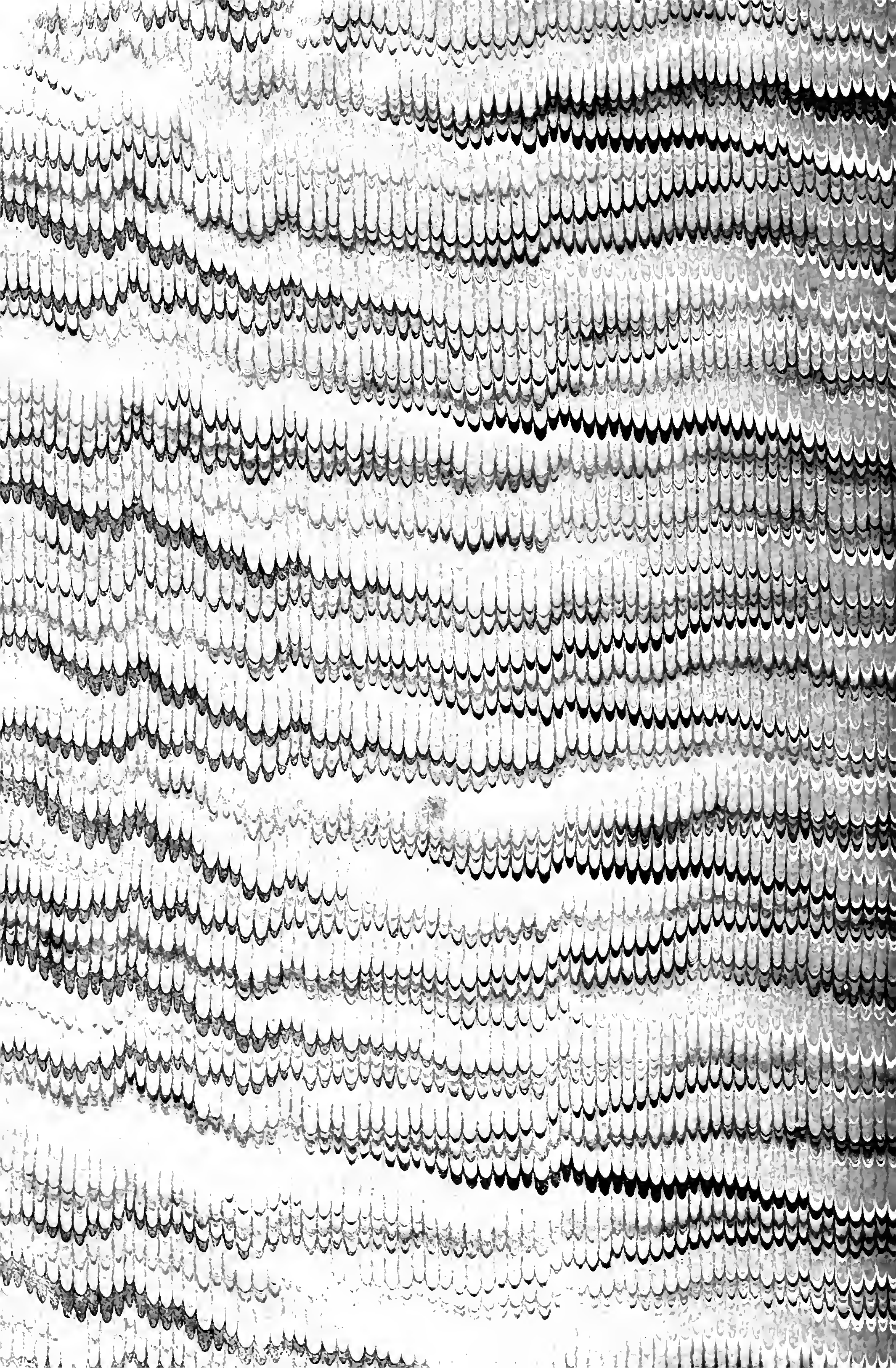
» 283 » 17 » unten statt $\frac{y}{l}$ lies $\frac{l}{y}$

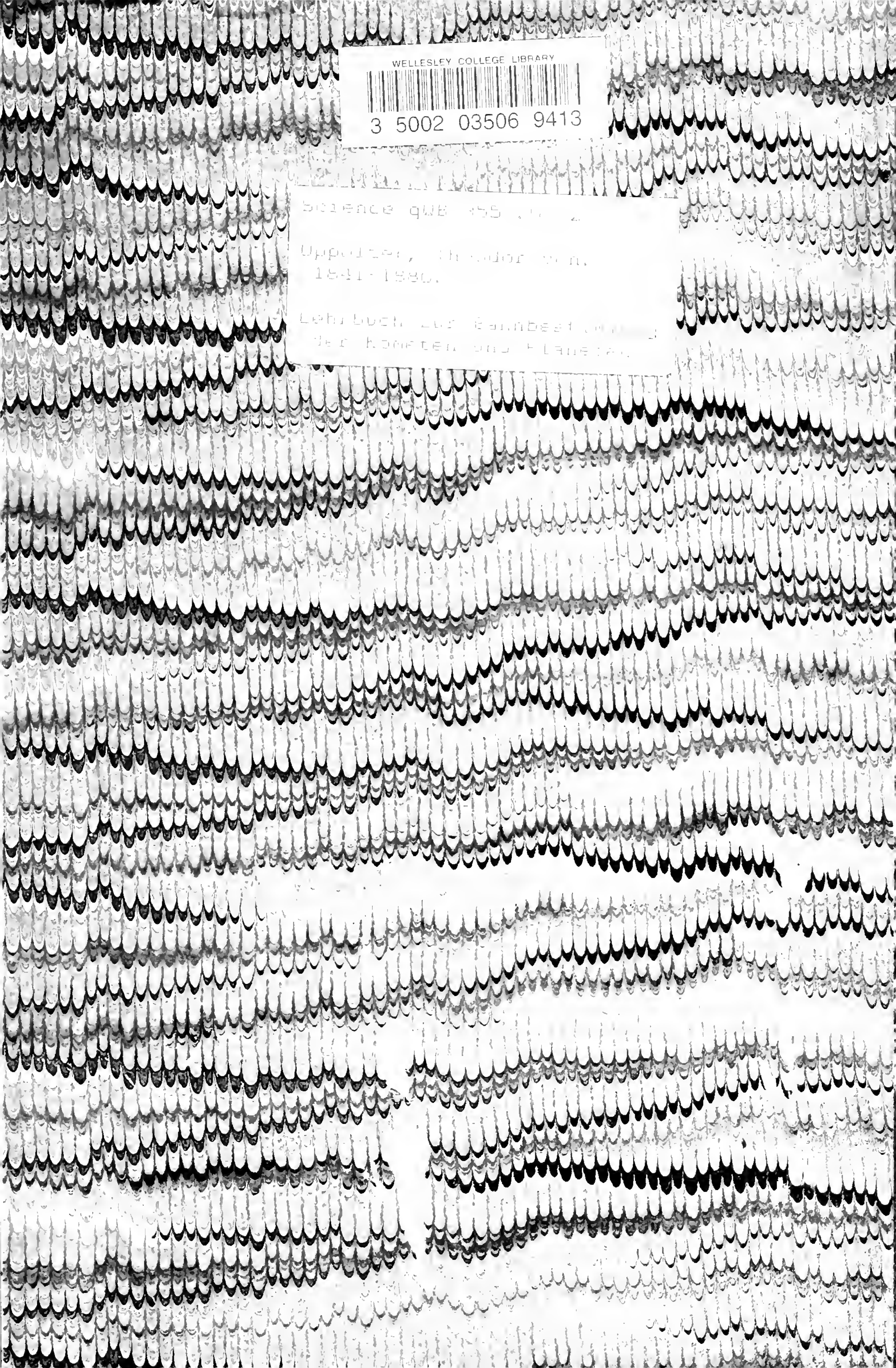
» 293 Formel 3 im Nenner statt $1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\sqrt{\frac{k}{2}}$ lies $1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\sqrt{\frac{k}{2}}$ nicht in allen Abzügen.

Seite 303 Zeile 10 von unten statt nnd lies: und
" 310 " 10 " oben " das " dass
" 332 " 16 " " " nan " man
" 336 " 8 " " fallt am Schlusse »er-« weg
" 344 " 14 " unten statt untersten lies: unteren
" 344 " 10 " " " Verticalcolume lies: Verticalcolumne
" 348 " 15 " " " $-\frac{c_{f2}}{c_{c2}}\,{}_2$ lies: $-\frac{c_{f2}}{c_{c2}} B_2$
" 353 im Titel statt § 3 lies: § 5
" 388 Zeile 4 und 5 von oben statt vorsetzen, lies: voraussetzen
" 392 " 3 von unten statt $\frac{\cos\frac{1}{2}(\pi-\pi_0)}{\cos\frac{1}{2}(\pi-\pi_0)}\partial\Psi$ lies: $\frac{\cos\frac{1}{2}(\pi+\pi_0)}{\cos\frac{1}{2}(\pi-\pi_0)}\partial\Psi$
" 415 " 6 " " " »noch erwähnen« lies »noch zu erwähnen«
" 432 Formel 16 statt $\frac{\partial A^3}{d\xi_0}$ lies $\frac{\partial A_3}{\partial\xi_0}$
" 432 " 16 ist in $\frac{\partial A_4}{\partial x_0}$ rechter Hand ξ_0 mit x_0 zu vertauschen
" 447 Zeile 1 von unten statt $\partial b . \partial t_0$ lies $\partial a . \partial t_0$
" 454 " 1 " oben " $6_{,,}1960\,\partial_0$ lies $6_{,,}1960\,\partial\xi_0$
" 460 " 7 " " " Systeme, lies: , Systeme
" 468 " 17 " " " -0.25 und 0.25 lies: -0.24 und 0.24
" 470 " 11 " unten " 9.9999446 lies: 8.9999446
" 471 " 2 " " " Zeiehen lies: Zeichen
" 483 Formel C erste Zeile statt $\left(\frac{d\lambda_1}{\partial y}\right)$ lies $\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}\right)$
" 486 Zeile 8 von oben statt Δy lies Δy
" 500 " 7 " " in den beiden Nennern statt dy lies ∂y.








WELLESLEY COLLEGE LIBRARY
3 5002 03506 9413

